ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل دینامیکی و کنترل ارتعاشات پانل استوانه‌ای چندلایه با استفاده از وصله پیزوالکتریک بهینه شده

محمدرضا ساویز[1*]، وحید رومی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذر بایجان، تبریز
2- استادیار، ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذر بایجان، تبریز
*تبریز، صندوق پستی53751-71379، saviz@azaruniv.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 14 بهمن 1396
پذیرش: 04 اردیبهشت 1397
ارائه در سایت: 10 خرداد 1397

کلید واژگان:
پانل استوانه‌ای مرکب چندلایه
وصله عملگر پیزوالکتریک
المان محدود
کنترل ارتعاشات

چکیده

در این تحقیق، کنترل ارتعاشات پانل استوانه‌ای مرکب چندلایه تحت بار دینامیکی بوسیله وصله عملگر پیزوالکتریک بهینه برای اولین بار بررسی شده است. به‌منظور حل معادلات دینامیک سازه با وصله پیزوالکتریک، از روش المان محدود استفاده شده، که براساس فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مدل لایه معادل با تغییر شکل‌های زاویه‌ای متفاوت برای پوسته و وصله پیزو توسعه یافته است. معادلات حاکم بر پانل با وصله پیزو از طریق اصل همیلتون به دست می‌آیند و با استفاده از المان هشت گرهی روی لایه میانی پوسته تجزیه می‌شوند تا دستگاه معادلات ماتریسی حاصل شود. برای یافتن محل و اندازه بهینه برای عملگر پیزوالکتریک از معیار حداکثر کنترل‌پذیری استفاده شده است. طبق قانون کنترلی مورد استفاده، ولتاژ اعمال شده به وصله پیزوالکتریک متناسب با برآیند مولفه‌های سرعت در نقطه محل نصب حسگر می‌باشد. جهت صحه‌گذاری عملکرد فرمولبندی و مدل المان محدود، نتایج به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی پانل استوانه‌ای چند لایه بدون وصله با مراجع موجود مقایسه شده‌اند. سپس با داشتن دینامیک سیستم بهینه شده، پاسخ فرکانسی برای حالات کنترلی حلقه باز و بسته به‌دست آمده است و در انتها تاثیر مقادیر بهره کنترلی و ابعاد هندسی پانل و وصله روی پاسخ زمانی و سرعت میرا شدن ارتعاشات به نمایش گذاشته شده است.

Dynamic analysis and vibration control of laminated cylindrical panel with optimal piezoelectric patch

Mohammad Reza Saviz[1*], Vahid Roomi[2]

Mechanical Engineering Department, Azarbaijan shahid madani University, Tabriz, Iran
Department of Mathematics, Azarbaijan shahid madani University, Tabriz, Iran
*P.O.B. 53751-71379, Tabriz, Iran, saviz@azaruniv.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 February 2018
Accepted 24 April 2018
Available Online 31 May 2018

Keywords:
Laminated composite cylindrical panel
Piezoelectric actuator patch
Finite Element
Vibration control

ABSTRACT

In this research, control of vibration in multilayered cylindrical panel with piezoelectric patch, under dynamic load is investigated. The finite element method is used to solve the dynamic equations of the structure, which is based on first-order shear deformation theory, and equivalent single layer models with different rotations for the substrate and the piezoelectric patch is developed. The governing equations are obtained by using the Hamilton's principle of virtual work, are discretized over the mid-plane, by using eight node shell element, leading into the matrix system of equations. The maximum controllability criterion is used for finding the optimal size and location of piezo-patch. According to the used control law, the applied voltage on the piezo-patch is proportional to the radial velocity component at the point, where the sensor is installed. In order to evaluate the performance of the formulation and finite element model, the natural frequencies obtained for the substrate laminated panel are compared with those in the literature. Then, having the dynamics of the optimal system, the frequency response for open and closed loop controls are studied. Finally, the effect of controller gain values and dimensions of panel and patch on the time response and damping rate of vibrations are illustrated.

1- مقدمه

در سال‌های اخیر با پیشرفت‌هایی که در زمینه سازه‌های هوشمند و مهندسی کنترل پدید آمده است، کنترل تغییر شکل و ارتعاشات اجسام الاستیک مانند سازه‌های فضایی بخصوص بال هواپیما تبدیل به چالش بسیار مهمی شده است. یکی از روش‌هایی که برای دستیابی به امر فوق مورد استفاده قرار می‌گیرد، استفاده از سازه‌های هوشمند یعنی سازه‌هایی باحسگرها، عملگرها و شبکه‌های پردازشگر با دقت بسیار بالا می‌باشد. با مرور کارهای انجام شده می‌توان دریافت درصورتی که هدف از کنترل سازه مشاهده و کنترل جابجایی تمام نقاط آن باشد، حسگر و عملگر باید در سرتاسر سازه گسترده یعنی به‌صورت لایه‌هایی از یک سازه چند لایه باشند. عملگرها و حسگرها درسیستم‌های فوق باید رفتار ممتد داشته باشند زیرا اندازه‌گیری و اعمال تغییر مکان به‌صورت موضعی یا نقطه‌ای مانند موتور الکتریکی مقاصدکنترلی

را به نحو مطلوب برآورده نمی‌کند [1]. از طرفی دیگر جهت کاهش هزینه و وزن سازه، در مواردی که پایش و کنترل جابجایی و ارتعاشات سازه فقط در قسمت‌هایی محدود موردنظر است، می‌توان از حسگرها و عملگرهای موضعی استفاده کرد [2]. مواد پیزوالکتریک به‌دلیل قابلیت تبدیل کار مکانیکی به میدان الکتریکی (خاصیت مستقیم پیزوالکتریک) و میدان الکتریکی به تغییر شکل مکانیکی (خاصیت معکوس پیزوالکتریک) بعنوان حسگر و عملگر با خواص گسترده، مورد توجه محققین قرار گرفته است. بنابراین با به‌کار بردن یک یا چند وصله پیزو الکتریک در پوسته‌های چندلایه می‌توان به رفتار ارتعاشی و شکل مورد نظر دست یافت. تیزو و زانگ [3] معادلات اساسی مواد پیزوالکتریک را با استفاده از اصل همیلتون و پیزوالکتریسیته خطی برای ارتعاشات پوسته‌های پیزوالکتریک به‌دست آوردند. تیر اویلر-برنولی به عنوان مدل پایه بسیار ساده برای برخی از سازه‌های صنعتی مانند بال هواپیما، پره بالگرد و بازوی ربات در بررسی‌های محققان به‌کار گرفته شده است. در بسیاری از تحقیقات انجام شده در زمینه کنترل ارتعاشات سازه‌های هوشمند، به‌دلیل حساسیت مواد پیزوالکتریک، الگوریتم‌های کنترل بهینه مورد توجه قرار گرفته است. بعنوان مثال در مرجع [4]، ارتعاشات آزاد تیر اویلر بوسیله عملگر پیزوالکتریک بهینه میرا شده است. این نوع مطالعات عمدتاً دارای رویکرد کنترل محور با نوآوری در زمینه به‌کارگیری روش‌های کنترلی جدید می‌باشند [5]. البته در سال‌های اخیر تیر با جنس ایزوتروپیک جای خود را به مواد مرکب و یا هدفمند و نو داده است [6]. دسته بعدی از سازه‌ها که به دلیل راحتی به‌دست آوردن و حل معادلاتشان، بعد از شکل هندسی تیر در مطالعات کنترل ارتعاشات مورد توجه قرار گرفته‌اند ورق‌های کامپوزیتی می‌باشند [7]. کاربرد استوانه در مخازن، لوله‌های حاوی سیال و کاربرد پانل استوانه‌ای در سازه‌های سبک فضایی بسیار حائز اهمیت است. پانل استوانه‌ای به‌دلیل داشتن انحنای عرضی، صلابت بیشتری از تیر و ورق دارد. البته با توجه به این‌که حل المان محدود پوسته مرکب مجهز به عملگر پیزوالکتریک از حل ورق مشکل‌تر می‌باشد، تعداد کل مقالات موجود راجع به کنترل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای از 10 مورد تجاوز نمی‌کند که در طول مقاله به تعدادی از آن‌ها اشاره خواهد شد. به‌خصوص این‌که طبق جستجوی انجام شده، در زمینه تحلیل دینامیکی و کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مرکب با استفاده از وصله پیزوالکتریک مقالات انگشت شماری موجود می‌باشد. جهت به‌دست آوردن معادلات دینامیک سازه‌های مرکب محققان عمدتاً از دو روش تحلیلی و المان محدود استفاده کرده‌اند. به‌طور کلی این دو رویکرد برای مدل‌سازی دینامیک سازه‌های هوشمند نیز به‌کار گرفته می‌شوند. با توجه به سختی، پیچیده‌گی و محدودیت‌های حل تحلیلی ازجمله شرایط مرزی و سرتاسری بودن لایه پیزوالکتریک، از اواخر دهه 70 روش‌های المان محدود برای سازه‌های با هندسه پیچیده، جنس غیرهمگن و یا تکیه‌گاه‌های مختلف مورد توجه محققان بوده است. باندپادای و همکارش[8] مروری بر مقالات متعدد چاپ شده در این زمینه چاپ کرده‌اند. ازجمله اولین کارهای انجام شده در زمینه کنترل فعال سازه‌ها با استفاده از روش المان محدود توسط بالاس انجام شده است[9]. باز و پوه [10] با استفاده از معیار کنترل‌پذیری بعنوان تابع عملکرد برای کنترل بهینه سیستم مسئله قراردادن بهینه عملگرهای با اندازه معین را حل کردند. آن‌ها با استفاده از روش اجزاء محدود، المآن‌های جرم و سفتی عملگرها را برای یک تیر با عملگرهای پیزوالکتریک به‌دست آوردند سپس با استفاده از سه روش مختلف شرایط کنترل بهینه را ارضاء کردند ولی ابعاد عملگر نسبتا بزرگ به‌دست آمد. درکار مشابهی توسط سونار و رائو [11] برای عملگر با ابعاد معین، محل بهینه را با استفاده از روش المان محدود برای کنترل ارتعاشات ورق به‌دست آمده است و نتایج به تیر یکسر گیردار منتهی شده است. در کار دیگری یوسفی کما و همکارانش [12] سه روش بهینه‌سازی را به‌کار برده‌اند. در این کار پارامترهای بهینه‌سازی برای ورق عبارتند از طول، عرض و محل قرار گرفتن عملگر. در این مرجع معیاری مستقل از کنترل مدار بسته پیشنهاد شده که بر مبنای انرژی کرنشی می‌باشد. بر این اساس محل بهینه برای قرار دادن عملگر در مد اول و دوم محلی بوده که سازه حداکثر انرژی کرنشی را دارد. اگر در یک پوسته، هدف کنترل همزمان رفتار دینامیکی تمام نقاط سازه و یا تعداد نامعلومی از مدهای ارتعاشی باشد، باید از لایه‌های سرتاسری پیزوالکتریک بعنوان عملگر استفاده شود[13و 14]، البته این روش مشکلات خاص خود مانند تاثیر ناخواسته[1] مدهای ارتعاشی روی یکدیگر را دارد. اغلب مقالات کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مجهز به عملگر پیزوالکتریک، براساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها بررسی شده‌اند [15]. همان‌طوری‌که اشاره شد، به‌منظور کاهش وزن سازه و کنترل تعداد مشخصی از مدهای ارتعاشی بهتر است از عملگرهای وصله‌ای به‌جای لایه کامل استفاده شود. کاربرد وصله‌های پیزوالکتریک در کنترل ارتعاشات موضعی استوانه بسته مرکب با استفاده از تئوری کلاسیک توسط ری و همکارانش [16] مطالعه شده است. آن‌ها در کار دیگری اثر وصله‌های مرکب دارای الیاف پیزوالکتریک را روی میرایی ارتعاشات آزاد و پاسخ فرکانسی پوسته بسته استوانه‌ای چندلایه با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند [17].

