

بررسی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری الاستیسیته سطح

رضا ناظم‌نژاد^{1*}، حسن شکراللهی²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه دامغان، دامغان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی، تهران

* دامغان، کد پستی 36716-41167، mazemnezhad@du.ac.ir

چکیده

در این مقاله رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی مطالعه می‌شود. به منظور مدل‌سازی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها از تئوری ساده میله‌ها استفاده شده است. در کنار استفاده از تئوری ساده میله‌ها، از تئوری الاستیسیته سطحی به منظور در نظر گرفتن مؤلفه‌های انرژی سطح در معادلات حرکت و شرایط مرزی استفاده شده است. مؤلفه‌های انرژی سطح را مدول الاستیسیته سطحی، چگالی سطحی، و تنش پسماند سطحی تشکیل می‌دهند. خواص مکانیکی حجمی و سطحی نانومیله نیز در راستای طولی به صورت توانی در نظر گرفته شده است. سپس با استفاده از اصل همپلتون، معادله حرکت و شرایط مرزی نانومیله استخراج شده است. به دلیل در نظر گرفتن مؤلفه‌های انرژی سطح، معادله حرکت ناهمگن به دست آمده است، اما در هیچ یک از پژوهش‌های پیشین مانند بررسی رفتار ارتعاشات عرضی نانوتیرها و ارتعاشات پیچشی نانومیله‌ها در حضور انرژی سطح، مؤلفه‌های انرژی سطح سبب ناهمگن شدن معادله حرکت یا شرط مرزی نشده بودند. جهت استخراج فرکانس‌های طبیعی نانومیله، ابتدا معادله حرکت ناهمگن با استفاده از تغییر متغیر مناسب تبدیل به معادله حرکت همگن شده و سپس با استفاده از روش گلرکین، معادله حرکت به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد حل شده است. به منظور جامع بودن پژوهش، تأثیر پارامترهای مختلف مانند طول و شعاع نانومیله بر فرکانس‌های محوری نانومیله تابعی مدرج مورد بررسی قرار گرفته است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: 14 اسفند 1396
 پذیرش: 05 اردیبهشت 1397
 ارائه در سایت: 10 خرداد 1397
 کلید واژگان:
 نانومیله
 ارتعاشات آزاد محوری
 تئوری الاستیسیته سطح
 تابعی مدرج

Free axial vibration analysis of functionally graded nanorods using surface elasticity theory

Reza Nazemnezhad^{1*}, Hassan Shokrollahi²

1- Department of Engineering, Damghan University, Damghan, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 36716-41167 Damghan, Iran, rnazemnezhad@du.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 05 March 2018
 Accepted 25 April 2018
 Available Online 31 May 2018

Keywords:
 Nanorod
 Free axial vibration
 Surface elasticity theory
 Functionally graded

ABSTRACT

In the present paper, free axial vibration behavior of functionally graded nanorods is studied using the surface elasticity theory. For modelling of free axial vibration of nanorods, the Simple theory of rods is implemented. Besides using the Simple theory of rods, the surface elasticity theory is used for considering the surface energy parameters in the governing equations and boundary conditions. The surface energy parameters are the surface elasticity, the surface density, and the surface residual stress. The surface and bulk material properties of nanorod are considered to vary in the length direction according to the power law distribution. Then, the governing equation of motion and boundary conditions of nanorod are derived using the Hamilton's principle. Due to considering the surface energy parameters, the obtained governing equation of motion becomes non-homogeneous. But in none of the previous researches, for example investigation of free transverse vibration of nanobeams and free torsional vibration of nanorods in presence of the surface energy, the surface energy parameters do not cause the non-homogeneity of the governing equation or the boundary conditions. To extract the natural frequencies of the nanorod, firstly the non-homogeneous governing equation is converted to a homogeneous one using an appropriate change of variable, and then for clamped-clamped and clamped-free boundary conditions the governing equation is solved using Galerkin method. In order to have a comprehensive research, effects of various parameters like the length and radius of nanorod on axial frequencies of functionally graded nanorod is investigated.

منحصر به فرد مواد تابعی مدرج در مقایسه با مواد همگن از آن‌ها در زمینه‌های مختلفی از علوم مهندسی به صورت گسترده استفاده می‌شود. با پیشرفت تکنولوژی در زمینه مواد تابعی مدرج استفاده از آن‌ها در مقیاس

1- مقدمه
 مواد تابعی مدرج نوعی از مواد کامپوزیتی است که خواص مکانیکی در آن‌ها به صورت تدریجی از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کند. به دلیل خواص

عدم در دسترس بودن نتایج تجربی در بسیاری از زمینه‌های رفتارهای مکانیکی نانومقیاس‌ها، تئوری‌های مختلفی مانند تئوری الاستیسیته سطحی، تئوری تنش کوپل شده، و تئوری تنش کوپل شده اصلاح شده نیز پیشنهاد شده است. در تئوری‌های تنش کوپل شده، تنش کوپل شده اصلاح شده، گرادیان کرنش، و الاستیسیته غیرمحلّی، پارامتری بنام پارامتر مقیاس کوچک به منظور بررسی اثر اندازه در نظر گرفته می‌شود، اما در تئوری الاستیسیته سطحی، خواص مکانیکی سطحی مانند مدول الاستیسیته سطحی، چگالی سطحی، و تنش سطحی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به تفاوت در ماهیت کلی تئوری الاستیسیته سطحی با دیگر تئوری‌های معرفی شده برای مدل‌سازی رفتار نانومقیاس‌ها و در نظر گرفتن اثر اندازه، در این پژوهش رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی بررسی می‌شود. برای نیل به این هدف رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج براساس تئوری‌های الاستیسیته سطحی و کلاسیک مدل‌سازی شده و معادله حرکت و شرایط مرزی نانومیل به کمک اصل همیلتون استخراج شده است. در گام بعدی معادله حرکت به روش گلرکین و به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد حل شده است. در نهایت در بخش نتایج تأثیر عوامل هندسی مانند طول و شعاع نانومیل به همراه تأثیر مؤلفه‌های انرژی سطح بر رفتار دینامیکی نانومیل‌های تابعی مدرج بررسی شده و مقایسه‌ای بین نوع تأثیر عوامل بالا در رفتار ارتعاشات آزاد محوری با آن‌چه در رفتارهای دینامیکی عرضی نانوتیرها و پیچشی نانومیل‌ها گزارش شده انجام گرفته است.

2- استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی

به منظور استخراج معادله حاکم بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح، نانومیل‌های به طول L ، $(0 \leq x \leq L)$ و سطح مقطع متغیر به شعاع $r(x)$ در دستگاه مختصات xyz مدنظر است (شکل 1).

مؤلفه‌های جابه‌جایی نانومیل براساس تئوری ساده میل‌ها در راستای سه محور دستگاه مختصات به صورت روابط (3-1) بیان می‌شود [14].

$$u(x, y, z, t) = u(x, t) \tag{1}$$

$$v(x, y, z, t) = 0 \tag{2}$$

$$w(x, y, z, t) = 0 \tag{3}$$

در روابط (3-1) زمان برحسب ثانیه است. براساس مؤلفه‌های جابه‌جایی داده

میکرو و نانو نیز امکان پذیر شده است. شناخت و تحلیل رفتارهای مختلف آن‌ها به دلیل حساسیت بالای سیستم‌های نانوالکترومکانیکی به تحریک‌های خارجی به منظور طراحی و ساخت سیستم‌های نانوالکترومکانیکی تابعی مدرج ضرورت زیادی دارد.

