



## Experimental Study and Numerical Simulation of the Circular Hydraulic Jump on the Concave Target Plate

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Saberi A.<sup>1</sup> *PhD*,  
Mahpeykar M.R.\*<sup>1</sup> *PhD*,  
Teymourtash A.R.<sup>1</sup> *PhD*

#### How to cite this article

Saberi A, Mahpeykar M.R, Teymourtash A.R. Experimental Study and Numerical Simulation of the Circular Hydraulic Jump on the Concave Target Plate. Modares Mechanical Engineering, 2020;20(2):321-328.

### ABSTRACT

A circular hydraulic jump is a phenomenon that is shaped when a vertical fluid jet impinges on a horizontal plate, at a certain radial distance of the plate center (hydraulic jump radius). Most of the experimental and numerical studies have analyzed the circular hydraulic jump on the flat target plate and the effect of the concave plate has not been investigated yet. Therefore, in this study, using the experimental investigation and numerical simulation using Fluent software, the effect of the concave target plate on the size and shape of the hydraulic jump is investigated for the first time. In order to simulate the circular hydraulic jump, the volume of fluid method (VOF) has been applied. The continuous surface force model (CSF) has been used to investigate the surface tension. The geometric reconstruction has been used for determining the interface of the two fluids. According to the experimental results, the hydraulic jump radius is a function of the impingement jet radius, the concave target plate radius, and the volumetric flow rate. Also, based on the experimental observation, by increasing the radius of the concave target plate, the shape of these jumps change from the circular to the polygonal hydraulic jump.

**Keywords** Circular Hydraulic Jump; Concave Target Plate; Impingement Jet Radius; Hydraulic Jump Radius

### CITATION LINKS

[1] Microflows and nanoflows: Fundamentals and Simulation [2] Experimental modeling of circular hydraulic jump by the impingement of a water column on a horizontal disk [3] Wave structure in the radial film flow with a circular hydraulic jump [4] Jets, wakes and cavities [5] The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane [6] Local heat transfer coefficients under an axisymmetric, single-phase liquid jet [7] Experimental study of the hydrodynamic and heat transfer of free liquid jet impinging a flat circular heated disk [8] Constant Froude number in a circular hydraulic jump and its implication on the jump radius selection [9] The circular hydraulic jump in low gravity [10] Experimental and numerical study of the hydraulic jump of an impinging jet on a moving surface [11] An experimental investigation on the interaction of hydraulic jumps formed by two normal impinging circular liquid jets [12] Investigation on non-circular hydraulic jumps formed due to obliquely impinging circular liquid jets [13] Modeling and experimental investigation of the hydraulic jumps in liquid film formed by an impinging two-phase air-water jet [14] A simple dissipation model of circular hydraulic jump [15] Experimental investigation for hydrodynamic flow due to obliquely free circular water jet impinging on horizontal flat plate [16] Experimental characterization of hydraulic jump caused by jet impingement on micro-patterned surfaces exhibiting ribs and cavities [17] The influence of nozzle diameter on the circular hydraulic jump of liquid jet impingement [18] Experimental study of the hydrodynamic and heat transfer of air-assistant circular water jet impinging a flat circular disk [19] Experimental measurement of radius of circular hydraulic jumps: Effect of radius of convex target plate [20] Experimental investigation of stationary and rotational structures in non-circular hydraulic jumps [21] Proposal of experimental relations for determining the number of sides of polygonal hydraulic jumps [22] The influence of surface tension on the circular hydraulic jump [23] A continuum method for modeling surface tension

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Department, Faculty Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

#### \*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Faculty Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran  
Phone: +98 (51) 38806001  
Fax: +98 (51) 38806001  
mahpeymr@um.ac.ir

#### Article History

Received: January 21, 2019  
Accepted: May 19, 2019  
ePublished: February 01, 2020

## بررسی آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی پرش هیدرولیکی دایروی روی صفحه مقعر

احمد صابری PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

محمدرضا مه‌پیکر PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

علیرضا تیمورتاش PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### چکیده

پرش هیدرولیکی دایروی، پدیده‌ای است که در اثر برخورد یک جت عمودی سیال به یک سطح افقی و در یک فاصله شعاعی مشخص از مرکز صفحه (شعاع پرش هیدرولیکی)، شکل می‌گیرد. اکثر تحقیقات و مطالعات آزمایشگاهی و عددی، پرش هیدرولیکی دایروی روی صفحه تخت را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌اند و اثر تقعر صفحه هدف بر پرش هیدرولیکی، تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. بنابراین در این پژوهش برای اولین بار با استفاده از نتایج آزمایشگاهی و همچنین شبیه‌سازی جریان با نرم‌افزار Fluent، اثر تقعر صفحه هدف بر اندازه و شکل پرش‌های هیدرولیکی بررسی شده است. به‌منظور شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی از روش حجم سیال (VOF) استفاده شده است. اثر کشش سطحی با استفاده از مدل نیروی سطحی پیوسته (CSF) در نظر گرفته شده است و همچنین برای مشخص کردن فصل مشترک دو سیال از طرح بازسازی هندسی استفاده شده است. نتایج تحقیق آزمایشگاهی نشان می‌دهد که شعاع پرش هیدرولیکی تابعی از شعاع جت ورودی، شعاع صفحه هدف مقعر و همچنین مقدار دبی جریان است. علاوه بر این براساس مشاهدات آزمایشگاهی با افزایش شعاع صفحه هدف مقعر شکل این پرش‌ها از حالت دایروی خارج و پرش‌های هیدرولیکی به‌صورت چندضلعی ظاهر می‌گردند.

**کلیدواژه‌ها:** پرش هیدرولیکی دایروی، صفحه هدف مقعر، شعاع جت فرودی، شعاع پرش هیدرولیکی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۲۹

نویسنده مسئول: mahpeymr@um.ac.ir

### ۱- مقدمه

پرش هیدرولیکی دایروی به‌عنوان یکی از موضوعات قابل توجه در علم مکانیک سیالات، پدیده‌ای است که در اثر برخورد یک جت عمودی سیال به یک سطح افقی رخ می‌دهد. این پدیده به‌طور گسترده در بسیاری از فرآیندهای صنعتی مانند تولید شیشه، خشک‌کردن کاغذ، خنک‌کاری توربین گاز و غیره مشاهده می‌شود<sup>[1]</sup>.<sup>[3]</sup> با توجه به کاربردهای مختلف این پدیده، تعیین فاصله وقوع پرش (شعاع پرش هیدرولیکی) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین مطالعات آزمایشگاهی و عددی گسترده‌ای در زمینه پرش‌های هیدرولیکی روی صفحه‌های تخت انجام شده است و به‌منظور پیش‌بینی شعاع پرش هیدرولیکی در شرایط مختلف، مدل‌ها و روابطی نیز ارائه شده است<sup>[4-8]</sup>.

