



توسعه یک حلگر لزج تمام-سرعت بر پایه الگوریتم رو به باد "رو" در ساختار بی‌سازمان

مصطفی گوهرشادی¹، مسعود میرزایی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران

2- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 1969764499، mirzaei@kntu.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک حلگر لزج در دامنه کلی جریان‌ات کم سرعت و پرسرعت بر پایه الگوریتم رو به باد "رو" در ساختار شبکه بی‌سازمان توسعه داده شده است. در روش ارایه شده، سختی معادلات حاکم در شکل تراکم‌پذیر در سرعت‌های پایین با استفاده از فرم پیش‌شرط کاهش می‌یابد. در محاسبه لزجت مصنوعی روش رو به باد "رو" نیاز به عملیات ضرب‌های ماتریسی است که این کار هزینه محاسبات را بالا می‌برد. فرینک این عملیات پرهزینه را در حالت بدون پیش‌شرط به محاسبه مؤلفه‌های شارهای مرتبط با مقادیر ویژه تقلیل داد. در این تحقیق در حالت پیش‌شرط، عملیات مشابهی بر روی عبارات لزجت مصنوعی بجای شکل ضرب‌های ماتریسی انجام و معادلات جدید ارایه شد. در ضمن معادلات در یک شکل عمومی ارایه شده که قابلیت سوئیچ به هر کدام از حالات با پیش‌شرط یا بدون پیش‌شرط را دارد. این گونه ارایه عمومی معادلات علاوه بر کاربردهایی که در روش بهینه‌سازی الحاقی دارد، امکان سریع تبدیل کدهای تراکم‌پذیر بدون پیش‌شرط را به حالت با پیش‌شرط فراهم می‌نماید. در بخش نتایج، حلگر برای ایرفویل‌های آزمون تک المانی و چند المانی در حالت کم‌سرعت و سرعت بالا با نتایج تجربی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد همگرایی باقیمانده‌ها که در حلگر تراکم‌پذیر در سرعت‌های پایین بسیار طولانی بوده است در حالت پیش‌شرط به شدت بهبود می‌یابد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 اسفند 1396

پذیرش: 01 اردیبهشت 1397

ارائه در سایت: 10 خرداد 1397

کلید واژگان:

تراکم‌پذیر

روش رو

فرم پیش‌شرط

شبکه بی‌سازمان

A viscous all-speed solver development based on Roe upwind scheme in unstructured database

Mostafa Goharshadi, Masoud Mirzaei*

Aerospace Engineering Faculty, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran

*P.O.B. 1969764499 Tehran, Iran, mirzaei@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 February 2018
Accepted 21 April 2018
Available Online 31 May 2018

Keywords:
Compressible
Preconditioning
Roe scheme
Unstructured grid

ABSTRACT

In this paper, a viscous all-speed flow solver has been developed based on Roe upwind scheme in unstructured database. In the presented method, stiffness of the compressible governing equations in low-speed region reduces using the preconditioning form. In calculating the artificial viscosity of a Roe upwind scheme, multiple matrices multiplication is needed. Frink reduced these costly operations by simplification of the matrices multiplication to some flux components which are related to distinct eigenvalues. In this research similar to Frink work, the equations of artificial viscosity in preconditioning Roe upwind scheme obtained and presented in the flux components form. This is a generalized form that can be easily switched to the preconditioned or non-preconditioned form. This is useful in converting any original Roe upwind scheme to the preconditioning form and also has application in adjoint optimization method. Results of the computer code were compared with experimental data of single and two-element airfoils in both preconditioning and non-preconditioning form. The results show that the non-preconditioning compressible solver hardly converged in low-speed regions while the preconditioned form converged more rapidly.

1- مقدمه

است، در نواحی با گرادیان فشاری بالا، جریان‌ات سرعت‌بالا (تراکم‌پذیر) وجود دارند و حل جریان با یک حلگر صرفاً تراکم‌ناپذیر یا صرفاً تراکم‌پذیر با خطا مواجه خواهد شد. همین مسئله در توربین‌های بادی بزرگ و تیغه‌های بالگرد قابل مشاهده است.

برای حل این گونه مسایل ترکیبی دو راه کار وجود دارد. راه اول استفاده از حلگرهای تراکم‌ناپذیر بر پایه فشار¹ است که با استفاده از تراکم‌پذیری مصنوعی² امکان حل نواحی تراکم‌پذیر را فراهم می‌کنند [1]. راه دوم که در

در بسیاری از مسایل مهندسی مرتبط با دینامیک سیالات محاسباتی، سرعت جریان یا در سرعت‌های بالا و تراکم‌پذیر قرار دارد و یا در سرعت‌های کم و تراکم‌ناپذیر و به این خاطر در سالیان گذشته، حلگرهای تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر به‌طور جداگانه توسعه داده شده‌اند. با این وجود دسته قابل توجهی از مسایل وجود دارند که در آن‌ها جریان سیال به‌صورت ترکیبی از سرعت‌های کم و سرعت‌های بالا به‌صورت همزمان است. به‌عنوان مثال، در ایرفویل‌های چندالمانی باوجود این که جریان غالب میدان در سرعت‌های کم

¹ Pressure based solver

² Artificial compressibility

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad f_x^{inv} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix} \quad f_y^{inv} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix}$$

$$f_x^{vis} = \frac{1}{Re_\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u \tau_{xx} + v \tau_{yx} + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$f_y^{vis} = \frac{1}{Re_\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

در تمامی روابط بالا متغیرها به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$x \equiv \frac{x}{L}, y \equiv \frac{y}{L}, \rho \equiv \frac{\rho}{\rho_\infty}, u \equiv \frac{u}{V_\infty}, v \equiv \frac{v}{V_\infty}, p \equiv \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2}$$

$$T \equiv \frac{T}{T_\infty}, a \equiv \frac{a}{V_\infty}, H \equiv \frac{H}{V_\infty^2}, E \equiv \frac{E}{V_\infty^2}, \mu \equiv \frac{\mu}{\mu_\infty}, t \equiv \frac{t V_\infty}{L}$$

همچنین در رابطه (3)، عدد رینولدز و پرانتل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}, \quad Pr = \frac{C_p \mu}{\kappa}$$

که در این تعاریف طول مرجع است که در این جا وتر ایرفویل در نظر گرفته می‌شود. معادله گاز کامل در شکل بدون بعد و رابطه آنتالپی کل به ترتیب به صورت زیر هستند.

$$p = \frac{1}{\gamma M^2} \rho T \quad (4)$$

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (5)$$

روش رو به باد "رو" در معادله (2)، شارهای لبه m ام حجم کنترل را با استفاده از عبارات راست و چپ لبه به صورت زیر محاسبه می‌کند [7]:

$$\overline{f^{inv}}_m \cdot \vec{n}_m = \frac{1}{2} [F_m(w_R) + F_m(w_L) + D_m] \quad (6)$$

در این رابطه،

$$F = \overline{f^{inv}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \rho V_c \\ \rho u V_c + p n_x \\ \rho v V_c + p n_y \\ \rho H V_c \end{bmatrix} \quad (7)$$

که V_c سرعت عمود بر وجه⁵ به صورت زیر تعریف می‌شود.

