

## تحلیل ارتعاشات لوله حامل سیال ویسکوز واقع بر بستر ویسکو-الاستیک با روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک

موسی رضائی<sup>1\*</sup>، آرزو اسماعیلی<sup>2</sup>

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

\* تبریز، صندوق پستی 51665-315، m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

### چکیده

مطالعه رفتار ارتعاشی و پایداری لوله‌های حامل سیال به دلیل کاربرد فراوان آنها در صنعت، حائز اهمیت می‌باشد. برای حل معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی این لوله‌ها که به صورت معادله دیفرانسیل پارهای شامل مشتقات ترکیبی نسبت به مکان و زمان است، از روش‌های تقریبی و عددی متعددی استفاده شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش المان محدود کلاسیک و المان محدود طیفی اشاره کرد. در این مقاله، بررسی رفتار ارتعاشی لوله حامل سیال ویسکوز واقع بر روی بستر ویسکو-الاستیک با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک دابوچیز انجام گرفته است. به این منظور پس از استخراج معادله حاکم بر ارتعاشات لوله حامل سیال، پاسخ ارتعاشی با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به دست آمده و تأثیر پارامترهای سیستم از جمله ثابت بستر الاستیک، چگالی سیال، نیروی محوری، و تأثیر تابع مقیاس انتخابی بر پاسخ، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاکی از افزایش سرعت بحرانی به دلیل افزایش سختی بستر الاستیک، کاهش نیروی محوری فشاری و کاهش چگالی سیال است. از بررسی روش حل، مشاهده می‌شود که در هر درجه از موجک دابوچیز، افزایش مقیاس باعث افزایش دقت حل می‌شود. همچنین در این مقاله برای نشان دادن مزایای روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، برای حالتی که حل تحلیلی مسأله وجود دارد پاسخ با استفاده از روش تحلیلی و روش المان محدود کلاسیک نیز استخراج و با نتایج حاصل از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک مقایسه شده‌اند.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 08 بهمن 1396  
پذیرش: 07 اردیبهشت 1397  
ارائه در سایت: 10 خرداد 1397  
کلید واژگان:  
لوله حامل سیال  
المان محدود  
المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک  
موجک‌های دابوچیز

## Vibration analysis of a viscous fluid conveying pipe on visco-elastic foundation using wavelet- based spectral finite element method

Mousa Rezaee\*, Arezoo Esmaeili

Department of mechanical engineering, University of tabriz, Tabriz, Iran.

\* P.O.B. 51665-315 Tabriz, Iran, m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 28 January 2018  
Accepted 27 April 2018  
Available Online 31 May 2018

#### Keywords:

Fluid conveying pipe  
Finite element method  
Wavelet- based spectral finite element method  
Daubchies wavelet

### ABSTRACT

Study of vibrational behavior and stability of fluid conveying pipes is important due to their large applications in industry. Several methods are used to solve the equation governing the vibration behavior of the fluid conveying pipes, e.g., the classical finite element method and the spectral finite element method. In the present study, the vibration behavior of the viscous fluid conveying pipe embedded in a visco-elastic foundation is investigated using the wavelet- based spectral finite element method. For this purpose, after deriving the equation governing the vibrations of the fluid conveying pipe, the vibration response is obtained using the mentioned method and the effects of the system parameters, such as the elastic foundation constant, fluid density, axial force, as well as the effect of the scale of the utilized scaling function on the system response, have been studied. The results indicate that by increasing the elastic foundation stiffness and/or, reducing the axial compressive force and the fluid density, the critical speed increases. Besides, the results show that increasing in scale of Daubchies scaling functions, increases the response accuracy. Also, to illustrate the advantages of the wavelet based spectral finite element method, for the case in which the analytical solution exists, the system time responses are compared with those obtained by the analytical method and the classical finite element method.

هسته‌ای، مهندسی بیولوژیک و پتروشیمی، هیدرولیک، خطوط تغذیه سوخت در هوافضا و همچنین در زندگی روزمره کاربرد فراوانی دارند. در برخی موارد وظیفه لوله‌ها انتقال سیال است و در موارد دیگر به عنوان زیرسازه به کار می‌رود، که در هر دو مورد پایداری لوله حامل سیال نقش مهمی در عملکرد سیستم متشکل از لوله حامل سیال دارد.

### 1- مقدمه

ارتعاشات مکانیکی هم از نظر بهره‌گیری و هم برای جلوگیری از اثرات مخرب آن همواره از دغدغه‌های صنعتگران و مهندسان بوده است. لوله‌های حامل سیال از سازه‌های بسیار مهمی هستند که به‌طور گسترده در مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این لوله‌ها در بسیاری از زمینه‌ها از جمله صنعت

مطالعه قرار گرفته است. روش ماتریس انتقال<sup>۱</sup> [28,27] نیز یک روش مناسب برای تحلیل دینامیکی خط لوله‌های چند دهانه می‌باشد. میترا و گوپالاکریشنان [29] در سال 2005 یک روش جدید المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای مطالعه انتشار موج الاستیک در سازه‌های یک بعدی و در سال 2006 [30] برای تیرهای کامپوزیتی ارائه کردند. در این تحقیق از توابع مقیاس داوینچیز برای تقریب در زمان استفاده شده که باعث تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسأله به معادلات دیفرانسیل معمولی وابسته به مکان می‌شود. سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل با آنالیز مقادیر ویژه به صورت مستقل در می‌آیند که به طور قابل ملاحظه‌ای هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد.

در تحقیق حاضر، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، برای اولین بار برای به دست آوردن پاسخ ارتعاشی لوله‌های حامل سیال استفاده شده است. روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک از جمله روش‌های جدید جایگزین برای روش المان محدود کلاسیک و روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه است که امروزه برای بررسی رفتار دینامیکی سازه‌ها استفاده می‌شود. از مزایای این روش نسبت به دو روش دیگر می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد [31]:

الف- بر خلاف روش المان محدود کلاسیک که در آن سازه به المان‌های متعدد تقسیم شده و ماتریس‌های جرم و سفتی با استفاده از توابع شکل استاتیکی استخراج می‌شوند، در این روش ماتریس سفتی دینامیکی بر پایه توابع شکل دینامیکی ساخته می‌شود که این ماتریس به طور هم‌زمان در بردارنده‌ی ویژگی‌های جرم و سفتی المان است و این عامل باعث افزایش دقت پاسخ‌ها می‌شود.

ب- در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به دلیل حل دقیق معادلات، نیاز چندانی به بخش‌بندی سازه به المان‌های ریز نیست و در نتیجه با استفاده از یک یا دو المان نیز می‌توان پاسخ را به دست آورد. استفاده از تعداد المان‌های بسیار کم سبب از بین رفتن خطاهای مربوط به بخش‌بندی سازه می‌گردد که این عامل باعث افزایش دقت پاسخ‌ها شده و زمان و هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد.

ج- برای به دست آوردن پاسخ‌های زمانی در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه نیاز به پاسخ‌های فرکانسی است، در حالی که در این روش نیاز به نگاشت پاسخ‌های زمانی در حوزه‌های مختلف از جمله حوزه فرکانس نیست.

د- بررسی سازه‌های نامیرا و یا با میرایی ناچیز با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه با مشکل روبه‌رو است. در روش مذکور برای حل این مشکل از میرایی ساختگی استفاده می‌شود. اما این مشکل در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک وجود ندارد و این روش پاسخ‌هایی با دقت بالا، بدون در نظر گرفتن میرایی ساختگی ارائه می‌دهد.

در این مقاله پس از استخراج معادله حاکم بر ارتعاشات لوله حامل سیال ویسکوز واقع بر بستر ویسکو- الاستیک، برای اولین بار پاسخ ارتعاشی سیستم با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به دست آمده است. برای نشان دادن مزایای روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، برای حالت خاصی که امکان استخراج حل تحلیلی مسأله وجود دارد پاسخ با استفاده از روش تحلیلی و روش المان محدود کلاسیک نیز استخراج و با نتایج حاصل از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک مقایسه

مطالعه و بررسی ارتعاشات لوله‌های حامل سیال به علت کاربردهای فراوان آن از جمله خطوط انتقال نفت، از حدود سال 1950 توسط آشلی و لند [1] آغاز گردید. بنجامین [2] برای اولین بار مطالعات وسیعی بر روی دینامیک لوله‌های حامل سیال با شرایط یک سر گیردار انجام داد. گریگوری و پایدوسیس [4,3] با ارائه یک مدل پیوسته به مطالعه رفتار ارتعاشات عرضی لوله حامل سیال پرداختند و نتایج خود را با نتایج تجربی مقایسه کردند.