استیون و وب<sup>[6]</sup> به مطالعه پرش هیدرولیکی ناشی از برخورد یک جت تک‌فاز آب روی یک سطح افقی پرداختند. آنها آزمایش‌هایی را برای نازل‌هایی به قطر ۲/۲ تا ۸/۹ میلی‌متر و همچنین عدد رینولدز

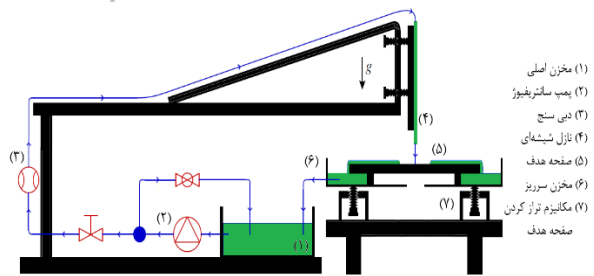
در محدوده ۱۰۰۰ تا ۵۲۰۰۰ انجام دادند و رابطه‌ای بی‌بعد برای پیش‌بینی شعاع پرش هیدرولیکی ارائه کردند. اودسیان و ژائو<sup>[9]</sup> به‌طور آزمایشگاهی تاثیر جاذبه را بر پرش هیدرولیکی دایروی بررسی و نتایج قابل تاملی ارائه کردند. طبق مشاهدات آنها با کاهش جاذبه، شعاع پرش افزایش یافته، طول ناحیه گذار زیاد شده، شعاع انحنا در عرض پرش افزایش یافته و پرش هیدرولیکی تدریجی می‌شود.

گرادک و همکاران<sup>[10]</sup> پرش هیدرولیکی را در برخورد یک جت با تقارن محوری با یک صفحه متحرک به‌صورت عددی و آزمایشگاهی بررسی کردند تا بتوانند فرآیند نوردکاری ساخت فولاد را شبیه‌سازی کنند. در یک تحقیق آزمایشگاهی دیگر، کیت و همکاران<sup>[11]</sup> به بررسی تداخل دو پرش هیدرولیکی ناشی از دو جت دایروی پرداختند. آنها آزمایش‌هایی را برای مقادیر مختلف فاصله بین دو جت و میزان دبی حجمی سیال انجام داده و الگوهای مختلفی از تداخل پرش‌های هیدرولیکی را مشاهده نمودند. در پژوهش دیگری<sup>[12]</sup>، این محققان به بررسی اثر جت مایل بر پرش هیدرولیکی روی صفحه تخت افقی پرداختند. نتایج آزمایش‌های آنان نشان داد در زاویه‌های بالا، پرش به شکل منحنی‌هایی هموار رخ می‌دهد، در حالی که در زاویه‌های پایین، پروفیل پرش دارای گوشه‌هایی است. همچنین آنها فشار سکون و ضخامت فیلم را برای زاویه‌ها و دبی‌های مختلف ارائه کردند.

گامکوفسکی<sup>[13]</sup> به‌صورت آزمایشگاهی و تئوری به مطالعه پرش هیدرولیکی با استفاده از جت دوفازی آب- هوا پرداخت و نشان داد با استفاده از این جت تحت شرایط خاصی، پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد که البته رفتاری کاملاً متفاوت با پرش‌های رایج در اثر برخورد جت سیال تک فاز دارد. به‌عنوان نمونه در این شرایط، پرش در شعاع خیلی بزرگ‌تری نسبت به حالت معمول و در چند مرحله اتفاق می‌افتد. جاروسو میکلیویز و داریوز میکلیویز<sup>[14]</sup> با آنالیز معادله برنولی، مدلی ساده برای پیش‌بینی چگونگی پخش پرش هیدرولیکی دایروی در جریان سیال لزج ارائه دادند. با در نظر گرفتن پارامتری که قادر به محاسبه تعداد و سایز گردابه‌ها است، مدل آنها قادر به پیش‌بینی پرش‌های نوع I و II بود.

تیمای و همکاران<sup>[15]</sup> به‌صورت آزمایشگاهی به بررسی اثر جت مایل بر پدیده پرش هیدرولیکی پرداختند. نتایج آزمایشگاهی آنها برای محدوده دبی ۲ تا ۵ لیتر بر دقیقه و قطر نازل ۵/۵ میلی‌متری برای زاویه‌های ۳۰ تا ۹۰ درجه نسبت به افق، نشان داد که پرش هیدرولیکی شکل‌گرفته ساختار منحصربه‌فرد غیردایروی دارد. بر اساس تحقیقات آنها تحت زاویه‌های ثابت جت، با افزایش دبی جریان، شعاع پرش هیدرولیکی افزایش و ضخامت فیلم جریان کاهش می‌یابد.

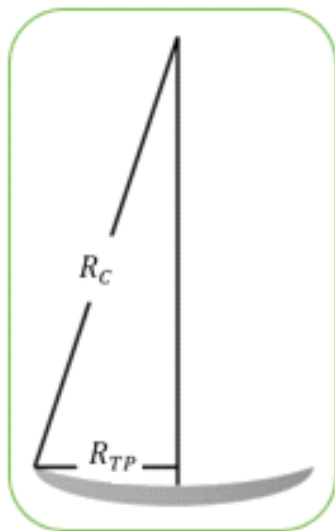
در تحقیق آزمایشگاهی دیگری جانسون و همکاران<sup>[16]</sup> به بررسی اثر ایجاد شیار در سطح صفحه هدف بر پرش‌های هیدرولیکی دایروی پرداختند. نتایج به‌دست‌آمده، نشان داد که شعاع پرش در صورتی که جهت شیارها در جهت حرکت سیال باشد، زیاد می‌شود اما اگر جهت این شیارها در جهت عمود بر حرکت سیال باشد، شعاع پرش



