

تحلیل ارتعاشات نانو ورق گرافنی تک لایه دایروی تحت اثر اختلاف دما در محیط حرارتی

 سید محمد میری¹، حمیدرضا جشنانی^{2*}

 1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، مهندسین مشاور سازه صنعت ثمر، تهران
 2- مربی، مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران
 * تهران، صندوق پستی 1384661331، jashnani@ssau.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>با توجه به کاربرد وسیع ورق‌ها مخصوصاً ورق‌های دایروی در صنعت و همچنین بهره‌گیری گسترده از تکنولوژی نانو جهت پشت سر گذاشتن مرزها و محدودیت‌های هریک از شاخه‌های علوم فنی و مهندسی به‌ویژه علم مکانیک، علم مواد... اهمیت مبحث ارتعاشات (و کماتش) ناشی از اختلاف دما و یا بارهای حرارتی در این مقاله توسعه داده شده و تدوین روابط مربوط به ارتعاشات نانو ورق‌های دایروی گرافنی تک لایه در محیط حرارتی مورد مطالعه بحث و بررسی قرار گرفته است. روابط تأثیرات اختلاف دما بر ارتعاشات آزاد ورق گرافنی دایروی تک لایه با در نظر گرفتن یک تخلخل که به صورت دایروی فرض شده و می‌تواند اندازه و محل دلخواه داشته باشد، از طریق بهره‌گیری از تئوری غیرموضعی (غیرمتمرکز یا غیرمحلی) ارینگن پرداخته شده است. جهت حل معادلات به صورت تحلیلی، روش جداسازی متغیرها، ترکیب تئوری انتقالی توابع بسل به کار گرفته شده است. نتایج حاصل از اعمال تغییراتی در انواع پارامترهای هندسی و فیزیکی و شرایط تکیه‌گاهی و مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی ورق تک لایه گرافنی دایروی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در مواردی هم پدیده کماتش حرارتی نیز مشاهده شده است.</p>	<p>مقاله پژوهشی کامل دریافت: 21 بهمن 1396 پذیرش: 25 فروردین 1397 ارائه در سایت: 21 اردیبهشت 1397 کلیدواژگان: ورق گرافنی الاستیسیته غیرمحلی اثرات حرارتی تئوری انتقالی ترکیبی تخلخل ناهم‌رکز</p>

Vibration analysis of circular single-layer graphene sheet under temperature changes in thermal environment

 Seyyed Mohammad Miri¹, Hamid Reza Jashnani^{2*}

 1- Mechanical Engineering, Saze San'at Samar Consultant Engineering, Tehran, Iran.
 2- Department of Air Traffic Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran.
 * P.O.B. 1384661331 Tehran, Iran, jashnani@ssau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

 Original Research Paper
 Received 10 February 2018
 Accepted 14 April 2018
 Available Online 11 May 2018

 Keywords:
 Graphene sheet
 nonlocal elasticity
 thermal effects
 translational addition theorem
 eccentric perforation

ABSTRACT

Considering broad applications of sheets, specially circular sheets in the industry and the widespread use of nanotechnology to pass from limitations of each branches of science, particularly mechanics of materials and also importance of vibration (or buckling) due to temperature changes or thermal loads, in this thesis, development of relative relations of circular single layer nanographene sheets' vibrations due to temperature changes, were studied. Nonlocal thin plate theory of Eringen is employed to investigate effects of thermal environment on the behavior of circular single-layer graphene sheet freely vibration containing a circular perforation of arbitrary size and location. In order to analytically solve the equation of motion, the separation of variables method in conjunction with the translational addition theorem for Bessel functions is used. The results of changing various geometric and physical parameters and different kinds of restrains and boundary conditions on the natural frequency of a single layer circular graphene sheet were examined and discussed. In some cases, thermal buckling phenomenon was observed.

الکترومکانیکی^۲، دارند. همچنین به دلیل حساسیت بالای ورق‌های تک لایه گرافنی به بارها یا محیط‌های حرارتی، می‌توان از آن‌ها به عنوان نانو سوئیچ‌های حرارتی در مدارهای الکتریکی استفاده کرد که نیازمند دقت بسیار بالا در قطع و وصل یا سوئیچ جریان در مقدار خاص تعیین شده است. همچنین از کاربردهای نظامی پیش‌بینی‌شده برای گرافن می‌توان به استفاده آن‌ها به عنوان سپر محافظ در پره‌های توربین‌های هواپیماها و جنگنده‌ها و

1- مقدمه

با تکیه بر خواص ورق‌های تک لایه گرافنی^۱ در مقایسه با مواد به‌کاربرده شده در انواع سازه‌های مرسوم بسیاری از کاربردهای بالقوه را برای سازه‌هایی نمایان می‌کند که از این مواد ساخته شده‌اند. به دلیل داشتن فرکانس طبیعی بسیار بالای آن‌ها، در محدوده بالاتر از گیگاهرتز کاربردهای وسیعی در نانو ارتعاشگرهای مکانیکی به عنوان یکی از مهمترین سیستم‌های نانو

² Nano-electro- mechanical systems (NEMS)

¹ Single Layer Graphene Sheets (SLGSs)

خمش ورق‌های تک لایه گرافنی تحت میدان دمایی مانند بار مکانیکی خارجی را نشان داد. او معادلات دیفرانسیل حاکم بر پاسخ ترمومکانیکی بر پایه معادلات الاستیسیته غیرموضعی ارینگن با ترکیب تئوری دومتغیره ورق را به دست آورد. وانگ و هو [10] ارتعاشات حرارتی ورق‌های گرافنی تک لایه مستطیلی را با استفاده از مدل ورق مستطیلی الاستیک غیرموضعی با در نظر گرفتن اثرات کوانتومی مورد بحث و بررسی قرار دادند. آسمی و فرچپور [11] خواص ارتعاشات متقارن ورق‌های تک لایه گرافنی دایروی بر بستر ماتریکس پلیمری تحت بار ترمومکانیکی را تحلیل کردند. آن‌ها هر دو پارامتر اثرات سطحی و غیرموضعی را مدنظر قرار دادند. فدایی و ایلخانی [12] مسأله را با استفاده از فرض ورق حلقوی نازک و تئوری غیرموضعی مدل کرده و معادلات حرکت را برای شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی حل کردند.

براساس بررسی‌های انجام شده بر مطالعات یادشده و دیگر مقالات اگرچه تلاش‌های زیادی توسط محققین در راستای اعمال بارهای حرارتی بر رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های تک لایه گرافنی دایروی و مستطیلی صورت پذیرفته، تاکنون هیچ مطالعه‌ای در مورد روش تحلیلی برای حل ارتعاشات حرارتی ورق تک لایه گرافنی دایروی با یک سوراخ ناهم‌مرکز انجام نشده است. این مقاله اولین تلاش برای حل مدل دقیق ارتعاشات ورق تک لایه گرافنی دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت بار حرارتی است.

