of SID

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی جریان سیال درون کانال با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرگین بر پایه تابع شعاعی

رامین امینی[1*]، محمد اکبری ماکویی[2]، سید مجتبی موسوی نژاد[3]

1- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، (web2_ramin.amini@shahroodut.ac.ir)

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 07 بهمن 1396
پذیرش: 01 اردیبهشت 1397
ارائه در سایت: 27 اردیبهشت 1397

کلید واژگان:
کانال شیب‌دار
روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین
مدل‌سازی جریان سیال
تابع پایه شعاعی

چکیده

در این مطالعه در ابتدا به بیان و معرفی کامل روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می‌شود. در این راستا با استخراج معادلات جریان سیال در کانال شیب‌دار با جریان یکنواخت سعی شده است با استفاده از مبانی ریاضی روش بدون شبکه، معادله‌ی لاپلاس جریان رابطه‌سازی شود. عدم نیاز به هیچ‌گونه شبکه‌ی پیش ضمیمه، تطابق مناسب با شرایط مرزی و دقت بالا از ویژگی‌های این روش می‌باشد. در ادامه به‌منظور صحت سنجی، یک مثال عددی که دارای پاسخ تحلیلی می‌باشد، به کمک این روش حل و با پاسخ‌های دقیق مقایسه گردیده است. نتایج نشان می‌دهد روش باقی‌مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد و دقیق برای دست‌یابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل در روش‌های بدون شبکه‌بندی مورد توجه قرار می‌گیرد. در نهایت در مسأله‌ی جریان در کانال، با استفاده از تابع شکل شعاعی که در محیط متلب پیاده شده است، مقدار سرعت بین گره‌ها در کانال شیب‌دار با جریان یکنواخت تقریب زده می‌شود. مثالی عددی با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفته، با نتایج حاصل از روش ایزوژئومتریک و روش تحلیلی مقایسه شده و به تعیین کانتورهای سرعت پرداخته‌شده است. نتایج در سطح مطلوب با نتایج ناشی از حل تحلیل منطبق است. نتایج حاصل نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی در مدل‌سازی مسأله جریان آب داخل کانال شیب‌دار است.

Fluid flow modeling in channel using meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial Basis Function

Ramin Amini[1*], Mohammad Akbarimakoui[1], Seyed Mojtaba Mosavi Nezhad[2]

1- Department of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.
2- Technical Faculty of Ferdows, University of Birjand, Birjand, Iran.
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, web2_ramin.amini@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 27 January 2018
Accepted 21 April 2018
Available Online 17 May 2018

Keywords:
Sloped Channel
Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Methods
Fluid Flow Modeling
Radial Basis Function

ABSTRACT

In this study first the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial Basis Function (RBF) has been explained entirely. In this way the governing channel flow expression that is based on the Laplace equation is expanded. In MLPG method, the problem domain is represented by a set of arbitrarily distributed nodes and Quadrature radial basis function is used for field function approximation and local integration is used to calculate the integrals. In the following, MLPG method is verified by exact solution in a numerical example. The Results show that MLPG method presented high accuracy and capability for solving the governing equation of the problem. Finally the velocity field is approximated in middle of nodes by RBF (MatLab code was adopted) in the uniform flow in a sloped channel problem. The MLPG results are compared with the isogeometric analysis (IA) method in the tutorial numerical example of Fluid flow modeling in channel, the velocity contours is detected, and their accuracy is demonstrated by means of several examples. The results showed good conformity compared to available analytical solution. The obtain results explain that Application of meshless method in Fluid flow modeling in channel show the applicability and efficiency of the meshless local Petrov-Galerkin method by Radial Basis Function method.

1- مقدمه

تحلیل و طراحی کانال‌های انتقال آب یکی از پرکاربردترین دامنه‌ها در علوم مهندسی می‌باشد. کانال‌ها با محدودیت‌هایی نظیر پمپاژ، تطابق با محیط زیست مواجه نیستند. این سازه‌ها با ویژگی‌های خاص خود توانسته است یکی از پر استفاده‌ترین سازه‌های هیدرولیکی باشند.

برای تحلیل مسائل هیدرولیکی از روش‌های عددی مختلفی استفاده می‌شود. یکی از بهترین روش‌های عددی که با توجه به ماهیت سیالات برای تحلیل این‌گونه مسائل، روش بدون‌شبکه می‌باشد.

www.SID.ir

Archive of SID

روش بدون شبکه به روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)[1] در مدل کردن پدیده‌های نجومی توسط گینگولد و موناقان [1] برمی‌گردد. از این روش برای تحلیل و مدل‌سازی هیدرولیکی، جریان سطح آزاد [2] استفاده شد. در این روش، از دو فن گسسته‌سازی جدید و سازگار برای مشتقات مکانی مرتبه اول و دوم استفاده می‌شود. روش هیدرودینامیک ذرات هموار برای مسائل جریان سطح آزاد حاوی رسوب [3] با استفاده از روش صریح اصلاح شده و روش شبه ضمنی توسعه داده شد. تحقیق در روش بدون شبکه در سال 1992 بعد از انتشار روش اجزا پراکنده[2] توسط نایرولز و همکاران [4] توسعه یافت. چندین روش بعد از آن با نام‌های، روش مستقل از جز گلرکین[3] (EFG) [5]، روش باز تولید ذرات[4] (RKPM) [6]، روش جداگر اجزا محدود[5] (PUFEM) [7]، روش جزهای طبیعی[6] (NEM) [8]، روش بدون شبکه گلرکین با استفاده از تابع شعاعی[7] (RBF) [9]، معرفی شدند. عمده تفاوت این روش‌ها نحوه تولید و استفاده مؤثر از تابع شکل مورد استفاده در روش حل بود. هر چه در ظاهر این روش‌ها برای تولید تابع شکل و تابع وزن نیاز به شبکه‌بندی ندارند ولی برای انتگرال‌گیری نیاز به یک شبکه‌بندی در سایه دارند. پس این روش‌ها روش بدون شبکه حقیقی نیستند.

روش بدون شبکه معادلات انتگرالی مرزی[8] (LBIE) و روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین[9] (MLPG) [10] که از روش‌های کاملا بدون شبکه محسوب می‌شوند، برای حل مسائل خطی و غیرخطی توسط آتلوری معرفی شدند. موسوی نژاد و همکاران با استفاده از همین روش رفتار دینامیکی سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده با مواد هدفمند را رابطه سازی کردند و کاربرد آن‌را برای بارهای دینامیکی و شتاب پایه نشان دادند [11 و 12]. مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین توسط محتشمی و همکاران صورت گرفت [13]. جریان سیال تراکم ناپذیر لزج [14] و نیز ارائه مدل یک بعدی جهت توزیع سرعت در کانال رو باز کم عرض [15] و شبیه‌سازی عددی جریان سیال غیر نیوتنی در کانال دارای حفره [16] از کارهای انجام گرفته در مدل‌سازی هیدرولیکی جریان می‌باشد.