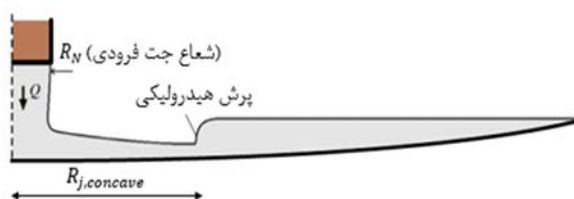
شکل ۱ شماتیک دستگاه آزمایش

برای بررسی اثر شعاع جت برخوردی، از چهار نازل با شعاع‌های مختلف ۰/۲۵۲، ۰/۲۹۵، ۰/۳۸۵ و ۰/۵۱۵ سانتی‌متر استفاده شده است. با توجه به اینکه در تمامی آزمایش‌ها، فاصله دهانه نازل تا صفحه هدف یک سانتی‌متر انتخاب شده است، می‌توان شعاع جت سیال را برابر شعاع نازل در نظر گرفت. صفحات هدف مقعر و دایروی (با شعاع‌های صفحه ۷/۶۰ و ۹/۷۵ سانتی‌متر و شعاع انحنا ۲۲۴ سانتی‌متر) انتخاب شده‌اند. همچنین جنس صفحات از شیشه است.

شکل ۲، طرحی شماتیک از یک صفحه مقعر را نشان می‌دهد. شعاع انحنای صفحه ( $R_C$ ) و شعاع صفحه هدف ( $R_{TP}$ ) به‌عنوان پارامترهای معرف صفحه هدف در شکل ۲ مشخص شده‌اند. همچنین در شکل ۳، ضمن معرفی شعاع جت فرودی ( $R_N$ ) و شعاع پرش هیدرولیکی ( $R_j$ )، طرحی از پرش هیدرولیکی روی صفحه مقعر نشان داده شده است.



شکل ۲ طرح صفحه مقعر



شکل ۳ شماتیک پرش هیدرولیکی روی صفحه مقعر

کاهش می‌یابد و شکل پرش هیدرولیکی به شکل بیضی متمایل می‌شود. همچنین با افزایش میزان فاصله به عرض شیارها، شعاع پرش هیدرولیکی در حرکت در جهت شیارها افزایش و به‌طور مشابه در حرکت عمود بر جهت شیارها، شعاع پرش کاهش می‌یابد.

چو و کیم [17] به بررسی آزمایشگاهی اثر قطر نازل بر اندازه شعاع پرش هیدرولیکی پرداختند. نتایج آزمایشات آنها نشان داد شعاع پرش هیدرولیکی با کاهش قطر نازل در یک رینولدز ثابت افزایش می‌یابد. فردریش و همکاران [9] در یک مطالعه آزمایشگاهی، اثر یک جت دوفازی آب و هوا را بر شعاع پرش هیدرولیکی بررسی کردند. با تعریف کسر حجمی  $\beta$  به‌صورت نسبت دبی هوا به دبی کل آب و هوا، نتایج آزمایش‌های آنها نشان داد شعاع پرش هیدرولیکی تا  $\beta = 0.8$  افزایش می‌یابد و پس از آن شعاع پرش کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به داده‌های آزمایشگاهی، آنها رابطه‌ای برای شعاع پرش هیدرولیکی بی‌بعد به‌صورت تابعی از فشار سکون ارایه دادند. صابری و همکاران [19] اخیراً در یک مطالعه آزمایشگاهی به بررسی اثر صفحه هدف محدب بر پرش‌های هیدرولیکی دایروی پرداختند. نتایج تحقیقات آنها نشان داد که استفاده از صفحات هدف محدب، شعاع پرش هیدرولیکی را به‌صورت قابل توجهی افزایش می‌دهد. تیمورتاش و مخلص [20] طی تحقیقات آزمایشگاهی خود، دریافتند که در شرایط خاصی از اعداد رینولدز و ویر، پرش هیدرولیکی، ظاهری چند ضلعی چرخشی به خود می‌گیرد که ناشی از ایجاد موج سطحی در محل پرش است. در ادامه، سوختانلو و همکاران [21] در یک مطالعه آزمایشگاهی و با استفاده از روش طراحی آزمایش به کمک تحلیل تاگوچی، روابطی برای تخمین تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چند ضلعی بر حسب قطر جت، دبی حجمی و ارتفاع مانع در پایین‌دست ارایه کردند.

تاکنون بیشتر مطالعات و آزمایش‌های صورت‌گرفته، تنها پرش‌های هیدرولیکی روی صفحه تخت در شرایط مختلف را مد نظر قرار داده‌اند و اثر صفحه‌های مقعر بر اندازه و شکل پرش‌های هیدرولیکی مطالعه نشده است. بنابراین در این پژوهش اثر تقعر صفحه هدف بر اندازه و شکل پرش‌های هیدرولیکی برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفت. علاوه بر این اثر دبی حجمی، شعاع جت برخوردی و اندازه شعاع صفحه هدف مقعر بر پرش‌های هیدرولیکی نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. در ادامه، شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی روی صفحات مقعر با استفاده از نرم‌افزار Fluent انجام شده است.

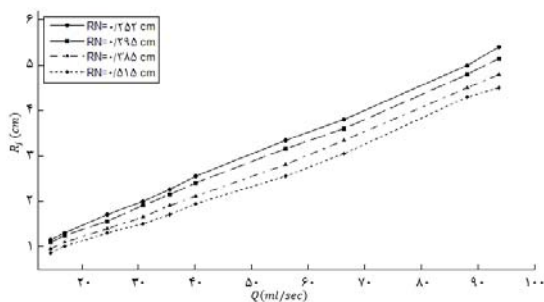
## ۲- معرفی دستگاه آزمایش

نمای شماتیک دستگاه ایجاد و اندازه‌گیری پرش هیدرولیکی در شکل ۱ نشان داده شده است. با بهره‌گیری از یک پمپ سانتریفیوژ، سیال عامل (اتیلن‌گلیکول) از مخزن اصلی توسط لوله‌های رابط پلاستیکی به نازل شیشه‌ای منتقل شده و پس از خارج شدن از نازل به صفحه هدف برخورد می‌کند. جت سیال پس از برخورد به صفحه، به‌صورت شعاعی روی آن منتشر شده و به مخزن سرریز ریخته و سپس از آنجا به مخزن اصلی منتقل می‌شود.