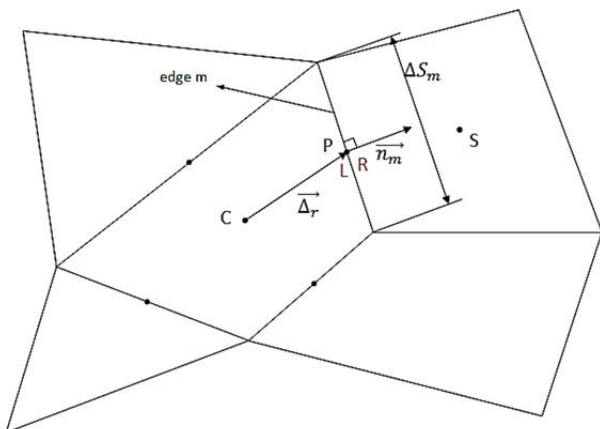


Fig. 1 Definitions in unstructured finite volume

شکل 1 شماتیک عمومی سلول‌ها در روش حجم محدود شبکه بی‌سازمان

⁵ Contravariant velocity

این مقاله برای حالت لزج استفاده شده است، استفاده از حلگرهای تراکم‌پذیر است که با ضرب یک ماتریس پیش‌شرط¹ در معادلات حاکم، سختی موجود در نواحی کم‌سرعت را کاهش می‌دهند و با تعریف جدیدی برای مقادیر ویژه، همگرایی را تسهیل می‌نمایند [3,2].

در حلگرهای تراکم‌پذیر عبارت لزجت مصنوعی، نوسانات موجی از جمله نوسانات ناشی از موج شوک را میرا می‌کند. مقدار لزجت مصنوعی حاصل ضرب ماتریس‌های بردارها و مقادیر ویژه به صورت $M |\Lambda_r| M^{-1} \Delta w_p$ است که جزئیات آن در بخش بعدی مقاله آمده است. فرینک این عملیات ماتریسی پرهزینه را با ساده‌سازی و ارایه آن‌ها به صورت مؤلفه‌های شار، $|\Delta F_i|$ ، کاهش داد که اندیس‌ها مرتبط با هر مقدار ویژه می‌باشند [4]. ولکف² و کارپنکو³ همین ساده‌سازی را برای فرم پیش‌شرط در جهت شار یک بعدی ارایه دادند [5]. در این مقاله معادلات شکل پیش‌شرط روش رو به باد "رو" در حالت شار دوبعدی اقتباس شده و به صورت مؤلفه‌های شار ارایه می‌شود. همچنین معادلات لزجت مصنوعی در این تحقیق، در یک فرم عمومی که قابلیت سوئیچ به هر دو حالت با پیش‌شرط و یا بدون پیش‌شرط را دارد، اقتباس شده و ارایه می‌شود. این فرم ارایه دو مزیت دارد. مزیت اول آن در قابلیت تبدیل سریع کدهای اورجینال روش رو به باد "رو" به فرم پیش‌شرط است و مزیت دیگر آن در بهینه‌سازی روش الحاقی گسسته⁴ می‌باشد. در روش گسسته، در زمان محاسبه ژاکوبیان، $\partial R / \partial w$ ، در حالت پیش‌شرط، حلگر بهینه‌ساز ناپایدار می‌شود. آسوتی و همکارانش از $\partial R / \partial w$ در حالت بدون پیش‌شرط استفاده کردند که به نتایج پایدار و مناسبی رسیدند [6]. به عبارت دیگر در روش بهینه‌سازی الحاقی گسسته، در حالت پیش‌شرط که هم به حلگر جریان و هم حلگر الحاقی نیاز است، حلگر جریان به صورت با پیش‌شرط فراخوانده می‌شود ولی حلگر الحاقی بدون پیش‌شرط است. بنابراین در محاسبه $\partial R / \partial w$ در حلگر الحاقی، باقیمانده‌ها بدون پیش‌شرط بایستی حساب شوند و این می‌طلبد که کد قابلیت سوئیچ به هر دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن را داشته باشد تا حجم برنامه‌نویسی کاهش یابد.

در این مقاله در ابتدا معادلات ناویر-استوکس در حالت دوبعدی ارایه‌شده و روش گسسته‌سازی حجم محدود در ساختار بی‌سازمان به شکل الگوریتم رو به باد "رو" در حالت با پیش‌شرط و بدون آن پیاده‌سازی می‌شود. در بخش نتایج، مقایسه با نتایج تجربی برای ایرفویل‌های تک المانی و چند المانی در دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن صورت می‌گیرد.

2- معادلات حاکم، گسسته‌سازی و مدل آشفتگی

معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر در شکل ابقایی به صورت زیر هستند:

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\partial f_x^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial f_y^{inv}}{\partial y} = \frac{\partial f_x^{vis}}{\partial x} + \frac{\partial f_y^{vis}}{\partial y} \quad (1)$$

فرم گسسته حجم محدود این معادلات به شکل برداری به صورت زیر قابل ارایه است:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\Omega_c} \left[\sum_{m=1}^{N_f} (\overline{f^{inv}} - \overline{f^{vis}})_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] \quad (2)$$

در این رابطه مطابق "شکل 1"، \vec{n}_m بردار واحد عمود بر لبه m ام از سلول C و ΔS_m طول آن و " " ضرب داخلی برداری است. سایر متغیرها در معادلات (1) و (2) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

¹ Preconditioning matrix

² Volkov

³ Karpenko

⁴ Discrete adjoint method

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma}, C_{w2} = 0.3, \\ C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622, \kappa = 0.41, \\ C_{v1} = 7.1, C_{v2} = 0.7, C_{v3} = 0.9, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2 \\ \text{همچنین لزجت گردابه آشفته, } u_t, \text{ از رابطه زیر به دست می‌آید.} \\ v_t = \bar{v} f_{v1}$$

3- استخراج معادلات در حالت پیش‌شرط

معادلات ناویر-استوکس در حالت تراکم‌پذیر در فرم ابقایی حجم محدود گسسته را با استفاده از معادلات (2) و (6) به صورت زیر مجدداً می‌توان نوشت:

$$\Omega_c \frac{dw}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} [F_m(w_R) + F_m(w_L) + D_m] \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \bar{f}^{vis}_m \cdot \bar{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (13)$$

در شکل متغیرهای اصلی^۲، این معادلات را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Omega_c P \frac{dw_p}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{F_m(w_{pR}) + F_m(w_{pL}) + D_m\} + \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \bar{f}^{vis}_m \cdot \bar{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (14)$$

با انتخاب $w_p = [p, u, v, T]$ ، ماتریس P به صورت زیر خواهد شد:

$$P = \frac{\partial w}{\partial w_p} = \begin{bmatrix} \gamma/a^2 & 0 & 0 & -\rho/T \\ \gamma/a^2 u & \rho & 0 & -\rho/T u \\ \gamma/a^2 v & 0 & \rho & -\rho/T v \\ \gamma/a^2 H - 1 & \rho u & \rho v & -\rho/T \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

هنگامی که $M \rightarrow 0$ ، همگرایی باقیمانده‌های شکل تراکم‌پذیر حلگر لزج به شدت کاهش می‌یابد و دقت نتایج هم تا حدودی کاهش می‌یابد. برای اصلاح این مشکل، ماتریس P با یک ماتریس مناسب Γ جایگزین می‌شود به طوری که سیستم پیش‌شرط در اعداد ماخ بالا به سیستم اولیه تبدیل می‌شود:

$$\Omega_c \Gamma \frac{dw_p}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{F_m(w_{pR}) + F_m(w_{pL}) + D_m\} + \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \bar{f}^{vis}_m \cdot \bar{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (16)$$

ویس و اسمیت^۳ یک ماتریس پیش‌شرط پیشنهاد کرده‌اند که برای حالت عمومی یک سیال مناسب است. شکل گاز کامل این ماتریس به صورت زیر است [9]:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & -\rho/T \\ \theta u & \rho & 0 & -\rho/T u \\ \theta v & 0 & \rho & -\rho/T v \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & -\rho/T \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در این رابطه،

$$\theta = \frac{1 + (\gamma - 1)M_r^2}{M_r^2 a^2} \\ M_r^2 = \max[\min(M^2, 1), K M_\infty^2], K \approx 1 \quad (18)$$