در کار حاضر، مسئله کنترل فعال جهت میرایی ارتعاشات پانل استوانه‌ای مرکب چندلایه تحت بار دینامیکی بوسیله یک وصله عملگر پیزوالکتریک بهینه بررسی شده است. به‌منظور حل معادلات دینامیک سازه با وصله پیزوالکتریک، از روش المان محدود استفاده شده است که مدل آن بر اساس فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[2] و تقریب لایه‌های معادل با تغییر شکل‌های زاویه‌ای متفاوت برای پوسته و وصله پیزوالکتریک توسعه یافته است. معادلات حاکم بر پانل مجهز به وصله پیزوالکتریک با استفاده از روش حداقل انرژی به‌دست می‌آید که با استفاده از المآن‌های هشت گره‌ای روی سطوح لایه میانی پوسته و وصله تجزیه می‌شوند تا دستگاه معادلات ماتریسی به‌صورت فضای حالت[3] حاصل شود. برای یافتن محل و اندازه بهینه برای عملگر پیزوالکتریک از روش کنترل بهینه برای رگولاتور خطی مرتبه دوم با معیار حداکثر کنترل‌پذیری استفاده شده است. طبق قانون کنترلی مورد استفاده، ولتاژ اعمال شده به وصله پیزوالکتریک متناسب با برآیند مولفه‌های سرعت در نقطه محل نصب حسگر می‌باشد. جهت صحه‌گذاری عملکرد معادلات و مدل المان محدود، نتایج به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی پانل استوانه‌ای چندلایه بدون وصله با مراجع موجود مقایسه می‌شوند. سپس باداشتن دینامیک سیستم بهینه شده، پاسخ فرکانسی برای حالات کنترلی حلقه باز و بسته به‌دست می‌آید و در انتها تاثیر مقادیر بهره کنترلی و ابعاد هندسی پانل و وصله روی پاسخ زمانی و نحوه میرا شدن ارتعاشات پانل به نمایش گذاشته می‌شود.

2- معادلات حاکم

در "شکل 1" پانل استوانه‌ای چندلایه با یک وصله پیزوالکتریک نشان داده

[1] spillover
[2] spillover
[3] state space

شده است. L طول، R شعاع میانگین پوسته، h ضخامت وN تعداد لایه‌های پانل کامپوزیتی می‌باشند. L_p، R_p و h_p به ترتیب طول، شعاع میانگین و ضخامت وصله پیزوالکتریک می‌باشند. زاویه الیاف در لایه‌های پانل استوانه‌ای نسبت به به محور x می‌باشند. همان‌طوری‌که در این شکل مشاهده می‌شود، روی سطح خارجی پوسته وصله پیزوالکتریک بعنوان حسگر و عملگر چسبانده شده است. بدین ترتیب برای عمل حسگر و عملگر هم‌مکانی[1] بوجود می‌آید یعنی خروجی حسگر در هر نقطه دلخواه از وصله به‌عنوان مبنایی برای تعیین ولتاژ عملگری ورودی به وصله استفاده می‌شود. با وجود این‌که در مدل المان محدود تغییر مکان و سرعت هر نقطه قابل محاسبه می‌باشد، در برخی از مقالات از المان حسگر مجزا روی پوسته استفاده می‌شود.

"شکل 2" محورهای مختصات و سینماتیک تغییر شکل براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را نشان می‌دهد. مبداء مختصات روی لایه میانی پوسته استوانه‌ای قرار گرفته است به‌طوری‌که $x=0, L$ دو انتهای پوسته را نشان می‌دهند. مختصات مرزهای بالا و پایین هر لایه kام به ترتیب h_{k+1}و h_k می‌باشند. v_o، u_o مولفه‌های جابجایی انتقالی لایه میانی، θ_x , ϕ_x زوایای دوران نرمال بر لایه‌های میانی پانل و وصله حول محور y و بالاخره θ_y , ϕ_y زوایای دوران نرمال بر لایه میانی پانل و وصله حول محور x می‌باشند.

بنابراین مولفه‌های تغییر شکل در هر نقطه دلخواه از سازه به‌صورت ذیل نوشته می‌شوند.

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + \langle z-h/2\rangle \phi_x(x,y,t) + (z - \langle z-h/2\rangle)\theta_x(x,y,t) \tag{1-الف}$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + \langle z-h/2\rangle \phi_y(x,y,t) + (z - \langle z-h/2\rangle)\theta_y(x,y,t) \tag{1-ب}$$

در روابط فوق، میدان تغییر شکل برشی مرتبه اول حاکم بر پوسته و وصله با استفاده از علامت براکت <> که نشان دهنده تابع تکینگی است، نوشته شده است. فرض می‌شود جابجایی شعاعی $w(x,y,t)$ در کل سازه مستقل از ضخامت و در لایه‌های مختلف ثابت می‌باشد. مولفه‌های تغییر مکان و تغییر زاویه روی لایه میانی $(z=0)$ را در قالب بردارهای تعمیم یافته جابجایی انتقالی $\{d_t\}$ و دورانی $\{d_r\}$می‌توان نوشت

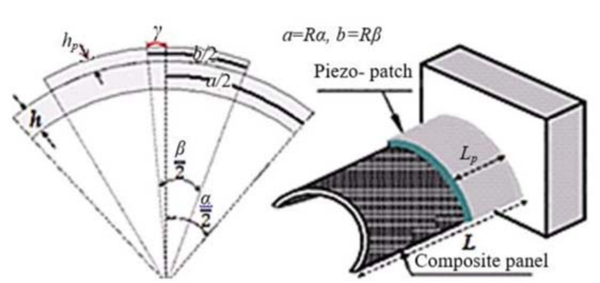

Fig. 1 Geometry of laminated cylindrical panel with piezo-patch

شکل 1 هندسه پانل استوانه‌ای چندلایه با یک وصله پیزوالکتریک

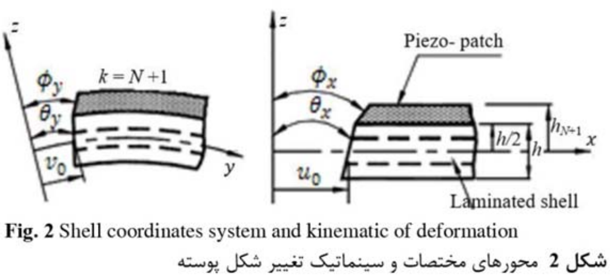

Fig. 2 Shell coordinates system and kinematic of deformation

شکل 2 محورهای مختصات و سینماتیک تغییر شکل پوسته

$$\{d_t\} = [u_0 \quad v_0 \quad w]^{\mathrm{T}}$$
$$\{d_r\} = [\theta_x \ \theta_y \ \phi_x \ \phi_y]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

با توجه به استفاده از قانون انتگرال‌گیری انتخابی[2] به‌منظور جلوگیری از قفل شدن برشی، حالت کرنش در هر نقطه دلخواه از پوسته به دو دسته کرنش واقع در صفحه $\{\varepsilon_b\}$ و کرنش برشی عرضی $\{\varepsilon_s\}$ تقسیم می‌شود

$$\{\varepsilon_b\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]^{\mathrm{T}}, \qquad \{\varepsilon_s\} = [\varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz}]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

که در آن ε_y و ε_x کرنش‌های نرمال و ε_{xy}، ε_{xz} و ε_{yz} کرنش‌های برشی هستند. از طرفی در الاستیسیته خطی، روابط کرنش- جابجایی در مختصات استوانه ای (r,θ,z) به‌صورت ذیل است

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \epsilon_\theta = \frac{1}{r}(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}), \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\epsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v + r\frac{\partial v}{\partial r}),$$
$$\epsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{4}$$

این روابط برای فرضیات لایه معادل (پوسته‌های نسبتاً نازک) و در مختصات استفاده شده در این مقاله ("شکل 2") به فرم زیر در می‌آیند

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \epsilon_y = \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \epsilon_z = 0$$
$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5}$$
$$y = R\theta \tag{6}$$

با تر کیب معادلات (1) تا (5)، برای هرکدام از بردارهای کرنش واقع در صفحه و برشی عرضی، سه مولفه برحسب کرنش‌های انتقالی و دورانی برای تئوری مرتبه اول برشی می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} \{\epsilon_s\}_c \\ \{\epsilon_s\}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{2\times2}] & [Z_3] \\ [I_{2\times2}] & [Z_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\epsilon_{st}\} \\ \{\epsilon_{sr}\} \end{bmatrix} \tag{7}$$

که I ماتریس همانی (واحد) می‌باشد و اندیس‌های c و p به ترتیب نشان دهنده کرنش‌های متعلق به پوسته کامپوزیتی و وصله‌های پیزوالکتریک می‌باشند. سایر ماتریس‌ها و بردارهای کرنش تعمیم یافته نیز به‌صورت ذیل تعریف می‌شوند.

$$\{\epsilon_{bt}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{w}{R} + \frac{\partial v_0}{\partial y} & \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\{\epsilon_{br}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\{\epsilon_{st}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v_0}{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \ \{\epsilon_{sr}\} = \{d_r\} \tag{8}$$

$$[Z_1] = z[[I_{3\times3}] \quad [O_{3\times3}]],$$
$$[Z_2] = \begin{bmatrix} \frac{h}{2}[I_{3\times3}] & \left(z - \frac{h}{2}\right)[I_{3\times3}] \end{bmatrix},$$

$$[Z_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{z}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[Z_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2R} & 0 & \frac{z-h/2}{R} \end{bmatrix} \tag{9}$$

در ماتریس‌های رابطه (9)، O ماتریس صفر 3×3 می‌باشد. بردارهای تنش واقع در صفحه σ_x، σ_y و σ_{xy} و تنش برشی عرضی σ_{yz}و σ_{xz} متناظر با کرنش‌های تعریف شده در رابطه (7) به‌صورت ذیل نوشته می‌شوند

$$\{\sigma_b\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^{\mathrm{T}} \text{و} \ \{\sigma_s\} = [\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

روابط اساسی تنش–کرنش برای هر لایه $k=1..N$ام ساخته شده از ماده اورتوتروپیک به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{\sigma_b^k\} = [\bar{C}_b^k]\{\varepsilon_b^k\} \text{و} \quad \{\sigma_s^k\} = [\bar{C}_s^k]\{\varepsilon_s^k\} \tag{11}$$

[1] collocation phenomenon

[2] selective integration rule

که در آن $[\bar{C}_b^k]$ و $[\bar{C}_s^k]$ ماتریس‌های ثابت‌های انتقال یافته الاستیک در دستگاه مختصات کلی x, y, z برای هر لایه ماده مرکب می‌باشند. روابط اساسی تنش–کرنش–میدان الکتریکی و جابجائی الکتریکی–کرنش–میدان الکتریکی حاکم بر ماده پیزوالکتریک به‌صورت ماتریسی به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\{\sigma_b^k\} = [\bar{C}_b^k]\{\varepsilon_b^k\} - [\bar{e}_b^k]\{E^k\}\\&\{\sigma_s^k\} = [\bar{C}_s^k]\{\varepsilon_s^k\} - [\bar{e}_s^k]\{E^k\}\quad,\qquad k = N+1,\\&\{D^k\} = [\bar{e}_b^k]^{\mathrm{T}}\{\varepsilon_b^k\} + [\bar{e}_s^k]^{\mathrm{T}}\{\varepsilon_s^k\} + [\bar{\eta}^k]\{E^k\}\end{aligned}\tag{12}$$

به همین ترتیب $[\bar{e}_b^k]$ و $[\bar{e}_s^k]$ ماتریس‌های انتقال یافته ثابت‌های (ضرایب) پیزوالکتریک و $[\bar{\eta}^k]$ ماتریس انتقال یافته ثابت‌های ضریب گذردهی الکتریکی (دی الکتریک) ماده پیزوالکتریک هستند. عناصر این ماتریس‌های ضرایب به‌صورت ذیل می‌باشند

$$\begin{aligned}&[\bar{C}_b^k] = \begin{bmatrix}\bar{C}_{11}^k & \bar{C}_{12}^k & \bar{C}_{16}^k\\ \bar{C}_{12}^k & \bar{C}_{22}^k & \bar{C}_{26}^k\\ \bar{C}_{16}^k & \bar{C}_{26}^k & \bar{C}_{66}^k\end{bmatrix},\qquad [\bar{C}_s^{-k}] = \begin{bmatrix}\bar{C}_{55}^k & \bar{C}_{45}^k\\ \bar{C}_{45}^k & \bar{C}_{44}^k\end{bmatrix}\\&[\bar{e}_b^k] = \begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{31}^k\\ 0 & 0 & \bar{e}_{32}^k\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad [\bar{e}_b^k] = \begin{bmatrix}\bar{e}_{15}^k & 0 & 0\\ 0 & \bar{e}_{24}^k & 0\end{bmatrix}\\&[\bar{\eta}^k] = \begin{bmatrix}\bar{\eta}_{11}^k & 0 & 0\\ 0 & \bar{\eta}_{22}^k & 0\\ 0 & 0 & \bar{\eta}_{33}^k\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{13}$$