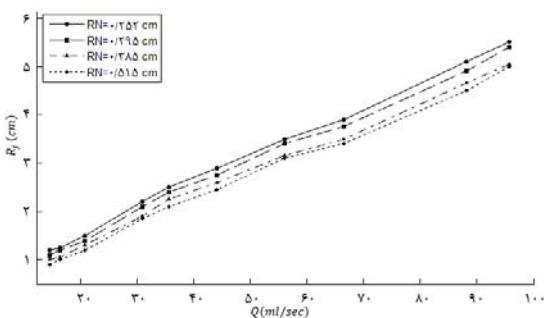
## ۳- معرفی تئوری

همچنین نازل‌هایی با ۴ شعاع مختلف و در دبی حجمی‌های متفاوت انجام شده‌اند.

نتایج آزمایشگاهی به‌دست‌آمده برای صفحات مقعر در نمودارهای ۲ و ۳ آورده شده است. نمودار ۲ نمودار شعاع پرش هیدرولیکی بر حسب دبی حجمی را برای صفحه مقعر با شعاع ۷/۶۰ سانتی‌متر و نازل‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که در این نمودار مشاهده می‌شود، شعاع پرش هیدرولیکی با کاهش شعاع جت فرودی افزایش می‌یابد. علت این امر این است که در یک دبی حجمی ثابت، با کاهش شعاع نازل، سرعت جریان ورودی و در نتیجه مومنتوم جریان سیال افزایش می‌یابد و بنابراین شعاع پرش هیدرولیکی افزایش می‌یابد. همچنین مطابق نمودار ۲ در یک شعاع جت فرودی ثابت با افزایش دبی حجمی به دلیل مشابه، شعاع پرش هیدرولیکی افزایش می‌یابد. همین روند در مورد موقعیت وقوع پرش هیدرولیکی در صفحه مقعر ۹/۷۵ سانتی‌متری نیز مشاهده می‌شود که در نمودار ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که در این نمودار مشاهده می‌شود با افزایش دبی حجمی و کاهش شعاع نازل، شعاع پرش هیدرولیکی افزایش می‌یابد.



نمودار ۲) شعاع پرش هیدرولیکی بر حسب دبی برای صفحه مقعر با شعاع ۷/۶۰cm



نمودار ۳) شعاع پرش هیدرولیکی بر حسب دبی برای صفحه مقعر با شعاع ۹/۷۵cm

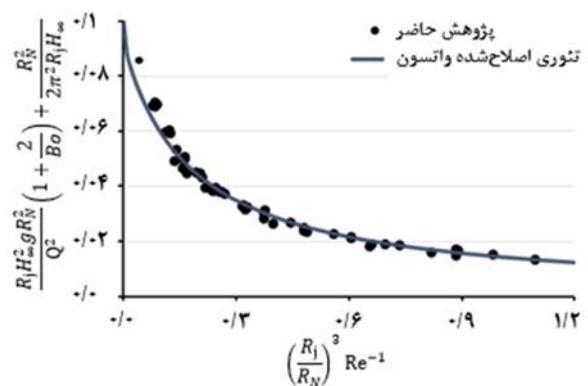
موضوع قابل توجه دیگر در این مطالعه، بررسی اثر اندازه شعاع صفحه هدف مقعر بر موقعیت و شکل پرش هیدرولیکی است. برای این منظور، برای صفحات هدف مقعر، معرفی شده و برای نازل با شعاع ۲۵۲/۰ سانتی‌متر و ۶ دبی حجمی مختلف، اندازه شعاع پرش هیدرولیکی در نمودار ۴ نشان داده شده است. با توجه به نمودار، مشاهده می‌شود شعاع صفحه هدف مقعر رابطه مستقیم با شعاع

یکی از نخستین تئوری‌ها در زمینه پرش‌های هیدرولیکی دایروی، تئوری واتسون [5] است که در سال ۱۹۶۴ و با در نظر گرفتن برخی فرضیات ارایه شد. یکی از این فرضیات، عدم تاثیر کشش سطحی بر شعاع پرش هیدرولیکی است که باعث ایجاد خطا در نتایج این تئوری، به‌ویژه در مقادیر دبی حجمی کم می‌شود. بوش و آریستوف [22] با در نظر گرفتن اثر کشش سطحی بر پرش‌های هیدرولیکی دایروی، معادلات واتسون را به‌صورت زیر اصلاح نمودند:

$$\frac{R_j H_{\infty}^2 g R_N^2}{Q^2} \left(1 + \frac{2}{Bo}\right) + \frac{R_N^2}{2\pi^2 R_j H_{\infty}} = 0.10132 - 0.1297 \left(\frac{R_j}{R_N}\right)^{3/2} Re^{-1/2} \quad R_j < r_o \quad (1)$$

$$\frac{R_j H_{\infty}^2 g R_N^2}{Q^2} \left(1 + \frac{2}{Bo}\right) + \frac{R_N^2}{2\pi^2 R_j H_{\infty}} = 0.01676 \left[ \left(\frac{R_j}{R_N}\right)^3 Re^{-1} + 0.1826 \right]^{-1} \quad R_j \geq r_o \quad (2)$$

در این رابطه، مقدار شعاعی است که ضخامت لایه مرزی به سطح آزاد می‌رسد و توسط  $r_o = 0.3155 R_N Re^{1/3}$  به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه هیچ داده آزمایشگاهی یا عددی برای پرش هیدرولیکی روی صفحه مقعر در دسترس نیست، بنابراین به‌منظور اعتبارسنجی دستگاه آزمایش، نتایج آزمایشگاهی به‌دست‌آمده روی صفحه تخت با تئوری اصلاح‌شده واتسون (تئوری بوش و آریستوف) مقایسه شده است. در نمودار ۱ نتایج آزمایشگاهی به‌دست‌آمده برای صفحه تخت با تئوری اصلاح‌شده واتسون مقایسه شده است. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست‌آمده در این پژوهش، با نتایج تئوری اصلاح‌شده واتسون تطابق خوبی دارد، به‌طوری که حداکثر ۴٪ اختلاف در نتایج به‌دست‌آمده از کار حاضر نسبت به نتایج تئوری اصلاح‌شده واتسون، وجود دارد.