همان‌گونه که در معادله (18) مشاهده می‌شود، هنگامی که $M \rightarrow 1$ ، θ مساوی γ/a^2 می‌شود و ماتریس پیش‌شرط Γ مساوی ماتریس P می‌شود. در معادله (16)، عبارت لزجت مصنوعی در حالت پیش‌شرط را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$V_c = un_x + vn_y \quad (8)$$

در رابطه (6)، D_m عبارت لزجت مصنوعی است که نوسانات ناپایدارکننده از جمله نوسانات موج شوک را میرا می‌کند و برابر است با:

$$D_m = -|A_{Roe}|_m (w_{Rm} - w_{Lm}) \quad (9)$$

در روش حجم محدود بی‌سازمان، مطابق "شکل 1"، عبارات راست و چپ به ترتیب مرتبط با سلول c و همسایه آن در لبه m است. $|A_{Roe}|_m$ که اصطلاحاً ماتریس رو نامیده می‌شود از ماتریس ژاکوبیان شار $A = \partial F / \partial w$ به دست می‌آید و متغیرهای جریان در آن با متغیرهایی که اصطلاحاً متغیرهای متوسط‌گیری شده رو نامیده می‌شوند، جایگزین می‌شوند [7]. روش محاسبه ماتریس $|A_{Roe}|_m$ در بخش بعدی می‌آید.

برای مدل‌سازی جریانات آشفته، در این تحقیق از مدل آشفتگی اسپالارت-آلماراس بهبودیافته^۱ استفاده شده است که در پهنه وسیعی از مسایل مهندسی کاربرد دارد [8]. در این جا معادلات این مدل به صورت بدون بعد و در فرم ابقایی گسسته شده حجم محدود ارایه می‌گردند:

$$\frac{d\rho \bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\Omega_c} \left[\sum_{m=1}^{N_F} (\bar{f}^{inv}_T - \bar{f}^{vis}_T)_m \cdot \bar{n}_m \Delta S_m \right] + Q_T \quad (10)$$

که در این روابط:

$$f_x^{inv}_T = \rho \bar{v} u, \quad f_y^{inv}_T = \rho \bar{v} v \\ f_x^{vis}_T = \frac{\rho(u_L + \bar{v})}{\sigma Re_\infty} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad f_y^{vis}_T = \frac{\rho(u_L + \bar{v})}{\sigma Re_\infty} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$

عبارت منبع Q_T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_T = C_{b1} \rho \bar{v} \bar{S} - \frac{C_{w1}}{Re_\infty} \rho \left(\frac{\bar{v}}{d}\right)^2 f_w + \frac{C_{b2}}{\sigma Re_\infty} \rho \\ + \left(\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2 \right) - \frac{(u_L + \bar{v})}{\sigma Re_\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + T \quad (11)$$

در این معادله T عبارت گذار از آرام به آشفته است. چنانچه جریان کاملاً آشفته در نظر گرفته شود و یا در نقطه گذار، میدان جریان به نواحی آرام و آشفته مطابق "شکل 2" تقسیم شود، می‌توان از این عبارت صرف‌نظر نمود. در حالت دوم، نقطه گذار می‌تواند با حل معادلات لایه‌مرزی و یک معیار گذار به دست آید. چنانچه مسئله مقایسه با نتایج تجربی باشد که در آن نقطه گذار در زمان آزمون تجربی از قبل مشخص شده، همان نقطه به‌عنوان نقطه تقسیم میدان جریان انتخاب می‌شود.

در معادله (11)، \bar{S} ورتیسسته بهبودیافته است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{S} = \begin{cases} \mathbb{S} + \bar{S} & : \bar{S} \geq -C_{v2} \mathbb{S} \\ \mathbb{S} + \frac{\mathbb{S}(C_{v2}^2 \mathbb{S} + C_{v3} \bar{S})}{(C_{v3} - 2C_{v2}) \mathbb{S} - \bar{S}} & : \bar{S} < -C_{v2} \mathbb{S} \end{cases} \quad (12)$$

که در آن،

$$\bar{S} = \frac{\bar{v}}{Re_\infty \kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad \mathbb{S} = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|$$

پارامتر d فاصله بی‌بعد تا نزدیک‌ترین دیواره است. همچنین:

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{v3} g^6}{g^6 + C_{v3}} \right]^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + C_{v2}(r^6 - r), \\ r = \min \left(\frac{\bar{v}}{Re_\infty \bar{S} \kappa^2 d^2}, 10 \right),$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\bar{v}}{u_L}$$

در روابط بالا ثوابت و ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

² Primitive variables

³ Weiss and Smith

¹ Modified Spalart-Allmaras model

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & -\rho/T \\ \varphi_1 u & \rho & 0 & -\rho/T u \\ \varphi_1 v & 0 & \rho & -\rho/T v \\ \varphi_1 H - 1 & \rho u & \rho v & -\rho/T \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \gamma/a^2, & \text{با پیش شرط} \\ \theta, & \text{بدون پیش شرط} \end{cases} \quad (27)$$

با قرار دادن روابط (20) و (26) در (25):

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c - \lambda \varphi_1 & \rho n_x & \rho n_y \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c u + n_x - \lambda u \varphi_1 & \rho(u n_x + V_c) - \lambda \rho & \rho u n_y \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c v + n_y - \lambda v \varphi_1 & \rho v n_x & \rho(v n_y + V_c) - \lambda \rho \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c H - \lambda H \varphi_1 + \lambda & \rho(H n_x + u V_c) - \lambda \rho u & \rho(H n_y + v V_c) - \lambda \rho v \\ \frac{\rho}{T} (\lambda - V_c) \\ \frac{\rho}{T} u (\lambda - V_c) \\ \frac{\rho}{T} v (\lambda - V_c) \\ \frac{\rho q^2}{T} (\lambda - V_c) \end{bmatrix} = 0$$

ستون چهارم به $\lambda - V_c = 0$ منجر می‌شود. بنابراین:

$$\lambda_1 = V_c \quad (28)$$

با مرتب‌سازی مجدد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c - \lambda \varphi_1 & n_x & n_y & 1 \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c u + n_x - \lambda u \varphi_1 & u n_x + V_c - \lambda & u n_y & u \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c v + n_y - \lambda v \varphi_1 & v n_x & v n_y + V_c - \lambda & v \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c H - \lambda H \varphi_1 + \lambda & H n_x + u V_c - \lambda u & H n_y + v V_c - \lambda v & \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} = 0$$

با کسر سطرهای 2، 3 و 4 از سطر اول که در مقادیر u ، v و H به ترتیب ضرب شده است، مقدار دترمینان به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c - \lambda \varphi_1 & n_x & n_y & 1 \\ n_x & -(\lambda - V_c) & 0 & 0 \\ n_y & 0 & -(\lambda - V_c) & 0 \\ \lambda & u(V_c - \lambda) & v(V_c - \lambda) & -\frac{a^2}{\gamma - 1} \end{bmatrix} = 0$$

با ضرب سطر 2 در n_y و جمع آن با سطر 3:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c - \lambda \varphi_1 & n_x & n_y & 1 \\ n_x & -(\lambda - V_c) & 0 & 0 \\ 0 & n_y(\lambda - V_c) & -n_x(\lambda - V_c) & 0 \\ \lambda & u(V_c - \lambda) & v(V_c - \lambda) & -\frac{a^2}{\gamma - 1} \end{bmatrix} = 0$$