در زمینه تحلیل رفتارهای مکانیکی سازه‌های نانومقیاس مطالعات گسترده‌ای صورت گرفته است. مروری بر مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که رفتار ارتعاشات محوری یا طولی نانومیل‌ها در مقایسه با دیگر رفتارهای مکانیکی نانومیل‌ها و نانوتیرها کم‌تر مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. به عنوان اولین پژوهش ارتعاشات آزاد طولی نانومیل‌های محصور و غیرمحصور در محیط الاستیک با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی مدل شده و تأثیر پارامتر مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طولی بررسی شده است [2,1]. اثر سطح مقطع متغیر به همراه اثر پارامتر مقیاس کوچک بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌ها نیز در مراجع [4,3] بررسی شده است. گول و همکاران [5] و اکسیدی و باکسا [6] توجه خود را معطوف به بررسی تأثیر محیط الاستیک بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌ها نمودند. سو و همکاران [7] نیز اثر ترک را به همراه اثر مقیاس کوچک بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های ترک‌دار مورد بررسی قرار دادند. از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد محوری دو نانومیل متصل به یکدیگر با در نظر گرفتن اثر پیوندهای واندروالسی نیز استفاده شده است [9,8]. در پژوهش دیگری در این زمینه اثر جابه‌جایی‌های جانبی به همراه اثر پارامتر مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طبیعی محوری نانوتیوب‌هایی بررسی شده است که براساس تئوری غیرمحلّی ریلی مدل شده‌اند [10]. علاوه بر پژوهش‌های یادشده رفتار دینامیکی نانومیل‌های تابعی مدرج نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمونه با استفاده از تئوری گرادیان کرنش رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج بررسی شده است [11]. سیمسک [12] نیز اثر پارامتر مقیاس کوچک را بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج مخروطی شکل مورد بررسی قرار دادند. علاوه بر بررسی رفتار ارتعاشات آزاد خطی محوری نانومیل‌ها، فرناندز و همکاران [13] رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی محوری نانوتیوب‌های محصور در محیط الاستیک را بررسی کردند.

با دقت در مراجع بالا که به بررسی رفتار ارتعاشات محوری یا طولی نانومیل‌ها پرداخته‌اند این نکته حاصل می‌شود که از بین تئوری‌های مختلفی که برای بررسی رفتار سازه‌های نانومقیاس معرفی شده فقط از دو تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و گرادیان کرنش استفاده شده است. این در حالی است که به دلیل

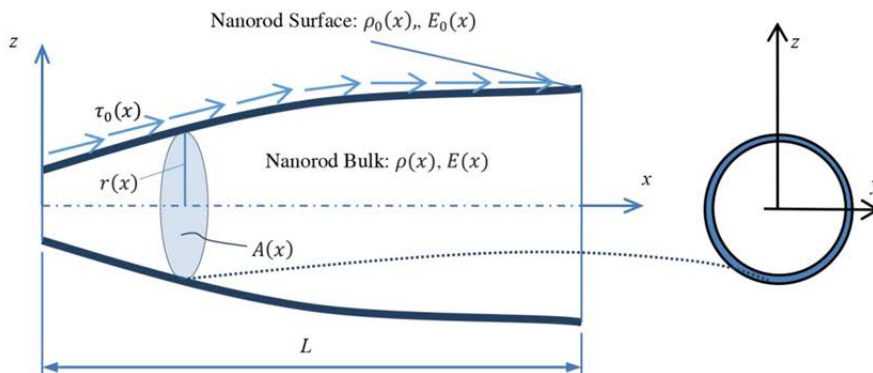


Fig. 1 Schematic of functionally graded nanorod geometry

شکل 1 شماتیک هندسه نانومیل‌های تابعی مدرج

رابطه (15) بیان می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (15)$$

تغییرات انرژی جنبشی نانومیمه در رفتار ارتعاشات آزاد محوری با در نظر گرفتن تأثیر انرژی جنبشی چگالی سطحی آن به صورت رابطه (16) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta T &= \delta T^b + \delta T^s \\ &= \int_0^L \rho(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) A(x) dx \\ &+ \int_0^L \rho_0(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) S(x) dx \end{aligned} \quad (16)$$

در رابطه (15)، ρ و ρ_0 به ترتیب چگالی حجمی (kg/m^3) و چگالی سطحی (kg/m^2)، A و S به ترتیب نشان‌دهنده سطح و محیط نانومیمه است. اکنون با قرار دادن رابطه‌های (6,4) در رابطه انرژی پتانسیل، تغییرات انرژی پتانسیل به صورت رابطه (17) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U^b + \delta U^s = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_S \tau_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} A(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L (\tau_0(x) \\ &+ E_0(x) \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial u}{\partial x} S(x) dx \end{aligned} \quad (17)$$

با جای‌گذاری رابطه‌های (17,16) در رابطه (15) و انجام انتگرال‌گیری جز به جز، معادله حرکت نانومیمه و شرایط مرزی به صورت روابط (19,18) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} -(\rho(x)A(x) + \rho_0(x)S(x)) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_0(x)S(x) \\ + (E(x)A(x) \\ + E_0(x)S(x)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$(S(x)\tau_0(x) + (E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{\partial u}{\partial x}) \delta u \Big|_0^L = 0 \quad (19)$$

با توجه به رابطه (19)، شرایط مرزی را می‌توان به صورت روابط (20) یا (21) در نظر گرفت.

— گیردار-گیردار، به صورت رابطه (20):

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

— گیردار-آزاد به صورت رابطه (21):

$$\frac{u(0,t)}{\partial x} = -\frac{\tau_0(L)S(L)}{E(L)A(L) + E_0(L)S(L)} \quad (21)$$

3- حل معادلات

3-1- شرط مرزی گیردار-گیردار

برای حل ارتعاشات آزاد، با توجه به فرم معادله حاکم، رابطه (18)، که یک معادله ناهمگن است پاسخی به صورت $u(x,t) = v_{cc}(x,t) + u_{cc}(x)$ برای همگن کردن آن در نظر می‌گیریم. با جایگزین کردن $u_{cc}(x)$ در معادله حاکم و شرایط مرزی گیردار-گیردار، روابط (20,18)، به صورت رابطه (22) داریم.

شده، مؤلفه‌های کرنش و تنش به ترتیب به صورت روابط (7-4) به دست می‌آیند.

• مؤلفه‌های کرنش، روابط (5,4):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (5)$$

• مؤلفه‌های تنش، روابط (7,6):

$$\sigma_{xx} = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{xz} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (7)$$

رابطه (7-4) مؤلفه‌های کرنش و تنش حجم نانومیمه است. در اصل همیلتون به منظور تشکیل مؤلفه‌های انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی، مؤلفه‌های کرنش و تنش سطح نانومیمه نیز باید محاسبه گردد. بدین منظور در ادامه این مؤلفه‌ها محاسبه خواهند شد.

به منظور محاسبه مؤلفه‌های تنش در سطح نانومیمه، تئوری الاستیسیته سطحی پیشنهاد شده است. در تئوری الاستیسیته سطحی گارتین و مورداک [15] رابطه تنش و کرنش سطحی به صورت روابط (9,8) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{\pm} &= \tau_0^{\pm} \delta_{\alpha\beta} + (\mu_0^{\pm} - \tau_0^{\pm})(u_{\alpha,\beta}^{\pm} + u_{\beta,\alpha}^{\pm}) \\ &+ (\lambda_0^{\pm} + \tau_0^{\pm}) u_{m,m} \delta_{\alpha\beta} + \tau_0^{\pm} u_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tau_{\alpha z}^{\pm} = \tau_0^{\pm} u_{z,\alpha} \quad (9)$$

در روابط (9,8) τ_0^{\pm} تنش پسماند سطح در حالت کرنش صفر، $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونگر، λ_0^{\pm} و μ_0^{\pm} ثوابت لامه سطوح فوقانی و زیرین (منظور از سطوح فوقانی و زیرین، برای جسم با مقاطع مربع یا مستطیل است)، $u_{\alpha,\beta}$ مؤلفه‌های جابه‌جایی سطوح در راستای محورهای مختصات، علامت‌های مثبت و منفی به ترتیب نشان‌دهنده سطح فوقانی و زیرین تشکیل‌دهنده جسم، و α, β, x, y است. از آن‌جا که در پژوهش حاضر نانومیمه مورد بررسی تابعی مدرج و متقارن محوری است از علامت‌های مثبت و منفی صرف‌نظر می‌شود.