از دیگر مطالعات انجام شده می‌توان به مدل‌سازی و مطالعه‌ی جریان نانوسیال و نانوذرات در کانال‌ها و لوله‌ها اشاره نمود. می‌توان به بررسی انتقال ترکیب نانوسیال مس و آب با استفاده از روش بولتزمن [17]، تحلیل تأثیر نانوسیال با خواص متغیر بر انتقال حرارت [18] و مطالعه‌ی پارامترهای انتقال حرارت برای نانوسیال نقره و آب را نام برد [19]. شبیه‌سازی عددی انتقال نانوسیال آب و اکسید مس داخل یک کانال مثلثی برای جریان آرام [20] و نیز همین شبیه‌سازی در کانال سینوسی در محیط متخلخل [21] توسط محققان صورت پذیرفت. بررسی اثر سرعت و ابعاد نانو ذرات جامد بر انتقال حرارت در نانوسیال غیر نیوتنی [22] و مطالعه عددی بر روی گرمایش طبیعی در حضور میدان مغناطیسی [23] از موضوعات مورد علاقه‌ی پژوهشگران بوده است. همچنین مطالعه‌ی تأثیر نسبت ابعاد در ترم انتقال حرارت برای جریان آرام در یک میکرو کانال مستطیلی دو بعدی [24] و تحلیل انتقال آرام ترکیبی نانوسیال با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی [25] انجام شده است. نیز مطالعه‌ی شکست حجمی نانوذرات [26] و بررسی افزایش انتقال حرارت در نانوسیال غیر نیوتنی در میکرو کانال مستطیل [27] از مهم‌ترین مطالعات صورت پذیرفته شده در این حوزه می‌باشد.

از دیگر روش‌های معمول مطالعه جریان می‌توان به روش ایزوژئومتریک اشاره نمود که امینی و همکاران از آن در مسائل مختلفی مانند مدل‌سازی از دیدگاه لانگراژی [28]، وضعیت جریان در کانال [29] و نیز شکست سد [30] در سال‌های گذشته بهره جسته‌اند.

در این تحقیق ابتدا به بیان و معرفی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین پرداخته شده و سپس با استخراج معادلات جریان سیال در کانال سعی شده است با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی معادله لاپلاس استخراج شده رابطه سازی شود. روش باقی‌مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد برای دست‌یابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل معمولی[10] و جزئی[11] در روش‌های بدون شبکه‌بندی مورد توجه قرار می‌گیرد. با استفاده از تابع شکل شعاعی تقریب مقدار سرعت بین گره‌ها در کانال شیب‌دار با جریان یکنواخت تقریب زده می‌شود. یک مثال عددی با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفت و با نتایج حاصل از روش ایزوژئومتریک مقایسه شده است.

در بخش دیگری از نوآوری‌های این تحقیق می‌توان به استفاده از تابع پایه شعاعی از نوع چندضلعی برای تقریب تابع میدان و نیز روش انتگرال‌گیری محلی که برای محاسبه تابع‌های اولیه به کار رفته شده است، اشاره نمود.

2- روش کار

به‌طور کلی، معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر رفتار سازه‌ها و شاره‌ها در داخل دامنه (Ω) و بر روی مرزهای آن (Γ)، به صورت رابطه‌ی (1) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(u) - f &= 0 \\ \mathrm{B}(u) - g &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

در این رابطه‌ها u تابع میدان (پاسخ)، D و B عملگر دیفرانسیلی و f و g تابع نیرویی می‌باشند.

دست‌یابی به مقدار دقیق تابع میدان (u) مشکل است. از رابطه (2) می‌توان برای تقریب زدن تابع میدان استفاده کرد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x)\alpha_i = P^{\mathrm{T}}\alpha \tag{2}$$

در این رابطه، $u^h(x)$ تابع میدان تقریبی، P بردار عضوهای چندجمله‌ای و α بردار ضرایب چندجمله‌ای می‌باشد. به‌طور معمول برای برقراری رابطه (2) تعداد عضوهای چندجمله‌ای (n) به کار رفته دارای شمار محدودی است، از این رو، تابع میدان به صورت تقریبی به دست می‌آید. بنابراین حل معادله‌ی حاکم بر مسأله دارای باقی‌مانده‌ی R_Ω در داخل دامنه و R_Γ بر روی مرزها خواهد بود. مقدار باقی‌مانده‌ی حاصل از قرار دادن تابع u^h در رابطه (1) به صورت رابطه‌های (3) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} R_\Omega &= \mathrm{D}(u^h) - f \neq 0 \\ R_\Gamma &= \mathrm{B}(u^h) - g \neq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

در روش باقی‌مانده وزنی با توجه به نحوه‌ی انتخاب تابع تقریبی، مقدار باقی‌مانده‌ی R_Ω و R_Γ در مسأله تغییر می‌کند. از این رو، باید مقدار باقی‌مانده حاصل از تقریب تابع میدان را به حداقل ممکن رسانید. این کار با برابر صفر شدن مجموع مقدار انتگرال باقی‌مانده‌های وزن‌دار در دامنه و بر روی مرزهای مسأله امکان پذیر خواهد بود (رابطه (4)).

[1] Smooth Particle Hydrodynamics
[2] Diffuse Elements Method
[3] Element Free Galerkin
[4] Reproducing Kernel Particle Method
[5] Partition of Unity Finite Element Method
[6] Natural Element Method
[7] Meshless Galerkin method using Radial Basis function
[8] Meshless Local Boundary Integral Equation
[9] Meshless Local Petrov-Galerkin method
[10] Ordinary differential equation
[11] Partial differential equation

www.SID.ir

Archive of SID

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i R_{\Omega} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i R_{\Gamma} \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad i = 1,2,\dots,n \tag{4}$$

در این رابطه $\widehat{W}_i$ و $\widehat{V}_i$ به ترتیب به عنوان تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی R_{Ω} و R_{Γ} محسوب می‌گردد.

با بهره‌جویی از رابطه‌های (2) و (3) و همچنین قرار دادن آن‌ها در رابطه (4)، رابطه‌های (6,5) حاصل می‌گردد.

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i \left(\mathrm{D}(u^h) - f\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i \left(\mathrm{B}(u^h) - g\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{5}$$

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i \left(\mathrm{D}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - f\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i \left(\mathrm{B}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - g\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{6}$$

رابطه (6) یک دستگاه n معادله‌ای با n مجهول (ضرایب ثابت در بردار α) را نشان می‌دهد (رابطه (7)).

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \widehat{W}_1 \left(\mathrm{D}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - f\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_1 \left(\mathrm{B}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - g\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_2 \left(\mathrm{D}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - f\right)d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_2 \left(\mathrm{B}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - g\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_n \left(\mathrm{D}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - f\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_n \left(\mathrm{B}(P^{\mathrm{T}}\alpha) - g\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \end{cases} \tag{7}$$

در این معادله‌ها باید ابتدا تابع شکل تعیین و سپس انتگرال‌گیری انجام شود. انتخاب تابع شکل مناسب بر پایه توزیع گره‌های اختیاری در داخل دامنه‌ی سازه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که در پیش روی روش بدون شبکه است. به همین سبب بدون داشتن یک تابع شکل مناسب، روش بدون شبکه دارای کارآمدی لازم نخواهد بود. تابع میدان در روش بدون شبکه با بهره‌جویی از مقدار تابع میدان در گره‌های واقع شده در دامنه‌ی تحت پوشش[1] تعریف می‌گردد. با استفاده از رابطه (8) می‌توان تابع میدان را تقریب زد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) u_i = \Phi^{\mathrm{T}}(x) \times U_s \tag{8}$$

در این رابطه k تعداد گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند، u_i و $\varphi_i(x)$ به ترتیب تابع میدان و تابع شکل در i اُمین نقطه در داخل دامنه تحت پوشش می‌باشد. همچنین U_s و $\Phi^{\mathrm{T}}(x)$ به ترتیب بردار تغییر مکان و بردار تابع شکل می‌باشند. در شکل 1 نمونه‌ای از دامنه‌های تحت پوشش مورد استفاده در روش بدون شبکه برای ساخت تابع‌های شکل نشان داده شده است.