این مقاله در رابطه با روشی تحلیلی برای آنالیز اثرات بار حرارتی و سوراخ ناهم‌مرکز بر فرکانس‌های طبیعی یک ورق تک لایه گرافنی دایروی است. محل قرارگیری سوراخ با توجه به مرکز ورق می‌تواند متفاوت باشد. تئوری غیرموضعی ارینگن جهت استخراج معادله حرکت استفاده شده است. فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش جداسازی متغیرها به همراه تئوری انتقالی ترکیبی⁶ به دست آمده‌اند. دقت و ثبات این روش به وسیله مراجع دیگر اثبات شده است. از این تحقیق این برمی‌آید که بسته به تغییر دما و ابعاد و مکان سوراخ، سختی ورق تک لایه گرافنی ممکن است کاهش یا افزایش یابد که منجر به کاهش یا افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

2- فرمول‌بندی ریاضی

2-1- مدل الاستیسیته غیرموضعی برای ارتعاشات حرارتی ورق تک لایه گرافنی

مطابق شکل 1 چیدمان اتم‌های کربن که با پیوندهای کووالانسی⁷ به یکدیگر متصل شده‌اند، یک ورق گرافنی دایروی را تشکیل داده‌اند. با فرض حذف تعدادی از اتم‌های کربن در مکانی دلخواه، یک ورق گرافنی دایروی با یک تخلخل که آن هم به صورت دایروی فرض می‌شود، مانند شکل 1، به دست می‌آید. پارامترهای R_1, R_2, h, ρ و E به ترتیب نمایانگر شعاع ورق، شعاع سوراخ، ضخامت ورق، چگالی و مدول الاستیسیته ورق گرافنی است. مطابق شکل 2 فاصله بین مرکز ورق و مرکز سوراخ به عنوان پارامتر ناهم‌مرزی یا ε نشان داده می‌شود. جهت بنای فرمول‌بندی ریاضی و فرآیند تجزیه و تحلیل این مسأله باید از دو سیستم مختصاتی قطبی که یکی از آن‌ها منطبق بر مرکز خود ورق (r_1, θ_1) و دیگری منطبق بر مرکز سوراخ (r_2, θ_2) باشد، مطابق شکل 2 بهره برد.

براساس تئوری غیرموضعی که توسط ارینگن [13] بیان شده است رفتار یک جسم صلب مطابق با قانون هوک⁸ به صورت رابطه دیفرانسیلی ساختاری

همین‌طور جلیقه‌های ضدگلوله و بسیاری موارد دیگر اشاره کرد. به تازگی نیز محققان در زمینه بیومکانیک دریافتند که نانو فیلترهای حلقوی می‌توانند به عنوان تله‌ای برای به دام انداختن و نابودی سلول‌های سرطانی مورد استفاده قرار گیرند. از طرفی خصوصیات حرارتی استثنایی گرافن جهت ارتقا استحکام و رسانایی حرارتی نانو سازه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. هندسه دوبعدی موادی که پایه گرافنی دارند، مقاومت حرارتی کمتر و در نتیجه هدایت و پایداری حرارتی بیشتری را در نانو سازه‌ها از خود نشان می‌دهند [1]؛ بنابراین فهم اثرات تغییرات دما بر فرکانس‌های طبیعی ورق‌های تک لایه گرافنی مسأله مهمی قلمداد می‌شود. در حین فرآیند تولید یک نانو سازه شامل ورق گرافنی ممکن است یک بین به عنوان یک قید در ورق‌های تک لایه گرافنی در نظر گرفته شود. در این فرآیند یک تخلخل یا یک برش با ابعاد مختلف ممکن است به منظور اهدافی مانند کنترل ارتعاشات، شناسایی پارامترهای ساختاری و تشخیص آسیب ایجاد شود. بعضی از این تخلخل‌ها را می‌توان به عنوان یک سوراخ دایروی با ابعاد و مکان دلخواه در نظر گرفت. تحلیل رفتار ورق گرافنی دایروی با یک سوراخ دایروی ناهم‌مرکز امری مهم محسوب می‌شود.

مطالعات بسیاری در حیطه ارتعاشات آزاد ورق‌های گرافنی صورت پذیرفته است. آقابابایی و ردی [2] تئوری تغییر شکل برشی درجه سوم ورق‌ها را با استفاده از تئوری خطی غیرموضعی الاستیسیته ارینگن¹ که قابلیت به‌کارگیری هم‌زمان اثرات کوچک‌مقیاسی² و متغیرهای درجه دوم کرنش برشی و در نتیجه تنش برشی را در ضخامت ورق دارا بود، بازنویسی کنند. مورمو و پرادهان [3] تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن را جهت مطالعه پاسخ ارتعاشات ورق‌های تک لایه گرافنی پیاده‌سازی کردند. آن‌ها اثر بستر الاستیک را بر فرکانس‌های پایه ورق تک لایه گرافنی مورد بحث و بررسی قرار دادند. نتایج عددی آن‌ها حاکی از وابستگی شدید فرکانس‌های پایه به ضرایب کوچک‌مقیاسی داشت. مطالعاتی نیز بر ارتعاشات آزاد ورق‌های گرافنی در محیط‌های حرارتی صورت پذیرفته است. محمدی و همکاران [4] ارتعاشات آزاد ورق‌های گرافنی دایروی و حلقوی را تحت بار شعاعی فشاری و تغییر دما مورد مطالعه قرار دادند. در عین حال ورق گرافن بر بستر الاستیک قرار داده شد و تئوری غیرموضعی برای مدل کردن مسأله مورد استفاده قرار گرفت. کومار و همکاران [5] تحلیل ارتعاشات حرارتی ورق تک لایه گرافنی که بر بستر الاستیک پلیمری قرار گرفته را با استفاده از تئوری ورق‌ها و مکانیک پیوسته غیرموضعی برای اثرات کوچک‌مقیاسی ارائه داده‌اند. رفتار ارتعاشی غیرخطی برای یک ورق تک لایه گرافنی مستطیلی با قید تکیه‌گاهی ساده³ در محیط‌های حرارتی توسط شن و همکاران [6] ارائه شده است. در این مطالعه اثرات حرارتی هم در نظر گرفته شده و خواص مواد نیز وابسته به دما فرض شده و از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی حاصل شده است. فاضل‌زاده و پوراسماعیلی [7] ارتعاشات ترمومکانیکی نانو ورق‌های ارتوتروپیک دوتایی بر بستر الاستیکی را تحلیل کردند، همچنین مباحث خمش و کمانش ورق‌های گرافنی تحت بار حرارتی نیز در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. زنکور و صبحی [8] کمانش حرارتی نانو ورق‌های قرارگرفته بر بستر الاستیک وینکلر-پسترناک⁴ را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد مطالعه قرار دادند. صبحی [9] با به‌کارگیری مدل راه‌حل لوی⁵ پاسخ

¹ Nonlocal elasticity theory of Eringen

² Small scale coefficients

³ Simply support

⁴ Winkler-Pasternak elastic medium

⁵ Levy Solution

⁶ Translational addition theorem

⁷ Covalent bonds

⁸ Hookean solid

جابه‌جایی روابط (3) در نظر گرفته می‌شود.

$$u_r(r, \theta, z) = -z \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \quad (3-a)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = -z \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (3-b)$$

$$u_z(r, \theta, z) = w(r, \theta) \quad (3-c)$$

با استفاده از روابط خطی کرنش- جابه‌جایی تنها کرنش‌های غیرصفر مطابق روابط (4) است.

$$\varepsilon_{rr} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (4-a)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (4-b)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (4-c)$$

مؤلفه‌های نیرو و گشتاور در مختصات قطبی مطابق روابط (5,6) است.

$$N_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}^{nl} dz \quad (5-a)$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} dz \quad (5-b)$$

$$N_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta}^{nl} dz \quad (5-c)$$

$$M_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}^{nl} z dz \quad (6-a)$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dz \quad (6-b)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta}^{nl} z dz \quad (6-c)$$

روابط (8,7) با جای‌گذاری روابط (4) در رابطه (2) و انتگرال‌گیری در بازه ضخامت ورق و با به‌کارگیری روابط (6,5) حاصل می‌شوند.