با در نظر گرفتن مؤلفه‌های جابه‌جایی نانومیمه (روابط (3-1))، مؤلفه‌های تنش سطحی غیرصفر مؤثر در ارتعاشات محوری نانومیمه تابعی مدرج به صورت روابط (11,10) به دست می‌آیند.

$$\tau_{xx} = \tau_0(x) + (\lambda_0(x) + 2\mu_0(x)) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yy} = \tau_{xz} = \tau_{zz} = \tau_{yz} = 0 \quad (11)$$

برای ساده‌سازی روابط، از تعریف رابطه (12) استفاده می‌شود.

$$E_0(x) = \lambda_0(x) + 2\mu_0(x) \quad (12)$$

بنابراین رابطه (10) را می‌توان به صورت رابطه (13) بازنویسی کرد.

$$\tau_{xx} = \tau_0(x) + E_0(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

$E_0(x)$ را مدول الاستیسیته سطحی می‌نامیم.

تغییرات خواص نانومیمه تابعی مدرج در راستای طولی شامل مدول الاستیسیته سطحی $E_0(x)$ ، تنش پسماند سطح $\tau_0(x)$ ، چگالی سطحی $\rho_0(x)$ ، مدول الاستیک حجمی $E(x)$ ، چگالی حجمی $\rho(x)$ و شعاع مقطع میله $r(x)$ با رابطه توانی به صورت رابطه (14) بیان می‌شود.

$$f(x) = f_L + (f_R - f_L) \left(\frac{x}{L} \right)^p ;$$

$$f(x) = E_0(x) \text{ یا } \tau_0(x) \text{ یا } \rho_0(x) \text{ یا } E(x) \text{ یا } \rho(x)$$

$$r(x) = r_L + (r_R - r_L) \left(\frac{x}{L} \right)^q \quad (14)$$

به منظور استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی باید مؤلفه‌های کرنش و تنش حجم و سطح نانومیمه در اصل همیلتون قرار داده شود. اصل همیلتون با

اکنون رابطه (29) را در معادله $u(x, t) = v_{cf}(x, t) + u_{cf}(x)$ قرار داده و با جایگزین کردن $u(x, t)$ در معادله حاکم و شرط مرزی گیردار-آزاد، روابط (21,18)، رابطه (30)، را داریم.

$$\begin{aligned}
 & -(\rho(x)A(x) + \rho_0(x)S(x)) \frac{\partial^2 v_{cf}(x, t)}{\partial t^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[(E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{\partial v_{cf}(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \\
 & v_{cc}(0, t) = 0 \\
 & \frac{\partial v_{cc}(L, t)}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

با فرض جابه‌جایی هارمونیک برای $v_{cf}(x, t)$ به صورت $v_{cf}(x, t) = V_{cf}(x)T(t) = V_{cf}(x)e^{i\omega t}$ ، رابطه (30) را به صورت رابطه (31) بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 & \omega^2(\rho(x)A(x) + \rho_0(x)S(x))V_{cf}(x) \\
 & + \frac{d}{dx} \left[(E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{dV_{cf}(x)}{dx} \right] \\
 & = 0 \\
 & V_{cf}(0) = 0 \\
 & \frac{dV_{cf}(L)}{dx} = 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

برای حل رابطه (31) و استخراج فرکانس‌های طبیعی نانومیله تابعی مدرج با شرط مرزی گیردار-آزاد، از روش گلرکین استفاده می‌کنیم. با توجه به شرایط مرزی، با قرار دادن $V_{cf}(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin((2n-1)\pi x/2L)$ در رابطه حاکم (31) و ضرب کردن معادله در $\sin((2n-1)\pi x/2L)$ و انتگرال‌گیری از معادله حاصل. به یک دستگاه معادلات جبری خطی، رابطه (32)، می‌رسیم.

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 M + K)\{x\} = \{0\} \\
 & \{x\}^T = \{A_1 \ A_2 \ A_3 \ \dots \ A_N\}
 \end{aligned} \tag{32}$$

که فرکانس طبیعی و $\{x\}$ شکل مودهای نوسانات است. با حل دستگاه معادلات جبری (32) فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نوسانات طولی نانومیله تابعی مدرج با شرط مرزی گیردار-آزاد به دست می‌آید.

4- اعتبارسنجی و دستاوردها

به منظور بررسی صحت و دقت معادلات حرکت و روش حل به کار رفته، نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج گزارش شده در سایر پژوهش‌ها مقایسه شده است. از آنجا که تاکنون پژوهشی یافت نمی‌شود که رفتار ارتعاشات محوری نانومیله‌های تابعی مدرج با سطح مقطع متغیر را با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح بررسی کرده باشد، در این پژوهش، اعتبارسنجی نتایج با استفاده از مراجع [14,4] انجام گرفته است. در مرجع [4] ارتعاشات طولی نانومیله‌ها با استفاده از تئوری ساده میله‌ها و براساس تئوری‌های کلاسیک که به منظور بررسی رفتار سازه‌های در مقیاس ماکرو پیشنهاد شده بررسی شده و در مرجع [14] ارتعاشات طولی نانومیله‌ها با استفاده از تئوری ساده میله‌ها و براساس تئوری الاستیسته غیرمحلّی بررسی شده که یکی از تئوری‌های پیشنهاد شده برای بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های نانومقیاس است. برای یک نانومیله همسانگرد با مدول الاستیک 70 گیگاپاسکال، چگالی 2700 کیلوگرم بر مترمکعب، با طول‌های 10، 20 و 30 نانومتر و بدون در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح، فرکانس‌های طبیعی با روش ارائه شده محاسبه شده است. نتایج گزارش شده در جدول 1 نشان می‌دهد که نتایج روش حاضر با نتایج سایر پژوهش‌ها تطابق داشته که این امر می‌تواند نشان‌دهنده صحت معادلات استخراج شده و روش حل مورد استفاده باشد.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \left[\tau_0(x)S(x) + (E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{du_{cc}(x)}{dx} \right] = 0 \\
 & u_{cc}(0) = 0; \quad u_{cc}(L) = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

رابطه (23) را از حل معادله (22) داریم.

$$u_{cc}(x) = \int_0^x \frac{C - \tau_0(x)S(x)}{E(x)A(x) + E_0(x)S(x)} dx \tag{23}$$

که در آن C یک مقدار ثابت است و با استفاده از رابطه (24) محاسبه می‌شود.

$$C = \frac{\int_0^L \frac{\tau_0(x)S(x)}{E(x)A(x) + E_0(x)S(x)} dx}{\int_0^L \frac{1}{E(x)A(x) + E_0(x)S(x)} dx} \tag{24}$$

اکنون رابطه (23) را در معادله $u(x, t) = v_{cc}(x, t) + u_{cc}(x)$ قرار داده و با جایگزین کردن $u(x, t)$ در معادله حاکم و شرایط مرزی گیردار-گیردار، روابط (18) و (20)، رابطه (25) را داریم.

$$\begin{aligned}
 & -(\rho(x)A(x) + \rho_0(x)S(x)) \frac{\partial^2 v_{cc}(x, t)}{\partial t^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[(E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{\partial v_{cc}(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \\
 & v_{cc}(0, t) = 0 \\
 & v_{cc}(L, t) = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

با فرض جابه‌جایی هارمونیک برای $v_{cc}(x, t)$ به صورت $v_{cc}(x, t) = V_{cc}(x)T(t) = V_{cc}(x)e^{i\omega t}$ ، رابطه (25) را به صورت رابطه (26) بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 & \omega^2(\rho(x)A(x) + \rho_0(x)S(x))V_{cc}(x) \\
 & + \frac{d}{dx} \left[(E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{dV_{cc}(x)}{dx} \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{cc}(0) = 0 \\
 & V_{cc}(L) = 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

برای حل معادله (26) و استخراج فرکانس‌های طبیعی نانومیله تابعی مدرج با شرط مرزی گیردار-گیردار، از روش گلرکین استفاده می‌کنیم. با توجه به شرایط مرزی با قرار دادن $V_{cc}(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\pi x/L)$ در معادله حاکم، رابطه (26)، و ضرب کردن معادله در $\sin(n\pi x/L)$ و انتگرال‌گیری از معادله حاصل به یک دستگاه معادلات جبری خطی، به صورت رابطه (27)، می‌رسیم.