نمودار ۱) مقایسه نتایج کار حاضر با نتایج تئوری اصلاح‌شده واتسون

## ۴- ارایه و تحلیل نتایج آزمایشگاهی

در این پژوهش تلاش شده است تا با استفاده از نتایج آزمایشگاهی، اثر وجود صفحه هدف مقعر، اثر شعاع جت جریان و همچنین تاثیر دبی حجمی بر شعاع پرش هیدرولیکی بررسی شود. آزمایش‌ها برای ۲ صفحه مقعر با شعاع صفحات مختلف  $(R_{TP})$  ۹/۷۵ و ۷/۶۰ سانتی‌متر اما شعاع انحنای یکسان  $(R_C)$  ۲۲۴ سانتی‌متر و

### ۵- معرفی روش عددی

پس از بررسی مطالعه آزمایشگاهی، از یک مدل عددی در نرم‌افزار **Fluent** استفاده شد تا پدیده پرش هیدرولیکی روی سطوح مقعر شبیه‌سازی شود. با توجه به این‌که هدف ردگیری سطح مشترک بین دو سیال آب و هوا است، به‌منظور شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی از مدل **VOF** استفاده شده است. در مدل **VOF** می‌توان اثر کشش سطحی را در فصل مشترک میان هر جفت از فازها لحاظ کرد. برای این منظور از مدل نیروی سطحی پیوسته (**CSF**) پیشنهاد شده توسط **برک‌بیل** و همکاران [23] استفاده شده است. در این مدل اضافه‌شدن کشش سطحی به محاسبات **VOF** منجر به افزودن ترم چشمه به معادلات مومنتوم می‌شود.

### ۱-۵ معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان سیال شامل معادله پیوستگی و مومنتوم به‌صورت زیر هستند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \vec{F}_b \quad (۴)$$

که در آن  $\vec{V}$  بردار سرعت،  $P$  فشار،  $\vec{\tau}$  تانسور تنش،  $\mathbf{g}$  شتاب گرانش و  $\rho$  چگالی سیال و  $F_b$  معرف نیروهای جسمی هستند و به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F_b = \sigma_{ij} \frac{\rho k \nabla \alpha_i}{0.5(\rho_i + \rho_j)} \quad (۵)$$

که در رابطه بالا دانسیته متوسط حجمی است و به‌صورت  $\rho = \alpha \rho_i + (1 - \alpha) \rho_j$  تعریف می‌شود. همچنین انحنای  $k$  بر حسب دیورژانس بردار نرمال واحد و به‌صورت  $k = \nabla \cdot \vec{n}$  تعریف می‌شود. در این رابطه  $\vec{n} = \nabla \alpha_q$  به‌صورت  $\vec{n}$  تعریف می‌شود. ردیابی فصل مشترک میان فازها با حل معادله پیوستگی برای کسر حجمی یک یا بیشتر فازها انجام می‌گیرد. برای فاز  $q$  این رابطه به‌صورت زیر است.

$$\frac{1}{\rho_q} \frac{\partial(\alpha_q \rho_q)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{V}_q) = S_{\alpha q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (۶)$$

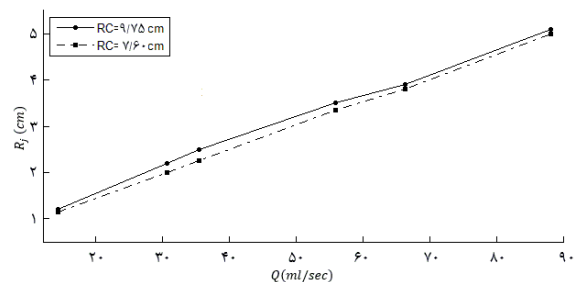
که  $\dot{m}_{qp}$  انتقال جرم از فاز  $q$  به  $p$  و  $\dot{m}_{pq}$  انتقال جرم از فاز  $p$  به  $q$  است. در شبیه‌سازی پدیده پرش هیدرولیکی چون هیچ گونه نفوذی بین سیال هوا و گاز رخ نمی‌دهد، این مقادیر برابر صفر است. جمله  $S_{\alpha q}$  جمله چشمه است که به‌طور پیش‌فرض برابر صفر است.

### ۲-۵ حل معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم در این مطالعه از روش کوپل سرعت و فشار، مطابق الگوریتم پیزو استفاده شده است. نحوه محاسبه گرادینان‌ها، روش حداقل مربعات است. کشش سطحی در فرآیند حل در نظر گرفته شده است. رژیم جریان آرام است. از طرح بازسازی هندسی برای مشخص کردن فصل مشترک دو سیال استفاده شده است. الگوریتم حل مساله به‌صورت زیر است:

۱. حدس اولیه سرعت‌ها، فشار و کسر حجمی سیال؛
۲. حل معادلات مومنتوم گسسته‌شده؛
۳. حل معادله تصحیح فشار؛

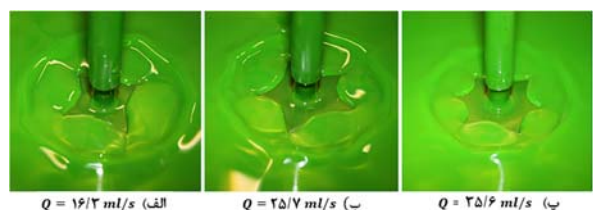
پرش هیدرولیکی دارد و با افزایش شعاع صفحه هدف، شعاع پرش هیدرولیکی نیز افزایش می‌یابد. با توجه به نمودار، صفحات مقعر و انحنای موجود در این صفحات، لبه‌های انتهایی صفحه در واقع مانند یک مانع عمل می‌کنند و با برگشت‌دادن جریان پخش‌شده از مرکز صفحه، موقعیت پرش هیدرولیکی را تحت تاثیر قرار داده و پرش در شعاع کوچک‌تری رخ می‌دهد. بنابراین با افزایش شعاع صفحه هدف این موانع از محل فرود جت دورتر می‌شوند، به‌طوری که شعاع پرش هیدرولیکی دایروی نیز افزایش می‌یابد.