$\{D^k\}$ و$\{E^k\}$ بردارهای جابجایی الکتریکی و میدان الکتریکی می‌باشندکه مولفه‌های آن‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\{E^k\} = \begin{bmatrix}E_x^k & E_y^k & E_z^k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&\{D^k\} = \begin{bmatrix}D_x^k & D_y^k & D_z^k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{14}$$

2-1-معادلات انرژی حاکم بر سازه

انرژی جنبشی کل پوسته چندلایه را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$T_k = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{N+1}\int_{\Omega}\rho^k(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\,d\Omega\right]\tag{15}$$

انرژی پتانسیل کل سازه شامل انرژی کرنشی، انرژی الکتریکی و کار نیروهای خارجی در نظر گرفته شده است [17,16].

$$T_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\left[\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left(\{\epsilon_b^k\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_b^k\} + \{\epsilon_s^k\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_s^k\}\right)d\Omega\\&\quad - \int_{\Omega}\{E^{N+2}\}\{D^{N+2}\}d\Omega\end{aligned}\right] - \int_{A}\{d\}^{\mathrm{T}}\{f\}dA\tag{16}$$

که در آن $\{f\}$ بردار نیروی خارجی مکانیکی و الکتریکی اعمال شده بر سطح A، Ω حجم kامین لایه و ρ^k چگالی آن لایه می‌باشند. با استفاده از میدان جابه‌جایی (1-الف و ب) و به‌کارگیری اصل هامیلتون (تغییرات مجموع انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل صفر می‌باشد)، می‌توان معادلات حرکت را برای پوسته چندلایه استخراج کرد. به شکل تغییراتی معادله حرکت که به صورت زیر می‌باشد، اصل هامیلتون گفته می‌شود.

$$\int_0^t \delta\left(T_k - T_p - W_{ext}\right)dt = 0\tag{17}$$

2-2- فرمول‌بندی المان محدود

به‌منظور حل معادلات حاکم، حجم کل پوسته کامپوزیتی با وصله پیزوالکتریک توسط المان‌های ایزو پارامتریک هشت‌گره‌ای تجزیه می‌شود. با استفاده از توابع درون‌یاب، مقادیر متغیرها روی سطح المان دلخواه e برحسب مقادیر متناظر در محل گره‌های المان تعیین می‌گردند. بردارهای تعمیم یافته جابجایی (معادله (3)) با استفاده از توابع شکل مناسب برای هر نقطه داخل المان دلخواه e به‌صورت معادله (18) تقریب زده می‌شوند.

$$\{d_t\} = [N_t]\{d_t^e\},\ \{d_r\} = [N_r]\{d_r^e\}\tag{18}$$

با توجه به میدان جابجایی که در رابطه (18) بیان‌شده است، باید سه جابجایی و شش چرخش تقریب زده شود. این یعنی هر گره نه درجه آزادی دارد. بردارهای درجات آزادی هر المان برحسب مولفه‌های جابجایی روی هر کدام از 8 گره و ماتریس‌های توابع شکل در ذیل داده شده‌اند.

$$\begin{aligned}&\{d_t^e\} = [\{d_{t1}\}^{\mathrm{T}}\quad \{d_{t2}\}^{\mathrm{T}}\quad \ldots\quad \{d_{t8}\}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\&\{d_r^e\} = [\{d_{r1}\}^{\mathrm{T}}\quad \{d_{r2}\}^{\mathrm{T}}\quad \ldots\quad \{d_{r8}\}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\&[N_t] = [[N_{t1}]\quad [N_{t2}]\quad \ldots\quad [N_{t8}]],\\&[N_r] = [[N_{r1}]\quad [N_{r2}]\quad \ldots\quad [N_{r8}]],\\&[N_{ti}] = n_i[I_t]\,,\quad [N_{ri}] = n_i[I_r]\end{aligned}\tag{19}$$

که $[I_t]$ و $[I_r]$ ماتریس‌های واحد انتقالی و دورانی و n_i تابع تقریب مربوط به گره iام در مختصات محلی المان می‌باشند. بردارهای جابجایی روی هر کدام از گره‌های المان‌ها $(i = 1\ldots 8)$ عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\{d_{ti}\} = [u_{0i}\quad v_{0i}\quad w_i]^{\mathrm{T}}\\&\{d_{ri}\} = \left[\theta_{xi}\ \ \theta_{yi}\ \ \phi_{xi}\ \ \phi_{yi}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{20}$$

با استفاده از معادلات (4) تا (7)، بردارهای متناظر کرنش روی هر کدام از گره‌های المان‌ها را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\{\epsilon_b\}_c\\ \{\epsilon_b\}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[B_{tb}] & [Z_1][B_{rb}]\\ [B_{tb}] & [Z_2][B_{rb}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{d_t^e\}\\ \{d_r^e\}\end{bmatrix}\\&\begin{bmatrix}\{\epsilon_s\}_c\\ \{\epsilon_s\}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[B_{ts}] & [Z_3][B_{rs}]\\ [B_{ts}] & [Z_4][B_{rs}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{d_t^e\}\\ \{d_r^e\}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{21}$$

در این روابط، ماتریس‌های کرنش- تغییر مکان تعمیم یافته روی گره‌های المان‌ها به‌صورت زیر به‌دست آمده‌اند

$$\begin{aligned}&[B_{tb}] = [B_{tb1}\quad B_{tb2}\quad \ldots\quad B_{tb8}]\\&[B_{rb}] = [B_{rb1}\quad B_{rb2}\quad \ldots\quad B_{rb8}]\\&[B_{ts}] = [B_{ts1}\quad B_{ts2}\quad \ldots\quad B_{ts8}]\\&[B_{rs}] = [B_{rs1}\quad B_{rs2}\quad \ldots\quad B_{rs8}]\end{aligned}\tag{22}$$

که در آن‌ها

$$\begin{aligned}&B_{tbi} = [B_i\quad B_{ti}],\qquad B_i = \begin{bmatrix}n_{i,x} & 0\\ 0 & n_{i,y}\\ n_{i,y} & n_{i,x}\end{bmatrix}\\&n_{i,x} = \frac{\partial n_i}{\partial x},\quad n_{i,y} = \frac{\partial n_i}{\partial y}\\&B_{ti} = \begin{bmatrix}0\\ n_i/R\\ 0\end{bmatrix},\qquad B_{rbi} = \begin{bmatrix}\bar{B}_{rbi} & \tilde{O} & \tilde{O}\\ \tilde{O} & \bar{B}_{rbi} & \tilde{O}\\ \tilde{O} & \tilde{O} & \bar{B}_{rbi}\end{bmatrix}\\&B_{tsi} = \begin{bmatrix}0 & 0 & n_{i,x}\\ 0 & -n_i/R & n_{i,y}\end{bmatrix}\ \text{و}\ B_{rsi} = n_i[I_r]\end{aligned}\tag{23}$$

که $\tilde{O}$ یک ماتریس صفر 3×2 می‌باشد. با فرض این‌که میدان الکتریکی فقط در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک اعمال می‌شود، در معادله (12) بردار میدان الکتریکی را به‌صورت ذیل می‌توان نوشت.

$$\{E^{N+1}\} = \left[0\quad 0\quad -\left(1/h_p\right)\right]^{\mathrm{T}}V\tag{24}$$

V اختلاف پتانسیل بین سطوح بالا و پایین وصله‌های پیزوالکتریک بوده و روی سطح وصله‌ها ثابت است. با جایگذاری معادلات (11) و (12) در (16) و استفاده از معادلات (21) و (24)، می‌توان انرژی پتانسیل برای یک المان دلخواه دارای خاصیت پیزوالکتریک را به‌صورت معادله (25) به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}T_p^e = \frac{1}{2}\big[&\{d_t^e\}^{\mathrm{T}}[K_t^e]\{d_t^e\} + \{d_t^e\}^{\mathrm{T}}[K_{tr}^e]\{d_r^e\} + \{d_r^e\}^{\mathrm{T}}[K_{tr}^e]^{\mathrm{T}}\{d_t^e\}\\&+ \{d_r^e\}^{\mathrm{T}}[K_{rr}^e]\{d_r^e\} - 2\{d_t^e\}^{\mathrm{T}}\left[K_{tp}^e\right]V\\&- 2\left[K_{rp}^e\right]V - 2\{d_t^e\}^{\mathrm{T}}\{F^e\}\\&- \{\bar{E}\}^{\mathrm{T}}[\bar{\eta}^{N+1}]\{\bar{E}\}V^2\big]\end{aligned}\tag{25}$$

که در آن $[K_{rr}^e]$، $[K_{tr}^e]$ و $[K_{tt}^e]$ ماتریس‌های سفتی مکانیکی المان، $[K_{rp}^e]$ و

$[K_{tp}^e]$ ماتریس‌های سفتی جفت شده‌گی الکترو- مکانیکی المان و $\{F^e\}$ بردار بارگذاری المان بوده و به‌صورت ذیل به‌دست می‌آیند.

$$[K_t^e]=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}([B_{tb}]^{\mathrm{T}}[D_{tb}][B_{tb}]+[B_{ts}]^{\mathrm{T}}[D_{ts}][B_{ts}])dxdy$$
$$[K_{tr}^e]=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}\{[B_{tb}]^{\mathrm{T}}([D_{trb}]+[D_{trb}]_p)[B_{rb}]+[B_{ts}]^{\mathrm{T}}([D_{trs}]+[D_{trs}]_p)[B_{rs}]\}dxdy,$$
$$[K_{rr}^e]=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}\{[B_{rb}]^{\mathrm{T}}([D_{rrb}]+[D_{rrb}]_p)[B_{rb}]+[B_{rs}]^{\mathrm{T}}([D_{rrs}]+[D_{rrs}]_p)[B_{rs}]\}dxdy,$$
$$[K_{tp}^e]=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}([B_{tb}]^{\mathrm{T}}\{F_{tb}\}_p+[B_{ts}]^{\mathrm{T}}\{F_{ts}\}_p)dxdy$$
$$[K_{rp}^e]=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}([B_{rb}]^{\mathrm{T}}\{F_{rb}\}_p+[B_{rs}]^{\mathrm{T}}\{F_{rs}\}_p)dxdy$$
$$\{F^e\}=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}[N_t]^{\mathrm{T}}\{f\}dxdy \tag{26}$$

که a_e و b_e به‌ترتیب ابعاد طولی و عرضی (محیطی) المان دو بعدی بوده و ماتریس‌های سفتی خمشی و برشی عرضی (معادله (26)) برحسب ماتریس‌های ضرایب الاستیک و ثابت‌های پیزوالکتریک به‌صورت زیر می‌باشند:

$$[D_{tb}]=\sum_{k=1}^{N+1}\int_{h_k}^{h_{k+1}}[\bar{C}_b^k]dz$$
$$[D_{trb}]=\sum_{k=1}^{N}\int_{h_k}^{h_{k+1}}[\bar{C}_b^k][Z_1]dz$$
$$[D_{trb}]_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[\bar{C}_b^{N+1}][Z_2]dz$$
$$[D_{rrb}]=\sum_{k=1}^{N}\int_{h_k}^{h_{k+1}}[Z_1]^{\mathrm{T}}[\bar{C}_b^k][Z_1]dz,$$
$$[D_{rrb}]_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[Z_2]^{\mathrm{T}}[\bar{C}_b^{N+1}][Z_2]dz,$$
$$[D_{trs}]=\sum_{k=1}^{N}\int_{h_k}^{h_{k+1}}[\bar{C}_s^k][Z_3]dz,$$
$$[D_{trs}]_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[\bar{C}_s^{N+1}][Z_4]dz,$$
$$[D_{trs}]_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[\bar{C}_s^{N+1}][Z_4]dz,$$
$$[D_{rrs}]=\sum_{k=1}^{N}\int_{h_k}^{h_{k+1}}[Z_3]^{\mathrm{T}}[\bar{C}_s^k][Z_3]dz,$$
$$[D_{rrs}]_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[Z_4]^{\mathrm{T}}[\bar{C}_b^{N+1}][Z_4]dz,$$
$$\{F_{tb}\}_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[\bar{e}_b^{N+1}]\{\bar{E}\}dz,$$
$$\{F_{ts}\}_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[\bar{e}_s^{N+1}]\{\bar{E}\}dz$$
$$\{F_{rb}\}_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[Z_2]^{\mathrm{T}}[\bar{e}_b^{N+1}]\{\bar{E}\}dz$$
$$\{F_{rs}\}_p=\int_{h_{N+1}}^{h_{N+2}}[Z_4]^{\mathrm{T}}[\bar{e}_s^{N+1}]\{\bar{E}\}dz \tag{27}$$