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 M + K)\{x\} = \{0\} \\
 & \{x\}^T = \{A_1 \ A_2 \ A_3 \ \dots \ A_N\}
 \end{aligned} \tag{27}$$

که فرکانس طبیعی و $\{x\}$ شکل مودهای نوسانات است. با حل دستگاه معادلات جبری، رابطه (27)، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نوسانات طولی نانومیله تابعی مدرج با شرط مرزی گیردار-گیردار به دست می‌آید.

3-2- شرط مرزی گیردار-آزاد

برای شرط مرزی گیردار-آزاد، ابتدا پاسخی به صورت $u(x, t) = v_{cf}(x, t) + u_{cf}(x)$ برای همگن کردن معادله شرط مرزی در نظر می‌گیریم. رابطه (28) را با قرار دادن $u_{cf}(x)$ در معادله حاکم و شرایط مرزی گیردار-آزاد، روابط (21,18) داریم.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \left[\tau_0(x)S(x) + (E(x)A(x) + E_0(x)S(x)) \frac{du_{cf}(x)}{dx} \right] = 0 \\
 & u_{cf}(0) = 0 \\
 & \frac{du_{cf}(L)}{dx} = -\frac{\tau_0(L)S(L)}{E(L)A(L) + E_0(L)S(L)}
 \end{aligned} \tag{28}$$

رابطه (29) را از حل معادله (28) داریم.

$$u_{cf}(x) = \int_0^x \frac{-\tau_0(x)S(x)}{E(x)A(x) + E_0(x)S(x)} dx \tag{29}$$

تغییرات نشان می‌دهد که مقدار خواص مکانیکی نانومیل تابعی مدرج به ازای مقادیر کوچک پارامتر p ، به شدت تغییر می‌کند، اما به ازای مقادیر بزرگ‌تر پارامتر p ، تغییرات خواص مکانیکی کمتر است. مقایسه منحنی‌های تغییرات فرکانس طبیعی محوری اول و دهم نیز نشان می‌دهد که سرعت تمایل به سمت مجانب افقی برای فرکانس دهم سریع‌تر از فرکانس اول است. این تفاوت برای نانومیل با شرط مرزی گیردار-گیردار نسبت به شرط مرزی گیردار-آزاد بسیار مشهودتر است. نتیجه دیگری که شکل 2 ارائه می‌دهد این است که در نظر گرفتن تأثیر مؤلفه‌های انرژی سطح سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل مدرج تابعی می‌شود. این تأثیر به ازای تمامی مقادیر پارامتر p و تمامی فرکانس‌ها قابل مشاهده است. این نوع تأثیر به دلیل اضافه شدن چگالی سطح با علامت مثبت به چگالی حجم نانومیل و به دنبال آن افزایش تأثیر جرم، و از طرفی قرار گرفتن مدول الاستیسیته سطح با برآیند علامت منفی در کنار مدول الاستیسیته حجم نانومیل و به دنبال آن، کاهش تأثیر مدول الاستیسیته کلی نانومیل است. نکته دیگری که شکل 2 نشان می‌دهد این است که هر دو مؤلفه انرژی سطح دارای تأثیر کاهشی بر فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل بوده و تأثیر کاهشی چگالی سطحی بیشتر از تأثیر کاهشی مدول الاستیسیته سطحی است. هر چند مقدار چگالی سطحی بسیار کم‌تر از مقدار مدول الاستیسیته سطحی است. نتایجی که شکل 3 نشان می‌دهد را می‌توان این‌گونه دسته‌بندی کرد. دسته اول نتایجی است که بیشتر در شکل 2 نیز به آن اشاره شد و عبارت است از این که در نظر گرفتن تأثیر مؤلفه‌های انرژی سطح سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل مدرج تابعی می‌شود و از بین دو مؤلفه مدول الاستیسیته سطحی و چگالی سطحی، تأثیر کاهشی چگالی سطحی بیشتر از تأثیر کاهشی مدول الاستیسیته سطحی است. دسته دوم نتایج جدیدی است که پیشتر در شکل 2 مشاهده نشده است.

پس از تأیید صحت روابط استخراج شده در ادامه نتایج جدید برای فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل تابعی مدرج با بررسی تأثیر عوامل مختلف ارائه می‌شود. بدین منظور خواص مکانیکی سطحی و حجمی نانومیل تابعی مدرج براساس مقادیر جدول 2 در نظر گرفته شده است. در ابتدا تغییرات فرکانس طبیعی محوری نانومیل تابعی مدرج برحسب پارامترهای p و q که به ترتیب توان رابطه توانی خواص مکانیکی و هندسه نانومیل است (به رابطه (14) مراجعه شود) برای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بررسی شده است. بدین منظور در شکل‌های 2 و 3 تغییرات فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل تابعی مدرج برحسب توان p و q به ازای $L = 30 \text{ nm}$, $R_L = 2 \text{ nm}$, $R_R = 1 \text{ nm}$ نمایش داده شده است. منحنی‌های رسم شده در شکل‌های 2 و 3 شامل فرکانس‌های طبیعی محوری اول و دهم نانومیل بدون در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح، با در نظر گرفتن تأثیر مدول الاستیسیته سطحی، تأثیر چگالی سطحی، و تأثیر هم‌زمان مدول الاستیسیته سطحی و چگالی سطحی است. در شکل 2 مقدار پارامتر q برابر مقدار ثابت 2 و در شکل 3 مقدار پارامتر p برابر مقدار ثابت 2 در نظر گرفته شده است. شکل‌های 2 و 3 نشان می‌دهد که تغییرات فرکانس طبیعی برحسب پارامتر p متفاوت از تغییرات فرکانس طبیعی برحسب پارامتر q است. از شکل 2 می‌توان دریافت که با افزایش مقدار پارامتر p ، مقدار فرکانس نیز افزایش می‌یابد. این رفتار به دلیل تغییر در مقدار خواص مکانیکی نانومیل تابعی مدرج با تغییر پارامتر p است. به ازای مقادیر کوچک پارامتر p نرخ افزایش فرکانس با افزایش پارامتر p بسیار زیاد بوده و به تدریج از شدت افزایش فرکانس کاسته می‌شود تا این‌که به ازای مقادیر بزرگ پارامتر p از شدت افزایش فرکانس کاسته شده و به سمت مجانب افقی تمایل می‌یابد. این

جدول 1 مقایسه فرکانس‌های طبیعی نانومیل به ازای مقادیر مختلف برای طول آن، برحسب گیگاهرتز

Table 1 Comparison of natural frequencies of nanorod for various values of its length (GHz)

شرط مرزی گیردار-آزاد			شرط مرزی گیردار-گیردار			شماره مود	طول (mm)
مقاله حاضر	کیانی [4]	راو [14]	مقاله حاضر	کیانی [4]	راو [14]		
127.29	127.29	127.29	254.59	254.59	254.59	1	10
381.88	381.88	381.88	509.18	509.18	509.18	2	
636.47	636.47	636.47	763.76	763.76	763.76	3	
891.06	891.06	891.06	1018.35	1018.35	1018.35	4	
1145.64	1145.64	1145.64	1272.94	1272.94	1272.94	5	
63.65	63.65	63.65	127.29	127.29	127.29	1	20
190.94	190.94	190.94	254.59	254.59	254.59	2	
318.23	318.23	318.23	381.88	381.88	381.88	3	
445.53	445.53	445.53	509.18	509.18	509.18	4	
572.82	572.82	572.82	636.47	636.47	636.47	5	
42.43	42.43	42.43	84.86	84.86	84.86	1	30
127.29	127.29	127.29	169.73	169.73	169.73	2	
212.16	212.16	212.16	254.59	254.59	254.59	3	
297.02	297.02	297.02	339.45	339.45	339.45	4	
381.88	381.88	381.88	424.31	424.31	424.31	5	

جدول 2 خواص مکانیکی سطحی و حجمی نانومیل تابعی مدرج

Table 2 The surface and bulk mechanical properties of functionally graded nanorod

ρ_{0L} (kg/m ²)	ρ_{0R} (kg/m ²)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_R (kg/m ³)	E_{0L} (N/m)	E_{0R} (N/m)	E_L (GPa)	E_R (GPa)	خاصیت مکانیکی
3.17×10^{-7}	5.46×10^{-7}	2370	2700	-10.6543	5.1882	210	70	مقدار