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) N_{rr} = -Q\alpha(1 + \nu) \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(r, \theta, z) dz \quad (7-a)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) N_{\theta\theta} = -Q\alpha(1 + \nu) \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(r, \theta, z) dz \quad (7-b)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) N_{r\theta} = 0 \quad (7-c)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_{rr} = -\frac{Q}{12} h^3 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - Q\alpha(1 + \nu) \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(r, \theta, z) dz \quad (8-a)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_{\theta\theta} = -\frac{Q}{12} h^3 \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - Q\alpha(1 + \nu) \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(r, \theta, z) dz \quad (8-b)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_{r\theta} = -\frac{Gh^3}{6r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (8-c)$$

با فرض ثابت بودن تغییرات دما در تمام راستاهای (r, θ, z) و با به‌کارگیری

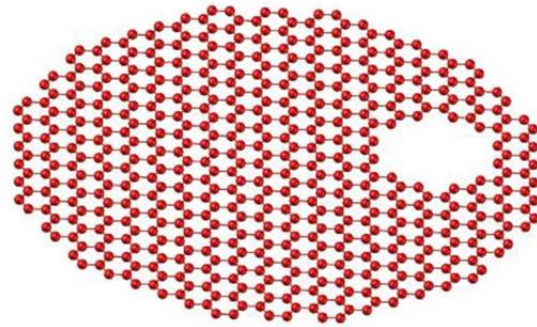


Fig. 1 3D view of a circular graphene sheet with an eccentric circular perforation in thermal environment

شکل 1 مدل سه‌بعدی یک ورق گرافنی دایروی با یک تخلخل دایروی ناهم‌مرکز در محیط حرارتی

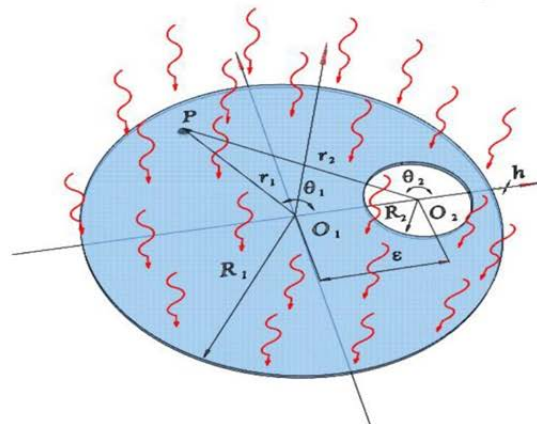


Fig. 2 Geometry view of a circular graphene sheet with an eccentric circular perforation in thermal environment

شکل 2 مدل هندسی یک ورق گرافنی دایروی با یک تخلخل دایروی ناهم‌مرکز در محیط حرارتی

رابطه (1) بیان می‌شود.

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma^l = \sigma^l \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\mu = e_0 \alpha$$

که در آن عملگر لاپلاس¹، μ پارامتر غیرموضعی، e_0 ضریبی مرتبط با ماده و α مشخصه طولی داخلی است.

روابط تنش- کرنش برای یک ورق گرافن از رابطه (1) در مختصات قطبی به صورت رابطه (2) حاصل می‌شود.

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_{rr}^{nl} \\ \sigma_{\theta\theta}^{nl} \\ \sigma_{r\theta}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q & \nu Q & 0 \\ \nu Q & Q & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha \Delta T \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} \sigma^l \quad (2)$$

$$Q = E/(1 - \nu^2), \quad G = E/2(1 + \nu)$$

در آن Q سختی الاستیک²، ν ضریب پواسون³، G مدول برشی⁴، α ضریب انبساط حرارتی⁵ و ΔT تابع اختلاف دما برحسب (r, θ, z) است. با استفاده از تئوری کلاسیک برای تحلیل ارتعاشات عرضی یک ورق دایروی، میدان‌های

¹ Laplacian operator
² Elastic stiffness
³ Poisson's ratio
⁴ Shear modulus
⁵ Thermal expansion coefficient

اصل همیلتون¹، معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات عرضی یک ورق گرافنی تک لایه دایروی مطابق تئوری غیرموضعی به صورت معادله (9) به دست می آید که پارامترهای N_{temp} و D نیز مشخص شده است.

$$\nabla^4 w - \frac{\partial^2 \rho h \mu^2 - N_{temp}}{D - \mu^2 N_{temp}} \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D - \mu^2 N_{temp}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$N_{temp} = -\frac{E h \alpha}{(1 - \nu)} \Delta T, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (9)$$

حرکت ورق برای ارتعاشات آزاد ورق گرافنی تک لایه دایروی به صورت متناوب مانند رابطه (10) فرض می شود.

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (10)$$

که در آن ω فرکانس ورق و $i = \sqrt{-1}$ است. با این فرض رابطه (9) به صورت رابطه (11) قابل بازنویسی است.

$$\nabla^4 W + \beta^2 \nabla^2 W - \eta^4 W = (\nabla^2 - \zeta^2)(\nabla^2 + \lambda^2)W = 0$$

$$\beta^2 = \frac{\rho h \omega^2 \mu^2 + N_{temp}}{D - \mu^2 N_{temp}}, \quad \eta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D - \mu^2 N_{temp}}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{-\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 4\eta^4}}{2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 4\eta^4}}{2}} \quad (11)$$

2-2- روش تحلیلی

برای حل رابطه (11) روش جداسازی متغیرها مورد استفاده قرار می گیرد. از این رو جابه جایی عرضی به صورت رابطه (12) بیان می شود.

$$W(r, \theta) = P(r)\Phi(\theta) \quad (12)$$

روابط (13,14) با جای گذاری رابطه (12) در رابطه (11) حاصل می شوند.

$$\frac{r^2}{P_1(r)} \left[\frac{d^2 P_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP_1}{dr} - \zeta^2 P_1(r) \right] = \frac{-1}{\Phi_1(\theta)} \frac{d^2 \Phi_1}{d\theta^2} = m^2 \quad (13)$$

$$\frac{r^2}{P_2(r)} \left[\frac{d^2 P_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP_2}{dr} + \lambda^2 P_2(r) \right] = \frac{-1}{\Phi_2(\theta)} \frac{d^2 \Phi_2}{d\theta^2} = m^2 \quad (14)$$

که رابطه بین P_1, P_2, Φ_1, Φ_2 و W به صورت رابطه (15) است.

$$W(r, \theta) = P_1(r)\Phi_1(\theta) + P_2(r)\Phi_2(\theta) \quad (15)$$

از روابط (13,14)، $\Phi_1(\theta)$ و $\Phi_2(\theta)$ به صورت روابط (16) حاصل می شوند. همچنین به دلیل این که این ورق به شکل دایره کامل فرض شده است؛ بنابراین دوره تناوب توابع Φ_1 و Φ_2 باید برابر $2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) باشد.

$$\Phi_1(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta) \quad (16-a)$$

$$\Phi_2(\theta) = C_m \cos(m\theta) + D_m \sin(m\theta) \quad (16-b)$$

براساس ساختار معادلات دیفرانسیل توابع بسل²، توابع $P_1(r)$ و $P_2(r)$ به صورت روابط (17) حاصل می شوند.

$$P_1(r) = E_m I_m(\zeta r) + F_m K_m(\zeta r) \quad (17-a)$$

$$P_2(r) = G_m J_m(\lambda r) + H_m Y_m(\lambda r) \quad (17-b)$$

در آن I_m, K_m, J_m و Y_m به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم و توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از درجه m است، همچنین A_m, B_m, C_m, D_m, E_m

$$W(r_2, \theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[E_{1m} I_m(\zeta r_2) + F_{1m} K_m(\zeta r_2) \right] \cos(m\theta_2) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[E_{2m} I_m(\zeta r_2) + F_{2m} K_m(\zeta r_2) \right] \sin(m\theta_2) \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[G_{1m} J_m(\lambda r_2) + H_{1m} Y_m(\lambda r_2) \right] \cos(m\theta_2) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[G_{2m} J_m(\lambda r_2) + H_{2m} Y_m(\lambda r_2) \right] \sin(m\theta_2) \right\} \quad (18)$$

در آن $E_{1m}, F_{1m}, G_{1m}, H_{1m}, E_{2m}, F_{2m}, G_{2m}, H_{2m}$ ضرایب شکل مودها هستند. جهت تبدیل رابطه (18) از مختصات (r_2, θ_2) به (r_1, θ_1) ، روش انتقالی ترکیبی گراف که عمومی سازی شده رابطه نیومن³ [14]، مطابق روابط (19) به کار گرفته شده است.