از طرفی دیگر با جایگذاری معادلات (18) در (15) می‌توان انرژی جنبشی برای یک المان دلخواه را به‌صورت ذیل به‌دست آورد.

$$T_k^e=\frac{1}{2}\{\dot{d}_t^e\}^{\mathrm{T}}[M^e]\{\dot{d}_t^e\} \tag{28}$$

که در آن:

$$[M^e]=\int_0^{b_e}\int_0^{a_e}\overline{m}[N_t]^{\mathrm{T}}[N_t]dxdy$$
$$\overline{m}=\sum_{k=1}^{N}\rho^k(h_{k+1}-h_k)+\rho^{N+1}h_v+\rho^{N+1}h_v+\rho^{N+2}h_p$$

حال با جایگذاری عبارات انرژی در اصل هامیلتون (17)، دستگاه معادلات حاکم بر المان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$[M^e]\{\ddot{d}_t^e\}+[K_t^e]\{d_t^e\}+[K_{tr}^e]\{d_r^e\}=\{K_{tp}^e\}V+\{F^e\} \tag{29}$$
$$[K_{tr}^e]\{d_t^e\}+[K_{rr}^e]\{d_r^e\}=\{K_{rp}^e\}V \tag{30}$$

لازم به‌ذکر است، در المآن‌های غیرپیزوالکتریک پانل عناصر ماتریس‌های جفت شده‌گی الکترومکانیکی مساوی صفر می‌شوند. در انتها نوبت به مونتاژ معادلات ماتریسی به‌دست آمده برای المآن‌ها جهت تشکیل معادلات حاکم بر کل سازه در مختصات سازه‌ای (جهانی) می‌رسد به‌طوری‌که امکان بررسی اثرات هر وصله پیزوالکتریک به‌طور جداگانه نیز وجود خواهد داشت

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K_{tt}]\{X\}+[K_{tr}]\{X_r\}=\sum_{j=1}^{m}\{K_{tp}^j\}V^j+\{F\} \tag{31}$$
$$[K_{tr}]^{\mathrm{T}}\{X\}+[K_{rr}]\{X_r\}=\sum_{j=1}^{m}\{K_{rp}^j\}V^j \tag{32}$$

در این معادلات $\{X_t\}$ و $\{X_r\}$ بردارهای درجات آزادی کلی انتقالی و دورانی در مختصات سازه‌ای، $[M]$ ماتریس جرم کل، $[K_{tt}]$، $[K_{tr}]$ و $[K_{rr}]$ ماتریس‌های سفتی مکانیکی کلی، $\{F\}$ بردار بارگذاری کلی در مختصات سازه‌ای، m تعداد وصله‌های پیزوالکتریک، V^j ولتاژ اعمال شده به وصله پیزوالکتریک j ام و $\{K_{rp}^j\}$ و $\{K_{tp}^j\}$ بردارهای سختی الکترو- مکانیکی کلی برای این وصله می‌باشند که به‌صورت روابط (33) تعریف می‌شوند.

$$\{K_{tp}^j\}=\sum_{i=1}^{n_p}\{K_{tp}^i\}\ ,\quad \{K_{rp}^j\}=\sum_{i=1}^{n_p}\{K_{rp}^i\} \tag{33}$$

که n_p تعداد المآن‌های واقع در محدوده وصله پیزوالکتریک موردنظر می‌باشد. در کار حاضر، جهت اعمال شرایط مرزیاز روش‌های استاندارد در کتب مرجع المان محدود استفاده شده است، یعنی سطرها یا ستون‌های متناظر با درجات آزادی معلوم در شرایط مرزی از ماتریس‌های سفتی، جرم و بردار نیرو حذف می‌شوند و برای شرایط مرزی غیرهمگن جملات ستون مربوط به آن درجه آزادی به بردار نیرو منتقل شده سپس سطر مربوطه حذف می‌شود. پس از اعمال شرایط مرزی هندسی به درجات آزادی سیستم معادلات حاکم، درجات آزادی دورانی کلی را می‌توان از معادلات حذف نمود (که به فشرده سازی معروف است) و دستگاه معادلات نهایی مدار باز سیستم را بر حسب درجات آزادی انتقالی کلی به‌صورت زیر نوشت

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K^*]\{X\}=\sum_{j=1}^{m}\{F_p^j\}V^j+\{F\} \tag{34}$$

که در آن:

$$[K^*]=[K_{tt}]-[K_{tr}][K_{rr}]^{-1}[K_{tr}]^{\mathrm{T}}$$
$$\{F_p^j\}=\{K_{tp}^j\}-[K_{tr}][K_{rr}]^{-1}\{K_{rp}^j\}$$

2-3- محل و اندازه بهینه عملگر پیزوالکتریک

برای رسیدن به بهترین عملکرد این وصله از لحاظ کنترل ارتعاشات، باید محل و اندازه مناسب نصب آن‌ها را یافت. بدین منظور با توجه به این‌که معادلات به‌دست آمده در بخش قبل خطی می‌باشند می‌توان از روش‌های کنترل بهینه استفاده جست، بنابراین مسئله‌ای طرح می‌شود که در آن هدف یافتن بهترین مکان (فاصله از انتها L_0) و اندازه وصله (زاویه γ) به‌طور همزمان می‌باشد. به‌منظور استفاده از روش کنترل بهینه سیستم با روش رگولاتور خطی مرتبه دوم[1]، اولین قدم نوشتن معادلات سیستم حلقه باز (34)

[1] linear quadratic regulator

به فرم فضای حالت می‌باشد.

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{U\} \quad (35)$$

که در آن بردار حالت $\{X\}$، ماتریس‌های $[A]$ و $[B]$ و بردار $\{U\}$ ورودی عبارتند از:

$$\{X\} = \left[\{X_t\} \quad \{\dot{X}_t\}\right]^{\mathrm{T}}$$
$$[A] = \begin{bmatrix} [O] & [I] \\ -[M]^{-1}[K^*] & [O] \end{bmatrix}$$
$$[B] = \begin{bmatrix} \{\tilde{O}\} & \cdots & \{\tilde{O}\} \\ [M]^{-1}[K_p^1] & \cdots & [M]^{-1}[K_p^m] \end{bmatrix}$$
$$\{U\} = [V^1 \quad V^2 \quad \cdots \quad V^m]^{\mathrm{T}} \quad (36)$$

مجددا $[O]$ ماتریس صفر، $\{O\}$ بردار صفر و $[I]$ ماتریس همانی می‌باشند. در این تحقیق جهت یافتن پارامترهای بهینه از معیار کنترل‌پذیری پیشنهادی همدان و نایفه [18]، استفاده شده است. براساس این معیار، اندازه خالص کنترل‌پذیری مود ارتعاشی iام در حضور تمام ورودی‌های موجود به‌صورت رابطه (37) تعریف می‌شود.

$$\mu = \frac{\{q_i\}^{\mathrm{T}}[B]}{\|q_i\|} \quad (37)$$

که $\{q_i\}^{\mathrm{T}}$ بردار ویژه نرمالیزه ماتریس $[A]$ بوده و عبارت است از

$$[A]\{q_i\} = \lambda_i\{q_i\}$$

که λ_i مقدار ویژه متناظر می‌باشد. در ضمن بردار ویژه راست ماتریس $[A]$، یعنی $\{p_j\}$ خاصیت زیر را دارد

$$\{q_i\}^{\mathrm{T}}\{p_i\} = \delta_{ij} \quad (38)$$

δ_{ij} تابع دلتای کرونیکر است. هدف از بیشینه کردن تابع کنترل‌پذیری (37)، کاهش دامنه ارتعاشات و افزایش میرایی سازهاست، مشروط بر این‌که سیستم معادلات (35) پایدارپذیر و مشاهده‌پذیر باشد. برای هر تعداد لایه و چیدمان لایه‌گذاری در پوسته اصلی و تعداد مشخصی وصله پیزوالکتریک، با بیشینه کردن μ می‌توان بهترین مکان نصب وصله را یافت. سپس با دردست داشتن این نقطه، برای پیدا کردن اندازه بهینه وصله براساس تغییرات در رفتار دینامیکی سازه مانند فرکانس طبیعی قضاوت خواهد شد.

2-4- کنترل کننده حلقه بسته

پس از تعیین عملگر بهینه براساس رفتار ارتعاشی حلقه باز، از فعال نمودن این وصله‌ها جهت میرا نمودن هر چه بیشتر ارتعاشات پانل چندلایه استفاده می‌شود. در این مقاله، ورودی کنترل حلقه بسته، مشتق متغیر حالت می‌باشد که به استراتژی پسخوراند سرعت[1] مشهور است. طبق این قانون کنترلی، ولتاژ اعمال شده به لایه (سطح) خارجی وصله پیزوالکتریک متناسب می‌باشد با برآیند مولفه‌های سرعت (شعاعی، محیطی و طولی) در نقطه‌ای (گره‌ای) مشخص از پوسته که در واقع محل نصب حسگر می‌باشد[15]. در این کار، این نقطه محل حسگر در گره روی سطح داخلی پانل در محل وسط وصله پیزوالکتریک می‌باشد. بنابراین رابطه ولتاژ عملگری وصله jام به‌صورت ذیل می‌باشد

$$V^j = -K_d^j[e^j]\{\dot{X}_t\} \quad (39)$$

K_d^j بهره کنترلی عملگر و $[e^j]$ برداری واحد و تعیین کننده مولفه‌ها و موقعیت حسگر سرعت می‌باشند. با جایگذاری رابطه (39) در (34) معادله حاکم بر دینامیک سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر در می‌آید

$$[M]\{\ddot{X}_t\} + [C_d]\{\dot{X}_t\} + [K^*]\{X_t\} = \{F\} \quad (40)$$

ماتریس میرایی معادل ناشی از عملگرها به‌صورت ذیل تعریف می‌شود

$$[C_d] = \sum_{j=1}^{m} K_d^j\{F_p^j\}[e^j] \quad (41)$$

در این تحقیق از حداقل تعداد وصله پیزوالکتریک استفاده خواهد شد.

3- نتایج محاسباتی و بررسی

در این مقاله، پوسته‌های کامپوزیتی میزبان، از لحاظ لایه‌گذاری به‌صورت ذیل مورد دسته‌بندی قرار گرفته‌اند:

A) پوسته چهار لایه با لایه‌گذاری متقارن $[0^o/90^o]_s$ با لایه‌های یکسان

B) پوسته چهار لایه با لایه‌گذاری متقارن $[90^o/0^o]_s$ با لایه‌های یکسان

C) پوسته سه لایه با لایه‌گذاری $[0^o/90^o/0^o]$ با لایه‌های یکسان

شرایط مرزی مورد استفاده برای هر یک از چهار لابه پانل‌می‌تواند به‌صورت ذیل درنظر گرفته شود.