به دلیل تأثیر بستر بر رفتار دینامیکی و پایداری لوله‌های حامل سیال، مطالعه چنین سیستم‌هایی به صورت ویژه توسط تعدادی از محققین بر پایه مدل‌سازی‌های مختلف انجام گرفته است. مرزانی و همکاران [5] برای مطالعه تأثیر مشخصات بستر الاستیک بر رفتار ارتعاشی لوله‌های حامل سیال از مدل بستر وینکلر استفاده کردند. در این مدل بستر به صورت فنرهای توزیع شده در طول لوله فرض می‌شود. آن‌ها نشان دادند که با افزایش سفتی بستر فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی لوله‌های حامل سیال افزایش می‌یابد. پایدوسیس و ایسید [6] لوله ویسکوالاستیک را با استفاده از مدل کلونین- ویت مدل‌سازی کرده و رفتار دینامیکی لوله‌های ویسکوالاستیک حامل سیال با شرایط تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار در دو انتها را مورد مطالعه عددی قرار دادند. آنها نشان دادند که سیستم‌های پایدار نه تنها دچار ناپایداری دیورژانس می‌شوند بلکه در سرعت‌های بالای سیال پایداری خود را از طریق ناپایداری فلاتر از دست می‌دهند. لوتاتی و کورنکی [7] به مطالعه تأثیر بستر الاستیک و میرایی داخلی و خارجی بر پایداری لوله حامل سیال، با شرایط مرزی یک سر گیردار- یک سر آزاد و دو سر ساده پرداختند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که سفتی بستر تأثیر پایدار کننده‌ای بر ارتعاشات لوله‌های حامل سیال دارد. مطالعه ارتعاشات لوله فولادی بر روی بستر الاستیک توسط ایمان‌زاده و دنیس [8] در سال 2013 انجام شد. در این مطالعه، ارتعاشات عرضی لوله در نواحی که سفتی بستر حداقل می‌شود، مورد بررسی قرار گرفت.

در طی سال‌های اخیر از روش‌های تحلیلی تقریبی و عددی متعددی برای حل دینامیک لوله‌ها استفاده شده است. یانگ و همکاران [9] رفتار ارتعاشی لوله‌های ویسکوالاستیک حامل سیال را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد مطالعه قرار دادند و نواحی پایدار را به ازای پارامترهای مختلف بررسی نمودند. وسیلو و جوندجورو [10] پایداری دینامیکی لوله‌های حامل سیال را با استفاده از روش‌های گالریکین و شوتینگ بررسی کردند. چلاپایلا و سینها [11] برای مطالعه سرعت بحرانی لوله حامل سیال با وجود بستر، از سری فوریه و روش گالریکین بهره بردند و مسأله را برای سه نوع شرط مرزی مورد بررسی قرار دادند. از روش‌های دیگر مورد مطالعه برای بررسی دینامیک لوله‌های حامل سیال می‌توان به روش جمع آثار مودال<sup>۱</sup> [14-12] و روش گالریکین [15-17] اشاره کرد که برای خط لوله‌هایی که به شکل تیر مدل شده‌اند، استفاده می‌شود. روش مربعات دیفرانسیل<sup>۲</sup> [19,18]، روش تبدیل دیفرانسیل<sup>۳</sup> [21,20] و روش تفاضل محدود<sup>۴</sup> [22] نیز از جمله روش‌هایی هستند که برای حل دینامیک لوله‌های حامل سیال مورد استفاده قرار گرفته‌اند. علاوه بر این برهم کنش بین سیال و لوله توسط روش اجزاء محدود<sup>۵</sup> [24,23] و روش المان محدود طیفی<sup>۶</sup> [26,25] نیز مورد

<sup>1</sup> The modal superposition method

<sup>2</sup> Differential quadrature method

<sup>3</sup> Differential transform method

<sup>4</sup> Finite difference method

<sup>5</sup> Finite element method

<sup>6</sup> Spectral finite element method

<sup>7</sup> Transformation matrix method

در رابطه (6) اپراتور  $D/Dt$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (7)$$

با جایگذاری معادلات (5) و (6) در معادله (4) و با صرف نظر کردن از نیروهای حجمی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + U_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (8)$$

بنابراین نیروی وارد بر لوله از طرف سیال نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_f = -A_f \frac{\partial P}{\partial y} = m_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \mu A_f \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + U_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (9)$$

در رابطه اخیر  $m_f$  و  $A_f$  بیانگر جرم واحد طول سیال و مساحت سطح مقطع آن می‌باشد.

از طرفی رابطه نیروی برشی و گشتاور خمشی طبق تئوری اویلر- برنولی

به صورت زیر است:

$$V = -\frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (2-الف)، (2-ب)، (9) و (10) در معادله (1)، معادله حاکم بر ارتعاش عرضی لوله حامل سیال ویسکوز به صورت رابطه (11) به دست می‌آید:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f U_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f U_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + N_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu A_f \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + U_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw + C \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

معادله (11) با فرض یکنواخت بودن جریان سیال، سرعت میانگین  $U_x$  و با در نظر گرفتن مدل کلونین- ویت برای بستر استخراج شده است.

### 3- پاسخ دینامیکی سیستم با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک

روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک یک روش عددی است که پاسخ را به صورت گسسته در نقاط نمونه برداری ارائه می‌دهد. در این روش که بر مبنای تبدیل موجک و المان محدود طیفی استوار است، معادله‌های دیفرانسیل جزئی وابسته به مکان و زمان با استفاده از تابع‌های مقیاس داوپیچ به معادله‌های دیفرانسیل معمولی کوپله‌ی (پیوندی) وابسته به مکان تبدیل می‌شوند. این معادلات با استفاده از روش آنالیز مقادیر ویژه مستقل می‌گردند.

اگر  $w(x, t)$  در  $n$  نقطه در بازه زمانی  $[0, t_f]$  گسسته‌سازی شده و  $\tau = 0, 1, \dots, n-1$  نقاط نمونه برداری باشند در این صورت داریم:

$$t = \Delta t \tau \quad (12)$$

که بازه زمانی بین دو نقطه متوالی نمونه برداری است. جابجایی  $w(x, t)$  را می‌توان توسط تابع مقیاس داوپیچ  $\Phi(\tau)$ ، در یک مقیاس دلخواه  $m_s$ ، تقریب زد [29]:

$$w(x, t) = w(x, \tau) = \sum_k w_k(x) 2^{m_s/2} \Phi(\tau - k), \quad k \in Z \quad (13)$$

$w_k(x)$  ضرایب تقریب در یک مکان خاص  $x$  هستند. تابع مقیاس داوپیچ در یک مقیاس دلخواه  $m_s$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$2^{m_s/2} \Phi(2^{m_s} \tau - k) = 2^{m_s/2} \Phi(\tau - k), \quad k \in Z \quad (14-الف)$$

یا:

$$\varphi(\tau - k) = 2^{m_s/2} \Phi(\tau - k) \quad (14-ب)$$

گردید. بعد از اطمینان از دقت روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، تأثیر پارامترهای سیستم از جمله سفتی بستر الاستیک، نیروی محوری و چگالی سیال مورد استفاده بر سرعت بحرانی و محدوده پایداری سیستم بررسی شد. بعلاوه، تأثیر تابع مقیاس بکار رفته بر دقت پاسخ‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج، حاکی از این است که افزایش دقت حل با افزایش مقیاس در هر درجه از موجک داوپیچ است.

### 2- استخراج معادله حاکم

ارتعاشات عرضی لوله حامل سیال ویسکوز واقع بر روی بستر ویسکو- الاستیک تحت اثر نیروی محوری، بر اساس فرض تیر اویلر- برنولی، توسط رابطه دیفرانسیلی زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_f + F_e + F_N \quad (1)$$

که در آن  $w$  جابجایی عرضی،  $V$  نیروی برشی و  $m_p$  جرم واحد طول لوله است.  $F_f$ ،  $F_e$  و  $F_N$  به ترتیب معرف نیروی واحد طول وارد از طرف جریان سیال، نیروی واحد طول وارد از طرف بستر ویسکو- الاستیک و تصویر نیروی واحد طول محوری در راستای عرض لوله است. شکل 1 المانی از سیستم مورد نظر را نشان می‌دهد.