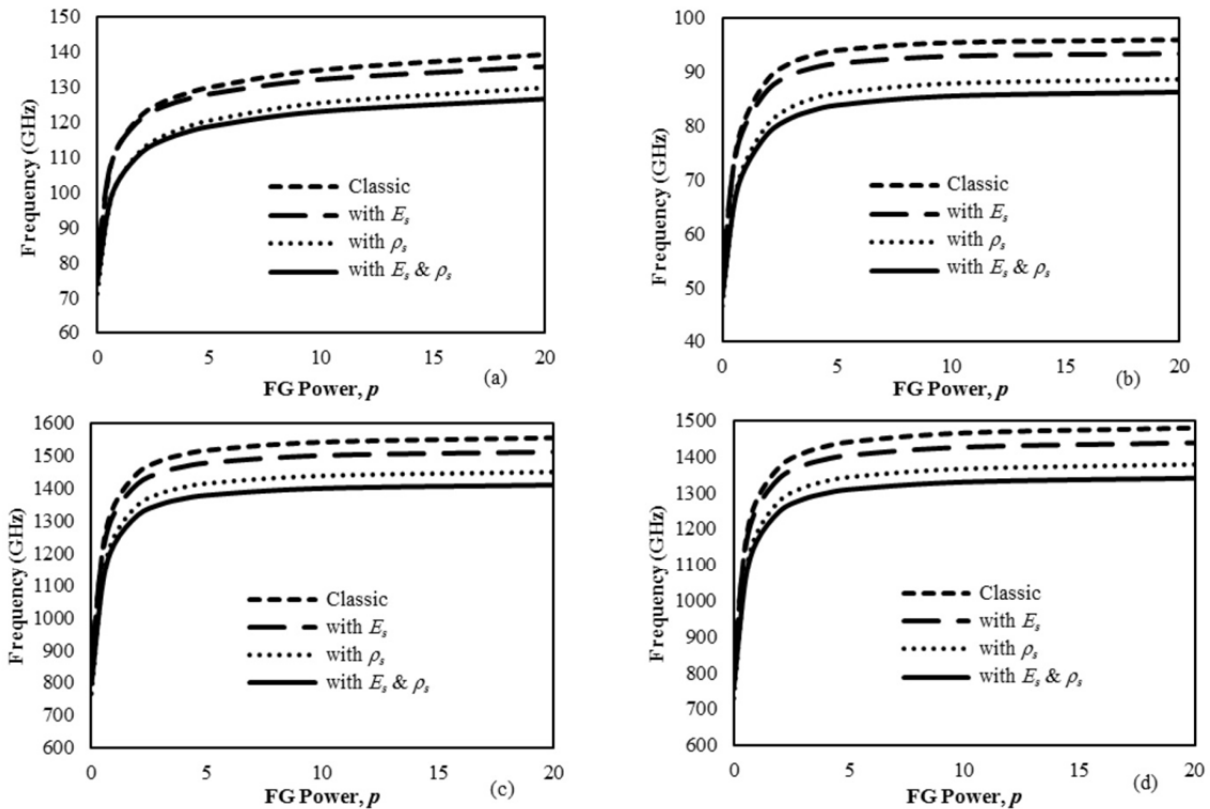


Fig 2 Variation of natural frequencies of nanorod for various values of FG power (p), for $L = 30$ nm, $R_L = 2$ nm, $R_R = 1$ nm; (a) first natural frequency for clamped-clamped nanorod, (b) first natural frequency for clamped-free nanorod, (c) 10th natural frequency for clamped-clamped nanorod, (d) 10th natural frequency for clamped-free nanorod

شکل 2 تغییرات فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل‌های تابعی مدرج برحسب توان p به ازای $L = 30$ nm, $R_L = 2$ nm, $R_R = 1$ nm؛ الف- فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، ب- فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-آزاد، ج- فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، د- فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-آزاد

پارامتر q حاصل شود. در شکل‌های 4 و 5، هندسه نانومیل برای حالتی که کم‌ترین و بیشترین مقدار فرکانس اول و دهم به ازای دو نوع شرط مرزی حاصل می‌شود رسم شده است.

در گام بعدی تأثیر انرژی سطح بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج با طول‌های مختلف بررسی شده است. بدین منظور در شکل 6 تغییرات چهار فرکانس اول طبیعی محوری نانومیل‌های تابعی مدرج برحسب طول آن به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد رسم شده است (در شکل 6 فرکانس‌های $R_L=1$ nm, $R_R=1$ nm, $p=q=2$, $L=100$ nm). در شکل 6 فرکانس‌های کلاسیک و فرکانس‌های با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح رسم شده‌اند. اولین نکته در مورد شکل 6 این است که نحوه تغییرات فرکانس طبیعی محوری نانومیل‌ها به ازای هر دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد یکسان است. علاوه بر این شکل 6 نشان می‌دهد منحنی‌های فرکانس کلاسیک بالاتر از منحنی‌های فرکانس با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح واقع شده‌اند که این امر نشان‌دهنده تأثیر کاهشی انرژی سطح بر فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل‌های تابعی مدرج است. نکته دیگری که از شکل 6 مشاهده می‌شود این است که هم مقدار فرکانس‌های کلاسیک و هم مقدار فرکانس‌هایی که با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح به دست آمده‌اند، وابسته به طول نانومیل‌های تابعی مدرج است.

شکل 3 نشان می‌دهد که تغییرات فرکانس طبیعی محوری نانومیل‌های مدرج تابعی برحسب پارامتر q ، بستگی به شماره فرکانس و نوع شرط مرزی نانومیل‌ها دارد. برای نانومیل‌ها با شرط مرزی گیردار-گیردار، تغییرات فرکانس طبیعی محوری در شماره فرکانس‌های پایین، به صورت زیر است.

افزایش-کاهش-افزایش: تغییرات فرکانس
 →
 افزایش پارامتر q

تغییرات فرکانس طبیعی محوری نانومیل‌ها با شرط مرزی گیردار-گیردار در شماره فرکانس‌های بالا و تغییرات فرکانس طبیعی نانومیل‌ها با شرط مرزی گیردار-آزاد به ازای تمامی شماره فرکانس‌ها، به صورت زیر است.

کاهش-افزایش: تغییرات فرکانس
 →
 افزایش پارامتر q

هر چند باید توجه داشت که شدت افزایش یا کاهش، در شماره فرکانس‌های مختلف و شرایط مرزی مختلف، متفاوت است. نکته دیگری که شکل 3 نشان می‌دهد این است که کم‌ترین مقدار فرکانس در شماره فرکانس‌های بالا به ازای $q=0$ حاصل می‌شود، اما در شماره فرکانس‌های پایین بستگی به نوع شرط مرزی دارد. به صورت کلی می‌توان انتظار داشت بیشترین مقدار فرکانس برای تمامی شرایط مرزی و شماره فرکانس‌ها به ازای مقادیر کوچک