تکیه‌گاه ساده (S)

$$x = 0, L \quad \text{در} \quad u_o = w_o = \theta_y = \phi_y = 0$$
$$y = 0, a \quad \text{در} \quad u_o = w_o = \theta_x = \phi_x = 0 \quad (42)$$

تکیه‌گاه گیردار (C)

$$x = 0, L \quad \text{در} \quad u_o = v_o = w_o = \theta_y = \phi_y = 0$$
$$y = 0, a \quad \text{در} \quad u_o = v_o = w_o = \theta_x = \phi_x = 0 \quad (43)$$

در تکیه‌گاه آزاد (F) تمام درجات آزادی مجهول می‌باشند. خواص مکانیکی لایه اورتوتروپیک T300/ 976 به‌صورت ذیل در نظر گرفته شده است.

$$E_{yy} = E_{zz} = E_{xx}/\,40,\ G_{xy} = G_{xz} = 0.6\,E_{yy},$$
$$G_{yz} = 0.5\,E_{yy},\ \nu_{xy} = \nu_{xz} = 0.25, \rho = 1550\ \mathrm{kg/m^3} \quad (44)$$

خواص مکانیکی لایه اورتوتروپیک گرافیت اپوکسی به‌صورت ذیل می‌باشد.

$$E_{xx} = 172.9\ \mathrm{GPa}, E_{yy} = E_{zz} = E_{xx}/\,25,$$
$$G_{xy} = G_{xz} = 0.5\,E_{yy},\ \nu_{zx} = 0.01,$$
$$G_{yz} = 0.2\,E_{yy},\ \nu_{xy} = \nu_{zy} = 0.25, \rho = 1590\ \mathrm{kg/m^3} \quad (45)$$

لازم به ذکر است مقادیر خواص مکانیکی مذکور، جهت محاسبه ثابت‌های الاستیک (روابط (13)) باید در شرط ذیل (مخرج $C_{11}...C_{66}$) صدق کنند

$$\Delta = 1 - \nu_{zy}^2\frac{E_y}{E_z} - \nu_{yx}^2\frac{E_x}{E_y} - \nu_{xz}^2\frac{E_x}{E_z} \qquad - 2\nu_{zy}\nu_{yx}\nu_{xz}\frac{E_x}{E_z} > 0 \quad (46)$$

درغیر این صورت مقادیر داده شده غیرقابل استفاده می‌باشند. در این بخش ابتدا به اعتبارسنجی مدل المان محدود ارائه شده پرداخته می‌شود که شامل مقایسه نتایج فرکانس طبیعی بدون بعد برای پانل‌های کامپوزیتی A و B با لایه‌های از جنس اورتوتروپیک T300/ 976 و شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده (SSSS) نسبت به نتایج داده شده در مرجع [18] می‌باشد. بنابراین فرکانس طبیعی بدون بعد به‌صورت ذیل تعریف شده است

$$\omega_{\mathrm{A}} = \omega h\sqrt{\frac{\rho}{\pi^2 C_{66}}} \quad (47)$$

C_{66}ضریب سفتی (مدول) برشی واقع در صفحه برای لایه اورتوتروپیک صفر درجه و ρ چگالی می‌باشد. پس از بررسی همگرایی نتایج، تعداد 15 المان محیطی و 60 المان طولی استفاده شده‌اند. نتایج این مقایسه در جدول 1 برای دو چیدمان و ابعاد هندسی مختلف یعنی نسبت ضخامت به طول معادل $L_a = 2R_m \sin\alpha/2$ ارائه شده است. همان‌طوری‌که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت، اختلاف مقادیر به‌دست آمده با حل سه‌بعدی نیمه تحلیلی [19] افزایش می‌یابد. در پانل B، با افزایش زاویه کمان α، خطای روش حاضر نسبت به حل نیمه‌تحلیلی بیشتر می‌شود. در حالی‌که در پانل A با افزایش زاویه پانل تا قائمه، خطا کاهش می‌یابد. در پوسته استوانه‌ای بسته ($\alpha = 360^0$) خطا بیشتراست بخصوص پانل B که بیشترین خطای 2.9 درصدی را دارد. لازم به ذکر است، نتایج حاصل از معادلات ارائه شده (31) و

[1] velocity feedback scheme

(32) برای پوسته استوانه‌ای بسته با نتایج به‌دست آمده در حالت متقارن محوری ($v = \partial/\partial\theta = \partial/\partial y = 0$) که در آن مودهای نامتقارن محوری وجود ندارد می‌تواند بسیار متفاوت باشد. در جدول 2 نتایج فرکانس طبیعی اول بدون بعد برای پوسته استوانه‌ای بسته C از دو جنس مختلف و با شرایط تکیه‌گاهی یکسر گیردار (C-F) و دوسر ساده (S-S) ارزیابی شده‌اند. فرکانس بی‌بعد مورد استفاده به‌صورت ذیل می‌باشد

$$\omega_C = \frac{\omega L^2}{100h}\sqrt{\frac{\rho}{E_{yy}}} \tag{48}$$

نتایج به‌دست آمده با مراجع [20] و [21] مقایسه شده‌اند. همانطوریکه ملاحظه می‌شود با کاهش ضخامت و افزایش طول پوسته، فرکانس بی‌بعد کمی زیاد می‌شود و تاثیر جنس در افزایش فرکانس طبیعی بسیار چشم‌گیر است. فرکانس به‌دست آمده با تکیه‌گاه ساده حداقل 1.8 برابر بزرگتر از نتایج یکسرگیردار می‌باشد. پس از اعتبارسنجی مدل، نوبت یافتن وصله پیزوالکتریک بهینه برای پانل C با شرایط مرزی طره‌ای CFFF، یعنی گیردار در $x = 0$ می‌شود. جنس وصله پیزوالکتریک از ماده PZT-5H با خواص الکترومکانیکی در جدول 3 انتخاب شده است. در این تحقیق، هدف کنترل مودهای اول و دوم پانل می‌باشد. فرم کلی شکل مودهای اول و دوم پانل C با لایه‌های از جنس گرافیت اپوکسی و شرایط مرزی CFFF در "شکل 3" نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که حداکثر جابجایی مد اول تقریباً 1.7 برابر

جدول 1 مقایسه فرکانس طبیعی اول بی بعد برای ابعاد و چیدمان مختلف

Table 1 Non-dimensional fundamental frequencies for shell A, B

A[0º/90º/90º/0º]		B[90º/0º/0º/90º]		لایه گذاری	
حاضر	[19]	حاضر	[19]	α	h/L_a
0.0630	0.0625	0.0615	0.0609	30º	
0.0648	0.0646	0.0599	0.0591	60º	0.1
0.0681	0.0678	0.0597	0.0589	90º	
0.1770	0.1740	0.1744	0.1706	30º	
0.1728	0.1708	0.1637	0.1588	60º	0.2
0.1692	0.1686	0.1525	0.1472	90º	
0.2985	0.2933	0.2985	0.2890	30º	
0.2862	0.2837	0.2793	0.2682	60º	0.3
0.2706	0.2741	0.2576	0.2455	90º	
					h/R_m
0.0806	0.0792	0.0718	0.070 7		0.1
0.1779	0.1751	0.1564	0.1506	360º	0.2
0.2665	0.2727	0.2487	0.2363		0.3

جدول 2 مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد برای ابعاد و شرایط مرزی مختلف

Table 2 Non-dimensional natural frequencies for closed shell C

[0º/90º/0º]	C-F	S-S	جنس	L/R_m	R_m/h
[20]	0.0988	0.1779	T300/976	2	5
حاضر	0.0952	0.1746			
[21]	0.4899	0.9257	گرافیت اپوکسی	5	20
حاضر	0.4835	0.9084			

جدول 3 خواص ماده پیزو الکتریک مورد استفاده[7]

Table 3 Electro-mechanical properties of piezoelectric material [7]

ثابت‌های الاستیک، GPa ,								
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
32.6	4.3	4.3	7.2	7.8	7.2	1.05	1.29	1.29
چگالی، ثابت دی الکتریک $10^{-9}C^2/Nm^2$، ثابت‌های پیزوالکتریک C/m^2								
e_{11}	e_{31}	e_{32}	e_{15}	e_{24}	η_{11}	η_{22}	η_{33}	kg/m^3
15.8	-6.76	-6.76	12.3	12.3	7.3	8.1	8.1	3640

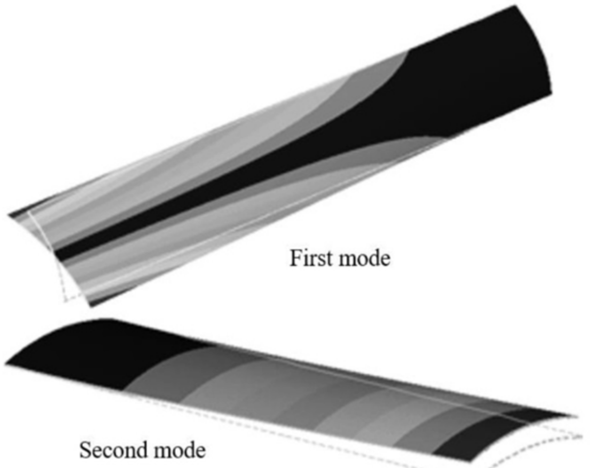

Fig. 3 First and second mode shapes of host panel C, CFFF

شکل 3 شکل مودهای اول و دوم پانل C و CFFF

حداکثر جابجایی مد دوم می‌باشد. البته در صورت چسباندن وصله پیزوالکتریک به پاتل، فرم کلی شکل مودها تغییری نمی‌کند.

با توجه به این شکل مودها، اولی حالت پیچشی و دومی حالت خمشی دارد. در این شرایط مرزی، منشاء اصلی حرکات شبه جسم صلب‌گونه در انتهای آزاد پانل، به‌وسیله وصله چسبیده به انتهای گیردار مهار می‌شوند. در حالت کلی مکان بهینه عملگر وابسته به تعداد، ضخامت و جنس وصله، شرایط مرزی و مشخصات پانل می‌باشد. برای شروع فرآیند بهینه‌سازی، مشخصات ابعادی پانل را به‌صورت $R_m/h = 50$,$L/R_m = 6.67$ در نظر گرفته و وصله‌هایی به ابعاد مختلف در فاصله‌های متفاوت از تکیه‌گاه قرار داده شده و مقادیر معیار کنترل پذیری μ (قابلیت میراکننده‌گی در سازه) به ازای هر فاصله وصله از تکیه‌گاه به‌دست آمده و ملاحظه شد که در صورت چسباندن وصله‌ها به تکیه‌گاه، حداکثر مقدار μ به‌دست می‌آید. سپس وصله‌ای به عرض یک دهم طول محیط خارجی پانل ($\alpha/\beta = 10$) را در زاویه‌های مختلف $0 < \gamma < (\alpha - \beta)/2$ از وسط پانل قرار داده و مقادیر معیار کنترل-پذیری برای مودهای اول و دوم به‌دست آمدند که نتیجه آن در " شکل 4" ارائه شده است. نتایج مشابهی برای پانل با نسبت اندازه‌های $\alpha/\beta = 5$,1 به‌دست آمده‌اند که به ترتیب در "شکل‌های 5 و 6" نشان داده شده‌اند. از "شکل‌های 4 تا 6" ملاحظه می‌شود که اندازه μ برای هر سه اندازه محیطی وصله به ازای $\gamma = 0$ حداکثری می‌شود، یعنی وصله با پانل هم‌مرکز، هم‌محور و همچنین عرضش برابر با عرض پانل باشد. برای تعیین طول بهینه وصله، ملاحظه شده است که با افزایش طول وصله ($0 < Lp < L$)، معیار μ همچنان نرخ صعودی خواهد داشت، ولی از طرفی دیگر معیار تغییر فرکانس طبیعی پانل در اثر افزودن طول وصله (نرخ میرا شدن پاسخ) مورد توجه قرار گرفته است. از آنجائی که سفتی الاستیک ماده پیزوالکتریک نسبت به سازه اصلی خیلی کمتر است و چگالی بالاتر آن از کامپوزیت (بیش از دو برابر)، با وجود این که ضخامت لایه پیزوالکتریک خیلی کمتر از سازه اصلی می‌باشد ($hp = h/12$) هنوز وصله می‌تواند همانند جرم افزوده در حالت مدار باز باعث کاهش فرکانس اصلی سازه شود. تغییرات درصد این کاهش (نسبت به اولین فرکانس طبیعی پانل بدون وصله) برحسب نسبت طول وصله به پانل در "شکل 7" نشان داده شده است.