$F_e$  و  $F_N$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$F_e = Kw + C \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2-الف)$$

$$F_N = N_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2-ب)$$

برای سیال ویسکوز، آرام و تراکم‌ناپذیر، معادله ناویر استوکس به صورت رابطه (3) بیان می‌شود [32]:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{U} + \vec{F}_{body} \quad (3)$$

در معادله فوق  $\vec{U}$  بردار سرعت جریان و  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $P$  و  $\vec{F}_{body}$  به ترتیب نشان دهنده فشار، ویسکوزیته، چگالی سیال و نیروی حجمی وارد بر سیستم است. در این مقاله به علت بررسی ارتعاش عرضی سیستم، تنها مولفه  $y$  در معادله (3) در نظر گرفته می‌شود:

$$\rho \frac{DU_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \right) + F_y \quad (4)$$

که  $F_y$  و  $U_y$  به ترتیب بیانگر سرعت سیال و نیروی حجمی در راستای  $y$  است. سرعت و شتاب سیال در این راستا نیز به صورت زیر است [33]:

$$U_y = \frac{Dw}{Dt} \quad (5)$$

$$\frac{DU_y}{Dt} = \frac{D^2 w(x, t)}{Dt^2} \quad (6)$$

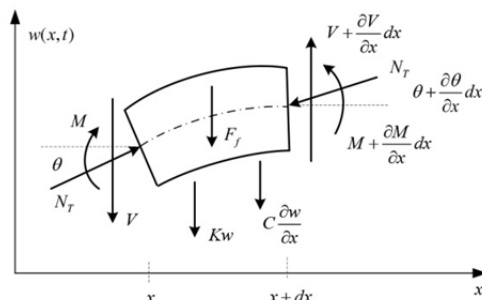


Fig. 1 An element of a viscous fluid conveying pipe embedded in visco-elastic foundation

شکل 1 المانی از لوله حامل سیال ویسکوز واقع بر بستر ویسکو- الاستیک

$\tau = 2^{m\epsilon} t$  است.

3-1- شرایط مرزی غیرپریودیک

در روش برون‌یابی موجک داوچیژ، یک چند جمله‌ای از مرتبه  $p - 1$  که در آن  $p = N/2$  است، برای برون‌یابی مقادیر مرزی، در نظر گرفته می‌شود [29]. چون در روش حاضر موجک‌ها در بازه زمان استفاده می‌شوند، ضرایب نامعلوم در سمت چپ بازه زمانی  $w_{-1}(x), w_{-2}(x), \dots, w_{N-2}(x)$ ، با شرایط اولیه برون‌یابی می‌شوند و ضرایب در سمت راست، با استفاده از ضرایب معلوم  $w_{(n-1)-p+1}(x), w_{(n-1)-p+2}(x), \dots, w_{n-1}(x)$  به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن چند جمله‌ای مرتبه  $p - 1$  برای  $w$  در مجاورت  $t = 0$  و با استفاده از رابطه (13) داریم:

$$w(x, \tau) = \sum_k w_k(x) \varphi(\tau - k) = \sum_{l=0}^{p-1} c_l(x) \tau^l \quad (20)$$

که  $c_l$ ها ضرایب چند جمله‌ای مورد نظر هستند. با ضرب داخلی دو طرف معادله فوق در  $\varphi(\tau - j)$  و انتگرال‌گیری در بازه زمان، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$w_j(x) = \sum_{l=0}^{p-1} c_l(x) \mu_j^l \quad j = -1, -2, \dots, -N + 2 \quad (21)$$

$\mu_j^l$  گشتاورهای توابع مقیاس هستند که به صورت رابطه (22) تعریف می‌شوند و با حل معادله بازگشتی (23) به دست می‌آیند:

$$\mu_j^l = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^l \varphi(\tau - j) d\tau \quad (22)$$

$$\mu_j^l = 2^{-l} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} M_r^{(j)} \mu_j^{l-r} \quad (23)$$

که در آن

$$M_r^{(j)} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_m h_m(j + m)^r \quad (24)$$

حل معادله (20) برای به دست آوردن  $c_l(x)$ ها، نیازمند  $p$  شرط اولیه برای تابع  $w(x, \tau)$  در  $\tau = 0, 1, \dots, p - 1$  است که با استفاده از روش‌هایی مانند تفاضل محدود به دست می‌آیند.

بعد از محاسبه  $c_l(x)$ ها و جایگذاری در معادله (21)، ضرایب نامعلوم  $w_j(x)$  از  $j = -1, -2, \dots, N + 2$  به دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} w_{-1}(x) \\ w_{-2}(x) \\ \vdots \\ w_{-N+2}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{-1}^0 & \mu_{-1}^1 & \dots & \mu_{-1}^{p-1} \\ \mu_{-2}^0 & \mu_{-2}^1 & \dots & \mu_{-2}^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-N+2}^0 & \mu_{-N+2}^1 & \dots & \mu_{-N+2}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0(x) \\ c_1(x) \\ \vdots \\ c_{p-1}(x) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ضرایب نامعلوم در مرزهای سمت راست بازه زمانی مورد نظر، با معرفی چند جمله‌ای مشابه، محاسبه می‌شوند:

$$w_j(x) = \sum_{l=0}^{p-1} c_l(x) \mu_{j-n}^l, \quad j = (n - 1) - p + 1, (n - 1) - p + 2, \dots, n - 1 \quad (26)$$

معادله‌ی (26) را می‌توان به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mu_{-p}^0 & \mu_{-p}^1 & \dots & \mu_{-p}^{p-1} \\ \mu_{-p+1}^0 & \mu_{-p+1}^1 & \dots & \mu_{-p+1}^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-1}^0 & \mu_{-1}^1 & \dots & \mu_{-1}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0(x) \\ c_1(x) \\ \vdots \\ c_{p-1}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{(n-1)-p+1}(x) \\ w_{(n-1)-p+2}(x) \\ \vdots \\ w_{(n-1)}(x) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

با حل معادله (27)  $c_l(x)$ های لازم برای تکمیل چندجمله‌ای (26) به دست می‌آیند که از آن می‌توان برای به دست آوردن  $w_j(x)$ ،  $j = n, n + 1, \dots, n + N - 2$  مطابق رابطه (28) استفاده کرد:

با جایگذاری رابطه (13) در رابطه (11) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & EI \sum_k \frac{d^4 w_k(x)}{dx^4} \varphi(\tau - k) + m_f U_x^2 \sum_k \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} \varphi(\tau - k) \\ & + 2m_f U_x \sum_k \frac{dw_k(x)}{dx} \dot{\varphi}(\tau - k) + N_T \sum_k \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} \varphi(\tau - k) \\ & - \mu A_f \left( \sum_k \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} \varphi'(\tau - k) + U_x \sum_k \frac{d^3 w_k(x)}{dx^3} \varphi(\tau - k) \right) \\ & + (m_f + m_p) \sum_k w_k(x) \varphi''(\tau - k) + K \sum_k w_k(x) \varphi(\tau - k) \\ & + C \sum_k w_k(x) \varphi'(\tau - k) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

با ضرب داخلی دو طرف معادله (15) در  $\varphi(\tau - j)$  و انتگرال‌گیری از طرفین، معادله (16) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left( EI \sum_k \frac{d^4 w_k(x)}{dx^4} + m_f U_x^2 \sum_k \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} + N_T \sum_k \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} \right. \\ & \left. - \mu A_f U_x \sum_k \frac{d^3 w_k(x)}{dx^3} + K \sum_k w_k(x) \right) \int \varphi(\tau - k) \varphi(\tau - j) d\tau \\ & + \left( 2m_f U_x \sum_k \frac{dw_k(x)}{dx} - \mu A_f \sum_k \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} + C \sum_k w_k(x) \right) \times \\ & \int \varphi'(\tau - k) \varphi(\tau - j) d\tau + \left( (m_f + m_p) \sum_k w_k(x) \right) \times \\ & \int \varphi''(\tau - k) \varphi(\tau - j) d\tau = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (16)$$

با استفاده از خاصیت تعامد بین انتقال‌های صحیح توابع مقیاس، معادله (16) به صورت  $n$  معادله دیفرانسیل معمولی به صورت رابطه (17) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & EI \sum_k \frac{d^4 w_j(x)}{dx^4} + m_f U_x^2 \sum_k \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} + N_T \sum_k \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \\ & + 2m_f U_x \sum_{k=j-N+2}^{j+N-2} \Omega_{j-k}^1 \frac{dw_k(x)}{dx} - \mu A_f \left( \sum_{k=j-N+2}^{j+N-2} \Omega_{j-k}^1 \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} \right. \\ & \left. + U_x \sum_k \frac{d^3 w_k(x)}{dx^3} \right) + (m_f + m_p) \sum_{k=j-N+2}^{j+N-2} \Omega_{j-k}^2 w_k(x) \\ & + K w_j(x) + C \sum_{k=j-N+2}^{j+N-2} \Omega_{j-k}^1 w_k(x) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (17)$$

به‌طوری‌که:

$$\Omega_{j-k}^1 = \int \varphi'(\tau - k) \varphi(\tau - j) d\tau \quad (18)$$

$$\Omega_{j-k}^2 = \int \varphi''(\tau - k) \varphi(\tau - j) d\tau \quad (19)$$

برای موجک‌های داوچیژ،  $\Omega_{j-k}^2$  و  $\Omega_{j-k}^1$  تنها در بازه  $k = j - N + 2$  تا  $k = j + N - 2$  غیرصفر هستند. جزئیات محاسبه ضرایب وابستگی برای مراتب مختلف مشتق توسط بیلکین در [34] ارائه شده است.