نمودار (۴) اثر شعاع صفحه هدف بر شعاع پرش هیدرولیکی بر حسب دبی برای شعاع جت فرودی ۲۵۲/۰ سانتی‌متر

بر اساس مشاهدات آزمایشگاهی با افزایش بیشتر شعاع صفحه هدف، نوع خاصی از پرش‌های هیدرولیکی شکل می‌گیرد. با افزایش بیشتر شعاع صفحه هدف مقعر، ارتفاع لبه‌های صفحه نسبت به مرکز صفحه بیشتر شده و در نتیجه با برقراری جریان سیال پس از مدتی صفحه هدف مقعر مانند یک تشت عمل کرده و سیال بیشتری را درون خود نگه می‌دارد. بنابراین شرایط جریان سیال تغییر می‌کند و شکل پرش هیدرولیکی از حالت دایروی خارج شده و به‌صورت چندضلعی‌های منتظم و غیرمنتظم ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه هدف این پژوهش بررسی و شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی روی صفحات مقعر است، لذا تنها صفحات مقعر با شعاع‌های پایین که شکل پرش هیدرولیکی دایروی دارند بررسی شده است.

برای نمونه پرش هیدرولیکی چندضلعی برای صفحه هدف مقعر با شعاع ۱۲/۵ سانتی‌متر و شعاع نازل ۳۸۵/۰ سانتی‌متر برای سه دبی حجمی مختلف در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش دبی حجمی سیال، تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی نیز افزایش می‌یابد، به‌طوری که با افزایش دبی حجمی، تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی از چهار ضلع تا شش ضلع تغییر می‌کند.



شکل (۴) پرش هیدرولیکی چند ضلعی ایجادشده روی صفحه مقعر با شعاع ۱۲/۵ سانتی‌متر

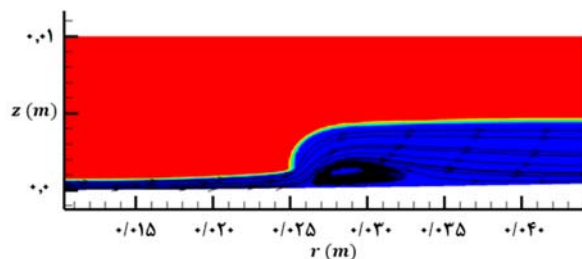
اندازه‌گیری شد و نتایج مطابق جدول ۱ ارایه شده است. با توجه به جدول ۱، برای تمامی کیس‌های صورت‌گرفته، تعداد شبکه حدود ۲۶ هزار سلول یا بیشتر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱) استقلال از شبکه‌بندی

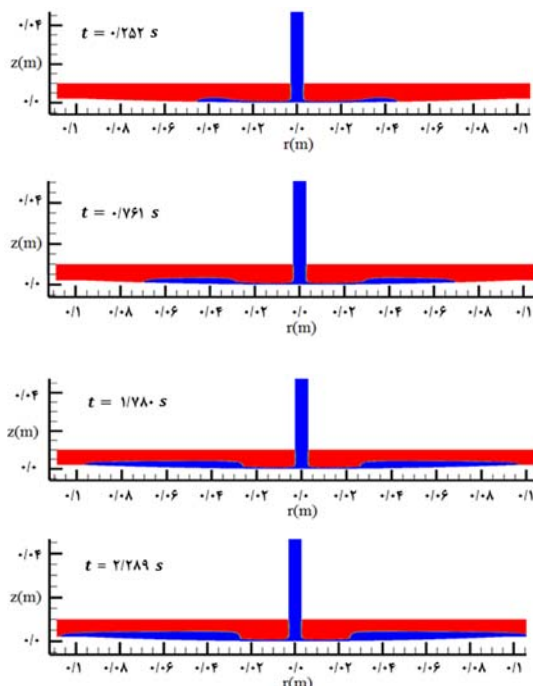
شماره	دبی	تعداد شبکه	شعاع پرش
۱	۴۴/۱	۱۳۰۰۰	۲/۴۶
۲	۴۴/۱	۲۶۰۰۰	۲/۴۹
۳	۴۴/۱	۵۰۰۰۰	۲/۴۹

خطوط جریان طی یک پرش هیدرولیکی روی صفحه هدف مقعر در نمودار ۵ نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این نمودار، وجود گردابه‌هایی در منطقه وقوع پرش هیدرولیکی است که به دلیل اختلاف ارتفاع بالادست و پایین‌دست پرش است.

نحوه شکل‌گیری پرش هیدرولیکی به صورت دوبعدی روی صفحه مقعر با شعاع ۹/۷۵ سانتی‌متر در دبی حجمی ۴۴/ml/sec و با استفاده از نازل به شعاع ۰/۲۹۵ سانتی‌متر در طی زمان نشان داده شده است (نمودار ۶).



نمودار ۵) خطوط جریان در پرش هیدرولیکی دوبعدی روی سطح مقعر



نمودار ۶) نحوه شکل‌گیری پرش هیدرولیکی به صورت دوبعدی روی سطح مقعر با شعاع ۹/۷۵ سانتی‌متر در طی زمان

۴. تصحیح سرعت و فشار با فشار به‌دست‌آمده در مرحله قبل؛  
۵. حل معادله دوم تصحیح فشار و تعیین سرعت و فشار تصحیح‌شده؛

۶. حل معادله انتقال کسر حجمی سیال؛

این سیکل تا زمان همگرانش ادامه می‌یابد و بعد از آن به گام زمانی بعدی انتقال می‌یابد. مقدار باقی‌مانده در هر گام زمانی در این پژوهش ۱۰° در نظر گرفته شده است.

### ۳-۵- محدودیت گام زمانی

حل جملات جابجایی، لزجت به‌صورت صریح موجب می‌شود که محدودیت‌هایی برای گام زمانی اعمال شود تا پایداری حل حفظ شود. بنابراین عدد کورانت کمتر از یک در نظر گرفته شده است.

$$\max \left[ \frac{|u_r| \delta t}{\delta r}, \frac{|u_z| \delta t}{\delta z} \right] < 1 \quad (7)$$

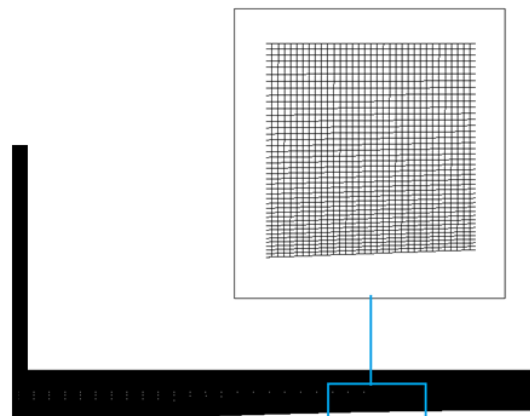
### ۴-۵- شرایط مرزی

در تمامی شبیه‌سازی‌های صورت‌گرفته از شرط مرزی عدم نفوذ برای دیواره جامد، شرط مرزی سرعت ورودی برای جت سیال، شرط مرزی دیواره برای اطراف جت سیال و شرط مرزی فشار برای خروجی استفاده شده است.