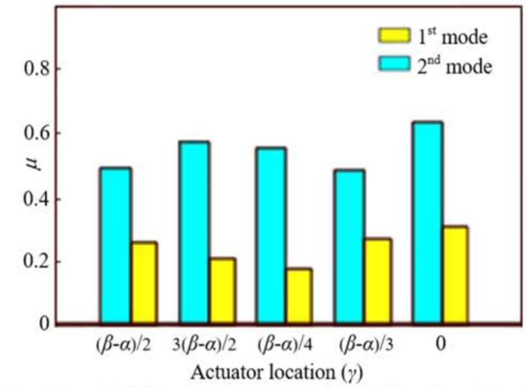

Fig. 4 Controllability criterion values, 1st and 2nd modes, $\alpha/\beta=10$

شکل 4 مقادیر معیار کنترل‌پذیری برای مودهای 1 و 2، $\alpha/\beta=10$

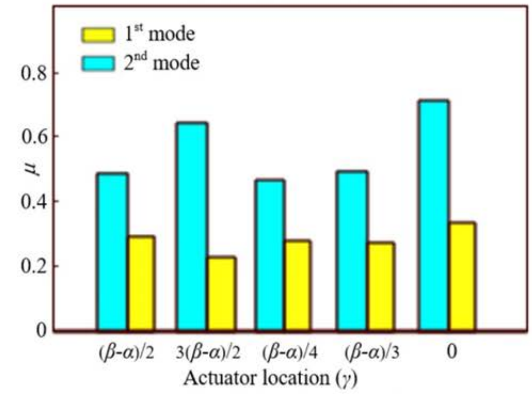

Fig. 5 Controllability criterion values, 1st and 2nd modes, $\alpha/\beta=5$

شکل 5 مقادیر معیار کنترل‌پذیری برای مودهای 1 و 2، $\alpha/\beta=5$

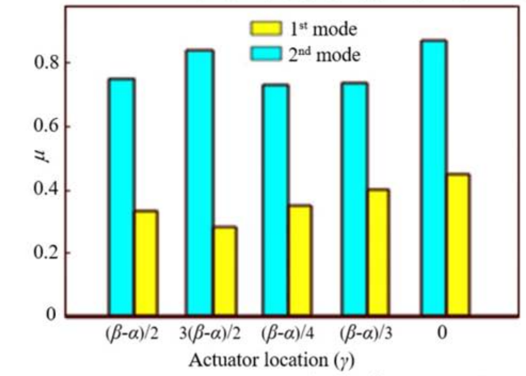

Fig. 6 Controllability criterion values, 1st and 2nd modes, $\alpha/\beta=1$

شکل 6 مقادیر معیار کنترل‌پذیری برای مودهای 1 و 2، $\alpha/\beta=1$

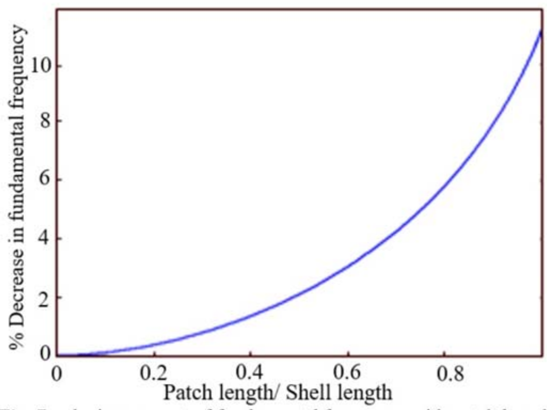

Fig. 7 reducing percent of fundamental frequency with patch length

شکل 7 درصد کاهش فرکانس طبیعی اول برحسب نسبت طول وصله به پانل

همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود، در نسبت طول $Lp/\,L = 0.5$، مقدار درصد کاهش فرکانس طبیعی بسیار کم (حدود 2٪) می‌باشد یعنی اثر وصله روی سازه قابل چشم پوشی است. بنابراین ابعاد و محل عملگر بهینه حاصل گردید.
در این مرحله، عملکرد دینامیکی این وصله بهینه با استفاده از پاسخ فرکانسی (تبدیل فوریه) حاصل از معادله (40)، به نیروی گسترده شعاعی (فشار یکنواخت واحد) هارمونیک بررسی شده است. دامنه پاسخ جابجایی شعاعی پانل C در وسط لبه آزاد $(L,\alpha/2,h/2)$ (برحسب میکرومتر) نسبت به فرکانس بی بعد $(100\times\omega c)$ برای حالات بدون وصله، با وصله بهینه حلقه باز و بسته با دو بهره کنترلی، در "شکل 8" به نمایش درآمده است. همانطور که انتظار می‌رود در این نوع بارگذاری، مد شکل دوم ("شکل 3") که خمشی می‌باشد، بیشتر تحریک شده و دامنه تشدید بزرگتری دارد. به همین منوال، در "شکل9" پاسخ فرکانسی سازه به نیروی عمودی واحد متمرکز و هارمونیک وارده در گوشه لبه آزاد $(L,0,h/2)$ در نقطه $(L,\alpha/2,h/2)$ ارائه شده است. با عنایت به شرایط این بارگذاری، مد شکل اول ("شکل 3") بیشتر تحریک شده است، بنابراین پاسخ دامنه تشدید بزرگتری دارد. در هر دو "شکل 8 و 9" اثر وصله بهینه روی پاسخ حلقه باز سازه و همچنین پاسخ دامنه میرا شده برای حالت حلقه باز و دو مقدار بهره کنترلی حلقه بسته $(K_d = 500, 1000)$ نشان داده شده است. محاسبات و بررسی‌های فوق‌الذکر برای پانل A با لایه-های T300/ 976 نیز تکرار شده است، که در نتیجه آن عملیات، وصله پیزوالکتریک بهینه با مشخصات ذیل انتخاب شده است:

$Lp = 0.6\,L \ \ , \ \alpha/\beta = 1\,, \ \ hp = h\,/12$

اثر اندازه وصله روی تغییر شکل شعاعی لایه میانی پانل A وقتی که تحت فشار استاتیکی یکنواخت واحد $(P = 1\ \mathrm{N/m^2})$ روی سطح داخلی قرار دارد، در "شکل 10" ارائه شده است. منحنی‌های خیز (برحسب میکرومتر) با افزایش طول وصله (بخصوص$Lp > 0.6L$) به یکدیگر نزدیک‌تر شده‌اند. به‌منظور مشاهده اثر عملگری وصله پیزوالکتریک، توزیع جابجایی شعاعی لایه میانی پوسته A برای مقادیر مختلف بار الکتریکی استاتیکی اعمال شده به سطح خارجی عملگر با ابعاد بهینه در "شکل 11" مقایسه شده‌اند. با افزایش ولتاژ، الگوی تغییر شکل که حاکی از ایجاد نوعی خمش در محل وصله می‌باشد، عوض نشده است. تمام منحنی‌ها تقریبا از یک نقطه (تغییر علامت خیز) گذشته‌اند. برای خنثی کردن خیز ناشی از فشار توسط ولتاژ عملگری کافی است منحنی‌های "شکل‌های 10 و 11" را با یکدیگر جمع کرد. همان طوری‌که در "شکل 12" مشاهده می‌شود با اعمال بار الکتریکی 7.5ولت خیز انتهای پانل کاملا" خنثی شده، در صورتی که بار الکتریکی منفی موجب افزایش خیز شده است. لازم به ذکر است با توجه به اشباع عملگر پیزوالکتریک، حداکثر ولتاژ عملگری مورد استفاده و متعاقباً حداکثر مقدار بهره کنترلی، مقدار محدودی می‌تواند باشد [10،2].

3-1- بررسی پاسخ دینامیکی

به‌منظور ارزیابی روش عددی استفاده شده برای حل حوزه زمان، پاسخ پانل C بدون وصله از جنس T300/ 976 با چهار طرف تکیه‌گاه ساده (SSSS) و تحت بار گسترده دینامیکی ذیل، بررسی شده است

$$P(t) = P_0(1 - e^{-13100t})\ \ \mathrm{Pa} \tag{49}$$

جابجایی شعاعی بی بعد به‌صورت رابطه (50) تعریف شده است.

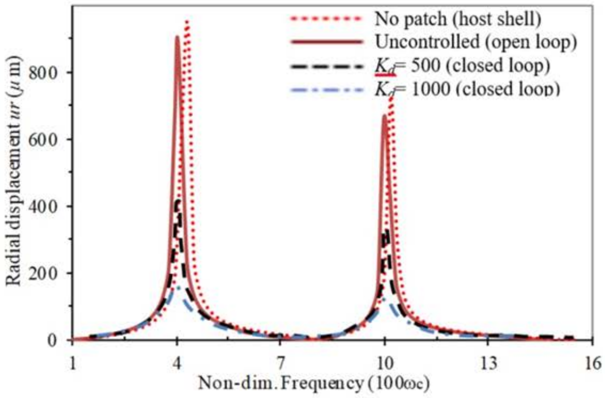

Fig. 8 Frequency response for open and closed loop optimal patch to harmonic unit pressure, at (L, $\alpha/2$, $h/2$), panel C

شکل 8 پاسخ فرکانسی به فشار هارمونیک، حلقه باز و بسته، وسط لبه آزاد پانل C

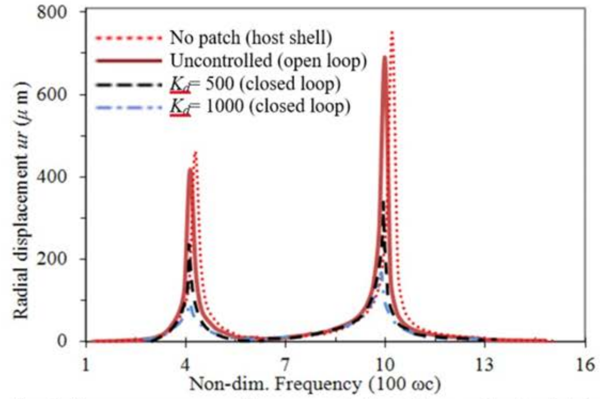

Fig. 9 Frequency response for open and closed loop optimal patch to harmonic vertical edge force, at (L, $\alpha/2$, $h/2$), panel C

شکل 9 پاسخ فرکانسی به نیروی عمودی متمرکز وارده در گوشه لبه آزاد پانل C

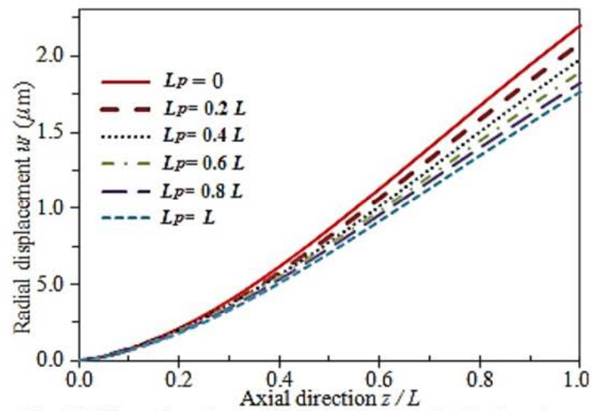

Fig. 10 Effect of patch on radial displacement distribution along x, unit static pressure, open loop

شکل 10 اثر اندازه وصله روی توزیع جابجایی شعاعی پانل A تحت فشار استاتیکی واحد، حالت حلقه باز

تاریخچه زمانی به‌دست آمده در نقطه وسط پانل C با ابعاد S=50، α = 90^0، 8 = L/R_m در "شکل13" با نتیجه [22] مقایسه شده است.

$$\bar{u} = \frac{100E_{yy}}{h\,P_0 S^4} \times u\ ,\quad S = \frac{R}{h} \tag{50}$$

محور زمان برحسب میلی ثانیه می‌باشد. همانطوری‌که روئیت می‌شود نتیجه به‌دست آمده با منحنی حاصل از روش نیمه تحلیلی حل الاستیسیته [22]