به علت بررسی مسأله در بازه‌ی  $[0, t_f]$ ،  $w(x, t)$  و در نتیجه  $w_j(x)$  مشتقات آن، تنها به ازای  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  در این بازه دارای مقدار هستند این در حالی است که در معادله (17) برخی از معادلات مربوط به  $j = 0$  تا  $j = N - 2$  شامل تعدادی از  $w_j(x)$ ها و مشتقات آن در خارج از بازه‌ی مذکور است. به طور مشابه، این مشکل در مرز دیگر برای  $j = (n - 1) - N + 2$  تا  $j = n - 1$  نیز وجود دارد. برای حل این مشکل از روش برون‌یابی که توسط آماراتونگا و ویلیام [35-37] برای حل مسائل مقدار مرزی پیشنهاد داده شده است استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} & -\mu A_f \left( -i\gamma_j \left\{ \frac{d^2 \hat{w}_j(x)}{dx^2} \right\} + U_x \left\{ \frac{d^3 \hat{w}_j(x)}{dx^3} \right\} \right) \\ & - (m_p + m_f) \gamma_j^2 \{ \hat{w}_j(x) \} + K \{ \hat{w}_j(x) \} \\ & - i\gamma_j C \{ \hat{w}_j(x) \} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن

$$\{ \hat{w}_j \} = [\Phi]^{-1} \{ w_j \} \quad (39)$$

$[\Phi]$  ماتریس بردار ویژه و  $-i\gamma_j$  مقادیر ویژه ماتریس  $\Gamma^1$  هستند.

شرایط مرزی نیرویی به دست آمده در معادلات (31) و (32) به معادلات

زیر تبدیل می‌شوند:

$$EI \frac{d^2 \hat{w}_j}{dx^2} = \hat{M}_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (40)$$

$$EI \frac{d^3 \hat{w}_j}{dx^3} = -\hat{V}_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (41)$$

حل همگن معادلات دیفرانسیل معمولی مستقل (38) به صورت رابطه (42)

$$\hat{w}(x) = c e^{-ik_w x} \quad (42)$$

است:

با جایگذاری حل (42) در معادله (38)،  $n$  معادله مستقل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & EI k_w^4 - m_f U_x^2 k_w^2 - 2m_f U_x \gamma_j k_w \\ & - N_T k_w^2 - \mu A_f (i\gamma_j k_w^2 + iU_x k_w^3) \\ & - (m_p + m_f) \gamma_j^2 + K - i\gamma_j C = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (43)$$

از حل معادلات (43)  $k_w$  ها که اعداد موج نامیده می‌شوند، به دست می‌آیند.

در نهایت با توجه به مرتبه معادله (43)، پاسخ معادله (38) را می‌توان به

صورت زیر نوشت:

$$\hat{w}(x) = C_1 e^{-ik_{w1}x} + C_2 e^{-ik_{w2}x} + C_3 e^{-ik_{w3}x} + C_4 e^{-ik_{w4}x} \quad (44)$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله (44) ثابت  $\{C\} = \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4\}$  به

دست می‌آیند. بدین منظور رابطه (44) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{w}(x) &= [1 \ 1 \ 1 \ 1] \\ & \begin{bmatrix} e^{-ik_{w1}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \\ &= [R_1][\Theta]\{C\} \end{aligned} \quad (45)$$

به همین ترتیب شکل ماتریسی  $d\hat{w}(x)/dx$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}(x)}{dx} &= [-ik_{w1} \ -ik_{w2} \ -ik_{w3} \ -ik_{w4}] \\ & \begin{bmatrix} e^{-ik_{w1}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \\ &= [R_2][\Theta]\{C\} \end{aligned} \quad (46)$$

بنابراین شرایط مرزی در دو گره (ابتدا و انتهای المان) به صورت روابط (47)

تا (50) اعمال می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{w}(x)|_{x=0} &= \hat{w}_1 \\ &= [R_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [T_{11}]\{C\} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{w}(x)}{dx} \right|_{x=0} &= \hat{\theta}_1 \\ &= [R_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [T_{12}]\{C\} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \hat{w}(x)|_{x=L} &= \hat{w}_2 \\ &= [R_1] \begin{bmatrix} e^{-ik_{w1}L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \\ &= [T_{13}]\{C\} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{Bmatrix} w_n(x) \\ w_{n+1}(x) \\ \vdots \\ w_{n+N-2}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^0 & \mu_0^1 & \dots & \mu_0^{p-1} \\ \mu_1^0 & \mu_1^1 & \dots & \mu_1^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N+2}^0 & \mu_{N+2}^1 & \dots & \mu_{N+2}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0(x) \\ c_1(x) \\ \vdots \\ c_{p-1}(x) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

بدین ترتیب تعدادی از ضرایب  $w_j(x)$  ها که خارج از بازه زمانی  $[0, t_f]$  بودند، به دست می‌آیند. برای به دست آوردن مشتقات  $dw_j(x)/dx$  در خارج از بازه زمانی  $[0, t_f]$  نیز از همین روش استفاده می‌شود.

در ادامه، گشتاور خمشی و نیروی برشی به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = M(x,t) \quad (29)$$

$$EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} = -V(x,t) \quad (30)$$

$M(x,t)$  و  $V(x,t)$  را می‌توان به صورت زیر گسسته‌سازی کرد:

$$M(x,t) = M(x,\tau) = \sum_k M_k(x) \varphi(\tau - k), \quad k \in Z \quad (31)$$

$$V(x,t) = V(x,\tau) = \sum_k V_k(x) \varphi(\tau - k), \quad k \in Z \quad (32)$$

با جایگذاری معادلات (31) و (32) در معادلات (29) و (30) و با در نظر گرفتن تعامد توابع مقیاس داوویچیز، معادلات دیفرانسیلی معمولی زیر به دست می‌آیند:

$$EI \frac{d^2 w_j}{dx^2} = M_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (33)$$

$$EI \frac{d^3 w_j}{dx^3} = -V_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (34)$$

المان طیفی برای لوله حامل سیال با استفاده از معادلات دیفرانسیلی (17)، (33) و (34) فرمول‌بندی می‌شوند.

معادله‌های دیفرانسیل معمولی به دست آمده از معادله (14) را می‌توان

به فرم ماتریسی به صورت (35) بیان کرد:

$$\begin{aligned} & EI \left\{ \frac{d^4 w_j(x)}{dx^4} \right\} + m_f U_x^2 \left\{ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right\} \\ & - \mu A_f \left( \Gamma^1 \left\{ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right\} + U_x \left\{ \frac{d^3 w_j(x)}{dx^3} \right\} \right) \\ & + 2m_f U_x \Gamma^1 \left\{ \frac{dw_j(x)}{dx} \right\} + N_T \left\{ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right\} \\ & + (m_p + m_f) \Gamma^2 \{ w_j(x) \} + K \{ w_j(x) \} \\ & + C \Gamma^1 \{ w_j(x) \} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (35)$$

ماتریس وابستگی  $[\Gamma^2]$  می‌تواند به صورت مستقل محاسبه شود. همچنین

می‌توان برای محاسبه  $[\Gamma^2]$  از رابطه زیر استفاده کرد [29]:

$$[\Gamma^2] = [\Gamma^1]^2 \quad (36)$$

بنابراین در رابطه (35) ماتریس وابستگی  $[\Gamma^2]$  با  $[\Gamma^1]^2$  جایگذاری می‌شود.

$$\begin{aligned} & EI \left\{ \frac{d^4 w_j(x)}{dx^4} \right\} + m_f U_x^2 \left\{ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right\} \\ & + 2m_f U_x [\Gamma^1] \left\{ \frac{dw_j(x)}{dx} \right\} + N_T \left\{ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right\} \\ & - \mu A_f \left( [\Gamma^1] \left\{ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right\} + U_x \left\{ \frac{d^3 w_j(x)}{dx^3} \right\} \right) \\ & + (m_p + m_f) [\Gamma^1]^2 \{ w_j(x) \} + K \{ w_j(x) \} \\ & + C [\Gamma^1] \{ w_j(x) \} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (37)$$

برای دکوپله کردن معادلات (37) از آنالیز مقادیر ویژه استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} & EI \left\{ \frac{d^4 \hat{w}_j(x)}{dx^4} \right\} + m_f U_x^2 \left\{ \frac{d^2 \hat{w}_j(x)}{dx^2} \right\} \\ & - i2m_f U_x \gamma_j \left\{ \frac{d \hat{w}_j(x)}{dx} \right\} + N_T \left\{ \frac{d^2 \hat{w}_j(x)}{dx^2} \right\} \end{aligned}$$

که در آن  $[R^e]$  ماتریس سفتی دینامیکی المان است. با معلوم بودن نیروهای گرهی، معادله فوق حل و بردار جابجایی گرهی،  $\{\hat{u}^e\}$ ، تعیین می‌شود. در نهایت با جایگذاری این مقادیر در رابطه (51) ثوابت  $\{C\}$  به دست می‌آید:

$$\{C\} = [T_1]^{-1}\{\hat{u}^e\} \quad (60)$$

بعد از به دست آوردن ثوابت  $\{C\}$  و جایگذاری در معادله (44)،  $\hat{w}(x)$  در هر نقطه اختیاری در طول لوله حامل سیال به دست می‌آید.