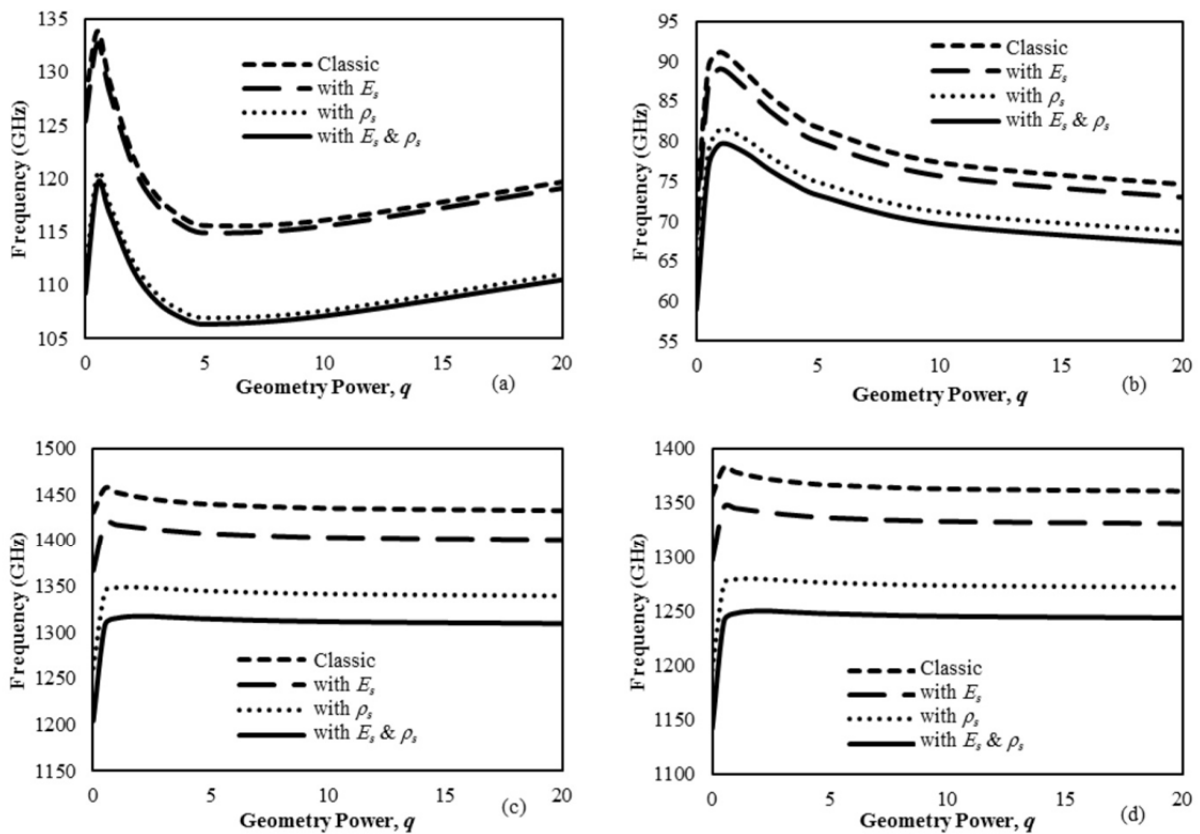


Fig 3 Variation of natural frequencies of nanorod for various values of geometry power (q), for $L = 30$ nm, $R_L = 2$ nm, $R_R = 1$ nm; (a) first natural frequency for clamped-clamped nanorod, (b) first natural frequency for clamped-free nanorod, (c) 10th natural frequency for clamped-clamped nanorod, (d) 10th natural frequency for clamped-free nanorod

شکل 3 تغییرات فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیل‌های تابعی مدرج بر حسب q به ازای $L = 30$ nm, $R_L = 2$ nm, $R_R = 1$ nm؛ الف- فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، ب- فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-آزاد، ج- فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، د- فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-آزاد

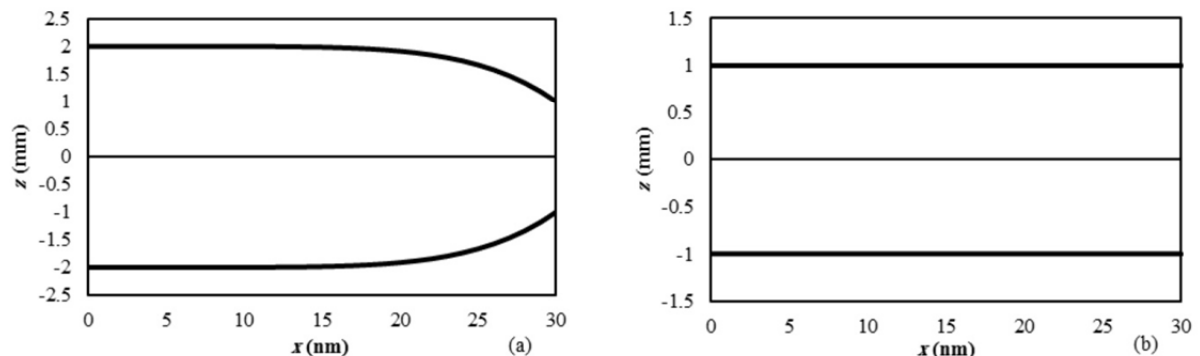


Fig 4 Geometry of nanorod corresponds to lowest natural frequencies; (a) first natural frequency for clamped-clamped nanorod ($p=2, q=6$), (b) 10th natural frequency for clamped-clamped nanorod, and first and 10th natural frequency for clamped-free nanorod ($p=2, q=0$)

شکل 4 هندسه نانومیل‌ها برای حالت کمترین فرکانس؛ الف- مربوط به فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-گیردار ($p=2, q=6$)، ب- مربوط به فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و فرکانس طبیعی اول و دهم برای شرایط مرزی گیردار-آزاد ($p=2, q=0$)

کاهش تأثیر انرژی سطح با افزایش طول نانومیل تابعی مدرج است (هر چه طول نانومیل بلندتر باشد صلبیت نانومیل کمتر شده و مقدار فرکانس‌های طبیعی آن نیز کاهش می‌یابد). دلیل این امر این است که با افزایش طول نانومیل، انرژی ذخیره شده در حجم نانومیل در مقایسه با انرژی ذخیره شده

وابستگی فرکانس‌های محوری نانومیل تابعی مدرج به طول آن به این گونه است که هر چه طول نانومیل بلندتر باشد مقدار فرکانس کمتر شده و منحنی‌های فرکانس کلاسیک و منحنی‌های فرکانس‌های به دست آمده با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند که نشان‌دهنده

در آخرین بخش ارائه نتایج تأثیر انرژی سطح بر فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیله‌های تابعی مدرج به ازای شعاع‌های مختلف بررسی شده است. بدین منظور در شکل 7 تغییرات چهار فرکانس اول طبیعی محوری برحسب شعاع نانومیله تابعی مدرج به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد رسم شده است ($R_L=0.5 \text{ nm}, p=q=2, L=100 \text{ nm}$). شکل 7 علاوه بر

در سطح نانومیله با نرخ بیشتری افزایش می‌یابد. نکته پایانی در مورد شکل 6 این است که هرچه شماره فرکانس بالاتر باشد اختلاف بین منحنی‌های فرکانس کلاسیک و منحنی‌های فرکانس‌های تابعی با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح بیشتر می‌شود که نشان‌دهنده افزایش تأثیر کاهشی مؤلفه‌های انرژی سطح بر فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیله‌های تابعی مدرج است.