در مرز جامد روی سطح صلب شرط مرزی عدم لغزش است. در واقع روی سطح صلب شرط عدم نفوذ، شرط گرادیان فشار صفر و نیز گرادیان نسبت حجمی صفر وجود دارد. در خروجی جریان، شرط مرزی فشار اعمال شده که فشار نسبی در این شرط مرزی برابر صفر است.

### ۵-۵- مدل‌سازی پرش هیدرولیکی دایروی دوبعدی روی سطح مقعر

پرش هیدرولیکی دوبعدی روی سطح مقعر به‌صورت تقارن محوری مدل‌سازی شده است. شبکه‌بندی حوزه حل به‌صورت غیریکنواخت بوده و شبکه در نزدیک سطح صلب که پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد ریز شده است و تمام سلول‌ها به‌صورت چهاروجهی هستند. در شکل ۵ شبکه‌بندی صورت‌گرفته روی حوزه حل شبیه‌سازی‌شده، نشان داده شده است.



شکل ۵) شبکه‌بندی حوزه حل پرش هیدرولیکی دوبعدی

به‌منظور بررسی استقلال از شبکه‌بندی، شعاع پرش هیدرولیکی روی صفحه با شعاع ۹/۷۵ سانتی‌متر در سه شبکه‌بندی مختلف

جریان بر اندازه شعاع پرش هیدرولیکی دایروی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از نرم‌افزار Fluent پدیده پرش هیدرولیکی روی صفحه مقعر شبیه‌سازی شده است. با توجه به اینکه هدف ردگیری سطح مشترک بین دو سیال است، به‌منظور شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی از مدل VOF استفاده شده است. اثر کشش سطحی در فصل مشترک بین دو فاز با استفاده از مدل نیروی سطحی پیوسته (CSF) در نظر گرفته شده است. همچنین از طرح بازسازی هندسی برای مشخص کردن فصل مشترک دو سیال استفاده شده است و معادلات نایبر استوکس از روش کوپل سرعت و فشار، مطابق الگوریتم پیرو حل شده‌اند.

در این پژوهش، صفحات هدف از شبیه‌های کاملاً مسطح ساخته شده‌اند و چگالی و لزجت سیال، ثابت فرض شده است. مطابق مشاهدات آزمایشگاهی، اندازه شعاع صفحه هدف مقعر و نیز دبی حجمی جریان، تأثیر مستقیم و شعاع جت برخوردی عمودی، تأثیر معکوس بر اندازه شعاع پرش هیدرولیکی دارند. علاوه بر این مشاهده شد که با افزایش شعاع صفحه هدف مقعر، شکل پرش هیدرولیکی از حالت دایروی خارج شده و شکل چندضلعی به خود می‌گیرد.

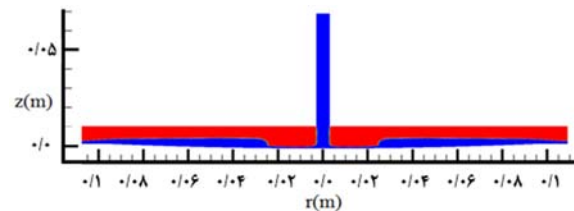
بنابراین نتایج حاصل از مطالعه آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی انجام‌شده را می‌توان به‌صورت زیر جمع‌بندی نمود:

- ۱- با افزایش دبی حجمی جریان سیال برای هر شعاع نازل مشخص، شعاع پرش هیدرولیکی افزایش می‌یابد.
- ۲- با افزایش شعاع صفحه هدف، شعاع پرش هیدرولیکی افزایش می‌یابد.
- ۳- با افزایش بیشتر شعاع صفحه هدف، پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی جایگزین پرش‌های دایروی می‌شوند.
- ۴- با کاهش شعاع جت در دبی حجمی ثابت، شعاع پرش هیدرولیکی افزایش می‌یابد.
- ۵- نتایج شبیه‌سازی عددی انجام‌شده نشان می‌دهد که شعاع پرش هیدرولیکی با خطای حداکثر ۸٪ قابل محاسبه است.

**تشکر و قدردانی:** نویسندگان لازم می‌دانند از مسئولین مرکز محاسبات سنگین دانشگاه فردوسی مشهد، تقدیر و تشکر نمایند.  
**تاییدیه اخلاقی:** نتایج ارائه‌شده، حاصل پژوهش نویسندگان بوده که تاکنون در نشریه یا مجموعه مقالات کنفرانس دیگری چاپ نشده است و در دست بررسی نیست.  
**تعارض منافع:** مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با اشخاص و سازمان‌های دیگر ندارد.

**سهم نویسندگان:** احمد صابری (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۶۰٪)؛ محمدرضا مه‌پیکر (نویسنده دوم)، تحلیلگر آماری (۲۰٪)؛ علیرضا تیمورتاش (نویسنده سوم)، روش‌شناس (۲۰٪)  
**منابع مالی:** این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه فردوسی مشهد انجام شده است.

همچنین نمونه‌ای از یک پرش هیدرولیکی دوبعدی روی صفحه مقعر با شعاع ۹/۷۵ سانتی‌متر در دبی حجمی ۴۴/۱ ml/sec و با استفاده از نازل به شعاع ۰/۲۹۵ سانتی‌متر در نمودار ۷ نشان داده شده است. شعاع پرش هیدرولیکی در این نمونه ۲/۴۹ سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. لازم به ذکر است که شعاع پرش در آزمایشگاه برای این نمونه ۲/۷۰ سانتی‌متر ثبت شده است که حدود ۷/۷٪ خطا را نشان می‌دهد.



نمودار ۷) شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی دوبعدی روی سطح مقعر با شعاع ۹/۷۵ سانتی‌متر

به‌منظور اعتبارسنجی نتایج عددی به‌دست‌آمده با نرم‌افزار Fluent، لازم است تا مدل عددی استفاده شده با نتایج آزمایشگاهی روی صفحات هدف مقعر مورد مقایسه قرار بگیرد. برای این منظور هشت نمونه با دبی حجمی‌ها و قطر نازل‌های متفاوت انتخاب شد. نتایج به‌دست‌آمده با نرم‌افزار Fluent و نیز نتایج آزمایشگاهی برای صفحه مقعر مطابق جدول ۲ است.