#### 4- بحث و نتیجه گیری

##### 4-1- مقایسه نتایج به دست آمده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک با روش المان محدود کلاسیک

در این قسمت به منظور نشان دادن دقت و برتری روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نسبت به روش المان محدود کلاسیک، پاسخ زمانی به دست آمده توسط دو روش مذکور با روش تحلیلی مقایسه می‌شود. گسسته‌سازی زمانی در روش المان محدود کلاسیک را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی از جمله تفاضل محدود، ویلسون  $\theta$ ، نیومارک، رانگ کوتا و ... انجام داد. در این مقاله، از روش نیومارک استفاده می‌شود. به منظور بررسی دقت پاسخ به دست آمده از دو روش اخیر با پاسخ تحلیلی، مدل ساده شده از ارتعاشات لوله حامل سیال را که در آن اثر بستر، اثر نیروی محوری، اثر ویسکوزیته و سرعت سیال صرف‌نظر شده است و دارای حل تحلیلی نسبتاً ساده‌ای می‌باشد، در نظر می‌گیریم. معادله حاکم بر سیستم در این حالت به صورت زیر است:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (61)$$

حل تحلیلی برای معادله (61) با شرایط مرزی یک سر گیردار- یک سر آزاد با تحریک  $F = F_0 \sin \Omega t$  در انتهای آزاد به صورت زیر است [38]:

$$w(x, t) = F_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{W_i(x)W_i(L)}{\omega_i^2 - \Omega^2} \left( \sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_i} \sin \omega_i t \right) \quad (62)$$

در رابطه (62)  $W_i$  معرف شکل مود  $i$  ام است که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W_i(x) = \frac{\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x}{\cos \beta_i L + \cosh \beta_i L} - \frac{\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x}{\sin \beta_i L + \sinh \beta_i L} \quad (63)$$

در رابطه فوق  $\omega_i$  فرکانس طبیعی  $i$  ام است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{(m_p + m_f)L^4}}, \quad \beta_i L \cong \frac{(2i-1)\pi}{2} \quad (64)$$

پارامترهای فیزیکی به صورت جدول 1 در نظر گرفته شده است.

هدف، به دست آوردن پاسخ دینامیکی تحت اثر نیروی  $F(t) = 10 \sin(70t)$  اعمال شده در انتهای آزاد لوله است. در شکل 2، پاسخ نقطه میانی لوله با اعمال روش تحلیلی و روش المان محدود کلاسیک نشان داده شده است.

شکل 2 نشان می‌دهد که در روش المان محدود کلاسیک با افزایش تعداد المان‌ها می‌توان به پاسخ با دقت بالا دست یافت که این امر باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود. برای مقایسه دقت روش‌های مذکور، پاسخ

جدول 1 پارامترهای سیستم

Table 1 The system parameters						
$L$ (m)	$E$ (GPa)	$\rho_p$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$\rho_f$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$\mu$ ( $\frac{kg}{m \cdot s}$ )	$D_o$ (m)	$D_i$ (m)
1	210	7860	1000	0.001	0.021	0.018

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}(x)}{dx} \Big|_{x=L} &= \hat{\theta}_2 \\ &= [R_2] \begin{bmatrix} e^{-ik_{w1}L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \\ &= [T_{14}]\{C\} \end{aligned} \quad (50)$$

با ترکیب معادلات (47) تا (50) بردار جابجایی گرهی به دست می‌آید:

$$\{\hat{u}_e\} = \begin{Bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \end{bmatrix} \{C\} = [T_1]\{C\} \quad (51)$$

به‌طور مشابه، نیروی برشی  $\hat{V}$  و گشتاور خمشی  $\hat{M}$  می‌توانند به فرم ماتریسی نوشته شوند:

$$\hat{V}(x) = -EI \begin{bmatrix} ik_{w1}^3 C_1 e^{-ik_{w1}x} + ik_{w2}^3 C_2 e^{-ik_{w2}x} \\ + ik_{w3}^3 C_3 e^{-ik_{w3}x} + ik_{w4}^3 C_4 e^{-ik_{w4}x} \end{bmatrix} \quad (52\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(x) &= -EI \begin{bmatrix} ik_{w1}^3 & ik_{w2}^3 & ik_{w3}^3 & ik_{w4}^3 \\ e^{-ik_{w1}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \\ &= [R'_1]\{\theta\}\{C\} \end{aligned} \quad (52\text{-ب})$$

$$\hat{M}(x) = -EI \begin{bmatrix} k_{w1}^2 C_1 e^{-ik_{w1}x} + k_{w2}^2 C_2 e^{-ik_{w2}x} \\ + k_{w3}^2 C_3 e^{-ik_{w3}x} + k_{w4}^2 C_4 e^{-ik_{w4}x} \end{bmatrix} \quad (53\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} \hat{M}(x) &= -EI \begin{bmatrix} k_{w1}^2 & k_{w2}^2 & k_{w3}^2 & k_{w4}^2 \\ e^{-ik_{w1}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \\ &= [R'_2]\{\theta\}\{C\} \end{aligned} \quad (53\text{-ب})$$

با محاسبه نیروی برشی و گشتاور خمشی در مرزها، روابط (54) تا (57) به دست می‌آیند:

$$\hat{V}(x) \Big|_{x=0} = \hat{V}_1 = [R'_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{C\} = [T_{21}]\{C\} \quad (54)$$

$$\hat{M}(x) \Big|_{x=0} = \hat{M}_1 = [R'_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{C\} = [T_{22}]\{C\} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(x) \Big|_{x=L} &= \hat{V}_2 \\ &= [R'_1] \begin{bmatrix} e^{-ik_{w1}L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}L} \end{bmatrix} \{C\} \\ &= [T_{23}]\{C\} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}(x) \Big|_{x=L} &= \hat{M}_2 \\ &= [R'_2] \begin{bmatrix} e^{-ik_{w1}L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{w2}L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{w3}L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{w4}L} \end{bmatrix} \{C\} \\ &= [T_{24}]\{C\} \end{aligned} \quad (57)$$

با در نظر گرفتن معادلات (54) تا (57) بردار نیروی گرهی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{\hat{F}^e\} = \begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \end{bmatrix} \{C\} = [T_2]\{C\} \quad (58)$$

با جایگذاری  $\{C\}$  از رابطه (51) در رابطه (58) رابطه جابجایی‌های گرهی و نیروهای گرهی به صورت رابطه (59) به دست می‌آیند:

$$\{\hat{F}^e\} = [T_2][T_1]^{-1}\{\hat{u}^e\} = [R^e]\{\hat{u}^e\} \quad (59)$$

روش تحلیلی و روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به دست آمد که در آن از موجک داوپیچیز درجه 8 با مقیاس  $m_s = 10$  استفاده شده است. شکل 4 پاسخ به دست آمده را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی بین پاسخ به دست آمده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک و روش تحلیلی وجود دارد.

2-4- پاسخ دینامیکی لوله حاوی سیال با استفاده از مقیاس‌های مختلف موجک داوپیچیز درجه 8

در این قسمت پاسخ دینامیکی معادله (61) برای نقطه میانی لوله یک سر گیردار- یک سر آزاد با تحریک نیرویی  $F(t) = 10 \sin(70t)$  در انتهای آزاد لوله با استفاده از مقیاس‌های مختلف موجک داوپیچیز درجه 8 استخراج شده و با حل تحلیلی، رابطه (62)، مقایسه می‌شود. بازه زمانی مورد نظر  $[0,0.5]$  ثانیه بوده و پارامترهای فیزیکی یکسان مطابق جدول 1 فرض می‌شوند. این نتایج در شکل 5 نشان داده شده است.