انتحای عرضی ورق در مختصات قطبی (r_1, θ_1) با جای گذاری روابط (19) در رابطه (18) مطابق رابطه (20) به دست خواهد آمد.

$$I_m(\zeta r_2) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta_2) \\ \sin(m\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n I_{n+m}(\zeta r_1) I_n(\zeta r_2) \begin{Bmatrix} \cos((n+m)\theta_1) \\ \sin((n+m)\theta_1) \end{Bmatrix} \quad (19-a)$$

$$K_m(\zeta r_2) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta_2) \\ \sin(m\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{n+m}(\zeta r_1) I_n(\zeta r_2) \begin{Bmatrix} \cos((n+m)\theta_1) \\ \sin((n+m)\theta_1) \end{Bmatrix} \quad (19-b)$$

$$J_m(\lambda r_2) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta_2) \\ \sin(m\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(\lambda r_1) J_n(\lambda r_2) \begin{Bmatrix} \cos((n+m)\theta_1) \\ \sin((n+m)\theta_1) \end{Bmatrix} \quad (19-c)$$

$$Y_m(\lambda r_2) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta_2) \\ \sin(m\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{n+m}(\lambda r_1) J_n(\lambda r_2) \begin{Bmatrix} \cos((n+m)\theta_1) \\ \sin((n+m)\theta_1) \end{Bmatrix} \quad (19-d)$$

$$W(r_1, \theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n E_{1m} I_n(\zeta r_2) I_{n+m}(\zeta r_1) \\ + F_{1m} I_n(\zeta r_2) K_{n+m}(\zeta r_1) \\ + G_{1m} J_n(\lambda r_2) J_{n+m}(\lambda r_1) \\ + H_{1m} J_n(\lambda r_2) Y_{n+m}(\lambda r_1) \end{array} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n E_{2m} I_n(\zeta r_2) I_{n+m}(\zeta r_1) \\ + F_{2m} J_n(\lambda r_2) K_{n+m}(\zeta r_1) \\ + G_{2m} J_n(\lambda r_2) J_{n+m}(\lambda r_1) \\ + H_{2m} J_n(\lambda r_2) Y_{n+m}(\lambda r_1) \end{array} \right\} \quad (20)$$

با تفکیک رابطه (20) به دو حالت متقارن (کسینوسی) و نامتقارن (سینوسی) و ضرب طرفین معادلات متقارن و نامتقارن به ترتیب در $\cos(t\theta_1)$ و $\sin(t\theta_1)$ و انتگرال گیری در بازه صفر تا 2π و اعمال روابط تعامد برای توابع کسینوسی و سینوسی و استفاده از خصوصیت توابع دلتای کرونیگر⁴، بازه منفی بی نهایت تا مثبت بی نهایت سیگمای دوم را به صفر تا مثبت بی نهایت تبدیل و حجم محاسبات را کمتر کرد. با فرض شرط مرزی گیردار در لبه خارجی و شرط مرزی گیردار یا آزاد در لبه داخلی به صورت C-C یا C-F نشان داده می شود، معادلات شرایط مرزی گیردار به صورت روابط (21) و شرایط مرزی آزاد به

³ Superposition principle

⁴ Graf's generalization of Neumann's formula in addition theorem

⁵ Kronecker delta

¹ Hamilton's principle

² Bessel differential equations

صورت روابط (22) مشخص شده است.

$$W(r, \theta) = 0 \quad (21-a)$$

$$\frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} = 0 \quad (21-b)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \quad (22-a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1-\nu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) = 0 \quad (22-b)$$

به منظور شفاف سازی رفتار ارتعاشی ورق تک لایه گرافنی، مودهای ارتعاشی متقارن و نامتقارن به صورت جداگانه در نظر گرفته شده اند. اشاره به این نکته الزامی است که سری های کسینوسی نمایانگر مودهای متقارن و سری های سینوسی نمایانگر مودهای نامتقارن است. شرایط مرزی لبه خارجی و سوراخ محقق با جای گذاری روابط (20,18) در روابط (22,21) می شود. با دسته بندی ضرایب شکل مودها در معادلات شرایط مرزی حاصل، معادله ماتریسی (23) قابل دستیابی است.

$$Q_{(4m+4) \times (4m+4)} \times R_{(4m+4) \times 1} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} [L_1] & [L_2] & [L_3] & [L_4] \\ [L_5] & [L_5] & [L_5] & [L_5] \\ [O_1] & [O_2] & [O_3] & [O_4] \\ [O_5] & [O_6] & [O_7] & [O_8] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [E_m] \\ [F_m] \\ [G_m] \\ [H_m] \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

در آن دو ردیف اول ماتریس Q مربوط به شرایط مرزی لبه سوراخ و دو ردیف دوم مربوط به شرایط مرزی لبه بیرونی ورق است. ماتریس های $[L]$ و $[O]$ دارای $m+1$ سطر و $m+1$ ستون و هریک از ماتریس های ضرایب شکل مودها دارای یک سطر و $m+1$ ستون است. برای نمونه در حالت متقارن شرط مرزی C-C با در نظر گرفتن $m=2$ و همچنین $t=0,1,2$. ماتریس $[L_1]$ مطابق رابطه (24) است.

$$[L_1]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} I_0(\zeta R_2) & 0 & 0 \\ 0 & I_1(\zeta R_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_2(\zeta R_2) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (24)$$

با توجه به رابطه ماتریسی (23)، با قرار دادن دترمینان ماتریس Q برابر صفر، فرکانس های طبیعی به دست خواهد آمد. جهت دستیابی به دقت بیشتر در نتایج باید اعداد $m=t$ افزایش یابد که در نتیجه زمان محاسبات نیز به شدت افزایش می یابد.

3- بررسی نتایج

جهت دستیابی به دقت بیشتر در اثرات دما بر ورق گرافنی تک لایه دایروی با یک تخلخل یا سوراخ دایروی، ضرایب جنس ماده، وابسته به دمای متغیر در نظر گرفته شده است.

مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی در محدوده دمایی پایین (250-350 K) به ترتیب برابر با $E_{LT} = 976 \cdot 10^9$ Pa [15]، $\nu_{LT} = 0.17$ و $\alpha_{LT} = -6 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹ [16,17] و این ضرایب در محدوده دمایی بالا (950-1050 K) برابر با $E_{HT} = 904 \cdot 10^9$ Pa [15]، $\nu_{HT} = 0.16$ و $\alpha_{HT} = 3.45 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹ [16,17] است، همچنین چگالی گرافن نیز برابر $\rho = 2250$ kg/m³ [18] و ضخامت آن $h = 0.335$ nm [16] است. تمامی محاسبات برای شرایط مرزی C-F و C-C انجام شده است. برای مثال منظور از C-F شرط مرزی گیردار در لبه بیرونی و آزاد در لبه داخلی است.