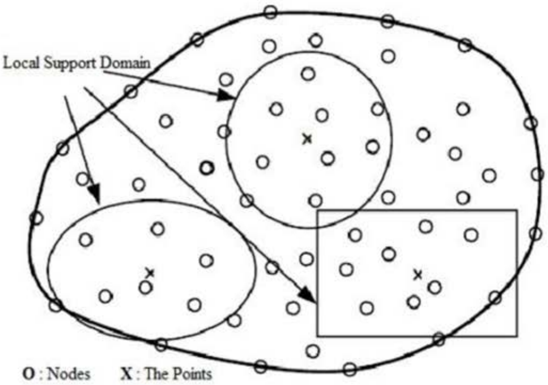

Fig. 1 Support domain in MLPG

شکل 1 دامنه‌های تحت پوشش در روش بدون شبکه

همان طوری که در شکل 1 دیده می‌شود، دامنه‌ی تحت پوشش می‌تواند به صورت دایره، بیضی و مستطیل انتخاب شود. اندازه دامنه‌ی تحت پوشش، برای دست‌یابی به پاسخ دقیق از اهمیت به سزایی برخوردار است. اندازه دامنه‌ی تحت پوشش (d_s) برای نقطه x به صورت رابطه (9) تعریف می‌گردد:

$$d_s = \alpha_s \times d_c \tag{9}$$

در رابطه (9)، α_s ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش و d_s فاصله بین گره‌ها می‌باشد. در صورتی که گره‌ها در دامنه‌ی مسأله به صورت نامنظم توزیع گردند، این مقدار به صورت میانگین فاصله بین گره‌ها در نظر گرفته خواهد شد.

روش درون‌یابی نقاط یکی از فن‌های تقریب تابع میدان در روش بدون شبکه محسوب می‌گردد. این روش توسط لیو و ژئو [31] برای ساخت تابع‌های شکل با بهره‌جویی از توزیع اختیاری گره‌ها در داخل دامنه‌ی مسأله پیشنهاد شد. یکی از روش‌های ساده و پرکاربرد در ایجاد تابع شکل، بهره‌جویی از چند جمله‌ای خیام-پاسکال به عنوان تابع‌های چندجمله‌ای می‌باشد. در این روش، تقریب تابع شکل با بهره‌جویی از مقدار تابع در گره‌های داخل دامنه‌ی تحت پوشش صورت می‌پذیرد. در روش درون‌یابی نقاط، تابع $u(x)$ را با استفاده از مقدارهای گرهی در دامنه و نقطه‌ی مورد نظر x_Q درون‌یابی می‌کنند (رابطه (10)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{n} B_i(x) a_i(x_Q) \tag{10}$$

در این رابطه $B_i(x)$ تابع پایه‌ای تعریف شده در مسأله پیرامون فضای دکارتی $X^T = [x, y, x]$ n تعداد گره‌های قرار گرفته در دامنه‌ی تحت پوشش x_Q و $a_i(x_Q)$ ضریب تابع پایه‌ای $B_i(x)$ است. در روش درون‌یابی نقاط بر اساس نحوه‌ی انتخاب تابع پایه‌ای دو روش ابداع گردیده است. روش درون‌یابی نقاط از تابع‌های چند جمله‌ای[2] [31] و تابع‌های شعاعی[3] [32] برای تقریب تابع میدان استفاده می‌کند.

در ادامه‌ی این روش از تابع‌های چند جمله‌ای به عنوان تابع‌های پایه‌ای استفاده می‌شود. با جای‌گذاری تابع چند جمله‌ای در رابطه (10)، رابطه حاکم بر این روش حاصل می‌گردد (رابطه (11)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) a_i(x_Q) \tag{11}$$

در این حالت تعداد ضرایب مجهول a_i با تعداد گره‌های داخل دامنه برابر می‌باشد. با قرار دادن مقدارهای گرهی، می‌توان ضرایب مجهول را با استفاده از رابطه‌های (12) تا (15) بدست آورد.

$$U_s = P_Q \times a \tag{12}$$

$$U_s = [u_1 \, u_2 \dots \, u_n] \tag{13}$$

$$P_Q = [p^{\mathrm{T}}(x_1) \, p^{\mathrm{T}}(x_2) \; \dots \; p^{\mathrm{T}}(x_n)\,] \tag{14}$$

$$a = P_Q^{-1} \times U_s \tag{15}$$

با قرار دادن رابطه (15) در رابطه (11)، تابع شکل به صورت رابطه (16) به دست می‌آید.

$$\Phi = P^{\mathrm{T}}(x) P_Q^{-1} \tag{16}$$

از امتیازهای استفاده از تابع شکل بر پایه چند جمله‌ای‌ها، می‌توان به سادگی و دقت مناسب روش اشاره نمود. از سوی دیگر با افزایش تعداد گره‌ها، می‌توان هر مرتبه‌ای از تابع شکل مورد نیاز را ایجاد کرد؛ اما علی‌رغم مزیت‌های فوق، در برخی حالت‌ها ماتریس P_Q در رابطه (16) ویژه می‌گردد. برای رفع این مشکل، روش درون‌یابی نقاط بر پایه تابع‌های شعاعی بهره

[1] Support domain

[2] Polynomial point interpolation methods

[3] Radial point interpolation method

www.SID.ir

Archive of SID

جسته می‌شود (رابطه (17)).

$$u^h(x,x_Q)=\sum_{i=1}^{n}R_i(x)a_i(x_Q)=R^{\mathrm{T}}a(x_Q) \quad (17)$$

$$R^T(x)=[R_1(x)\ \ R_2(x)\ \ \dots\ \ R_n(x)] \quad (18)$$

$R_i(x)$ در رابطه (18) تابع پایه شعاعی است. تابع‌های مختلف پایه شعاعی توسط محققان پیشنهاد گردیده است که هرکدام ویژگی‌های خاص خود را دارد. به منظور بهره گیری از این تابع‌ها، در جدول 1 چهار تابع پایه شعاعی پر کاربرد ارائه گردیده است [33-35].