با مشاهده سطر 2، این سطر به $\lambda - V_c = 0$ منجر می‌شود:

$$\lambda_2 = V_c \quad (29)$$

مرتب‌سازی مجدد دترمینان باقیمانده به حل یک معادله درجه دوم منجر می‌شود که با حل آن λ_3 و λ_4 به دست می‌آیند:

$$\lambda_{3,4} = V_c' \pm a' \quad (30)$$

که در این رابطه:

$$V_c' = \frac{\varphi + 1}{2} V_c, \quad a' = \sqrt{\left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 V_c^2 + \varphi a^2} \quad (31)$$

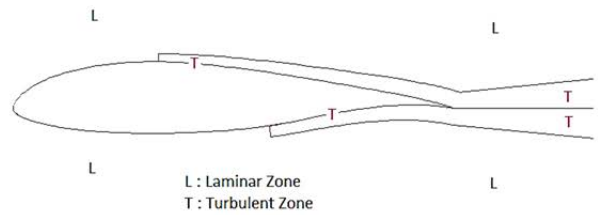


Fig. 2 Dividing flow field to laminar and turbulent zones

شکل 2 تقسیم میدان جریان به نواحی آرام و آشفته

$$A_{Roe} \Delta w = \Gamma \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial w} \Delta w = \Gamma \left(\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial w_p} \right) \Delta w_p = \Gamma (\Gamma^{-1} A_p) \Delta w_p = \Gamma A_\Gamma \Delta w_p \quad (19)$$

که در این رابطه:

$$A_p = \frac{\partial F}{\partial w_p} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c & \rho n_x & \rho n_y & -\frac{\rho}{T} V_c \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c u + n_x & \rho(u n_x + V_c) & \rho u n_y & -\frac{\rho}{T} V_c u \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c v + n_y & \rho v n_x & \rho(v n_y + V_c) & -\frac{\rho}{T} V_c v \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c H & \rho(H n_x + u V_c) & \rho(H n_y + v V_c) & -\frac{\rho}{T} V_c \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

بنابراین:

$$\Omega_c \Gamma \frac{dw_p}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{ F_m(w_{p_R}) + F_m(w_{p_L}) - \Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p \} \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \vec{f}^{vis}_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (21)$$

حال متغیرهای اصلی را می‌توان مجدد به شکل ابقایی تبدیل کرد:

$$\Omega_c \Gamma P^{-1} \frac{dw}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{ F_m(w_R) + F_m(w_L) - \Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p \} \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \vec{f}^{vis}_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (22)$$

یا:

$$\Omega_c \frac{dw}{dt} + P \Gamma^{-1} \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{ F_m(w_R) + F_m(w_L) - \Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p \} \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \vec{f}^{vis}_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (23)$$

در معادله (23)، $|A_\Gamma|$ ماتریس ژاکوبیان قدرمطلق¹ در سیستم پیش شرط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A_\Gamma| = M_\Gamma |A_\Gamma| M_\Gamma^{-1} \quad (24)$$

ماتریس A_Γ یک ماتریس قطری است که عناصر آن، λ_i ، قدرمطلق مقادیر ویژه² ماتریس $\Gamma^{-1} A_p$ هستند. همچنین M_Γ ماتریس بردارهای ویژه³ و M_Γ^{-1} معکوس آن است. با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه به دست می‌آیند:

$$|\Gamma^{-1} A_p - \lambda I| = |A_p - \lambda \Gamma| = 0 \quad (25)$$

قبل از آن با جایگزینی θ به φ_1 ماتریس Γ را در یک شکل عمومی با پیش شرط و یا بدون پیش شرط تعریف می‌کنیم:

¹ Diagonalised Jacobian matrix

² Eigenvalues

³ Eigenvectors

بین معادلات سطر 2 و 3:

$$-n_y r_2 + n_x r_3 = 0$$

با انتخاب $r_1 = n_y$ و $r_2 = n_x$ از سطر 2 یا 3 به دست می‌آید:

$$r_1 = -\rho[V_c - \lambda_{3,4}]$$

حال از سطر 4 به دست می‌آید و سطر 1 به معادله بدیهی $0 = 0$

منجر می‌شود:

$$r_4 = -\frac{\gamma-1}{a^2} T[V_c - \lambda_{3,4}]$$

بنابراین بردارهای r_3 و r_4 برای هر کدام از مقادیر ویژه λ_3 و λ_4 به دست

می‌آیند:

$$r_3 = \begin{Bmatrix} -\rho[V_c - \lambda_3] \\ n_x \\ n_y \\ -\frac{\gamma-1}{a^2} T[V_c - \lambda_3] \end{Bmatrix}, r_4 = \begin{Bmatrix} -\rho[V_c - \lambda_4] \\ n_x \\ n_y \\ -\frac{\gamma-1}{a^2} T[V_c - \lambda_4] \end{Bmatrix} \quad (36)$$

روابط (35) و (36) ماتریس بردارهای ویژه را تشکیل می‌دهند:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho[V_c - \lambda_3] & -\rho[V_c - \lambda_4] \\ n_y & n_y & n_x & n_x \\ -n_x & -n_x & n_y & n_y \\ 0 & 1 & -\frac{\gamma-1}{a^2} T[V_c - \lambda_3] & -\frac{\gamma-1}{a^2} T[V_c - \lambda_4] \end{bmatrix} \quad (37)$$

با معکوس کردن ماتریس بالا، M^{-1} به دست می‌آید:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)T}{\gamma p} & n_y & -n_x & -1 \\ -\frac{(\gamma-1)T}{\gamma p} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\gamma p}{2\rho a'} & \frac{n_x(V_c - \lambda_4)}{2a'} & \frac{n_y(V_c - \lambda_4)}{2a'} & 0 \\ \frac{-1}{2\rho a'} & \frac{-n_x(V_c - \lambda_3)}{2a'} & \frac{-n_y(V_c - \lambda_3)}{2a'} & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

با جایگزینی معادلات (26)، (33)، (37) و (38) در عبارت لزجت

مصنوعی $\Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p$ می‌توان نوشت:

$$\Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p = \Gamma M_\Gamma |A_\Gamma| M_\Gamma^{-1} \Delta w_p = |\Delta F_{1,2}| + |\Delta F_3| + |\Delta F_4| \quad (39)$$

که در این رابطه $|\Delta F_i|$ شارهای مرتبط با هر مقدار ویژه هستند:

$$|\Delta F_{1,2}| = |\lambda_1| \left\{ \left(\frac{\gamma-1}{a^2} \Delta p - \frac{\rho}{T} \Delta T \right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V_c n_x \\ \Delta v - \Delta V_c n_y \\ u \Delta u + v \Delta v - V_c \Delta V_c \end{bmatrix} \right\} \quad (40)$$

$$|\Delta F_3| = |\lambda_3| \left\{ \left(\frac{\Delta p + \rho(V_c - \lambda_4) \Delta V_c}{2a' a} \right) \begin{bmatrix} a n_x \\ a n_y \\ a V_c \end{bmatrix} + \left(\frac{\Delta p(\lambda_3 - V_c) / a \phi + \rho a \Delta V_c}{2a' a} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{bmatrix} \right\} \quad (41)$$

$$|\Delta F_4| = |\lambda_4| \left\{ \left(\frac{\Delta p - \rho(\lambda_3 - V_c) \Delta V_c}{2a' a} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -a n_x \\ -a n_y \\ -a V_c \end{bmatrix} + \left(\frac{\Delta p(\lambda_3 - V_c) / a \phi + \rho a \Delta V_c}{2a' a} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{bmatrix} \right\}$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi_1 a^2 - (\gamma - 1)} = V_c' \pm a' \quad (32)$$

بنابراین:

$$\Lambda_\Gamma = \begin{bmatrix} V_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_c' + a' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_c' - a' \end{bmatrix} \quad (33)$$

اگر در روابط (28) تا (32)، $\varphi_1 = \gamma/a^2$ قرار داده شود (حالت بدون پیش‌شرط)، به مقادیر $V_c' = V_c$ و $a' = a$ ، $\varphi = 1$ منجر می‌شود و بنابراین $\lambda_{3,4} = V_c \pm a$ خواهند شد که مقادیر ویژه اصلی در طرح رو به باد "رو" می‌باشند.