جدول ۲) مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی

خطا (درصد)	شعاع پرش هیدرولیکی (cm)		Q (ml/s)	R <sub>N</sub> (cm)	R <sub>TP</sub> (cm)
	نتایج آزمایشگاهی	نتایج عددی			
۳/۲۰	۳/۷۵	۳/۶۳	۶۶/۴	۰/۲۵۲	۷/۶۰
۴/۰۰	۱/۲۵	۱/۲۰	۱۷/۰	۰/۲۹۵	
۴/۷۹	۴/۸۰	۴/۵۷	۹۳/۷	۰/۳۸۵	
۷/۶۹	۱/۹۵	۲/۱۰	۴۰/۱	۰/۵۱۵	
۶/۹۰	۱/۴۵	۱/۳۵	۲۰/۷	۰/۲۵۲	۹/۷۵
۷/۷۷	۲/۷۰	۲/۴۹	۴۴/۱	۰/۲۹۵	
۶/۹۳	۵/۰۵	۴/۷۰	۹۵/۷	۰/۳۸۵	
۶/۴۰	۲/۵۰	۲/۳۴	۴۵/۶	۰/۵۱۵	

با توجه به جدول ۲ و مقایسه شعاع پرش هیدرولیکی به‌دست‌آمده از نتایج آزمایشگاهی و نرم‌افزار عددی، مشاهده می‌شود که حداکثر مقدار خطا کمتر از ۸٪ است و بنابراین شبیه‌سازی انجام‌شده دارای دقت قابل قبولی است و می‌توان به‌جای انجام آزمایش‌های گسترده هزینه‌ساز از این روش عددی به‌منظور تجزیه و تحلیل پرش هیدرولیکی دایروی روی سطوح مقعر استفاده نمود.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از یک مطالعه آزمایشگاهی، اثر شعاع صفحه هدف مقعر و شعاع جت فرودی و همچنین تأثیر دبی حجمی

Fluid Science. 2008;32(8):1429-1439.

13- Gumkowski S. Modeling and experimental investigation of the hydraulic jumps in liquid film formed by an impinging two-phase air-water jet. Heat Transfer Engineering. 2008;29(9):816-821.

14- Mikielwicz J, Mikielwicz D. A simple dissipation model of circular hydraulic jump. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009;52(1-2):17-21.

15- Teamah MA, Ibrahim MK, Khairat Dawood MM, Aleem EA. Experimental investigation for hydrodynamic flow due to obliquely free circular water jet impinging on horizontal flat plate. European Journal of Scientific Research. 2012;83(1):60-75.

16- Johnson M, Maynes D, Crockett J. Experimental characterization of hydraulic jump caused by jet impingement on micro-patterned surfaces exhibiting ribs and cavities. Experimental Thermal and Fluid Science. 2014;58:216-223.

17- Choo K, Kim SJ. The influence of nozzle diameter on the circular hydraulic jump of liquid jet impingement. Experimental Thermal and Fluid Science. 2016;72:12-17.

18- Friedrich BK, Ford TD, Glaspell AW, Choo K. Experimental study of the hydrodynamic and heat transfer of air-assisted circular water jet impinging a flat circular disk. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017;106:804-809.

19- Saberi A, Mahpeykar MR, Teymourtash AR. Experimental measurement of radius of circular hydraulic jumps: Effect of radius of convex target plate. Flow Measurement and Instrumentation. 2019;65:274-279.

20- Teymourtash AR, Mokhlesi M. Experimental investigation of stationary and rotational structures in non-circular hydraulic jumps. Journal of Fluid Mechanics. 2015;762:344-360.

21- Soukhtanlou E, Teymourtash AR, Mahpeykar MR. Proposal of experimental relations for determining the number of sides of polygonal hydraulic jumps. Modares Mechanical Engineering. 2018;18(1):273-280. [Persian]

22- Bush JWM, Aristoff JM. The influence of surface tension on the circular hydraulic jump. Journal of Fluid Mechanics. 2003;489:229-238.

23- Brackbill JU, Kothe DB, Zemach C. A continuum method for modeling surface tension. Journal of Computational Physics. 1992;100(2):335-354.

1- Karniadakis GE, Beskok A, Aluru N. Microflows and nanoflows: Fundamentals and Simulation. New York: Springer; 2005.

2- Naraghi MN, Moallemi MK, Naraghi MHN, Kumar S. Experimental modeling of circular hydraulic jump by the impingement of a water column on a horizontal disk. Journal of Fluids Engineering. 1999;121(1):86-92.

3- Rao A, Arakeri JH. Wave structure in the radial film flow with a circular hydraulic jump. Experiments in Fluids. 2001;31(5):542-549.

4- Birkhoff G, Zarantonello EH. Jets, wakes and cavities. 1<sup>th</sup> Edition. Cambridge: Academic Press; 1957.

5- Watson EJ. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane. Journal of Fluid Mechanics. 1964;20(3):481-499.

6- Stevens J, Webb BW. Local heat transfer coefficients under an axisymmetric, single-phase liquid jet. Journal of Heat Transfer. 1991;113(1):71-78.

7- Baonga JB, Louahlia-Gualous H, Imbert M. Experimental study of the hydrodynamic and heat transfer of free liquid jet impinging a flat circular heated disk. Applied Thermal Engineering. 2006;26(11-12):1125-1138.

8- Duchesne A, Lebon L, Limat L. Constant Froude number in a circular hydraulic jump and its implication on the jump radius selection. Europhysics Letters. 2014;107(5):54002.

9- Avedisian CT, Zhao Z. The circular hydraulic jump in low gravity. Proceeding of the Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2000;456(2001):2127-2151.

10- Gradeck M, Kouachi A, Dani A, Arnoult D, Borean JL. Experimental and numerical study of the hydraulic jump of an impinging jet on a moving surface. Experiment Thermal and Fluid Science. 2006;30(3):193-201.

11- Kate RP, Das PK, Chakraborty S. An experimental investigation on the interaction of hydraulic jumps formed by two normal impinging circular liquid jets. Journal of Fluid Mechanics. 2007;590:355-380.

12- Kate RP, Das PK, Chakraborty S. Investigation on non-circular hydraulic jumps formed due to obliquely impinging circular liquid jets. Experimental Thermal and