3-1- اعتبارسنجی

شکل های 3 و 4 مقایسه بین فرکانس های طبیعی بی بعد $\omega = \omega R_1^2 \sqrt{\rho h / D}$ ورق گرافنی تک لایه دایروی در شرایط دمایی پایین و بالا را نشان می دهد. شعاع و ضخامت ورق به ترتیب 12 و 0.335 نانومتر در نظر گرفته می شود. مشخصات ورق گرافنی نیز برابر $E = 1000$ GPa، $\nu = 0.17$ و $\rho = 2250$ kg/m³ است. شکل های 3 و 4 تطابق بسیار خوبی را بین این مطالعه و نتایج حاصل شده در آسمی و فرچپور [11] نشان می دهد. روشن است که نتایج به دست آمده با استفاده از روش گلرکین¹ از نظر مقداری بزرگ تر از نتایج به دست آمده با روش تحلیلی یا دقیق که در این مطالعه به دست آمده است. این امر ناشی از آن است که فرکانس های طبیعی به دست آمده از روش های عددی مانند گلرکین، کران بالای روش تحلیلی است.

جدول 1 مقایسه ای بین دو فرکانس طبیعی اول در حالت متقارن و نامتقارن برحسب گیگاهرتز در شرایط مرزی C-C و C-F ورق گرافنی تک لایه با تخلخل ناهمکز، بین نتایج این مطالعه و نتایج به دست آمده در مقاله فدایی و ایلخانی [12] را نشان می دهد که در آن ها $E = 1000$ GPa، $\rho = 2750$ kg/m³، $h = 0.34$ nm و $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل و نشان داده شده در جدول 1 تطابق بسیار نزدیکی با نتایج فدایی و ایلخانی [12] دارد.

3-2- اثر تغییر دما

جدول 2 سه فرکانس طبیعی اول ω (GHz) حالت های متقارن و نامتقارن ورق گرافنی دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز با شرایط مرزی C-F برای اختلاف دماهای $\Delta T = 0, 25, 50, 100$ K در محدوده های دمایی بالا و پایین با در نظر گرفتن شعاع بیرونی ورق $R_1 = 10$ nm، شعاع سوراخ $R_2 = 2$ nm، ناهمکزی $\varepsilon = 4$ nm و پارامتر غیرموضعی $\mu = 1$ را نشان می دهد. نتایج حاکی از آن است که در هریک این شش فرکانس طبیعی اول در محدوده دمایی پایین، با افزایش اختلاف دما بین محیط و ورق ΔT ، افزایش می یابد در حالی که در محدوده دمایی بالا دچار کاهش می شود. این امر ناشی از آن است

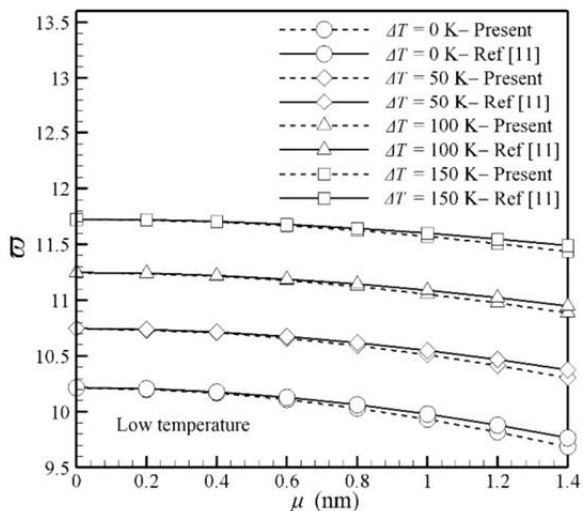


Fig. 3 Comparison of the fundamental frequency parameter of clamped circular SLGS at low-temperature environment ($\omega = \omega R_1^2 \sqrt{\rho h / D}$)

شکل 3 مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد ورق گرافنی تک لایه دایروی در محدوده دمایی پایین ($\omega = \omega R_1^2 \sqrt{\rho h / D}$)

¹ Galerkin's method

جدول 2 سه فرکانس طبیعی اول (گیگاهرتز) در حالت متقارن و نامتقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل ناهمکز دایروی در شرایط مرزی گیردار- گیردار و گیردار- آزاد در محدوده دمایی پایین و بالا با در نظر گرفتن شعاع بیرونی 10 نانومتر، شعاع سوراخ 2 نانومتر، ناهمکزگی 4 نانومتر و ضریب غیرموضعی 1.

Table 2 First three symmetric and antisymmetric natural frequencies (GHz) of a C-F SLGS with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high- temperature conditions ($R_1 = 10 \text{ nm}$, $R_2 = 2 \text{ nm}$, $\varepsilon = 4 \text{ nm}$ and $\mu = 1 \text{ nm}$)

حالت نامتقارن			حالت متقارن			ΔT	محدوده دمایی ورق
ω_3	ω_2	ω_1	ω_3	ω_2	ω_1		
136.196	97.386	62.677	104.108	67.243	32.743	0	پایین
139.574	101.419	65.423	107.128	69.747	34.787	25	
142.872	104.362	68.055	110.022	72.160	36.705	50	
146.096	107.222	70.585	112.837	74.490	38.522	75	
149.249	110.007	73.025	115.581	76.745	40.246	100	
130.885	94.561	60.218	100.102	64.643	31.469	0	بالا
128.997	92.857	58.657	98.427	63.225	30.284	25	
127.080	91.120	57.053	96.723	61.773	29.050	50	
125.135	89.349	55.399	94.985	60.284	27.751	75	
123.158	87.542	53.693	93.212	58.755	26.382	100	

گرفتن شعاع ورق $R_1 = 10 \text{ nm}$ ، شعاع سوراخ $R_2 = 2 \text{ nm}$ و پارامتر غیرموضعی $\mu = 2 \text{ nm}$ ، با شرایط مرزی C-F و C-C به ترتیب در شکل‌های 5 و 6 به نمایش درآمده است. از نتایج به دست آمده این برمی آید که پارامتر ناهمکزگی تأثیر بسزایی بر فرکانس‌های طبیعی مخصوصاً در شرایط مرزی C-C نسبت به C-F دارد که ناشی از کمتر بودن درجه آزادی آنها در حالت شرط مرزی گیردار سوراخ نسبت به شرایط مرزی آزاد آن است که این امر نتایج مجبور به ارتعاش در دامنه کوچک‌تر در یک زمان ثابت است که این امر نتایج به دست آمده را توجیه می‌کند، همچنین نرخ تغییرات فرکانس نسبت به افزایش ناهمکزگی به صورت کاهشی است که با توجه به رابطه کلی $\omega = 0.5(k/m)$ و ثابت بودن جرم حاکی از کاهش سختی مجموعه ورق به دلیل دور شدن مرکز سوراخ از مرکز ورق و در حقیقت کمتر شدن اثر شرط مرزی داخلی دارد.

3-4- اثر ضریب غیرموضعی

نمودار تغییرات فرکانس طبیعی اول (ω GHz) ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز برحسب پارامتر غیرموضعی μ ، برای اختلاف دماهای $\Delta T = 0, 50, 100 \text{ K}$ در محدوده دمایی پایین و بالا، با در نظر گرفتن شعاع ورق $R_1 = 10 \text{ nm}$ ، شعاع سوراخ $R_2 = 2 \text{ nm}$ و ناهمکزگی $\varepsilon = 4 \text{ nm}$ تحت شرایط مرزی C-F و C-C به ترتیب مطابق شکل‌های 7 و 8 نمایش داده شده است. مطابق نتایج حاصل‌شده افزایش پارامتر غیرموضعی و کاهش فرکانس‌های طبیعی را در پی خواهد داشت که ناشی از کاهش سختی مجموع ورق به دلیل افزایش وابستگی تنش در یک نقطه به کرنش در نقاط اطراف است. با این حال با کاهش اختلاف دمای ΔT در محدوده دمایی بالا اثر این پارامتر ضعیف‌تر می‌شود. در مقابل با افزایش اختلاف دما ΔT در محدوده دمایی پایین، اثر پارامتر غیرموضعی کاهش می‌یابد به گونه‌ای که به برای مثال منجر به تغییرات اندک فرکانس برای شرط مرزی C-F در $\Delta T = 100 \text{ K}$ می‌شود. این نتایج حاکی از آن است که با افزایش اختلاف دما در محدوده دماهای بالا و کاهش اختلاف دما در محدوده دماهای پایین که هر دو موجب جنبش اتمی بیشتر می‌شوند، اثر پارامتر غیرمحملی بیشتر می‌شود و برعکس.