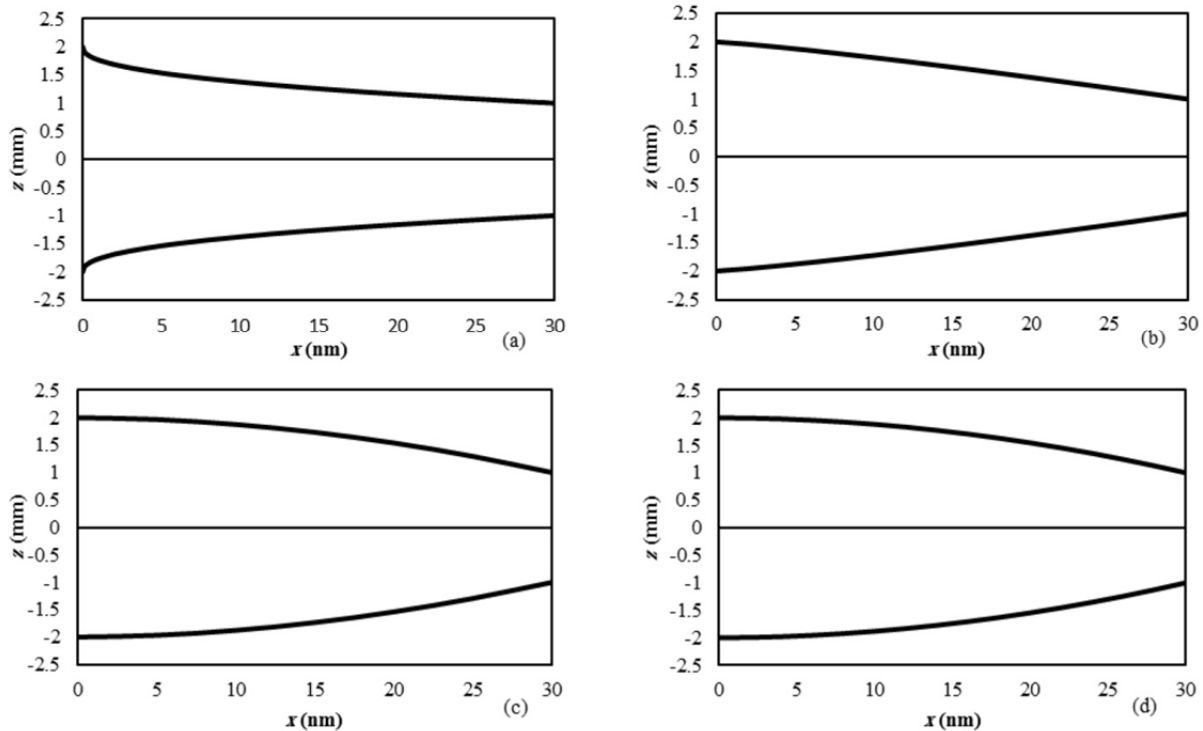


Fig 5 Geometry of nanorod corresponds to highest natural frequencies ; (a) first natural frequency for clamped-clamped nanorod ($p=2, q=0.43$), (b) first natural frequency for clamped-free nanorod ($p=2, q=1.18$), (c) 10th natural frequency for clamped-clamped nanorod ($p=2, q=1.91$), (d) 10th natural frequency for clamped-free nanorod ($p=2, q=1.95$)

شکل 5 هندسه نانومیله برای حالت بیشترین فرکانس؛ الف- مربوط به فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-گیردار ($p=2, q=0.43$)، ب- مربوط به فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی گیردار-آزاد ($p=2, q=1.18$)، ج- مربوط به فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-گیردار ($p=2, q=1.91$)، د- مربوط به فرکانس طبیعی دهم برای شرایط مرزی گیردار-آزاد ($p=2, q=1.95$)

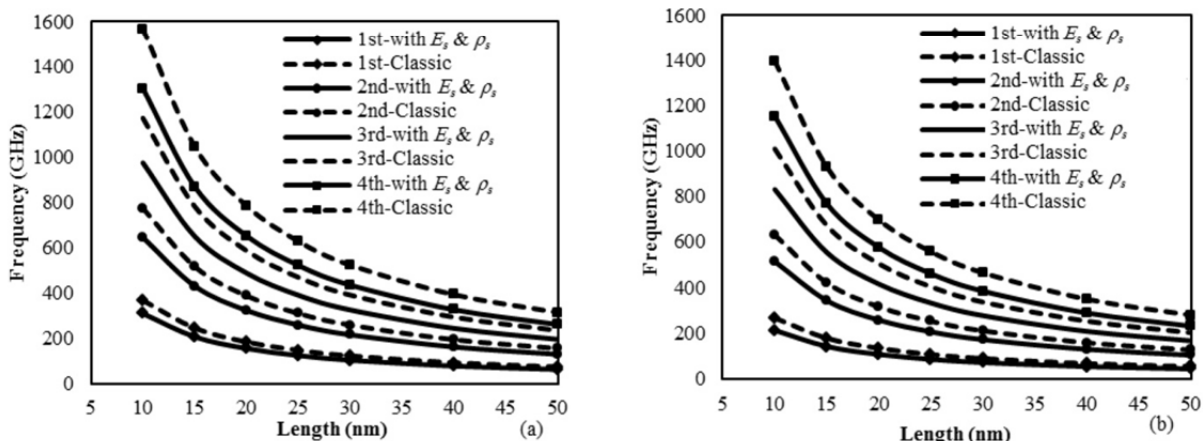


Fig 6 Variation of first four natural frequencies of nanorod for various values of length, for $R_L=1 \text{ nm}, R_R=1 \text{ nm}, p=q=2$; (a) for clamped-clamped nanorod, (b) for clamped-free nanorod

شکل 6 تغییرات چهار فرکانس اول طبیعی محوری نانومیله تابعی مدرج برحسب طول آن ($R_L=1 \text{ nm}, R_R=1 \text{ nm}, p=q=2$)؛ الف- برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، ب- برای شرایط مرزی گیردار-آزاد

محوری نانومیل تابعی مدرج برحسب شعاع نانومیل به ازای $q \neq 0$ را می‌توان ناشی از متغیر بودن شعاع نانومیل در راستای طول آن دانست.

5- نتیجه‌گیری

رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیل‌های تابعی مدرج در حضور تأثیر انرژی سطح مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار ارتعاشات آزاد نانومیل تابعی مدرج براساس تئوری ساده میله و تأثیر انرژی سطح با استفاده از تئوری الاستیسیته سطح در معادلات حرکت لحاظ شده است. معادله حرکت ارتعاشات آزاد محوری نانومیل تابعی مدرج در حضور تأثیر انرژی سطح برخلاف معادله حرکت آن بدون در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح به صورت ناهمگن به دست آمده است. معادله حرکت غیرهمگن با استفاده از تغییر متغیر مناسب تبدیل به معادله حرکت همگن شده و سپس با استفاده از روش گلرکین، فرکانس‌های طبیعی به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد استخراج شده است. نتایج این پژوهش نشان داد که تغییرات فرکانس طبیعی نانومیل تابعی مدرج به شدت وابسته به مقدار توان رابطه توانی خواص مکانیکی و هندسه نانومیل (پارامترهای p و q) است و تغییرات فرکانس برحسب پارامترهای بالا نه تنها یکسان نیست، بلکه وابسته به شرایط مرزی نانومیل مدرج تابعی است.

این که نتایجی که پیشتر در شکل‌های پیشین به آن اشاره شده بود را تأیید می‌کند، نشان می‌دهد که فرکانس‌های محوری کلاسیک وابستگی بسیار کمی به مقدار شعاع نانومیل دارد، اما فرکانس‌هایی که شامل تأثیر انرژی سطح می‌شوند وابسته به مقدار شعاع نانومیل است. این وابستگی در شعاع‌های کوچک نانومیل بیشتر بوده و هر چه شعاع نانومیل بزرگ‌تر باشد از این وابستگی کاسته می‌شود. این کاهش وابستگی به این دلیل است که با افزایش شعاع، انرژی ذخیره شده در سطح در مقایسه با انرژی ذخیره شده در حجم با نرخ کمتری افزایش می‌یابد. نکته دیگری که شکل 7 نشان می‌دهد تفاوت نوع تغییرات فرکانس اول محوری نانومیل تابعی مدرج با شرط مرزی گیردار-آزاد است. تغییرات این فرکانس نشان می‌دهد که هم فرکانس محوری کلاسیک و هم فرکانس محوری با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح، وابستگی تقریباً یکسانی به شعاع نانومیل داشته و با افزایش شعاع نانومیل تابعی مدرج، از مقدار هر دو نوع فرکانس کاسته می‌شود. با بررسی تغییرات فرکانس محوری برحسب شعاع نانومیل به ازای مقادیر مختلف برای پارامتر q به جز $q=0$ نتیجه یکسانی مشاهده شده است. در شکل 8 تغییرات چهار فرکانس اول محوری نانومیل تابعی مدرج برحسب شعاع نانومیل به ازای $q=0$ نمایش داده شده است. شکل 8 نشان می‌دهد که به ازای $q=0$ ، تغییرات فرکانس محوری اول نانومیل تابعی مدرج برحسب شعاع نانومیل، مشابه با تغییرات فرکانس‌های دیگر نانومیل است؛ بنابراین تفاوت نوع تغییرات فرکانس اول