برای تقریب تابع $u(x)$ با توجه به رابطه (17)، نیاز به محاسبه مقدار ضرایب مجهول $u(x_Q)$ می‌باشد. با استفاده از رابطه‌های (19) تا (21) می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود.

$$R_Q=\begin{Bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1)\\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_1(r_n) & R_1(r_n) & \dots & R_n(r_n)\end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$r_k=[(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2]^{0.5}\quad k=1,2,\dots,n \quad (20)$$

$$\mathrm{a}=R_Q^{-1}U_s \quad (21)$$

با قرار دادن رابطه (21) در رابطه (16)، تابع شکل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Phi=R^{\mathrm{T}}(x)R_Q^{-1} \quad (22)$$

3- رابطه سازی معادله‌ی حاکم

معادله ممنتوم حاکم بر جریان آب در کانال شیب‌دار در راستای جریان به صورت رابطه (23) بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+\frac{P}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(uv)+\frac{\partial}{\partial y}(uw) =\nu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+g\sin\alpha \quad (23)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای X، Y و Z و P فشار، g شتاب جاذبه، ρ چگالی، α شیب کانال، ν لزجت سینماتیکی می‌باشد. در اثر جریان یکنواخت و پایدار روابط (24) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0\ \ ,\ \ \frac{\partial}{\partial x}(u^2)=0\ \ ,\ \ \frac{\partial}{\partial y}(uv)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(uw)=0\ \ ,\ \ \frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0\ \ ,\ \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}\right)=0 \quad (24)$$

پس رابطه (25) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{g\sin\alpha}{\nu} \quad (25)$$

با استفاده از روش باقیمانده وزنی می‌توان رابطه (25) را به صورت زیر نوشت (رابطه (26)).

جدول 1 تابع‌های پایه شعاعی

Table 1 Radial point interpolation method functions

نام تابع شکل	رابطه	متغیرهای مؤثر در تابع شکل
چند ضلعی[1]	$R_i(x,y)=(r_i^2+(\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c\geq 0\,,q$
گوسی[2]	$R_i(x,y)=\exp(-\alpha_c(\frac{r_i}{d_c}))^q$	α_c
نواری[3]	$R_i(x,y)=r_i^{\eta}$	η
لگاریتمی[4]	$R_i(x,y)=r_i^{\eta}\log r_i$	η

[1] Multiquadric
[2] Gaussian
[3] Thin plate spline
[4] Logarithmic

$$\int W\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{g\sin\alpha}{\upsilon}\right)d\Omega=0 \quad (26)$$

اینجا W تابع وزن است. در ادامه با انتگرال‌گیری جز به جز رابطه (27) بدست می‌آید.

$$\int Wn_x\frac{\partial u}{\partial x}d\Gamma+\int Wn_y\frac{\partial u}{\partial y}d\Gamma-\int\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega -\int\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}d\Omega+\int W\frac{g\sin\alpha}{\upsilon}d\Omega=0 \quad (27)$$

دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود. Ω_Q دامنه انتگرال‌گیری برای گره I است. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (27) بدین صورت درمی‌آید (رابطه (28)).

$$\int_{\Gamma_i}W\left(n_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+n_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)ud\Gamma+\int_{\Gamma_u}W\left(n_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}n_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)ud\Gamma -\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)ud\Omega =-\int W\left(n_x\frac{\partial u}{\partial x}+n_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\Gamma-\int W\frac{g\sin\alpha}{\upsilon}d\Omega \quad (28)$$

در اینجا φ عبارت است از تابع شکل. همچنین مرزهای انتگرال‌گیری کلی (Γ_Q) به سه بخش ($\Gamma_Q=\Gamma_{Q_i}\cup\Gamma_{Q_u}\cup\Gamma_{Q_t}$) تقسیم می‌گردند که در اینجا Γ_{Q_i} مرزهای داخلی در دامنه‌ی انتگرال‌گیری که فصل مشترکی با مرزهای کلی مسأله ندارند، Γ_{Q_u} قسمتی از مرزهای طبیعی مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند و در نهایت Γ_{Q_t} قسمتی از مرزهای ضروری مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند.

4- نتایج و مشاهدات

به منظور صحت سنجی روش MLPG در این تحقیق، ابتدا با استفاده از این روش یک حالت خاص معادله پواسن (رابطه (29)) مورد حل قرار می‌گیرد. ازآنجایی‌که این معادله دارای حل تحلیلی می‌باشد لذا جواب‌های حاصل از مدل‌سازی با جواب‌های تحلیلی مقایسه می‌گردد. در حالت خاص می‌توان روابط (29) را نوشت:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\quad 0\leq x,y\leq 1$$
$$B.C.:\ \varphi=0\ \text{اگر}\ x=0\,,\qquad \varphi=0\ \text{اگر}\ x=1,$$
$$\varphi=0\ \text{اگر}\ y=0,\qquad \varphi=0\ \text{اگر}\ y=1 \quad (29)$$

از آنجایی که این معادله دارای جواب تحلیلی می‌باشد، به منظور مقایسه جواب‌ها، از حل تحلیلی این معادله بهره جسته می‌شود. جواب تحلیلی عبارت است از (رابطه (30)):

$$\varphi^{\mathrm{exact}}=-\frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad (30)$$

این نوع معادله از انواع معادلات پواسن شناخته می‌شود. جواب حل این مسأله، با استفاده از روش بدون شبکه محلی و تحلیلی در دو حالت به صورت شکل‌های 2 و 3 ارائه شده است.

در اینجا با هدف حل معادله، از تابع پایه شعاعی چند ضلعی برای حل عددی در روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین کمک گرفته شد. علت استفاده از این نوع تابع، دقت بسیار بالا در حل مسائل این‌چنینی بوده است. از مقایسه جواب‌ها در دو روش تحلیلی و بدون شبکه با یکدیگر می‌توان به دقت بسیار بالای روش بدون شبکه پی برد.

در جدول 2 مقادیر تحلیلی، عددی و خطا به دست آمده از این روش نشان داده شده است.