ماتریس بردارهای ویژه از رابطه $(A_\Gamma - \lambda_i I) r_i = 0$ حاصل می‌شود. یا:

$$(A_p - \lambda_i \Gamma) r_i = 0$$

در شکل ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c - \lambda_i \varphi_1 & \rho n_x & \rho n_y \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c u + n_x - \lambda_i u \varphi_1 & \rho(u n_x + V_c) - \lambda_i \rho & \rho u n_y \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c v + n_y - \lambda_i v \varphi_1 & \rho v n_x & \rho(v n_y + V_c) - \lambda_i \rho \\ \frac{\gamma}{a^2} V_c H - \lambda_i H \varphi_1 + \lambda_i & \rho(H n_x + u V_c) - \lambda_i \rho u & \rho(H n_y + v V_c) - \lambda_i \rho v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix}_i = 0$$

با کسر سطرهای 2، 3 و 4 از سطر اول که در مقادیر u ، v و H به ترتیب

ضرب شده است:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{a^2} V_c - \lambda_i \varphi_1 & \rho n_x & \rho n_y \\ n_x & \rho(V_c - \lambda_i) & 0 \\ n_y & 0 & \rho(V_c - \lambda_i) \\ \lambda_i & \rho u(V_c - \lambda_i) & \rho v(V_c - \lambda_i) \\ \frac{\rho}{T} (\lambda_i - V_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{T} \frac{a^2}{\gamma - 1} (\lambda_i - V_c) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix}_i = 0 \quad (34)$$

با جایگزینی $\lambda_{1,2} = V_c$:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\gamma}{a^2} - \varphi_1 \right) V_c & \rho n_x & \rho n_y & 0 \\ n_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & 0 & 0 & 0 \\ V_c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix}_1 = 0$$

از سطر 2 یا 3 یا 4 می‌توان نتیجه گرفت که $r_1 = 0$ و از سطر 1:

$$n_x r_2 + n_y r_3 = 0$$

بردار را به این صورت انتخاب می‌کنیم که $r_2 = n_y$ و $r_3 = -n_x$. برای r_4 یک انتخاب مستقل خطی صفر و یک به ترتیب برای λ_1 و λ_2 است. بنابراین بردارهای r_1 و r_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$r_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ -n_x \\ 0 \end{Bmatrix}, r_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ -n_x \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

همچنین با جایگزینی $\lambda_{3,4} = V_c' \pm a'$ در معادله (34)، با حذف r_1 در

سرعت‌های کم ارایه می‌گردد.

1-5- سرعت‌های بالا

در محک اول جریان بر روی ایرفویل RAE2822 در عدد ماخ 0.729، زاویه حمله 2.8 درجه و عدد رینولدز 6.5×10^6 بر هر دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن با نتایج تجربی مقایسه می‌شود [10]. "شکل 3" مقایسه توزیع فشار را در این نتایج را نشان می‌دهد. نتایج در دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن تقریباً یکسان بوده و تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد. در "شکل 4" نمودار باقیمانده و در "اشکال 5 و 6"، نمودار همگرایی ضریب برآ و پسا برای هر دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن مقایسه شده‌اند. اگرچه به لحاظ باقیمانده نتایج در حالت بدون پیش‌شرط همگرایی کمی بهتر است ولی تفاوتی در همگرایی ضرایب آیرودینامیکی دیده نمی‌شود. بنابراین عملکرد هر دو روش در سرعت‌های بالا تقریباً همسان است.

2-5- سرعت‌های کم

1-2-5- ایرفویل تک‌المانی

در محک دوم جریان بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.15، زاویه

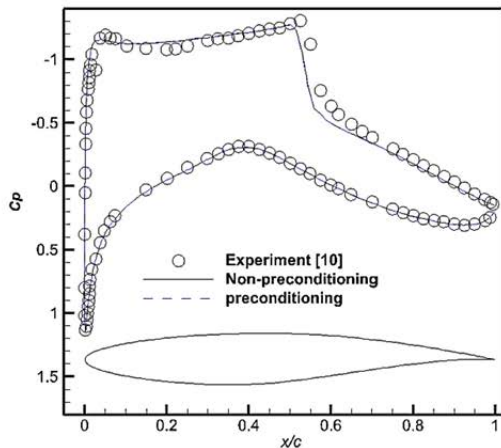


Fig. 3 Pressure coefficients comparison on RAE2822 in $M = 0.729, \alpha = 2.8$ and $Re = 6.5 \times 10^6$

شکل 3 مقایسه ضریب توزیع فشار بر روی ایرفویل RAE2822 در عدد ماخ 0.729، زاویه حمله 2.8 درجه و عدد رینولدز 6.5×10^6

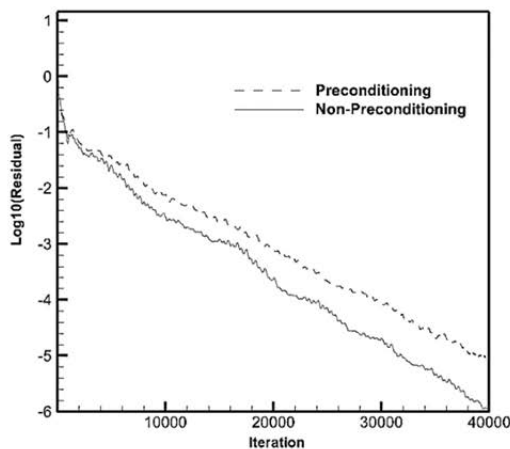


Fig. 4 Residuals comparison on RAE2822 in $M = 0.729, \alpha = 2.8$ and $Re = 6.5 \times 10^6$

شکل 4 مقایسه باقیمانده برحسب تکرار بر روی ایرفویل RAE2822 در عدد ماخ 0.729، زاویه حمله 2.8 درجه و عدد رینولدز 6.5×10^6

$$\left(\frac{\Delta p(V_c - \lambda_4)/a\phi - \rho a \Delta V_c}{2a'a} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{bmatrix} \quad (42)$$

در شکل بدون پیش‌شرط، $a' = a, \phi = 1, \lambda_{3,4} = V_c \pm a$ ، با قرار دادن $\Delta T = T(\Delta p/p - \Delta \rho/\rho)$ در معادلات (40) تا (42) به روابط مشهور فرینک می‌رسیم [4]:

$$|\Delta F_{1,2}| = |V_c| \left\{ (\Delta \rho - \Delta p/a^2) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ q^2/2 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V_c n_x \\ \Delta v - \Delta V_c n_y \\ u\Delta u + v\Delta v - V_c \Delta V_c \end{bmatrix} \right\}$$

$$|\Delta F_3| = |V_c + a| \left\{ \left(\frac{\Delta p + \rho a \Delta V_c}{2a^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u + a n_x \\ v + a n_y \\ H + a V_c \end{bmatrix} \right\}$$

$$|\Delta F_4| = |V_c - a| \left\{ \left(\frac{\Delta p - \rho a \Delta V_c}{2a^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u - a n_x \\ v - a n_y \\ H - a V_c \end{bmatrix} \right\}$$