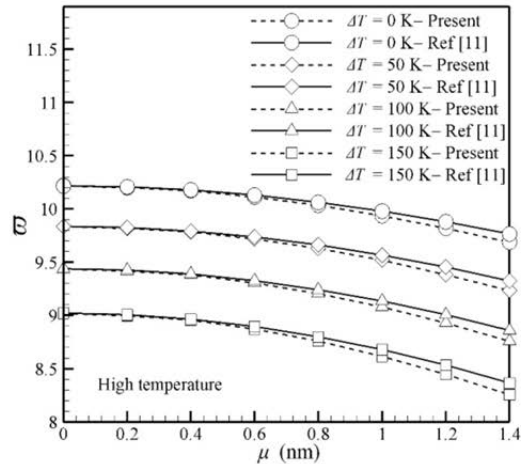


Fig. 4 Comparison of the fundamental frequency parameter of clamped circular SLGS at high temperature environment ($\omega = \omega R_1^2 \sqrt{\rho h/D}$)

شکل 4 مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق گرافنی تک لایه دایروی در محدوده دمایی بالا ($\omega = \omega R_1^2 \sqrt{\rho h/D}$)

جدول 1 مقایسه دو فرکانس طبیعی اول (گیگاهرتز) در حالت متقارن و نامتقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل ناهمکز دایروی در شرایط مرزی گیردار- گیردار و گیردار- آزاد با در نظر گرفتن شعاع بیرونی 10 نانومتر و شعاع سوراخ 1 نانومتر

Table 1 Comparison of first two symmetric and antisymmetric natural frequencies (GHz) of a C-C and C-F SLGS with an eccentric circular perforation ($R_1 = 10 \text{ nm}$ and $R_2 = 1 \text{ nm}$)

نتایج مرزی	شرایط مرزی	ε (nm)	μ (nm ²)	حالت متقارن		حالت نامتقارن	
				2	1	2	1
مطالعه				83.033	79.709	83.033	80.513
مرجع [12]		0		83.033	79.705	83.033	100.51
مطالعه	C-C	3	1	92.058	53.817	92.058	110.038
مرجع [12]				92.057	53.817	92.057	110.04
مطالعه		6		80.911	39.503	80.911	103.263
مرجع [12]				80.855	39.503	80.855	103.33
مطالعه		0		51.211	28.405	51.211	72.873
مرجع [12]				51.211	28.404	51.211	72.873
مطالعه	C-F	3	2	51.695	28.388	51.695	73.536
مرجع [12]				51.698	28.388	51.698	73.534
مطالعه		6		51.744	28.237	51.744	73.425
مرجع [12]				51.855	28.239	51.855	73.783

که مطابق رابطه [9] وقتی اختلاف دمای مثبتی ($\Delta T > 0$) اعمال می‌شود، با توجه به ضرایب انبساط حرارتی عنوان شده، نیروی درون صفحه‌ای کششی ($N_{temp} > 0$) را در محدوده دمایی پایین و نیروی درون صفحه‌ای فشاری ($N_{temp} < 0$) را در محدوده دمایی بالا درون ورق ایجاد می‌کند، همچنین مقادیر فرکانس‌های طبیعی در محدوده دمایی پایین بیشتر از محدوده دمایی بالاست که ناشی از بیشتر بودن مقدار عددی مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در آن است.

3-3- اثر ناهمکزگی

تغییرات فرکانس طبیعی اول (ω GHz) ورق گرافنی تک لایه دایروی با سوراخ ناهمکز دایروی برحسب تغییرات پارامتر ناهمکزگی ε (nm)، برای اختلاف دماهای $\Delta T = 0, 50, 100 \text{ K}$ در محدوده دمایی پایین و بالا، با در نظر

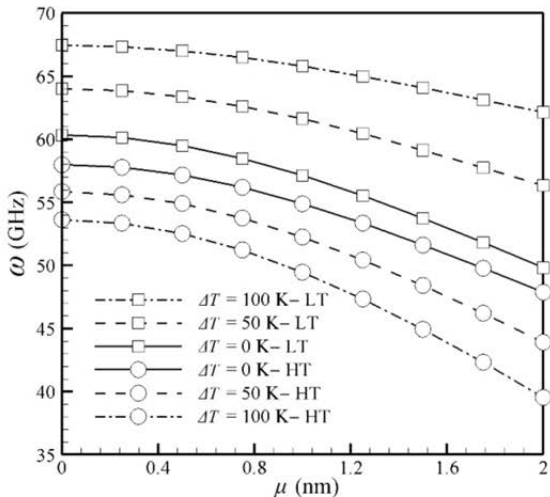


Fig. 7 Effect of non-locality μ on first natural frequency of C-C circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 7 اثر پارامتر غیرموضعی بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز برای شرط مرزی گیردار- گیردار برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

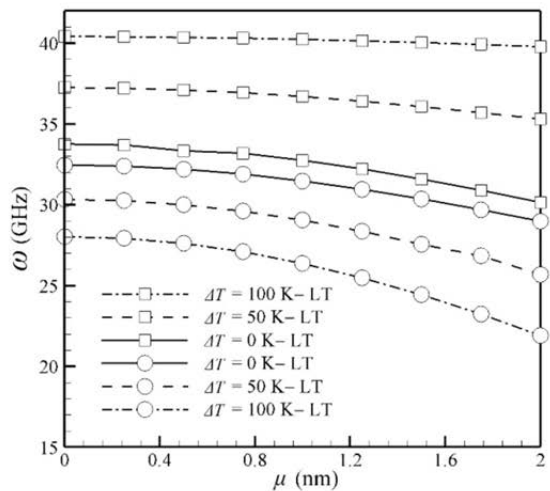


Fig. 8 Effect of eccentricity μ on first natural frequency of C-F circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 8 اثر پارامتر غیرموضعی بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز برای شرط مرزی گیردار- آزاد برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

محدوده دمایی بالا برای شرط مرزی در C-F رخ داده است. زمانی که شعاع بیرونی ورق به همراه اختلاف دما افزایش می‌یابد، فرکانس طبیعی اول به سمت صفر میل کرده که حاکی از آن است که برای شرط مرزی C-F تحت بار درون صفحه‌ای در $R_1 = 17.7039 \text{ nm}$ دچار پدیده کماتش می‌شود. در $\Delta T = 50 \text{ K}$ با افزایش شعاع بیرونی این پدیده در $R_1 = 25.8003 \text{ nm}$ اتفاق می‌افتد. پدیده کماتش به دلیل ضریب انبساط حرارتی منفی در محدوده دمایی پایین که منجر به بار درون صفحه‌ای کششی می‌شود، رخ نخواهد داد. هر چند برای شرط مرزی C-C به دلیل سختی بیشتر مجموعه ورق ناشی از شرط مرزی داخلی، این پدیده در محدوده دمایی بالا در شعاع‌های بالاتر رخ می‌دهد.