www.SID.ir

Archive of SID

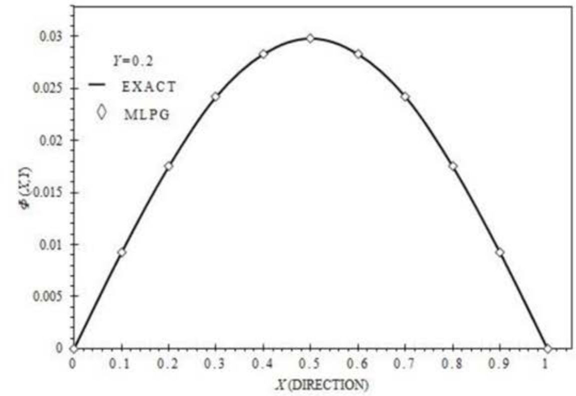

Fig. 2 MLPG solution and exactly solution in Y=0.2

شکل 2 مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG در Y=0.2

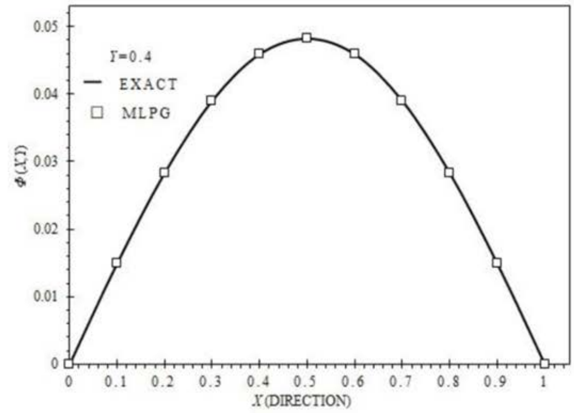

Fig. 3 MLPG solution and exactly solution in Y=0.4

شکل 3 مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG در Y=0.4

جدول 2 مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن

Table 2 Comparing between obtain result from MLPG method and exact solutions

	Φ y=0.2			Φ y=0.4		
X	دقیق	بدون‌شبکه	خطا%	دقیق	بدون‌شبکه	خطا%
0.0	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.000
0.1	0.0092	0.0092	0.370	0.0149	0.0148	0.456
0.2	0.0175	0.0174	0.389	0.0283	0.0283	0.120
0.3	0.0242	0.0242	0.140	0.039	0.0389	0.349
0.4	0.0283	0.0283	0.121	0.0459	0.0459	0.074
0.5	0.0298	0.0299	0.114	0.0482	0.0482	0.071
0.6	0.0283	0.0282	0.124	0.0459	0.0459	0.074
0.7	0.0242	0.0242	0.143	0.039	0.0388	0.436
0.8	0.0175	0.0174	0.389	0.0283	0.0282	0.240
0.9	0.0092	0.0092	0.370	0.0149	0.0148	0.456
1.0	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.000

با دقت در جدول 2 و مقایسه‌ی پاسخ‌ها و خطاهای ناشی از آن، عملکرد مطلوب روش بدون شبکه و دقت کافی جواب‌ها نمایان می‌گردد.

پس از انجام صحت سنجی، مسأله توزیع سرعت جریان داخل کانال شیب‌دار شکل 4 در حالت یکنواخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در اینجا X و Y به ترتیب محورهای عمودی و افقی کانال، u سرعت در مقطع کانال برحسب متر بر ثانیه و αشیب کانال برحسب درجه می‌باشد.

همچنین ابعاد مسأله و شرایط مرزی حاکم بر جریان یکنواخت در کانال در شکل 5 مشخص شده است.

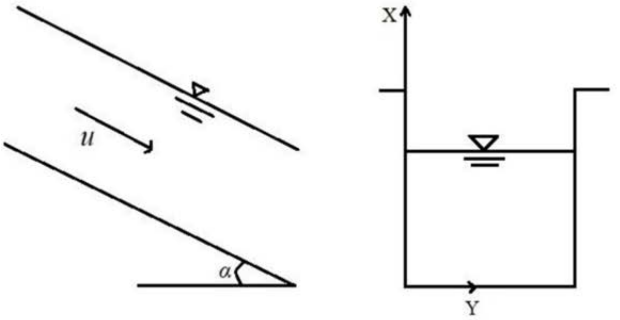

Fig. 4 Fluid flow in the channel

شکل 4 جریان سیال داخل کانال

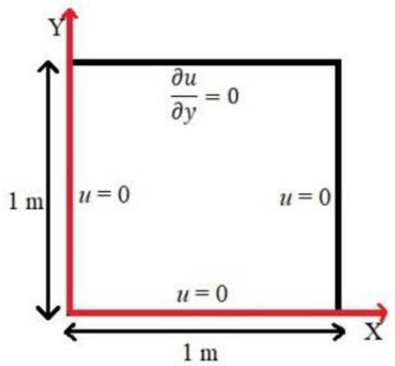

Fig. 5 Diameter and boundary conditions

شکل 5 ابعاد مسأله و شرایط مرزی

همان‌طور که در شکل مشخص است، سطح آب دارای شرط نیومن و بقیه‌ی مرزها دارای شرط مرزی دریشله می‌باشد.

به‌منظور صحت سنجی از نتایج روش بدون شبکه برای شیب 1 درجه و لزجت 0.1 (m^2s^{-1}) در مسأله با ابعاد شکل 5 با گره های منظم در مقایسه با روش دقیق، اجزای محدود و ایزوژئومتریک [18]، در جدول 3 آمده است.

در جدول 3 می‌توان کارایی روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین در برابر روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک را به‌وضوح مشاهده کرد. در روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر

جدول 3 مقایسه‌ی سرعت‌های به دست آمده از روش MLPG و خطای آن [18]

Table 3 Comparing between obtain velocities from MLPG method and its error

X (m)	Y (m)	دقیق (m/sec)	بدون‌شبکه (m/sec)	خطا% بدون‌شبکه	خطا% ایزوژئومتریک	خطا% اجزاء محدود
0.2	0.2	0.0662	0.0651	1.629	1.810	8.350
0.4	0.2	0.0936	0.0939	0.319	0.350	14.410
0.5	0.2	0.0969	0.0966	0.267	0.300	22.020
0.2	0.4	0.0991	0.0989	0.162	0.180	13.560
0.4	0.4	0.1445	0.1445	0.009	0.010	20.940
0.5	0.4	0.1500	0.1498	0.120	0.130	27.310
0.2	0.6	0.1157	0.1156	0.098	0.110	17.150
0.4	0.6	0.1711	0.1711	0.029	0.030	24.790
0.5	0.6	0.1779	0.1779	0.027	0.030	30.560
0.2	0.8	0.1235	0.1236	0.092	0.100	19.860
0.4	0.8	0.1836	0.1836	0.017	0.020	27.160
0.5	0.8	0.1911	0.1911	0.009	0.010	32.270
0.2	1.0	0.1258	0.1258	0.027	0.030	20.590
0.4	1.0	0.1873	0.1873	0.019	0.020	31.620
0.5	1.0	0.1950	0.1950	0.021	0.020	34.070

www.SID.ir

Archive of SID

0.19 می‌باشد که خطای بسیار کمی می‌باشد. درحالی‌که در روش ایزوژئومتریک درصد متوسط خطای مطلق برابر 0.21 و در روش اجزای محدود با همان تعداد معادلات درصد متوسط خطای مطلق برابر 22.98 شده که خطای بسیار زیاد می‌باشد. برای رسیدن به خطای مناسب باید تعداد نقاط گرهی را بیشتر کرد که باعث افزایش تعداد معادلات و در نتیجه افزایش زمان حل و همچنین افزایش حافظه‌ی مورد نیاز برای ذخیره‌ی اطلاعات می‌شود.

شکل 6 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی چندضلعی در کانال جریان می‌باشد.

همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود با توجه به شرایط مرزی سرعت در کف کانال و همچنین جداره‌ها به صفر می‌رسد. از سوی دیگر بیشترین سرعت در سطح کانال در قسمت میانی رخ می‌دهد.