معادلات (39) تا (42) را می‌توان به شکل فشرده‌تری نیز بیان کرد که باز هم حجم محاسبات را کاهش می‌دهد:

$$\Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p = \Gamma M_\Gamma |A_\Gamma| M_\Gamma^{-1} \Delta w_p = |\Delta F_{1,2}| + |\Delta F_{3,4}| \quad (43)$$

$$|\Delta F_{1,2}| = |\lambda_1| \left\{ \left(\frac{\gamma-1}{a^2} \Delta p - \frac{\rho}{T} \Delta T \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ q^2/2 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \Delta V_n \\ -n_x \Delta V_n \\ V_n \Delta V_n \end{bmatrix} \right\} \quad (44)$$

$$|\Delta F_{3,4}| = \left\{ \frac{\Delta p}{a^2 \phi} [d_1(V_c' - V_c) + d_2] + d_1 \rho \Delta V_c \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{bmatrix} + \{ \Delta p d_1 + \rho \Delta V_c [d_1(V_c - V_c') + d_2] \} \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ V_c \end{bmatrix} \quad (45)$$

که در این روابط:

$$d_1 = \frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2a'}, d_2 = \frac{|\lambda_3| + |\lambda_4|}{2}, V_n = u n_y + v n_x \quad (46)$$

همان‌گونه که مشهود است روابط (44) و (45) حجم محاسبات عملیات ماتریسی $\Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p = \Gamma M_\Gamma |A_\Gamma| M_\Gamma^{-1} \Delta w_p$ را که در هر لبه سلول شبکه بایستی انجام شود، به شدت کاهش می‌دهد. در ضمن این روابط با استفاده از رابطه (27)، در هر دو شکل با پیش‌شرط و بدون آن قابل استفاده هستند.

4- شرایط مرزی

شرط مرزی دیواره در هر دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن در حالت لزج همان شرط بدون لغزش است اما شرط مرزی دور دست¹ در حالت با پیش‌شرط متفاوت از حالت بدون پیش‌شرط است که بر پایه روش مشخصه‌هاست. در حالت با پیش‌شرط، در زمانی که جریان ورودی است، سرعت و دما مساوی مقادیر بی‌نهایت بوده و فشار از سلول‌های داخلی برونیابی می‌شود. در زمانی که جریان خروجی است، سرعت و دما از سلول‌های داخلی برونیابی شده و فشار مساوی مقدار بی‌نهایت است.

5- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی بر روی چند محک هم در سرعت‌های بالا و هم در

¹ Farfield boundary condition

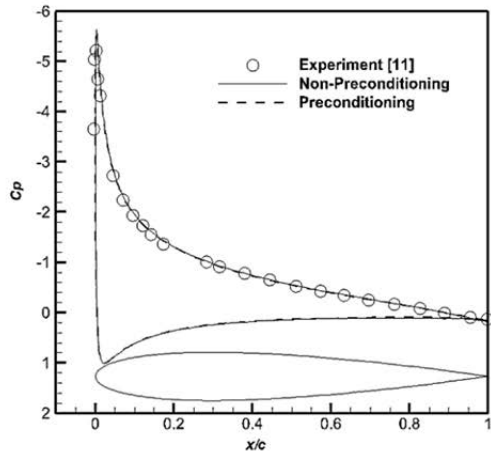


Fig. 7 Pressure coefficients comparison on NACA0012 in $M = 0.15, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 7 مقایسه ضریب توزیع فشار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.15، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

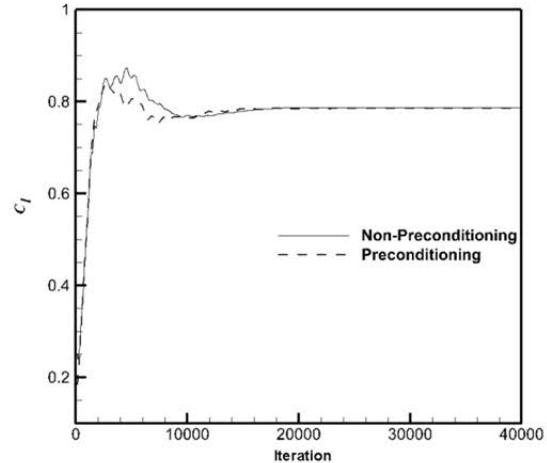


Fig. 5 C_l comparison on RAE2822 in $M = 0.729, \alpha = 2.8$ and $Re = 6.5 \times 10^6$

شکل 5 مقایسه ضریب برآ بر حسب تکرار بر روی ایرفویل RAE2822 در عدد ماخ 0.729، زاویه حمله 2.8 درجه و عدد رینولدز 6.5×10^6

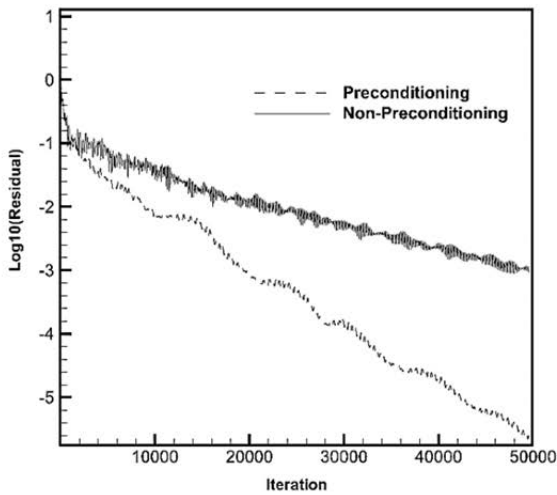


Fig. 8 Residuals comparison on NACA0012 in $M = 0.15, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 8 مقایسه باقیمانده بر حسب تکرار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.15، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

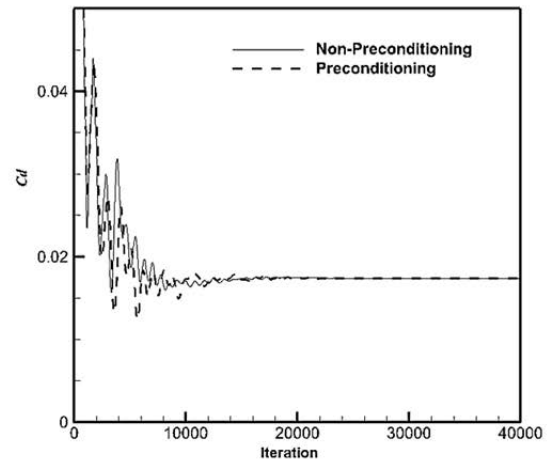


Fig. 6 C_d comparison on RAE2822 in $M = 0.729, \alpha = 2.8$ and $Re = 6.5 \times 10^6$

شکل 6 مقایسه ضریب پسا بر حسب تکرار بر روی ایرفویل RAE2822 عدد ماخ 0.729، زاویه حمله 2.8 درجه و عدد رینولدز 6.5×10^6

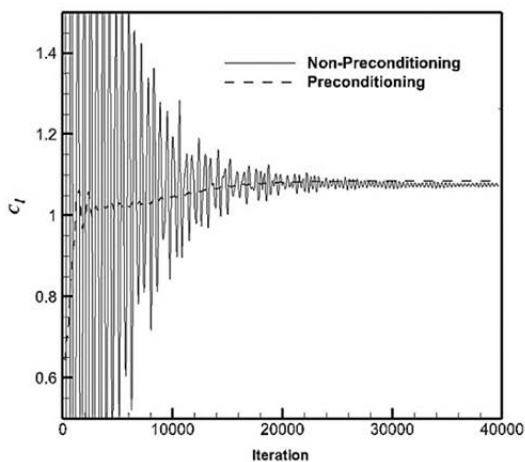


Fig. 9 C_l comparison on NACA0012 in $M = 0.15, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 9 مقایسه ضریب برآ بر حسب تکرار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.15، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6 برای هر دو حالت با پیش شرط و بدون آن با نتایج تجربی مقایسه می‌شود [11]. "شکل 7" مقایسه توزیع فشار را در این نتایج را نشان می‌دهد. نتایج در دو حالت با پیش شرط و بدون آن تقریباً یکسان بوده و تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد. در "شکل 8" نمودار باقیمانده و در "اشکال 9 و 10"، نمودار همگرایی ضریب برآ و پسا برای هر دو حالت با پیش شرط و بدون آن مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود کاهش باقیمانده و همگرایی ضرایب در حالت بدون پیش شرط سخت‌تر از حالت با پیش شرط حاصل شده است.