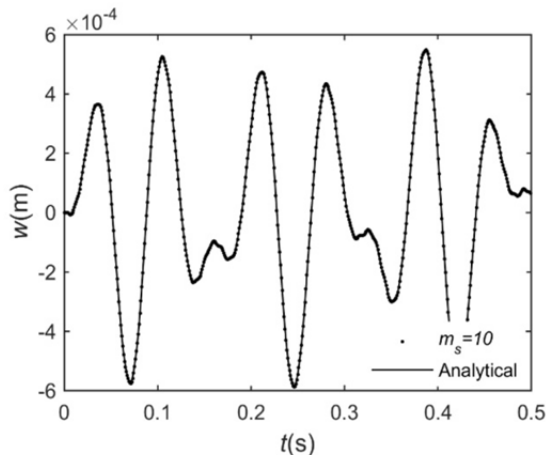


Fig. 4 Vibration response at point  $x = 0.2$  (m) of pipe containing fluid using analytical method and the wavelet- based finite element method  
شکل 4 پاسخ لوله حاوی سیال در نقطه  $x = 0.2$  (m) با استفاده از روش تحلیلی و المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک

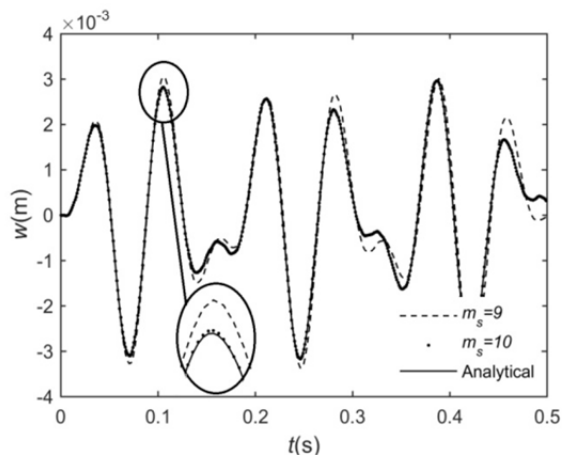


Fig. 5 Vibration response at the midpoint of pipe containing fluid using analytical method and wavelet- based finite element method  
شکل 5 پاسخ زمانی نقطه میانی لوله حاوی سیال با استفاده از روش تحلیلی و روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک

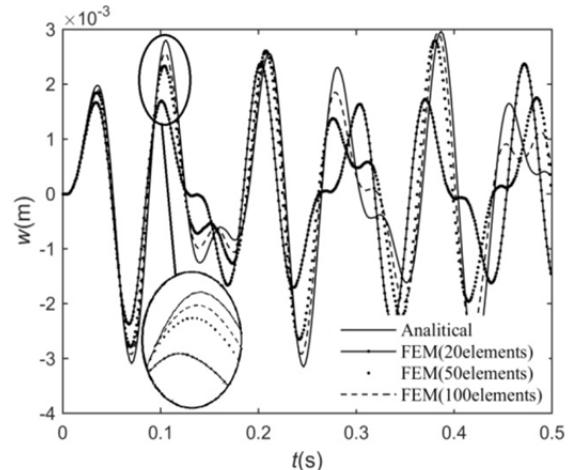


Fig 2 Vibration response at the midpoint of pipe containing fluid using analytical method and the classical finite element method  
شکل 2 پاسخ نقطه میانی لوله حاوی سیال با استفاده از روش تحلیلی و روش المان محدود کلاسیک

سیستم تحت شرایط ذکر شده، با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، روش المان محدود کلاسیک و حل تحلیلی بدست آمد که نتیجه در شکل 3 رسم شده است. برای به دست آوردن پاسخ دینامیکی با روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، از موجک داوپیچیز درجه 8 در مقیاس  $m_s = 10$  استفاده شده است و  $\Delta t$  برای پاسخ در بازه  $[0,0.5]$  ثانیه برابر با  $1/2^{10}$  در نظر گرفته شده است.

با توجه به شکل 3 می‌توان نتیجه گرفت که تنها با در نظر گرفتن یک المان در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، پاسخ به دست آمده با استفاده از این روش تطابق خوبی با روش تحلیلی نسبت به پاسخ به دست آمده از روش المان محدود کلاسیک دارد. همچنین استفاده از تعداد المان‌های کم‌تر در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک باعث افزایش سرعت و دقت در محاسبه پاسخ‌ها می‌شود.

علاوه بر پاسخ ارتعاشی در نقطه میانی لوله حاوی سیال، پاسخ معادله (61) در نقطه  $x = 0.2$  (m) برای تحریک  $F(t) = 10 \sin(70t)$  با استفاده از

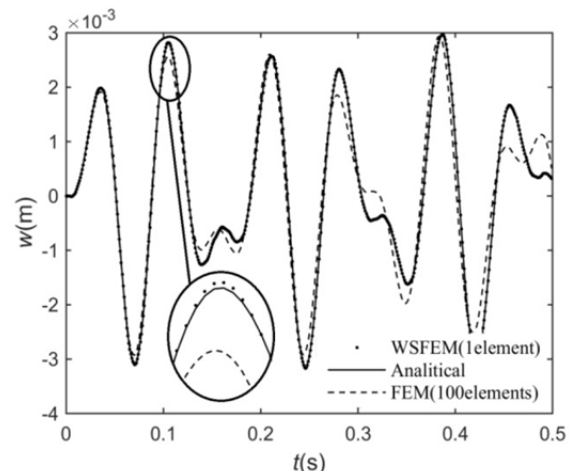


Fig. 3 Vibration response at the midpoint of pipe containing fluid using analytical method, classical finite element method and wavelet- based finite element method  
شکل 3 پاسخ نقطه میانی لوله حاوی سیال با استفاده از روش تحلیلی، روش المان محدود کلاسیک و المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک

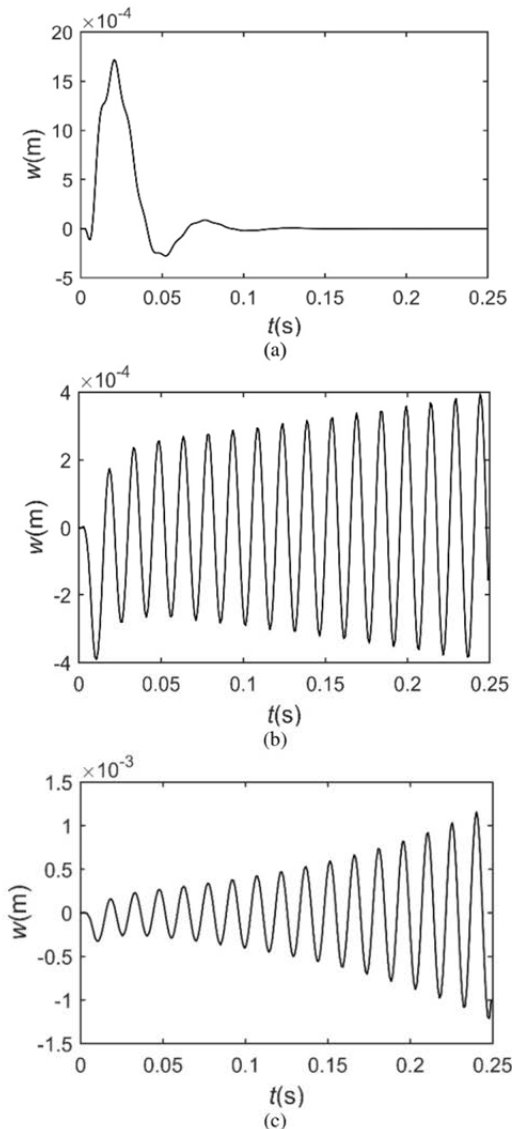


Fig.8 Vibration response at the midpoint of the fluid conveying pipe using the wavelet- based finite element method (a) for  $U_x = 50$  (m/s), (b) for critical speed of  $U_x = 417$  (m/s) and (c) for  $U_x = 425$  (m/s)

شکل 8 پاسخ نقطه میانی لوله حامل سیال با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، (a) برای سرعت 50 متر بر ثانیه، (b) برای سرعت بحرانی 417 متر بر ثانیه، (c) برای سرعت 425 متر بر ثانیه

#### 4-4- بررسی اثر پارامترهای سیستم بر سرعت بحرانی

در این بخش اثر سفتی بستر الاستیک، نیروی محوری و چگالی سیال بر روی سرعت بحرانی بررسی می‌شود. برای این منظور پاسخ زمانی نقطه میانی لوله، با فرض پارامترهای جدول 1 و به ازای سرعت‌های مختلف با استفاده از موجک دابچیز درجه 8 محاسبه شده است. سرعتی که به ازای آن دامنه پاسخ شروع به افزایش کند، سرعت بحرانی است.

شکل 9.a اثر سفتی بستر الاستیک بر روی سرعت بحرانی را نشان می‌دهد. در این حالت  $C = 500$  Ns/m<sup>2</sup>،  $N_T = 100$  N در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش سفتی بستر الاستیک باعث افزایش فرکانس طبیعی، سرعت بحرانی و در نتیجه باعث افزایش محدوده پایداری می‌شود که دلیل آن، افزایش نیروی مقاوم در برابر نیروهای ناپایدار کننده جانبی ناشی از سیال بر جداره لوله در اثر افزایش سفتی بستر است.