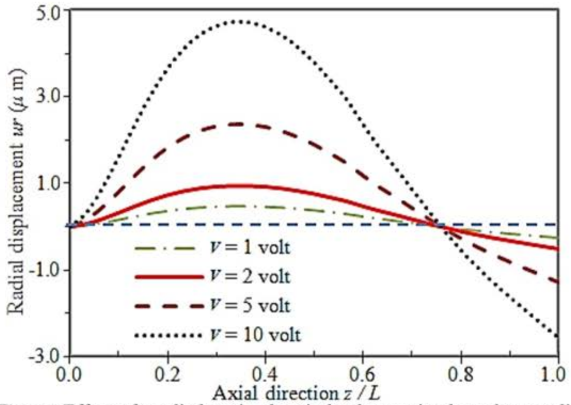

Fig. 11 Effect of applied static electric load to optimal patch on radial displacement distribution along x

شکل 11 توزیع جابجایی شعاعی پانل A در اثر بار الکتریکی استاتیک روی عملگر بهینه، حالت حلقه بسته

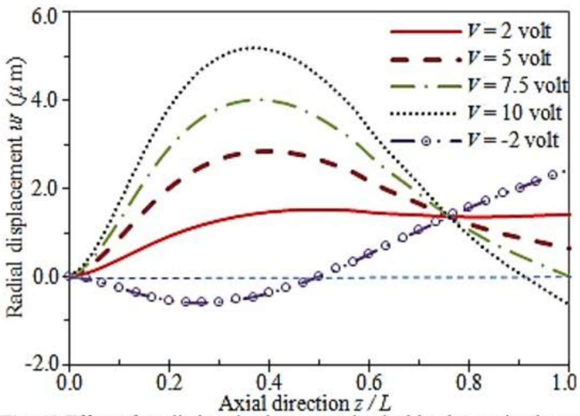

Fig. 12 Effect of applied static electro-mechanical load to optimal patch on radial displacement distribution along x

شکل 12 منحنی خیز پانل A با وصله بهینه تحت فشار واحد و بار الکتریکی استاتیکی روی عملگر بهینه، حالت حلقه بسته

(که کاملا سینوسی است) به خوبی نزدیک می‌باشند. در ادامه، فشار یکنواخت دینامیکی به‌صورت تابع زمانی دندانه اره‌ای، تعریف شده با رابطه (51) روی سطح داخلی پانل C با شرایط مرزی CFFF اعمال می‌شود.

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{T_1}t & 0 \le t \le T_1 \\ 0 & T_1 \le t \end{cases} \tag{51}$$

که تغییرات آن در "شکل 14" نشان داده شده است. جابجایی شعاعی بی‌بعد در نقطه وسط پانل، به ازای $T_1 = 1$ msec (یعنی همان زمانی که بار معادله (49) به مقدار پایدار خود می‌رسد) در "شکل15" مشاهده می‌شود. همان طوری‌که انتظار می‌رود، به‌دلیل حذف بار خارجی پس از T_1، در پاسخ این بارگذاری مدهای بالاتر اجازه ظهور بیشتری پیدا کرده‌اند. سپس پاسخ نقطه در وسط پانل C با لایه‌های گرافیت اپوکسی و شرایط مرزیCFFF تحت بار (51) به ازای $T_1 = 1$ msec بررسی شده است. لازم به ذکر است به دلیل شرایط مرزی متفاوت، نتایج (فرکانس و دامنه) "شکل 16" با "شکل‌های 14 و 15" قابل مقایسه نیست. با وجود این‌که فرکانس اول این سازه 22.9 HZ و فرکانس دوم آن 57.4 HZ می‌باشد، لیکن همان‌طوری‌که ذیل "شکل 3" توضیح داده شد، بارگذاری موجود، مد دوم را بیشتر تحریک کرده و در پاسخ زمانی، این مد فرکانس نوسانات اصلی را تعیین نموده است. در این مرحله، عملگر بهینه به‌دست آمده در بخش قبل، به‌صورت حلقه باز (gain = 0) روی پانل C چسبانده شده است. جابجایی شعاعی بی‌بعد در نقطه وسط پانل، به

ازای $T_1 = 1$ msec در "شکل 17" نشان داده شده است. تاثیر اعمال کنترل حلقه بسته روی رفتار دینامیکی پوسته برای پنج بهره کنترلی دلخواه ($K_d = 50 - 1300$)در "شکل 18" نشان داده شده است. طبق رابطه (39) ولتاژ اعمالی به عملگر، متناسب با منفی سرعت در نقطه وسط کف وصله ($Lp/2, \beta/2, h$) می‌باشد. در "شکل 18" مشاهده می‌شود که با استفاده از عملگر کنترل فعال، میرایی سازه نسبت به حالت حلقه باز بسیار بهتر شده است. با افزایش بهره کنترلی، سرعت (نرخ) کاهش دامنه ارتعاشات و زمان نشست پاسخ را می‌توان شدت بخشید. به ازای بهره $K_d = 1300$ دامنه ارتعاشات تا 3 برابر نسبت به $K_d = 900$ کاهش یافته است.

بهره $K_d = 50$ میرایی محسوسی به سازه نداده ولی در مقایسه با "شکل 17" ، مدهای بالاتر که فرم نامنظمی به منحنی می‌دادند (حتی مد اول) را تضعیف کرده است. افزایش دوره تناوب پاسخ زمانی با افزایش بهره را می‌توان با رفتار ارتعاشات میرای جرم و فنر یعنی رابطه $\tau = 2\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (ς نسبت میرایی است) همخوانی داد. در "شکل 19" تغییرات ولتاژ کنترلی مورد استفاده در عملگر پیزوالکتریک برای بهره‌های مختلف نمایش داده شده است. چون این سیگنال با سرعت نقطه وسط وصله متناسب است، رفتار آن با پاسخ جابجایی ("شکل 18") منطبق نمی‌باشد و حتی بالعکس با افزایش بهره کنترلی، می‌توان دید که ولتاژ افزایش یافته است و به عبارتی دیگر جابجایی در این نقطه از پوسته با سرعت بیشتری میرا می‌شود. البته با میرا شدن هرچه بیشتر، ولتاژهای کنترلی به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

در انتها، جهت حصول اطمینان بیشتر از عملکرد وصله بهینه شده، پاسخ زمانی وصله سرتاسری یعنی به‌صورت لایه کامل، در "شکل 20" برای حالت نزدیک حلقه باز K_d =100 و حداکثر بهره مورد استفاده روی عملگر بهینه یعنی $K_d = 1300$ نمایش داده شده‌اند. همان‌طوری‌که قبلا نیز اشاره شد، دامنه ارتعاشات پانل با لایه پیزوالکتریک سرتاسری از حالت وصله بهینه ذاتاً

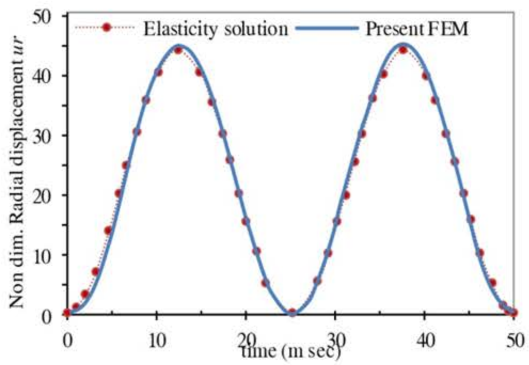

Fig. 13 Comparison of time response of non-dimensional radial displacement at the middle of host panel C, SSSS, [22]

شکل 13 مقایسه پاسخ زمانی جابجایی شعاعی بی بعد در نقطه وسط پانل C با چهار طرف تکیه‌گاه ساده،[22]

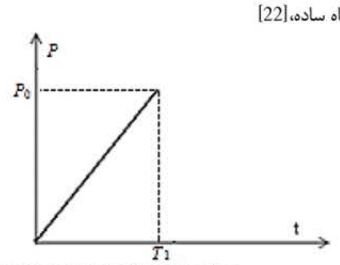

Fig. 14 Dynamic load variations over time

شکل 14 تغییرات فشار دینامیکی دندانه اره‌ای

کوچکتر است و فرکانس طبیعی غالب آن به‌طور قابل توجهی از پانل وصله‌دار بیشتر است. معهذا به ازای بهره مساوی، قابلیت آن در مستهلک نمودن ارتعاشات کمتر است. در این شکل، تاثیر ولتاژ عملگری روی کم رنگ شدن نقش مدهای بالاتر در منحنی پاسخ زمانی مجددا قابل ذکر می‌باشد.

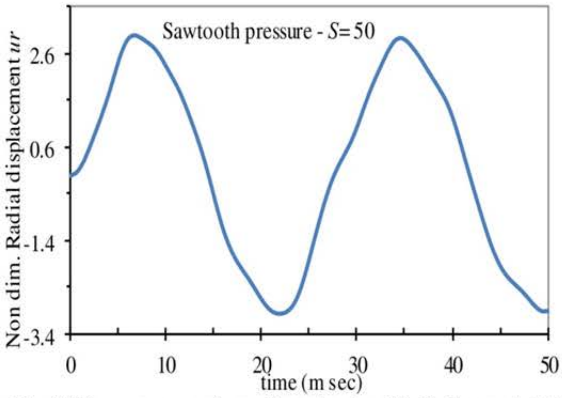

Fig. 15 Time response of non-dimensional radial displacement at the middle of host panel C, T300/ 976, CFFF

شکل 15 پاسخ زمانی جابجایی شعاعی بی بعد در نقطه وسط پانل C یکسرگیردار با لایه‌های از جنس T300/ 976

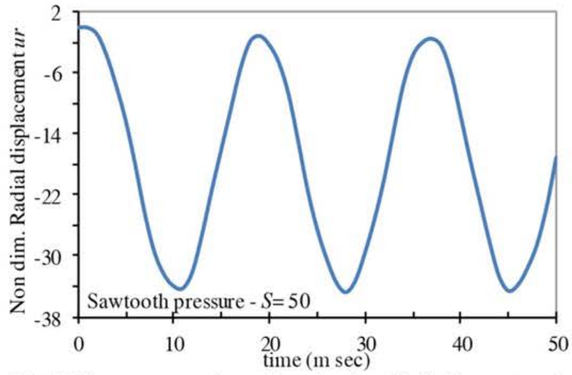

Fig. 16 Time response of non-dimensional radial displacement at the middle of host panel C, CFFF, graphite-epoxy

شکل 16 پاسخ زمانی جابجایی شعاعی بی بعد در نقطه وسط پانل C یکسرگیردار با لایه‌های گرافیت اپوکسی

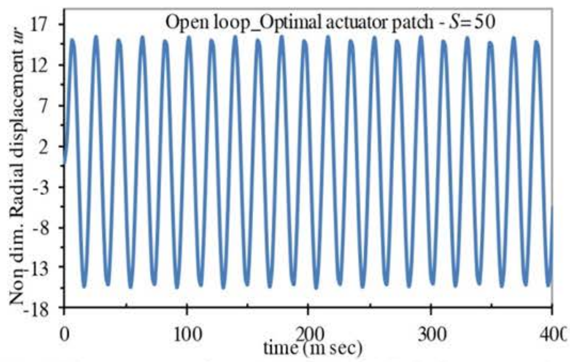

Fig. 17 Time response of non-dimensional radial displacement at the middle of panel C, CFFF, graphite-epoxy, optimal patch, open loop

شکل 17 پاسخ زمانی جابجایی شعاعی بی بعد در نقطه وسط پانل C یکسرگیردار با لایه‌های گرافیت اپوکسی با عملگر بهینه غیر فعال