5-2-2- ایرفویل دو المانی

در محک سوم جریان بر روی ایرفویل دو المانی NLR7301 در عدد ماخ 0.185، زاویه حمله 6 درجه و عدد رینولدز 2.51×10^6 بر هر دو حالت با پیش شرط و بدون آن با نتایج تجربی مقایسه می‌شود [12]. "شکل 11" مقایسه توزیع فشار را در این نتایج را نشان می‌دهد. نتایج در دو حالت با پیش شرط و بدون آن تقریباً یکسان بوده و تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد.

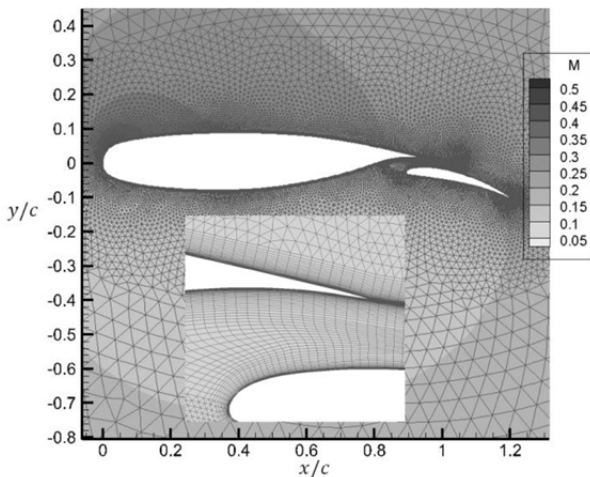


Fig. 12 Mach number contour on two-element NLR7301 in $M = 0.185, \alpha = 6$ and $Re = 2.51 \times 10^6$ including mesh generation on it

شکل 12 شبکه و کانتور عدد ماخ حول ایرفویل دو المانی NLR7301 در عدد ماخ 0.185، زاویه حمله 6 درجه و عدد رینولدز 2.51×10^6

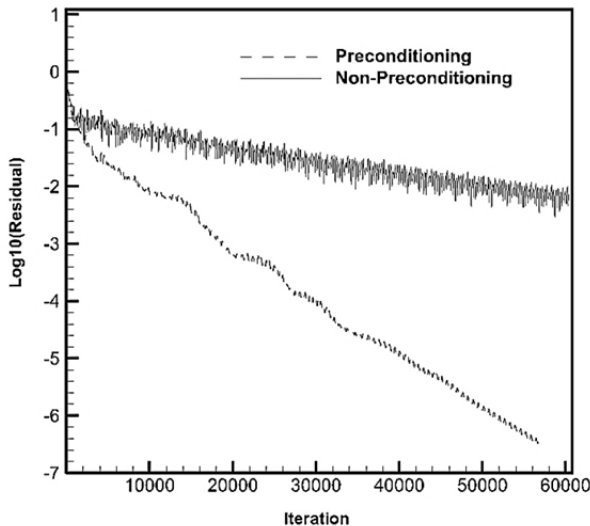


Fig. 13 Residuals comparison on NACA0012 in $M = 0.05, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 13 مقایسه باقیمانده برحسب تکرار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.05، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

همان گونه که مشاهده می‌شود کاهش باقیمانده و همگرایی ضرایب در حالت بدون پیش‌شرط بسیار سخت‌تر از حالت با پیش‌شرط شده است. بنابراین هر چه به سمت سرعت‌های نزدیک به صفر حرکت کنیم، استفاده از روش‌های با پیش‌شرط الزام‌آورتر است.

6- بحث و نتیجه‌گیری

از نتایج ارائه‌شده در بخش قبلی می‌توان به جمع‌بندی زیر رسید:

- هم در سرعت‌های بالا و هم در سرعت‌های کم، روش پیش‌شرط تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد که نشان می‌دهد تقلیل معادلات از حالت ضرب ماتریسی به معادلات غیرماتریسی جدید که در این تحقیق ارائه شده، به‌درستی انجام شده و همچنین ارائه معادلات در فرم عمومی با پیش‌شرط و بدون پیش‌شرط با مزیت‌های آن که در مقدمه مقاله تشریح شد، تایید می‌شود.

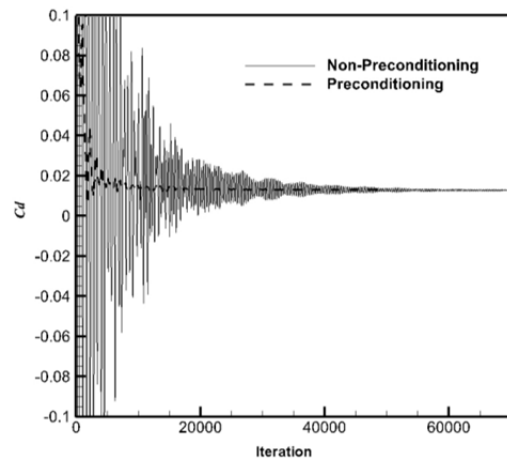


Fig. 10 C_d comparison on NACA0012 in $M = 0.15, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 10 مقایسه ضریب پسا برحسب تکرار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.15، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

شبکه به‌کار رفته و کانتور عدد ماخ حول این ایرفویل در "شکل 12" نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود اگرچه بیشتر میدان جریان در ماخ زیر 0.2 قرار دارد اما نواحی با گرادیان فشاری بالا عدد ماخ تا مقدار 0.5 افزایش یافته است که کاملاً تراکم‌پذیر است و استفاده از حلگرهای صرفاً تراکم‌ناپذیر (صرفاً بر پایه فشار) منطقی نیست. در مورد نمودار باقیمانده و نمودار همگرایی ضریب برآ و پسا همانند محک قبلی، کاهش باقیمانده و همگرایی ضرایب در حالت بدون پیش‌شرط سخت‌تر از حالت با پیش‌شرط حاصل شده است که در این‌جا لازم به ارایه مجدد نیست.

5-3- سرعت‌های خیلی کم

در این بخش مقایسه نتایج حالت با پیش‌شرط و بدون آن بر روی ایرفویل NACA0012 مجدداً انجام می‌گیرد. مشابه محک دوم زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6 انتخاب می‌شود ولی عدد ماخ 0.05 منظور می‌شود. در "شکل 13" نمودار باقیمانده و در "اشکال 14 و 15"، نمودار همگرایی ضریب برآ و پسا برای هر دو حالت با پیش‌شرط و بدون آن مقایسه شده‌اند.