همان‌طور که در ابتدای این نوشتار بدان اشاره شد انواع تابع شکل شعاعی وجود دارد که به‌منظور مقایسه و تحلیل آن در جدول 4 مقادیر و میزان خطای تولید شده از سه تابع چندضلعی، گوسی و نواری نشان داده

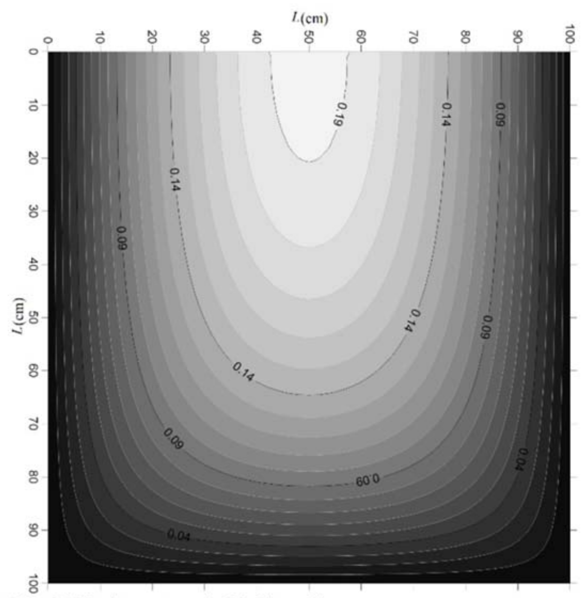

Fig. 6 Velocity contour in Multiquadric

شکل 6 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی

جدول 4 سرعت‌های به دست آمده از انواع تابع شکل شعاعی و خطای آن

Table 4 obtain velocities from Radial point interpolation method functions and its error

%خطا نواری	%خطا گوسی	%خطا چندضلعی	بدون‌شبکه نواری (m/sec)	بدون‌شبکه گوسی (m/sec)	Y (m)	X (m)
2.625	2.082	1.629	0.0645	0.0648	0.2	0.2
0.504	0.399	0.319	0.0931	0.0932	0.2	0.4
0.468	0.348	0.267	0.0964	0.0966	0.2	0.5
0.243	0.207	0.162	0.0989	0.0989	0.4	0.2
0.014	0.011	0.009	0.1445	0.1445	0.4	0.4
0.195	0.155	0.120	0.1497	0.1498	0.4	0.5
0.160	0.127	0.098	0.1155	0.1156	0.6	0.2
0.040	0.034	0.029	0.1710	0.1710	0.6	0.4
0.047	0.034	0.027	0.1778	0.1778	0.6	0.5
0.145	0.117	0.092	0.1233	0.1234	0.8	0.2
0.031	0.023	0.017	0.1835	0.1836	0.8	0.4
0.014	0.012	0.009	0.1911	0.1911	0.8	0.5
0.048	0.036	0.027	0.1257	0.1258	1.0	0.2
0.030	0.022	0.019	0.1872	0.1873	1.0	0.4
0.038	0.026	0.021	0.1949	0.1949	1.0	0.5

شده است.

در جدول 4 می‌توان کارایی روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل شعاعی در برابر انواع دیگر تابع شکل را مشاهده کرد. همان‌طور که قبلا اشاره شد در روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر 0.19 می‌باشد که خطای مناسبی می‌باشد. درحالی‌که در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق برابر 0.25 و در تابع پایه شعاعی نواری متوسط خطای مطلق برابر 0.32 شده که افزایش خطا را نشان می‌دهد.

شکل 7 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی گوسی در کانال جریان می‌باشد.

همان‌طور که توضیح داده شد، در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق به 0.25 می‌رسد که البته خطای قابل قبولی می‌باشد. شکل 8 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی نواری در کانال جریان می‌باشد.

از سوی دیگر متوسط خطای مطلق در تابع پایه شعاعی گوسی به 0.32 درصد می‌رسد که همچنان قابل قبول است. در مجموع به نظر می‌رسد در روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی، کمترین میزان درصد متوسط خطای مطلق رخ می‌دهد.

به‌منظور مطالعه‌ی شبکه‌ی فرضی گره‌ها و تأثیر تعداد گره‌ها بر کیفیت این روش عددی، نتایج حاصله از حل مسأله با 9، 16 و 36 گره با روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصله در جدول 5 نشان داده شده است.

می‌توان افزایش دقت مسأله را در روش بدون شبکه در جدول 5 مشاهده کرد. در روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه تابع شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برای مسأله با 9، 16 و 36 گره به ترتیب برابر 6.54 ، 1.38 و 0.19 می‌باشد که نشان می‌دهد با افزایش تعداد گره‌ها افزایش دقت و البته کاهش سرعت رخ می‌دهد.

شکل 9 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه با 9 گره را در کانال جریان می‌باشد.

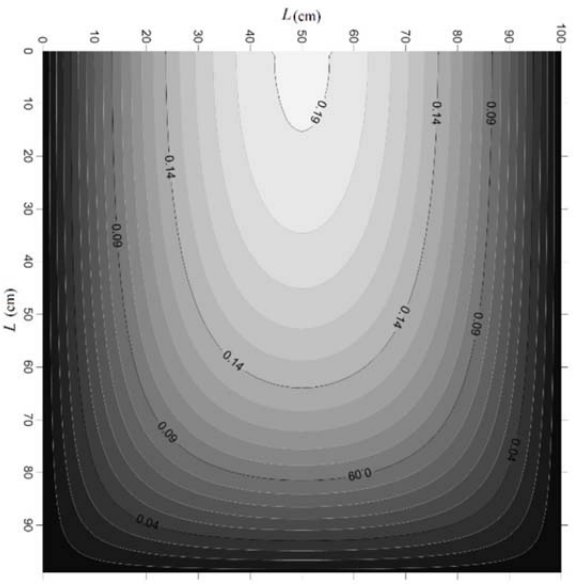

Fig. 7 Velocity contour in Gaussian

شکل 7 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی گوسی

www.SID.ir

Archive of SID

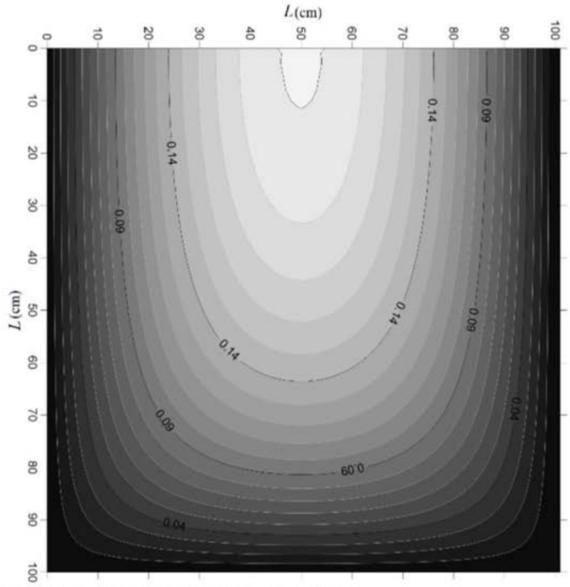

Fig. 8 Velocity contour in Thin plate spline

شکل 8 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی نواری

جدول 5 تأثیر تعداد گره‌ها در روش MLPG و خطای آن

Table 5 Influence of number of nodes in MLPG method and its error

خطا% 36 گرهی	خطا% 16 گرهی	خطا% 9 گرهی	بدون‌شبکه 16 گرهی (m/sec)	بدون‌شبکه 9 گرهی (m/sec)	Y (m)	X (m)
1.629	5.943	27.015	0.0623	0.0483	0.2	0.2
0.319	3.778	17.990	0.0901	0.0768	0.2	0.4
0.267	2.561	13.480	0.0944	0.0838	0.2	0.5
0.162	2.321	9.670	0.0968	0.0895	0.4	0.2
0.009	1.262	6.311	0.1427	0.1354	0.4	0.4
0.120	1.078	4.147	0.1484	0.1438	0.4	0.5
0.098	0.693	3.465	0.1149	0.1117	0.6	0.2
0.029	0.588	2.939	0.1701	0.1661	0.6	0.4
0.027	0.441	2.942	0.1771	0.1727	0.6	0.5
0.092	0.371	2.470	0.1230	0.1204	0.8	0.2
0.017	0.446	2.230	0.1828	0.1795	0.8	0.4
0.009	0.397	1.985	0.1903	0.1873	0.8	0.5
0.027	0.263	1.463	0.1255	0.1240	1.0	0.2
0.019	0.221	0.920	0.1869	0.1856	1.0	0.4
0.021	0.192	0.960	0.1946	0.1931	1.0	0.5