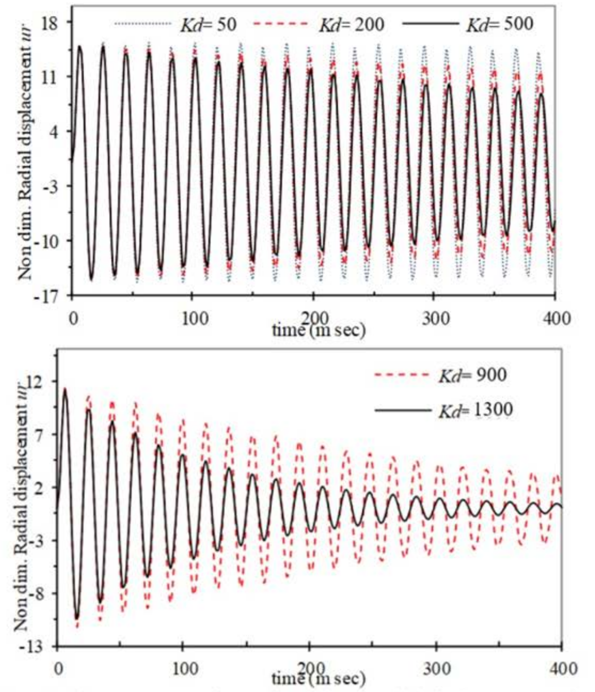

Fig. 18 Time response of non-dimensional radial displacement at the middle of panel C, CFFF, graphite-epoxy, optimal patch, five gains

شکل 18 پاسخ زمانی جابجایی شعاعی بی بعد در نقطه وسط پانل C یکسرگیردار با لایه‌های گرافیت اپوکسی با عملگر بهینه فعال و پنج بهره کنترلی مختلف

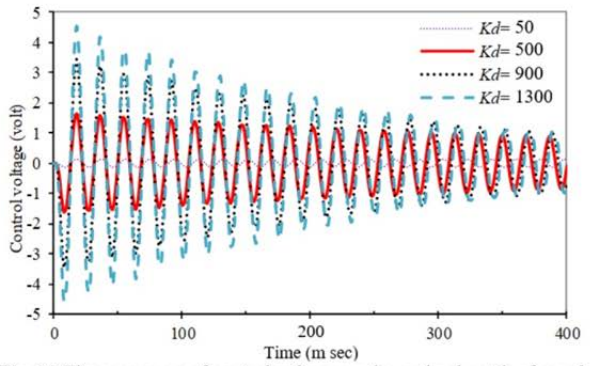

Fig. 19 Time response of control voltage on the optimal patch of panel C, CFFF, graphite-epoxy, four gains

شکل 19 تغییرات زمانی ولتاژ کنترلی پانل C یکسرگیردار با لایه‌های گرافیت اپوکسی با عملگر بهینه فعال و چهار بهره کنترلی مختلف

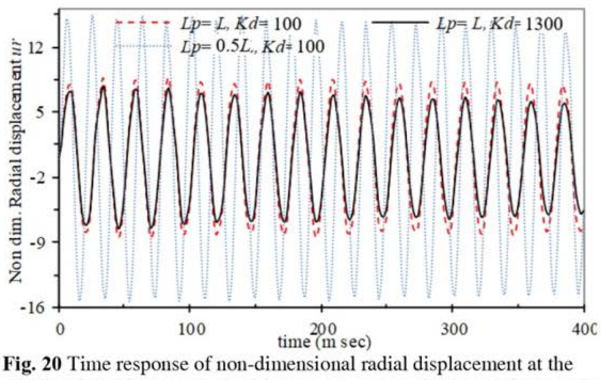

Fig. 20 Time response of non-dimensional radial displacement at the middle of panel C, CFFF, graphite-epoxy, actuator layer, maximum gain

شکل 20 پاسخ زمانی جابجایی شعاعی بی بعد در نقطه وسط پانل C یکسرگیردار با لایه‌های گرافیت اپوکسی با عملگر سرتاسریو ماکزیمم بهره کنترلی

در انتها لازم به ذکر است با توجه به خطی بودن تمام روابط حاکم، رفتار پاسخ زمانی سایر نقاط سازه از لحاظ فرکانس و فرم کلی (به جز دامنه) مشابه نتایج به‌دست آمده می‌باشند.

4- جمع بندی و نتیجه گیری

پانل استوانه‌ای چندلایه به‌دلیل انحنای عرضی، استحکام و سفتی بیشتری از تیر و ورق از همان جنس دارد و کنترل ارتعاشات آن توسط وصله عملگر بهینه به‌منظور بهبود رفتار دینامیکی، قبلاً مورد بررسی قرار نگرفته است. معادلات دینامیک سازه، توسط روش المان محدود براساس فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌دست آمد و برای یافتن عملگر بهینه از معیار حداکثر کنترل‌پذیری استفاده شد. سپس طبق قانون کنترلی، به‌منظور میرا کردن ارتعاشات، ولتاژ عملگری به وصله پیزو اعمال شد. با مقایسه نتایج به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی و همچنین پاسخ دینامیکی پانل استوانه‌ای چند لایه بدون وصله با مراجع موجود، صحت عملکرد فرمول‌بندی و نتایج احراز شد. سپس با داشتن دینامیک سیستم بهینه شده، پاسخ فرکانسی برای حالات حلقه باز و بسته به‌دست آمد و در انتها تاثیر مقادیر بهره کنترلی و ابعاد هندسی پانل و وصله روی پاسخ زمانی و سرعت میرا شدن ارتعاشات به نمایش گذاشته شد. به‌طور کلی مشاهدات ذیل در نتایج قابل ارائه می‌باشند:

- نتایج به‌دست آمده به نمونه جواب‌های موجود از روش نیمه تحلیلی (حل الاستیسیته) بسیار نزدیک می‌باشند.
- در ارتعاشات آزاد، مد غالب برحسب تحریک وارده برانگیخته می‌شود و با دانستن مد غالب می‌توان رفتار پاسخ ارتعاشی سازه را تا حدی پیش بینی کرد.
- در صورت انتخاب درست محل و اندازه وصله پیزوالکتریک می‌توان اهداف کنترل ارتعاشات موضعی برای تعداد محدود مد را برآورده کرد.
- با افزایش طول وصله پیزوالکتریک، اختلاف بین منحنی‌های توزیع جابجایی شعاعی کمتر می‌شود.
- با افزایش بهره کنترلی، برخلاف جابجایی، ولتاژ افزایش می‌یابد و سازه با سرعت بیشتری میرا می‌شود و با میرا شدن ارتعاشات، ولتاژ کنترلی به صفر میل می‌کند.
- افزایش بهره کنترلی، تاثیر قابل توجهی روی دوره تناوب پاسخ زمانی و فرکانس تشدید مدهای اول و دوم می‌گذارد.
- به ازای بهره‌های مساوی، قابلیت لایه پیزوالکتریک سرتاسری در مستهلک نمودن ارتعاشات پانل از وصله بهینه کمتر است.

5- فهرست علایم

$[A]$	ماتریس دینامیک فضای حالت
$[B]$	ماتریس ضریب ورودی فضای حالت
B_{ij}	اوپراتور کرنش- تغییر مکان
$[\overline{C}]$	ماتریس ثابت‌های انتقال یافته الاستیک
$D_i(i=x,y,z)$	جابجایی الکتریکی
$[D]$	ماتریس سفتی
$E_i(i=x,y,z)$	میدان الکتریکی
$\{d\}$	بردارهای تعمیم یافته جابجایی
e_{ij}	ثابت‌های (ضرایب) پیزوالکتریک
$\{k\}$	بردار سختی

$[K]$ ماتریس سختی عمومی

$[N]$ ماتریس متشکل از بردارهای توابع شکل

u,v,w تغییر مکان در راستاهای شعاعی، محیطی و محوری

$\{X\}$ بردارهای درجات آزادی کلی

علایم یونانی

$\{\sigma\}$ بردار تنش

$\{\varepsilon\}$ بردار کرنش

μ معیار کنترل‌پذیری

$\{\psi\}$ بردار پتانسیل الکتریکی

θ,ϕ زاویه دوران نرمال بر لایه‌های میانی

بالانویس‌ها

k شماره لایه مرکب

j شماره وصله پیزو

زیرنویس‌ها

x,y,z محورهای طولی، محیطی و شعاعی

b خمشی یا واقع در صفحه

s برشی عرضی

t انتقالی

r دورانی

i شماره گره‌های المان

p پیزوالکتریک

6- مراجع

[1] C. Shakeri , M. N. Noori, Z. Hou, Smart materials and structures: A reviw, materials for the new millennum, *Proceedings of ASCE Eng. Materials Conference,* pp. 863-876, Washington, DC, Nov. 10-14, 1996.

[2] N. Jalili, *Piezoelectric-Based Vibration-Control Systems Applications to Micro/Nano Sensors and Actuators*, New York: Springer, pp. 114-172, 2010. (in English)

[3] H. S. Tzou, J. P. Zhong, Electromechanics and vibrations of piezoelectric shell distributed systems, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control,* Vol. 115, No. 3, pp. 506-517, 1993.

[4] S. Aligholizadeh, M. A. Hamed, R. Hassannejad Qadim, Active vibration control of the clamped beam with length and location optimized piezoelectric patches, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 9, pp. 11-22, 2015. (in Persian فارسی)

[5] S. Kumar, R. Srivastava, R. Srivastava, Active vibration control of smart piezo cantilever beam using pid controller, *International Journal of Research in Engineering and Technology,* Vol. 3, pp. 392-399, 2014.

[6] A. Gharib, M. Salehi, S. Fazeli, Deflection control of functionally graded material beams with bonded piezoelectric sensors and actuators, *Materials Science and Engineering A,* Vol. 498, pp. 110–114, 2008.

[7] M. R. Saviz, An optimal approach to active damping of nonlinear vibrations in composite plates using piezoelectric patches, *Smart Materials and Structures,* Vol. 24, No. 3, pp. 1-19, 2015.

[8] B. Bandyopadhyay, T. C. Manjunath, M. Umapathy, *Modeling, Control and Implementation of Smart Structures,* Springer, pp. 653-688, 2007.

[9] M. J. Balas, Active control of flexible systems, *Journal of Optimization Theory and Application,* Vol. 25, No. 3, pp. 415-436, 1978.

[10] A. Baz, S. Poh, Performance of an active control system with piezoelectric actuators, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 139, No. 1, pp. 133-149, 1990.

[11] M. Sunar, S. S. Rao, Distributed modeling and actuator location ofpiezoelectric control systems, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal,* Vol. 34, No. 10, pp. 2209-2211, 1996.

[12] A. Yousefi-Koma, A. Vukovich, Shape and location optimization of piezoelectric actuators in active control system, *Proceeding of the American Society of Mechanical Engineers,Aerospace Division, AD-* Vol. 52, ASME, NJ, pp. 559-566, 1996.

[13] C. Saravanann, N. Ganesan, V. Ramamurti, Semianlytical finite element analysis of active constrained layer damping in cylindricall shells of revolution, *Computers and Structures,* Vol. 79, pp. 1133-1145, 2001.

[14] V. Balamurugan, S. Narayanan, Active vibration control of smart shellsusing distributed piezoelectric sensors andactuators, *Smart Materials and Structures,* Vol. 10, No. 5, pp. 173–180, 2001.

[15] S. Zhou, C. Liang, C. A. Rogers, Impedance modeling of two-dimensional piezoelectric actuators bonded on a cylinder.*Adaptive Structures and Material Systems ASME,* Vol. 35, pp. 247-255, 1993.

[16] M. C. Ray, J. Oh, A. Baz, Active constrained layer damping of thin cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 5, pp. 921-935, 2001.

[17] M. C. Ray, J. N. Reddy, Active control of laminated cylindrical shells using piezoelectric fiber reinforced composites, *Composites Science and Technology,* Vol. 65, pp. 1226–1236, 2005.

[18] A. M. A. Hamden, A. H. Nayfeh, Measures of modal controllability and observability for first and second order linear systems, *Journal of Guidance and Control Dynamics*, Vol. 12, pp. 421–428, 1989.

[19] Y. E. Jianqiao, K. P. Soldatos, Three-dimensional vibration of laminated cylindrical panels with symmetric or antisymmetric cross-ply lay-up, *Journal of Compoites Engineering*, Vol.4, No. 4, pp. 429–444, 1994.

[20] A. A. Khdeir, J. N. Reddy, D. Frederick, A study on bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories, *International Journal of Solid Struct*., Vol. 27, pp. 1337–1351, 1989.

[21] A. Messina, K. P. Soldatos, Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 4, pp. 749-768, 1999.

[22] M. Shakeri, A. Alibeigloo, Dynamic Analysis of Orthotropic Laminated Cylindrical Panels, *Mechanics of Advanced Materials and Structures,* Vol. 12, pp. 67–75, 2005.