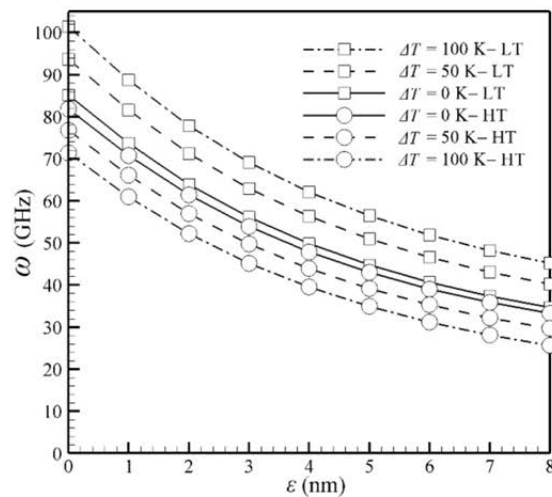


Fig. 5 Effect of eccentricity ε on the first natural frequency of C-C circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 5 اثر ناهمکزگی بر فرکانس طبیعی اول ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز برای شرط مرزی گیردار- گیردار برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

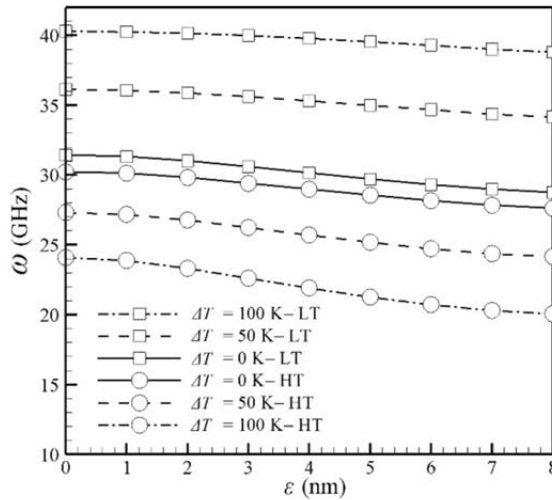


Fig. 6 Effect of eccentricity ε on the first natural frequency of C-F circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 6 اثر ناهمکزگی بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز برای شرط مرزی گیردار- آزاد برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

3-5- اثر شعاع ورق

اثر شعاع بیرونی ورق R_1 (nm) بر فرکانس طبیعی اول ω (GHz) ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهمکز برای اختلاف دماهای $\Delta T = 0, 50, 100 \text{ K}$ با شرایط مرزی C-F و C-C به ترتیب مطابق شکل‌های 9 و 10 نمایش داده شده است. نتایج با در نظر گرفتن شعاع سوراخ $R_2 = 2 \text{ nm}$ ، ناهمکزگی $\varepsilon = 4 \text{ nm}$ و همچنین پارامتر غیرموضعی $\mu = 2 \text{ nm}$ حاصل شده است. از شکل‌های 9 و 10 این نتیجه گرفته می‌شود که در تمامی حالات با افزایش R_1 ، فرکانس طبیعی اول به شدت کاهش می‌یابد. همان‌گونه که در شکل 10 مشاهده می‌شود پدیده جالب توجهی در $\Delta T = 100 \text{ K}$ حالت

که منجر به افزایش سختی مجموعه ورق می‌شود، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی اول شده است. همچنین اثر اختلاف دما ΔT بر روی فرکانس طبیعی در محدوده دمایی پایین بیشتر از اثر آن در محدوده دمایی بالاست که این ناشی از بیشتر بودن مقداری ضریب انبساط حرارتی و مدول الاستیسیته در محدوده دمایی پایین نسبت به محدوده دمایی بالاست.

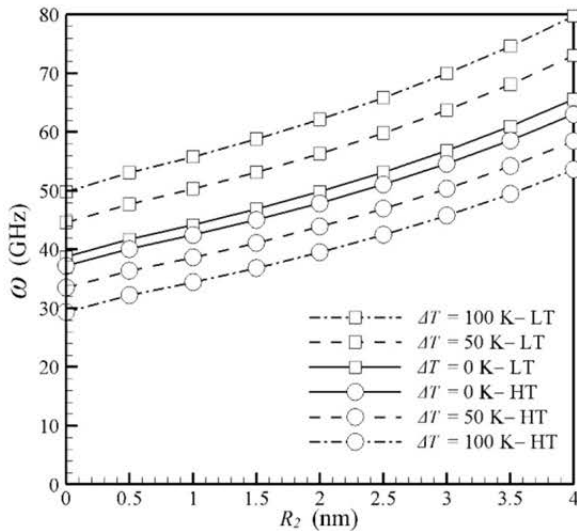


Fig. 11 Effect of hole's radius R_2 on the first natural frequency of C-C circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 11 اثر شعاع سوراخ بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهم‌مرکز برای شرط مرزی گیردار-گیردار برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

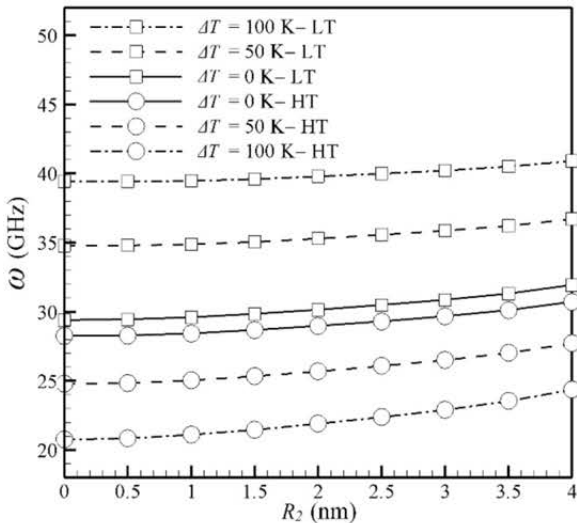


Fig. 12 Effect of hole's radius R_2 on the first natural frequency of C-F circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 12 اثر شعاع سوراخ بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهم‌مرکز برای شرط مرزی گیردار-آزاد برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

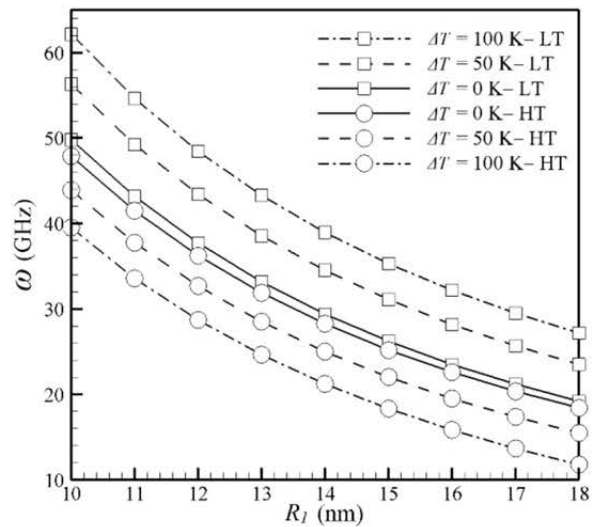


Fig. 9 Effect of outer radius R_1 on the first natural frequency of C-C circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 9 اثر شعاع ورق بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهم‌مرکز برای شرط مرزی گیردار-گیردار برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

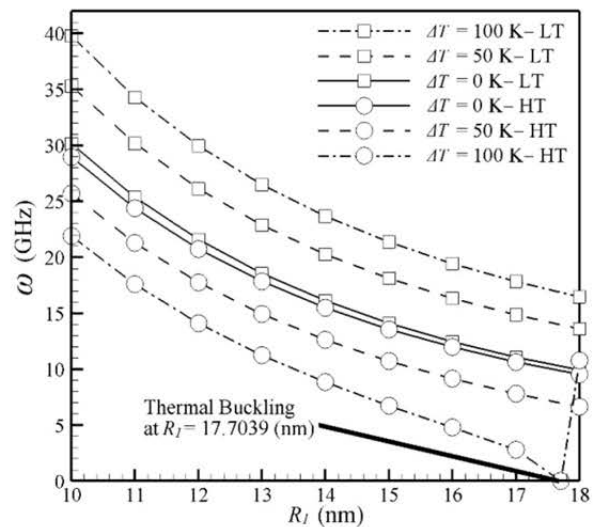


Fig. 10 Effect of outer radius R_1 on the first natural frequency of C-F circular SLGSs in symmetric condition with an eccentric circular perforation for various temperature changes in low and high-temperature conditions