همان‌طور که در شکل مشخص است، با کاهش نقاط گرهی، کاهش چشم‌گیر دقت و افزایش خطا رخ خواهد داد. شکستگی‌های خطوط هم سرعت کانتورها به این علت می‌تواند باشد. شکل 10 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه با 16 گره را در کانال جریان می‌باشد.

همان‌طور که از شکل‌های 9 و 10 مشخص است، متوسط خطای مطلق با افزایش گره‌ها، کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند.

5- نتیجه‌گیری

با توجه به تحلیل فوق و هدف مدل‌سازی جریان داخل کانال، این نتیجه حاصل می‌شود که روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین ابزاری است که در مدل‌سازی مسائل با شرایط مرزی متغیر کاملاً سازگار است؛ زیرا تنها با تولید نقاط در هر مرحله تحلیل با شرایط مرزی جدید بدون نگرانی از ارتباط بین گره‌ها و رعایت پیوستگی بین آن‌ها، مدل‌سازی در کمترین زمان ممکن انجام می‌شود. کاملاً آشکار است که مدل‌سازی چنین مسائلی در روش اجزاءمحدود پیچیده می‌باشد، زیرا با کوچک‌ترین تغییر در شرایط مرزی شبکه‌بندی مسأله

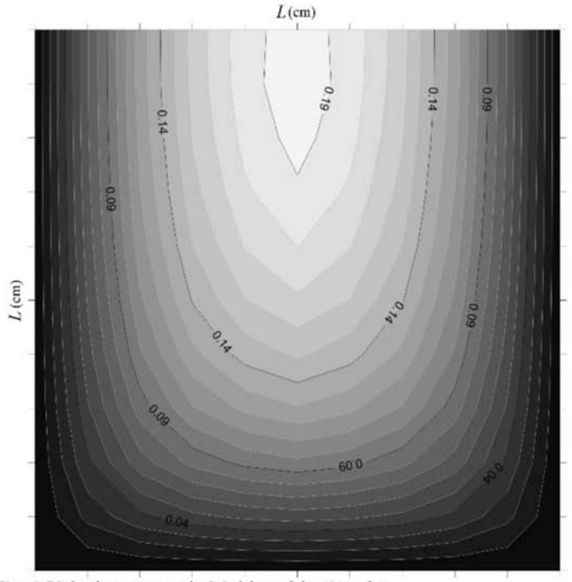

Fig. 9 Velocity contour in Multiquadric (9 nods)

شکل 9 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی(9 گرهی)

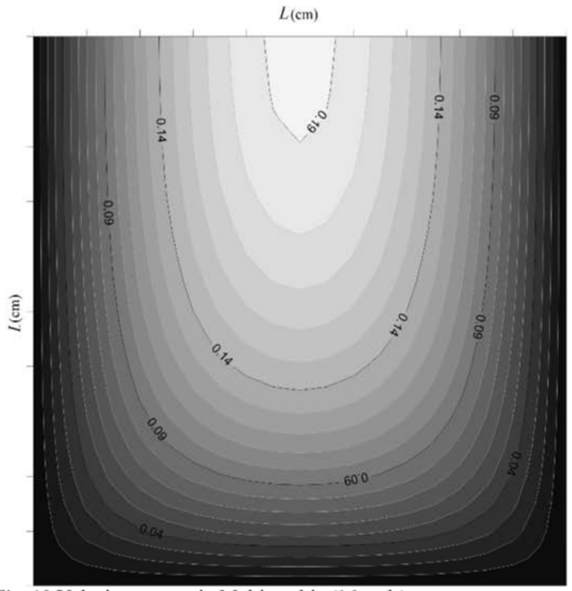

Fig. 10 Velocity contour in Multiquadric (16 nods)

شکل 10 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی(16 گرهی)

به یک مرحله زمان‌بر و پیچیده تبدیل می‌شود. همچنین با توجه به ماهیت تابع پایه شعاعی چندضلعی در روش بدون‌شبکه پترو-گلرکین به نظر می‌رسد، در مسأله‌هایی از این دست، کمترین میزان درصد متوسط خطای مطلق به وقوع می‌پیوندد. از طرف دیگر در مسائل با مرزهای غیرمسطح (منحنی) ایجاد المان‌هایی که ازنظر شکل و ظاهر متناسب با فرضیات روش اجزاءمحدود باشد پیچیده بوده درحالی‌که در روش پیشنهادی این مشکل به آسانی قابل رفع می‌باشد. به‌طور کلی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی یک طرح هوشمند در حل مسائل شرایط هندسی متغیر است.

6- فهرست علایم

B و D　　عملگر دیفرانسیلی

www.SID.ir

Archive of SID

f و g	تابع نیرویی
$u^h(x)$	تابع میدان تقریبی
P	بردار عضوهای چندجمله‌ای
n	تعداد عضوهای چندجمله‌ای
R_Ω	باقی‌مانده‌ی مسأله در داخل دامنه
R_Γ	باقی‌مانده‌ی مسأله بر روی مرزها
$\widehat{W}_i$	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای R_Ω
$\widehat{V}_i$	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای R_Γ
k	تعداد گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع‌شده‌اند
u_i	تابع میدان در i اُمین نقطه در داخل دامنه تحت پوش
$\varphi_i(x)$	تابع شکل در i اُمین نقطه در داخل دامنه تحت پوش
U_s	بردار تغییر مکان
$\Phi^{\mathrm{T}}(x)$	بردار تابع شکل
d_s	فاصله بین گره‌ها
$B_i(x)$	تابع پایه‌ای تعریف شده در مسأله پیرامون فضای دکارتی $X^T = [x, y, x]$
$a_i(x_Q)$	ضریب تابع پایه‌ای
$R_i(x)$	تابع پایه شعاعی
P	فشار ($\mathrm{kgm^{-1}s^{-2}}$)
g	شتاب جاذبه ($\mathrm{ms^{-2}}$)
u	مؤلفه‌های سرعت در راستای X ($\mathrm{ms^{-1}}$)
v	مؤلفه‌های سرعت در راستای Y ($\mathrm{ms^{-1}}$)
w	مؤلفه‌های سرعت در راستای Z ($\mathrm{ms^{-1}}$)