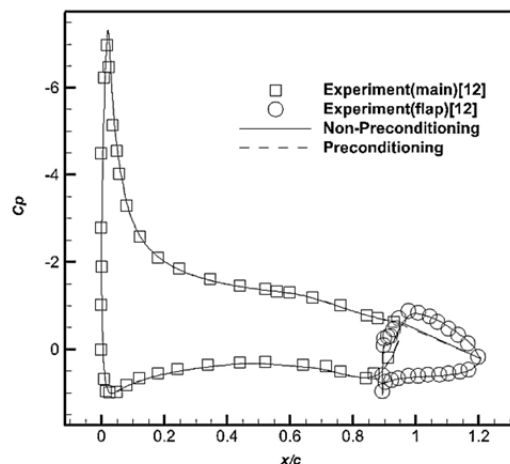


Fig. 11 Pressure coefficients comparison on two-element NLR7301 in $M = 0.185, \alpha = 6$ and $Re = 2.51 \times 10^6$

شکل 11 مقایسه ضریب توزیع فشار بر روی ایرفویل دو المانی NLR7301 در عدد ماخ 0.1850، زاویه حمله 6 درجه و عدد رینولدز 2.51×10^6

قبل و همراه با نوسانات خیلی زیادی است درحالی‌که در حالت با پیش‌شرط این همگرایی هم در باقیمانده‌ها و هم در ضرایب آیرودینامیکی روالی منطقی دارد.

7- فهرست علائم

a	سرعت صوت (ms^{-1})
A	ماتریس زاکوبیان شار
D	عبارت لزجت مصنوعی
E	انرژی کل (m^2s^{-2})
H	آنتالپی کل (m^2s^{-2})
M	ماتریس بردارهای ویژه
n	بردار یکه عمود بر سطح
p	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
Pr	عدد پرانتل
r	بردار ویژه
r	مؤلفه اسکالر بردار ویژه
Re	عدد رینولدز
S	طول لبه حجم محدود
S	ورتیسیته
T	دما (K)
u	سرعت در جهت x (ms^{-1})
v	سرعت در جهت y (ms^{-1})
w	متغیر ابقایی

علائم یونانی

λ	مقدار ویژه
Λ	ماتریس مقدار ویژه
μ	لزجت دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
ν	لزجت سینماتیکی (m^2s^{-1})
ρ	چگالی (kgm^{-3})
τ	تنش برشی
Γ	ماتریس پیش‌شرط
Ω	مساحت حجم محدود

بالانویس‌ها

inv	جریان غیرلزج
vis	جریان لزج

زیرنویس‌ها

L	عبارت چپ لبه سلول
P	وابسته به متغیرهای اصلی
R	عبارت راست لبه سلول
∞	شرط بینهایت

8- مراجع

[1] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 135, No. 2, pp. 12-26, 1967.
 [2] Y. H. Choi, C. L. Merkle, Time-derivative preconditioning for viscous flows, *AIAA Paper* 91-1652, pp. 1-12, 1991.
 [3] E. Turkel, R. Radespiel, N. Kroll, Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics, *Computers & Fluids*, Vol. 26, No. 6, pp. 613-634, 1997.

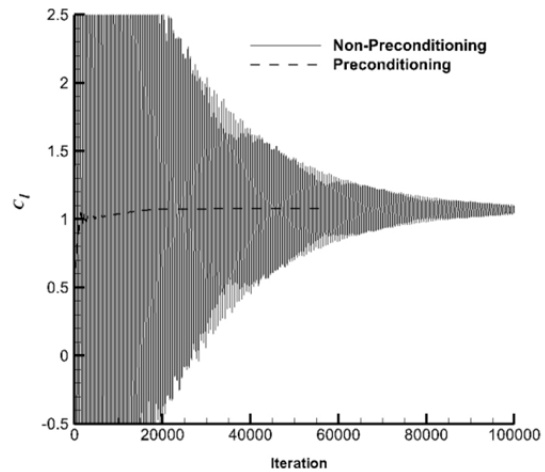


Fig. 14 C_l comparison on NACA0012 in $M = 0.05, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 14 مقایسه ضریب برآ برحسب تکرار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.05، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

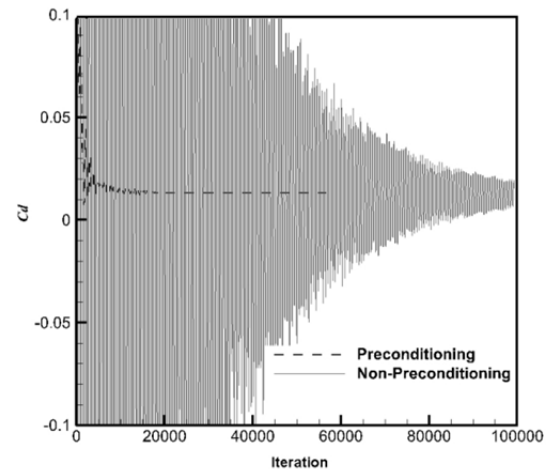


Fig. 15 C_d comparison on NACA0012 in $M = 0.05, \alpha = 10$ and $Re = 3 \times 10^6$

شکل 15 مقایسه ضریب پسا برحسب تکرار بر روی ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ 0.05، زاویه حمله 10 درجه و عدد رینولدز 3×10^6

2- همگرایی باقیمانده‌ها و ضرایب آیرودینامیکی روش پیش‌شرط در سرعت‌های بالا باحالت بدون پیش‌شرط تطابق دارد و نشان می‌دهد که عملکرد دو روش در سرعت‌های بالا تقریباً یکسان است. این همان موضوعی است که در معادله (17) و (18) پیش‌بینی شد به‌طوری‌که چنانچه $M \rightarrow 1$ ، θ مساوی γ/a^2 می‌شود و ماتریس پیش‌شرط Γ مساوی ماتریس P می‌شود.
 3- در سرعت‌های کم (جریان تراکم‌ناپذیر) در حالت بدون پیش‌شرط همگرایی باقیمانده‌ها طولانی و با نوسانات زیاد همراه است درحالی‌که در حالت با پیش‌شرط این همگرایی روالی منطقی داشته و بدون نوسانات زیاد است. همین موضوع در همگرایی ضرایب آیرودینامیکی هم مشاهده می‌شود. تفاوتی از این لحاظ بین ایرفویل‌های تک المانی و دو المانی مشاهده نمی‌شود.

4- در سرعت‌های خیلی کم (در این‌جا $M = 0.05$) در حالت بدون پیش‌شرط همگرایی باقیمانده‌ها و ضرایب آیرودینامیکی طولانی‌تر از

- [8] S. R. Allmaras, F. T Johnson, P. R Spalart, Modifications and clarifications for the implementation of the Spalart-Allmaras turbulence model. ICCFD7-1902, 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics, Big Island, Hawaii, pp. 9-13, 2012.
- [9] J. Weiss, W. A. Smith, Preconditioning applied to variable and constant density flows, *ALAA Journal*, Vol. 33, No. 11, pp. 2050-2057, 1995.
- [10] P. H. Cook, M. A. McDonald, M. C. P. Firmin, Aerofoil RAE 2822-pressure distributions and boundary layer and wake measurements, *AGARD AR 138*, pp. 7-20, 1979.
- [11] N. Gregory, C. L. O'Reilly, Low speed aerodynamic characteristics of NACA0012 airfoil section, including the effects of upper surface roughness simulation hoarfros, *National Physical Laboratory, NPL Aero Report 1308*, pp. 21-22, 1970.
- [12] B. Van der Berg, Boundary layer measurements on a two-dimensional wing with flap, *NLR TR 79009 U*, pp.10-13, 1979.
- [4] N. T. FRINK, Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes, *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 1, pp. 70-77, 1992.
- [5] K. Volkov, A.G. Karpenko, Preconditioning of gas dynamics equations in compressible gas flow computations at low mach numbers, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 55, No. 6, pp. 1051-1067, 2015.
- [6] V. G. Asouti, A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou, Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 57, No. 10, pp. 1485-1504, 2008.
- [7] P. L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 135, No. 2, pp. 250-258, 1981.