شکل 10 اثر شعاع ورق بر فرکانس طبیعی اول متقارن ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهم‌مرکز برای شرط مرزی گیردار-آزاد برای تغییرات دمایی مختلف در محدوده دمایی پایین و بالا

3-6- اثر شعاع سوراخ یا تخلخل

تغییرات فرکانس طبیعی اول ω (GHz) ورق گرافنی تک لایه دایروی با تخلخل دایروی ناهم‌مرکز برحسب شعاع سوراخ R_2 (nm) برای اختلاف دماهای $\Delta T = 0, 50, 100$ K برای شرایط مرزی C-F و C-C به ترتیب مطابق شکل‌های 11 و 12 نشان داده شده است. نتایج با در نظر گرفتن شعاع ورق $R_1 = 10$ nm و ناهم‌مرکی $\epsilon = 4$ nm و پارامتر غیرموضعی $\mu = 2$ nm حاصل شده است. نتایج حاصل شده نشان می‌دهد که افزایش شعاع سوراخ

4- نتیجه گیری

راه حل دقیقی به صورت تحلیلی بر طبق تئوری غیرموضعی (غیرمحملی)، جهت آنالیز ارتعاشات ورق گرافنی تک لایه دایروی با در نظر گرفتن سوراخ یا تخلخل دایروی در مکان دلخواه روی ورق ارائه شد. برای مدل سازی تخلخل دایروی، تعمیم گراف از فرمول نیومن از تئوری انتقالی ترکیبی برای توابع بسمل مورد استفاده شد. دو محدوده دمایی با دماهای کم و زیاد در نظر گرفته شد و ضرایب مربوط به ورق با توجه به این دو محدوده استخراج شد و متفاوت از هم در نظر گرفته شد. با مقایسه نتایج اولیه با مقالات مرتبط، اعتبار، صحت و دقت معادلات و نتایج به اثبات رسید. اثر پارامترهای مختلف شامل اثر اختلاف دما در دو محدوده دمایی مختلف، ناهمگرزی، پارامتر غیرمحملی، شعاع ورق و در نهایت شعاع سوراخ به صورت جداگانه مورد بحث و بررسی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن داشت که هر یک از پارامترهای فوق اثرات چشمگیری بر فرکانس طبیعی ورق در شرط مرزی گیردار-گیردار نسبت به شرط مرزی گیردار-آزاد دارد. در بعضی شکلها مشاهده شد که فرکانس طبیعی ورق صفر شد که بدین معنا بود که ورق دچار کماتش تحت بار درون صفحه ای حرارتی شده است. در نهایت مجموعه ای از نتایج برای پارامترهای مختلف به صورت جداول و نمودارها گسترش یافت که برای مطالعات آینده کاربردی است.

5- فهرست علائم

علائم لاتین

D	سختی خمشی (Pa m^3)
E	مدول الاستیسیته (Pa)
G	مدول برشی (Pa)
h	ضخامت ورق (nm)
I_n	تابع بسمل نوع اول اصلاح شده از مرتبه n
J_n	تابع بسمل نوع اول از مرتبه n
K_n	تابع بسمل نوع دوم اصلاح شده از مرتبه n
M	ممان (N)
N	نیرو (N m)
Q	سختی الاستیکی (Pa)
r	راستای شعاعی
u, v, w	میدانهای جابجایی (nm)
Y_n	تابع بسمل نوع دوم از مرتبه n

علائم یونانی

α	ضریب انبساط حرارتی (K^{-1})
ε	کرنش
θ	راستای محیطی
μ	پارامتر غیرمحملی (nm)

ν	ضریب پواسون
ρ	چگالی (kg m^{-3})
σ	تنش (Pa)
ω	فرکانس (Hz)
ν^2	عملگر لاپلاس

بالانویس ها

l	موضعی یا محلی
nl	غیرموضعی یا غیرمحلی

6- مراجع

[1] C. Soldano, A. Mahmood, E. Dujardin, Production, properties and potential of graphene, *Carbon*, Vol. 48, No. 8, pp. 2127-2150, 2010.

[2] R. Aghababaei, J. N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Sound and Vibration*, Vol. 326, No 1-2, pp 277-289, 2009.

[3] T. Murmu, S. C. Pradhan, Vibration analysis of nano-single-layered graphene sheets embedded in elastic medium based on nonlocal elasticity theory, *Applied Physics*, Vol. 105, No. 6, pp 19-43, 2009.

[4] M. Mohammadi, A. Farajpour, M. Goodarzi, F. Dinari, Thermo-mechanical vibration analysis of annular and circular graphene sheet embedded in an elastic medium, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, No. 4, pp. 659-682, 2014.

[5] T. J. Prasanna Kumar, S. Narendar, S. Gopalakrishnan, Thermal vibration analysis of monolayer graphene embedded in elastic medium based on nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, Vol. 100, No. 1, pp. 332-342, 2013.

[6] L. Shen, H. S. Shen, C. L. Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, *Computational Materials Science*, Vol. 48, No. 3, pp. 680-685, 2010.

[7] S. A. Fazelzadeh, S. Poursmaeeli, Thermo-mechanical vibration of double-orthotropic nanoplates surrounded by elastic medium, *Thermal Stresses*, Vol. 36, No. 3, pp. 225-238, 2013.

[8] A. Zenkour, M. Sobhy, Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler-Pasternak elastic substrate medium, *Physica E*, Vol. 53, No. 1, pp. 251-259, 2013.

[9] M. Sobhy, Levy-type solution for bending of single-layered graphene sheets in thermal environment using the two-variable plate theory, *Mechanical Sciences*, Vol. 90, No. 1, pp. 171-178, 2015.

[10] L. Wang, H. Hu, Thermal vibration of a rectangular single-layered graphene sheet with quantum effects, *Applied Physics*, Vol. 115, No. 23, pp 15-35, 2014.

[11] S. R. Asemi, A. Farajpour, Decoupling the nonlocal elasticity equations for thermo-mechanical vibration of circular graphene sheets including surface effects, *Physica E*, Vol. 60, No. 1, pp. 80-90, 2014.

[12] M. Fadaee, M. R. Ilkhani, Study on the effect of an eccentric hole on the vibrational behavior of a graphene sheet using an analytical approach, *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 5, pp. 1395-1407, 2015.

[13] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface wave, *Applied Physics*, Vol. 54, No 9, pp. 4703-4710, 1983.

[14] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, pp 358-373, United Kingdom: Cambridge university press, 1995.

[15] Y. Y. Zhang, Q. X. Pei, Y. W. Mai, Y. T. Gu, Temperature and strain-rate dependent fracture strength of graphynes, *Physics D: Applied Physics*, Vol. 47, No. 42, pp. 42-53, 2014.

[16] J. W. Jiang, J. S. Wang, B. Li, Young's modulus of graphene: A molecular dynamics study, *Physical Review*, Vol. 80, No 11, pp 5-34, 2009.

[17] J. W. Jiang, B. S. Wang, J.S. Wang, H.S. Park, A review on the flexural mode of graphene: lattice dynamics, thermal conduction, thermal expansion, elasticity and nanomechanical resonance, *Physics: Condensed Matter*, Vol. 27, No. 8, pp 1-30, 2015.

[18] K. M. Liew, X. Q. He, S. Kitipornchai, Predicting nanovibration of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic matrix, *Acta Materialia*, Vol. 54, No. 16, pp. 4229-4236, 2006.