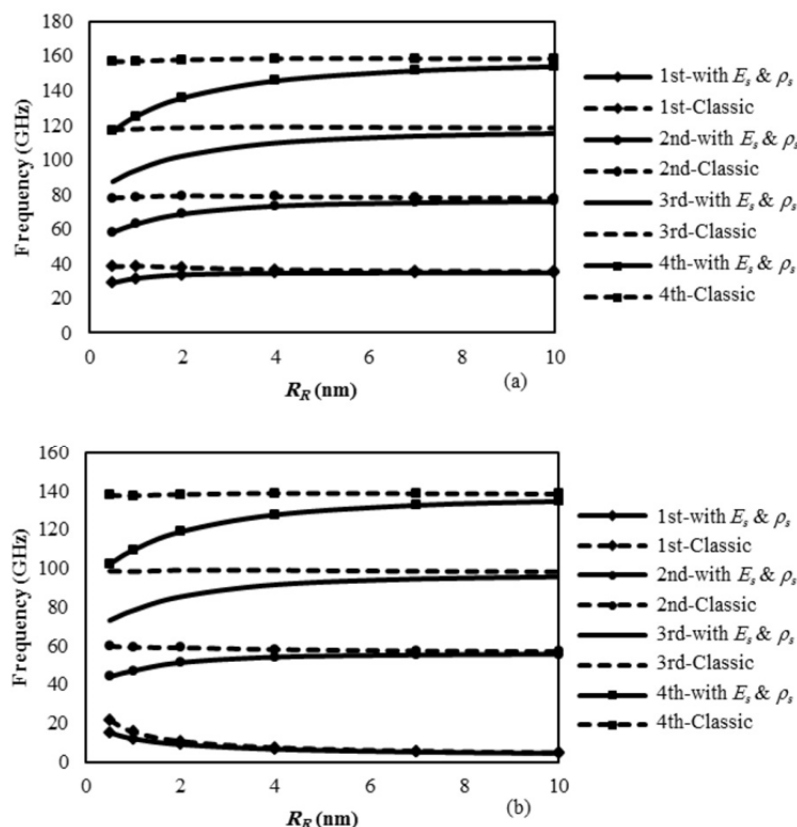


Fig 7 Variation of first four natural frequencies of nanorod for various values of its radius, for $R_L=0.5$ nm, $p=q=2$, $L=100$ nm; (a) for clamped-clamped nanorod, (b) for clamped-free nanorod
 شکل 7 تغییرات چهار فرکانس اول طبیعی محوری نانومیل تابعی مدرج بر حسب شعاع آن ($R_L=0.5$ nm, $p=q=2$, $L=100$ nm); الف- برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، ب- برای شرایط مرزی گیردار-آزاد

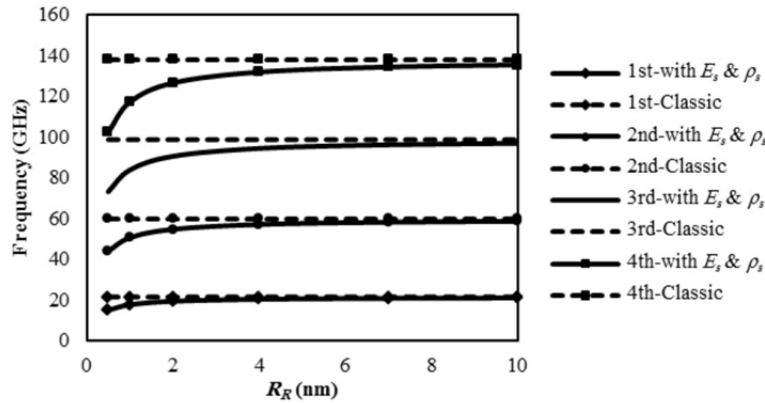


Fig 8 Variation of first four natural frequencies of clamped-free nanorod for various values of its radius, for $R_L=0.5$ nm, $p=2$, $q=0$, $L=100$ nm ($R_L=0.5$ nm, $p=2$, $q=0$, $L=100$ nm) شکل 8 تغییرات چهار فرکانس اول طبیعی محوری نانومیله تابعی مدرج با شرایط مرزی گیردار-آزاد برحسب شعاع آن

λ_0	ثابت لامه سطح (N/m)
μ_0	ثابت لامه سطح (N/m)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ρ_0	چگالی سطح (kgm^{-2})
σ	تنش (Pa)
τ	تنش سطحی (Pam)
τ_0	تنش پسماند سطحی (Pam)
ω	فرکانس طبیعی محوری (Hz)
بالانویس‌ها	
b	نماد حجم
p	توان رابطه توانی سطح مقطع
q	توان رابطه توانی خواص مکانیکی
s	نماد سطح
T	ترانهاده
زیرنویس‌ها	
L	سمت چپ نانومیله
R	سمت راست نانومیله

نتیجه دیگر این پژوهش این است که در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح در رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های مدرج تابعی سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی نانومیله می‌شود. مقدار این تأثیر کاهشی به شماره فرکانس و نوع شرط مرزی نانومیله وابسته است، همچنین این پژوهش نشان داد که فرکانس‌هایی که با در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح به دست آمده‌اند هم به طول و هم به شعاع نانومیله تابعی مدرج وابسته بوده، فرکانس‌های کلاسیک که بدون در نظر گرفتن تأثیر انرژی سطح به دست آمده‌اند به طول نانومیله وابسته بوده است، اما می‌توان اظهار کرد که تقریباً مستقل از شعاع نانومیله است. این پژوهش می‌تواند برای طراحی سیستم‌های نانوالکترومکانیکی مفید باشد که در آن‌ها از اعضای به شکل نانومیله مانند نانوتیوب‌ها استفاده می‌شود.

6- فهرست علائم

A	سطح مقطع (m^2)
A_i	مؤلفه‌های بردار ویژه
E	مدول الاستیسیته (Pa)
E_0	مدول الاستیسیته سطح (N/m)
i	علامت موهومی
K	ماتریس سختی
L	طول (m)
M	ماتریس جرم
R	شعاع (m)
S	محیط سطح مقطع (m)
T	انرژی جنبشی (J)
t	زمان (s)
U	انرژی جنبشی (J)
u	مؤلفه جابه‌جایی در راستای محور x (m)
V	حجم (m^3)
v	مؤلفه جابه‌جایی در راستای محور y (m)
w	مؤلفه جابه‌جایی در راستای محور z (m)

علائم یونانی

δ	علامت حساب تغییرات
$\delta_{\alpha\beta}$	دلتای کرونگر
ε	کرنش

7- مراجع

- [1] M. Aydogdu, Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, No. 5, pp. 861-864, 2009.
- [2] M. Aydogdu, Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity, *Mechanics Research Communications*, Vol. 43, pp. 34-40, 2012.
- [3] S. M. H. Goushegiri, S. Faroughi, Analysis of axial vibration of non-uniform nanorods using boundary characteristic orthogonal polynomials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 203-212, 2016. (In Persian فارسی)
- [4] K. Kiani, Free longitudinal vibration of tapered nanowires in the context of nonlocal continuum theory via a perturbation technique, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 1, pp. 387-397, 2010.
- [5] U. Gul, M. Aydogdu, G. Gaygusuzoglu, Axial dynamics of a nanorod embedded in an elastic medium using doublet mechanics, *Composite Structures*, Vol. 160, pp. 1268-1278, 2017.
- [6] I. Ecsedi, A. Baksa, Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity and Rayleigh model, *Mechanics Research Communications*, Vol. 86, pp. 1-4, 2017.
- [7] J.-C. Hsu, H.-L. Lee, W.-J. Chang, Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory, *Current Applied Physics*, Vol. 11, No. 6, pp. 1384-1388, 2011.
- [8] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal effects in the longitudinal vibration of double-nanorod systems, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 1, pp. 415-422, 2010.

- [12] M. Şimşek, Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods, *Computational Materials Science*, Vol. 61, pp. 257-265, 2012.
- [13] R. Fernandes, S. El-Borgi, S. Mousavi, J. Reddy, A. Mechmoum, Nonlinear size-dependent longitudinal vibration of carbon nanotubes embedded in an elastic medium, *Physica E Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 88, pp. 18-25, 2017.
- [14] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*: John Wiley & Sons, 2007.
- [15] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323, 1975.
- [9] D. Karličić, M. Cajić, T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal longitudinal vibration of viscoelastic coupled double-nanorod systems, *Mechanics-A/Solids*, Vol. 49, pp. 183-196, 2015.
- [10] R. Nazemzhad, K. Kamali, Investigation of the inertia of the lateral motions effect on free axial vibration of nanorods using nonlocal Rayleigh theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 19-28, 2016. (In Persian فارسی)
- [11] B. Akgöz, Ö. Civalek, Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM), *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 263-268, 2013.