از بررسی نتایج می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقیاس تابع مقیاس، پاسخ به حل تحلیلی نزدیک می‌شود. در واقع با افزایش مقیاس در یک بازه زمانی مورد نظر، تعداد نقاط گسسته‌سازی در بازه زمان افزایش یافته و این افزایش تعداد نقاط به بهبود حل کمک می‌کند.

#### 3-4- پاسخ دینامیکی با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک

در این قسمت پاسخ دینامیکی لوله حامل سیال با شرایط مرزی یک سر گیردار مطابق شکل 6، به ازای مقادیر مختلف سفتی و میرایی بستر، تحت اثر نیروهای محوری و عرضی در انتهای آزاد لوله در حضور جریان سیال به دست آمده است. با توجه به همگرایی بالای موجک دابچیز درجه 8 در مقیاس  $m_s = 10$  همان‌طور که در بخش 2-4 مورد بحث قرار گرفت، برای به دست آوردن پاسخ دینامیکی از این موجک استفاده شده و  $\Delta t$  برای پاسخ در بازه  $[0, 0.25]$  ثانیه برابر  $1/2^{10}$  است. پارامترهای مسأله به صورت جدول 1 مفروض است و نیروی عرضی اعمالی در انتهای آزاد به صورت  $F(t) = 50e^{-100t}$  به عنوان تحریک اولیه در نظر گرفته شده است. منحنی تغییرات این نیرو در شکل 7 نشان داده شده است. با اعمال روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به معادله (11)، پاسخ زمانی برای نقطه میانی لوله به ازای  $N_T = 100$  N،  $C = 50$  Ns/m<sup>2</sup> و سفتی  $K = 4000$  N/m<sup>2</sup> برای سرعت 50 متر بر ثانیه در شروع محدوده ناپایدار و برای سرعت 425 متر بر ثانیه در ناحیه ناپایدار به دست آمده و در شکل 8 نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل 8 مشخص است با افزایش سرعت سیال و رسیدن آن به سرعت بحرانی، دامنه پاسخ شروع به افزایش کرده و با افزایش سرعت بعد از سرعت بحرانی سیستم وارد محدوده ناپایداری می‌شود.

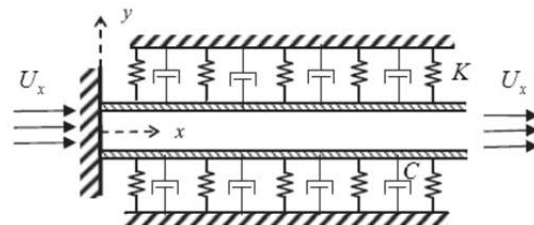


Fig. 6 Mathematical model of a cantilever viscous fluid conveying pipe embedded in visco-elastic foundation

شکل 6 مدل ریاضی لوله یک سر گیردار حامل سیال ویسکوز واقع بر بستر ویسکو-الاستیک

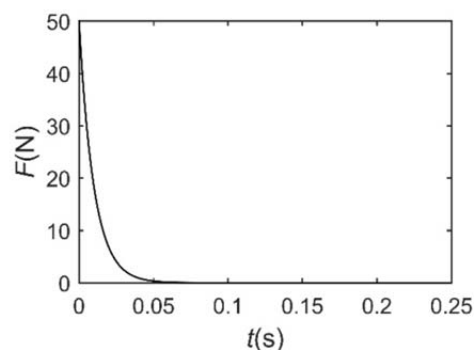


Fig. 7 The initial excitation force applied at the pipe free end

شکل 7 نیروی تحریک اولیه اعمالی در انتهای آزاد لوله حامل سیال



5- نتیجه گیری

در این مقاله پاسخ ارتعاشی لوله حاوی سیال یک سر گیردار- یک سر آزاد تحت اثر نیروی هارمونیک با استفاده از روش تحلیلی، روش المان محدود کلاسیک و روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به دست آمد و با یکدیگر مقایسه شد. در روش المان محدود کلاسیک از روش نیومارک برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شد و پاسخ سیستم با بیش از یک المان در حوزه مکان به دست آمد. در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نیز پاسخ سیستم با استفاده از گسسته‌سازی در حوزه زمان و استفاده از توابع مقیاس موجک‌های داووبچیز به عنوان توابع پایه و همچنین استفاده از یک المان در حوزه مکان حاصل شد. نتایج نشان داد که افزایش تعداد المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک باعث افزایش دقت شده و پاسخ به حل تحلیلی نزدیک می‌شود که این افزایش المان‌ها حجم و هزینه محاسبات را افزایش می‌دهد. همچنین نشان داده شد که تنها با در نظر گرفتن یک المان در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، می‌توان به پاسخ با تطابق خوبی با روش تحلیلی نسبت به روش المان محدود کلاسیک دست یافت که این عامل باعث افزایش سرعت و دقت در محاسبه پاسخ‌ها می‌شود. همچنین پاسخ به ازای مقیاس‌های متفاوت موجک درجه 8 به دست آمد. می‌توان گفت که با افزایش مقیاس برای هر درجه از موجک داووبچیز در یک بازه زمانی مورد نظر، دقت پاسخ به دست آمده افزایش می‌یابد. سپس پاسخ ارتعاشی لوله حامل سیال ویسکوز واقع بر روی بستر ویسکو-الاستیک با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک به دست آمد. برای به دست آوردن سرعت بحرانی از نمودار پاسخ سیستم استفاده شد، به طوری که با رشد دامنه پاسخ در یک سرعت خاص، سرعت بحرانی سیستم بدست آمد. همچنین تأثیر پارامترهای سیستم بر سرعت بحرانی بررسی شد. نتایج نشان داد که با افزایش سفتی بستر الاستیک، سرعت بحرانی افزایش یافته و در نتیجه به دلیل افزایش نیروی مقاوم در برابر نیروهای ناپایدار کننده جانبی ناشی از سیال بر جداره لوله، محدوده پایداری، بزرگ‌تر می‌شود. همچنین افزایش نیروی محوری فشاری و افزایش چگالی سیال هر دو از عوامل کاهش سرعت بحرانی و کوچکتر شدن ناحیه پایداری هستند.

6- علایم و نشانه‌ها

$A_f$	سطح مقطع سیال ( $m^2$ )
$C$	ضریب میرایی ( $N.s.m^{-2}$ )
$E$	مدول یانگ (Gpa)
$F$	تابع نیرو (N)
$I$	ممان اینرسی سطح مقطع ( $m^4$ )
$K$	سفتی الاستیک ( $N.m^{-2}$ )
$k_w$	عدد موج
$L$	طول (m)
$M$	گشتاور (N.m)
$m_f$	جرم بر واحد طول سیال داخلی ( $kg.m^{-1}$ )
$m_p$	جرم بر واحد طول لوله ( $kg.m^{-1}$ )
$m_s$	مقیاس تابع مقیاس موجک داووبچیز
$N$	درجه موجک داووبچیز
$n$	تعداد نقاط گسسته سازی شده
$P$	فشار (Pa)
$t$	مختصه زمانی (s)

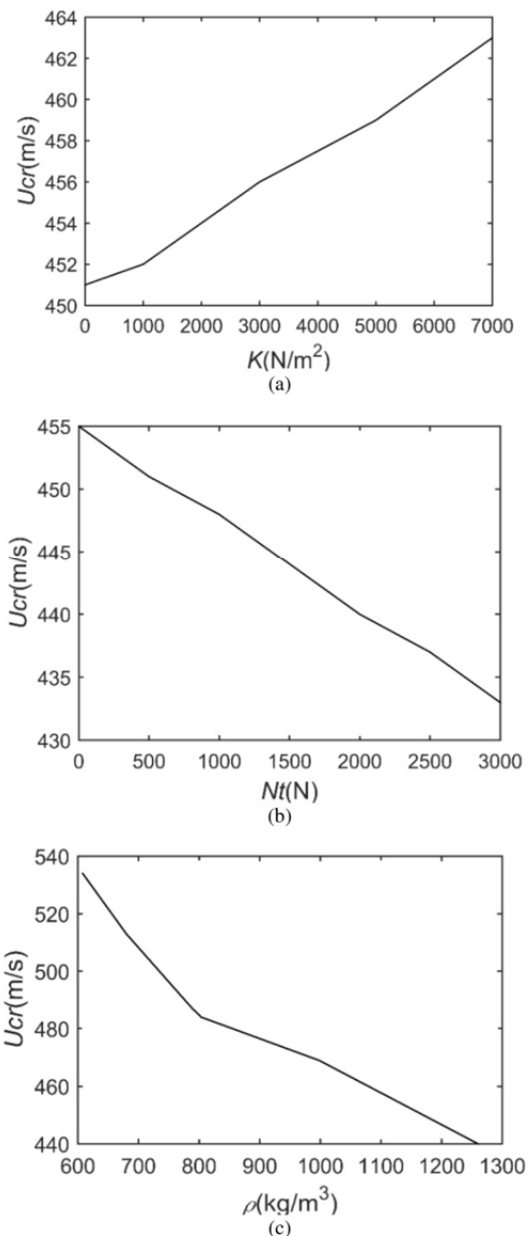


Fig.9 The variation of critical speed against (a) the elastic foundation stiffness, (b) the axial compression force and (c) the fluid density