علائم یونانی

α	ضرایب چندجمله‌ای
α_s	ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش
ρ	چگالی ($\mathrm{kgm^{-3}}$)
υ	لزجت سینماتیکی ($\mathrm{m^2s^{-1}}$)

7- مراجع

[1] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, No. 3, pp. 375-389, 1977.
[2] S. Farzin, Y. Hassanzadeh, M. T. Aalami, R. Fatehi, An implicit incompressible SPH method for free surface flow problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 99-110, 2014. (in Persian فارسی)
[3] Farzin, Y. Hassanzadeh, M. T. Aalami, R. Fatehi, Development of Two Incompressible SPH methods to simulate sediment-laden free surface flows, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 91-103, 2014. (in Persian فارسی)
[4] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp. 307-318, 1992.
[5] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
[6] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 1081-1106, 1995.
[7] J. M. Melenk, I. Babuska, Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 4, pp. 607-632, 1997.
[8] N. Sukumar, B. Moran, T. Belytschko, The natural element method in solid mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 43, No. 5, pp. 839-887, 1998
[9] H. Wendland, Meshless Galerkin methods using radial basis functions, *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, Vol. 68, No. 228, pp. 1521-1531, 1999.
[10] S. N. Atluri, H. G. Kim, J. Y. Cho, A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods, *Computational Mechanics*, Vol. 24. No.5, pp. 348-372, 1999.
[11] S. M. Moussavinezhad, F. Shahabian, S. M. Hosseini. Two-dimensional elastic wave propagation analysis in finite length FG thick hollow cylinders with 2D nonlinear grading patterns using MLPG method, *CMES-computer Modeling in Engineering and Sciences,* Vol. 91, No. 1, pp. 177-204, 2013.
[12] S. M. Moussavinezhad, F. Shahabian, S. M. Hosseini, Two-dimensional stress-wave propagation in finite-length FG cylinders with two-directional nonlinear grading patterns using the MLPG method, *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 140, No. 3, pp. 575-592, 2013.
[13] A. Mohtashami, A. Akbarpour, M. Mollazadeh, Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 393-403, 2017. (in Persian فارسی)
[14] F. Sabetghadam, A. Shajari Ghasemkheili, Using the method of inverse problems in implementing the solid immersed boundaries on vorticity-streamfunction formulation of the incompressible viscous fluid flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 397-404, 2017. (in Persian فارسی)
[15] N. Binesh, H. Bonakdari, Introducing one-dimensional model to estimate velocity distribution in narrow open-channels, *Modares Civil Engineering Journal,* Vol. 16, No. 5, 2016. (in Persian فارسی)
[16] M. M. Shahmardan, M. Norouzi, A. Naghikhani, Numerical simulation of non-Newtonian fluid flows through a channel with a cavity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 35-40, 2014. (in Persian فارسی)
[17] A. Karimipour, M. H. Esfe, M. R. Safaei, D. T. Semiromi, S. Jafari, S. N. Kazi, Mixed convection of copper–water nanofluid in a shallow inclined lid driven cavity using the lattice Boltzmann method, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* Vol. 402, No. 1, pp.150-168, 2014
[18] M. H. Esfe, M. Akbari, D. S. Toghraie, A. Karimiopour, M. Afrand, Effect of nanofluid variable properties on mixed convection flow and heat transfer in an inclined two-sided lid-driven cavity with sinusoidal heating on sidewalls,, *Heat Transfer Research*, Vol. 45, No. 5, 2014.
[19] H. Alipour, A. Karimipour, M. R. Safaei, D. T. Semiromi, O. A. Akbari, Influence of T-semi attached rib on turbulent flow and heat transfer parameters of a silver-water nanofluid with different volume fractions in a three-dimensional trapezoidal microchannel, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 88, No. 1, pp.60-76, 2017.
[20] A. Aghanajafi, D. Toghraie, B. Mehmandoust, Numerical simulation of laminar forced convection of water-CuO nanofluid inside a triangular duct, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 85, No. 1, pp. 103-108, 2017.
[21] S. Nazari, D. Toghraie, Numerical simulation of heat transfer and fluid flow of water-CuO nanofluid in a sinusoidal channel with a porous medium, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 87, No. 1, pp.134-140, 2017.
[22] O. A. Akbari, D. Toghraie, A. Karimipour, A Marzban, G. R. Ahmadi, The effect of velocity and dimension of solid nanoparticles on heat transfer in non-Newtonian nanofluid, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 86, No. 1, pp. 68-75, 2017.
[23] M. Afrand, D. Toghraie, A. Karimipour, S. Wongwises, A numerical study of natural convection in a vertical annulus filled with gallium in the presence of magnetic field, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials,* Vol. 430, No. 1, pp. 22-28, 2017.
[24] Q. Gravndyan, O. A. Akbari, D. Toghraie, A. Marzban, R. Mashayekhi, R. Karimi, F. Pourfattah, The effect of aspect ratios of rib on the heat transfer and laminar water/TiO2 nanofluid flow in a two-dimensional rectangular microchannel, *Journal of Molecular Liquids,* Vol. 236, No. 1, pp. 254-265, 2017.
[25] M. Faridzadeh, D. S. Toghraie, A. Niroomand, Analysis of laminar mixed convection in an inclined square lid-driven cavity with a nanofluid by using an artificial neural network, *Heat Transfer Research*, Vol. 45, No. 4, 2014.
[26] O. A. Akbari, H. H. Afrouzi, A. Marzban, D. Toghraie, H. Malekzade, A. Arabpour, Investigation of volume fraction of nanoparticles effect and aspect ratio of the twisted tape in the tube, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* Vol. 129, No. 3, pp. 1911-1922, 2017.
[27] M. R. Shamsi, O. A. Akbari, A. Marzban, D. Toghraie, R. Mashayekhi, Increasing heat transfer of non-Newtonian nanofluid in rectangular microchannel with triangular ribs, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 93, No. 1, pp. 167-178, 2017.
[28] R. Amini, R. Maghsoodi, N. Z. Moghaddam, S. M. Tavakoli, Using isogeometric method for dam break modeling by Lagrangian approach, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 3, pp. 44-55, 2014. (in Persian فارسی)
[29] R. Amini, R. Maghsoodi, N. Z. Moghaddam, S. M. Tavakoli, Channels flow modeling using isogeometric analysis, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 5, No. 4, pp. 15-26, 2015. (in Persian فارسی)
[30] R. Amini, R. Maghsoodi, N. Z. Moghaddam, Simulating free surface problem using isogeometric analysis, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 413-421, 2016.
[31] G. R. Liu, Y. T. Gu, A point interpolation method for two dimensional solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 50, No. 4, pp. 937-951, 2001.

www.SID.ir

Archive of SID

[32] G. R. Liu, Y. T. Gu, A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 246, No. 1, pp. 29-46, 2001.

[33] R. L. Hardy, Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988, *Computers & Mathematics with Applications,* Vol. 19, No. 8-9, pp. 163-208, 1990.

[34] E. Onate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, A finit point method in computational mechanics application to convective transport and fluid flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 39, No. 22, pp. 3839-3866, 1996.

[35] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Method and their Programing*, pp. 237-309, Netherlands: Springer Science & Business Media, 2005.

www.SID.ir