شکل 9 تغییرات سرعت بحرانی در برابر (a) سفتی بستر الاستیک، (b) نیروی محوری فشاری و (c) چگالی سیال

اثر نیروی محوری در شکل 9.b نشان داده شده است. این نتایج به ازای سفتی  $K = 2000 N/m^2$ ، ضریب میرایی  $C = 500 Ns/m^2$  محاسبه شده است. می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نیروی محوری فشاری، سرعت بحرانی کم‌تر و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

برای بررسی اثر چگالی، شکل 9.c، علاوه بر آب، فرئون 12، آمونیاک، بنزین، نفت سفید، گلیسرین، اتیلن گلیکول و اتانل نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در این حالت، مشخصات بستر به صورت  $K = 2000 N/m^2$ ،  $C = 500 Ns/m^2$  و نیروی محوری فشاری  $N_f = 100 N$  در نظر گرفته شده است. نتایج، نشان می‌دهد که با افزایش چگالی سیال، سرعت بحرانی کاهش می‌یابد.

[13] S. I. Lee, J. Chung, New non-linear modelling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 2, pp. 313-325, 2002.

[14] D. Meng, H. Guo, S. Xu, Non-linear dynamic model of a fluid-conveying pipe undergoing overall motions, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 2, pp. 781-793, 2011.

[15] J. D. Jin, Z. Y. Song, Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 20, No. 6, pp. 763-783, 2005.

[16] L. Wang, A further study on the non-linear dynamics of simply supported pipes conveying pulsating fluid, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 1, pp. 115-121, 2008.

[17] Y. Modarres-Sadeghi, M. P. Paidoussis, Nonlinear dynamics of extensible fluid-conveying pipes, supported at both ends, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 25, No. 3, pp. 535-543, 2009.

[18] Q. Qian, L. Wang, Q. Ni, Instability of simply supported pipes conveying fluid under thermal loads, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 8, pp. 413-417, 2008.

[19] L. Wang, Q. Ni, In-plane vibration analyses of curved pipes conveying fluid using the generalized differential quadrature rule, *Computers & Structures*, Vol. 86, No. 2008, pp. 133-139, 2007.

[20] C. K. Chen, S. S. Chen, Application of the differential transformation method to a non-linear conservative system, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 154, No. 2, pp. 431-441, 2004.

[21] Q. Ni, Z. L. Zhang, L. Wang, Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, No.16, pp. 7028-7038, 2011.

[22] D. G. Gorman, J. M. Reese, Y. L. Zhang, Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No.2, pp. 379-392, 2000.

[23] A. Pramila, On the gyroscopic terms appearing when the vibration of fluid conveying pipe is analyzed using the FEM, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No.3, pp. 515-516, 1986.

[24] L. G. Olson, D. Jamison, Application of a general purpose finite element method to elastic pipes conveying fluid, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 11, No.2, pp. 207-222, 1997.

[25] U. Lee, H. Oh, The spectral element model for pipelines conveying internal steady flow, *Engineering Structures*, Vol. 25, No.8, pp. 1045-1055, 2003.

[26] U. Lee, J. Park, Spectral element modelling and analysis of a pipeline conveying internal unsteady fluid, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 273-292, 2006.

[27] J. S. Wu, P. Y. Shih, The dynamic analysis of a multi-span fluid-conveying pipe subjected to external load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 2, pp. 201-215, 2001.

[28] H. L. Dai, L. Wang, Q. Qian, J. Gan, Vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid with consideration of steady combined force by transfer matrix method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, No. 5, pp. 2453-2464, 2012.

[29] M. Mitra, S. Gopalakrishnan, *Wavelet Methods for Dynamical Problems*, New York, Taylor & Francis Group, London, pp. 53-95, 2010.

[30] M. Mitra, S. Gopalakrishnan, Wavelet-based spectral finite element for analysis of coupled wave propagation in higher order composite beams, *Composite Structures*, Vol. 73, No. 2006, pp. 263-277, 2005.

[31] A. Mokhtari, H. R. Mirdamadi, M. Ghayour, Dynamic Analysis of Prestressed Timoshenko Beam by using Wavelet-Based Spectral Finite Element Method, *Mechanics of Fluids and Structures*, Vol. 6, No. 4, pp. 11-22, 2017. (in Persian فارسی)

[32] M. Rezaee, V. A. Maleki, An analytical solution for vibration analysis of carbon nanotube conveying viscose fluid embedded in visco-elastic medium, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 229, No. 4, pp. 644-650, 2014.

[33] B. R. Munson, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[34] G. Beylkin, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 6, No. 6, pp. 1716-1740, 1992.

[35] K. Amaratunga, J. R. Williams, Time integration using wavelets, *Proceedings of SPIE, Wavelet Application for Dual Use*, Vol. 2491, No.1, pp. 894-902, 1995.

[36] K. Amaratunga, J. R. Williams, Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 3, pp. 243-285, 1997.

[37] J. R. Williams, K. Amaratunga, A discrete wavelet transform without edge effects using wavelet extrapolation, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. 3, No. 4, pp. 435-449, 1997.

[38] S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, New Jersey, pp. 347-348, 2007.

$U_x$	سرعت جریان محوری سیال ( $m.s^{-1}$ )
$V$	نیروی برشی (N)
$W$	شکل مود
$w$	پاسخ ارتعاشی (m)
$x$	مختصه مکانی (m)
<b>علامه یونانی</b>	
$[r^1]$	ماتریس ضرایب وابستگی مرتبه اول
$[r^2]$	ماتریس ضرایب وابستگی مرتبه اول
$\Omega$	فرکانس تحریک ( $rad.s^{-1}$ )
$\Omega_{j-k}^1$	ضرایب وابستگی مشتق مرتبه اول
$\Omega_{j-k}^2$	ضرایب وابستگی مشتق مرتبه دوم
$\Phi(\tau)$	تابع مقیاس موجک داوپیچیز
$\varphi(\tau)$	تابع مقیاس موجک داوپیچیز در مقیاس دلخواه
$\gamma_j$	مقادیر ویژه در حل غیربرپودیک
$\mu$	ویسکوزیته ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\mu_j^1$	گشتاور تابع مقیاس
$\rho$	چگالی ( $kg.m^{-3}$ )
$\tau$	نقاط زمانی گسسته سازی شده (s)
$\omega$	فرکانس طبیعی ( $rad.s^{-1}$ )

7- مراجع

[1] H. Ashley, G. Land, Bending vibration of a pipe-line containing flowing fluid, *Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, Vol. 17, No. 3, pp. 229-232, 1950.

[2] T. B. Benjamin, Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. I. Theory, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and physical Sciences*, Vol. 261, No. 1307, pp. 457-486, 1961.

[3] R. Gregory, M. Paidoussis, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. I. Theory, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and physical Sciences*, Vol. 293, No. 1435, pp. 512-527, 1966.

[4] R. Gregory, M. Paidoussis, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. II. Experiments, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 293, No. 1435, pp. 528-542, 1966.

[5] A. Marzani, M. Mazzotti, E. Viola, P. Vittori, et al, FEM formulation for dynamic instability of fluid-conveying pipe on nonuniform elastic foundation, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40, No. 1, pp. 83-95, 2012.

[6] M. P. Paidoussis, N. T. Issid, Dynamic stability of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 33, No. 3, pp. 267-294, 1974.

[7] I. Lottati, A. Kornecki, The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 109, No. 2, pp. 327-338, 1986.

[8] S. Imanzade, A. Denis, A. Marche, Simplified uncertainties analysis of continuous buried steel pipes on an elastic foundation in the presence of low stiffness zones, *Computers and Geotechnics*, Vol. 48, No. 2013, pp. 62-71, 2012.

[9] X. Yang, T. Yang, J. Jin, Dynamic stability of a beam-model viscoelastic pipe for conveying pulsative fluid, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 20, No. 4, pp. 350-356, 2007.

[10] V. M. Vassilev, P. A. Djondjorov, Dynamic stability of viscoelastic pipes on elastic foundations of variable modulus, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, No. 1, pp. 141-419, 2006.

[11] K. R. Chellapilla, H. Sinha, Critical velocity of fluid conveying pipes resting on two parameter foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 302, No. 1, pp. 387-397, 2007.

[12] U. Lee, C. H. Pak, S. C. Hong, The dynamics of a piping system with internal unsteady flow, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 2, pp. 297-311, 1995.