



## Vibration Amplitude Reduction of the Disk-Blade System Using the Energy Absorbers Mounted on the Disk

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Aghayari J.<sup>1</sup> MSc,  
Safarpour P.\*<sup>1</sup> PhD,  
Rahi A.<sup>1</sup> PhD,  
Bab S.<sup>2</sup> PhD

#### How to cite this article

Aghayari J, Safarpour P, Rahi A, Bab S. Vibration Amplitude Reduction of the Disk-Blade System Using the Energy Absorbers Mounted on the Disk. Modares Mechanical Engineering. 2020;20(2):391-402.

<sup>1</sup>Mechanical & Energy Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Mechanical Rotary Equipment Department, Niroo Research Institute, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: Abbaspour College of Technology, East Vafadar Boulevard, Tehranpars, Tehran, Iran  
Phone: +98 (21) 73932662  
Fax: +98 (21) 77311446  
p\_safarpour@sbu.ac.ir

#### Article History

Received: July 5, 2018  
Accepted: May 14, 2019  
ePublished: February 01, 2020

### ABSTRACT

In this paper, the application of passive vibrational linear absorber on the indirect reduction of blade vibrations using its mounted on the disk-blade system is studied. The absorber receives the vibration energy of blade through a structural coupling of the disk with blade and losses it by its linear damping. Due to cyclic symmetry, the analysis of the bladed disk is reduced to the number of DOFs in a single sector. A cyclic transformation from physical to modal coordinates is used to perform this reduction. Natural frequencies and forced responses of the system are obtained by solving the characteristic and algebraic equations, respectively. The case study of a steam turbine includes 259 blades in 37 packets of 7 connected blades attached to the perimeter of the disk. Cyclic symmetric finite element analysis at 3000rpm is used to extract the natural modes and frequency diagram of the system. A two DOFs reduced-order model is identified for modeling the frequency-veering region. This region has been formed between the first and second families of natural modes and there is a strong coupling between them in this region. In addition, this region is close to the system excitation line and the possibility of resonance exists. Therefore, some linear energy absorbers are mounted on the disk for the indirect vibration reduction of blades. The initial optimal parameters were determined for the first and second modes using Den Hartog relations. These parameters reduced the system vibrations and they were used in subsequent optimization. The optimization has resulted in the improvement of absorber performance exclusively around the second mode, in compare with the tuned system by Den Hartog relations.

**Keywords** Linear Energy Absorber; Den Hartog Criteria; Frequency Diagram; Reduced Order Model; Cyclic Transformation; Optimization

### CITATION LINKS

[1] Aeroelastic stability assessment of an industrial compressor blade including ... [2] Order-tuned vibration absorbers for a rotating ... [3] Performance and dynamic stability of general-path centrifugal pendulum ... [4] On blade damping technology using passive ... [5] A numerical and experimental investigation on passive piezoelectric shunt damping of ... [6] Self-tuning impact damper for rotating ... [7] Effects of near-wall grid spacing on SST-K- $\omega$  model using NREL phase VI horizontal axis wind turbine [8] Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using ... [9] Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy ... [10] Nonlinear vibration control and energy harvesting of a beam using a nonlinear ... [11] SAFE Diagram-A dresser-rand evaluation tool for packeted bladed disc ... [12] Elements of dynamic characterization of a bladed disk by using the tip-timing method under ... [13] Evaluation of the suitability of the bladed disk design regarding the danger of the resonant vibration ... [14] Resonance Identification For ... [15] API Standard 612, Petroleum, Petrochemical, and Natural Gas Industries-Steam Turbines-Special-purpose ... [16] Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned ... [17] Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk ... [18] Flutter of mistuned bladed disks and blisks with aerodynamic and fmm structural ... [19] Vibration modeling of bladed disks subject to geometric mistuning and design ... [20] Compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed ... [21] On the stability of rotating blade ... [22] Stability and Hamiltonian Hopf bifurcation for a nonlinear symmetric bladed ... [23] The stability and nonlinear analysis of a rotating bladed disk at the critical ... [24] Wave propagation and natural modes in periodic ... [25] Wave propagation and natural modes in periodic ... [26] Dynamics of rotating ... [27] Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned ... [28] Numerical modeling and experimental identification of mistuned multi-stage bladed ... [29] Mechanical ...

## کاهش دامنه ارتعاشات سیستم دیسک- پره با استفاده از جاذب انرژی نصب شده روی دیسک

جعفر آقایی MSc

دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

پدرام صفرپور PhD

دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

عباس رهی PhD

دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

سعید باب PhD

گروه تجهیزات دوار مکانیکی، پژوهشگاه نیرو، تهران، ایران

### چکیده

در این مقاله کاربرد جاذب خطی ارتعاشی غیرفعال در کاهش غیرمستقیم ارتعاشات پره با نصب آن روی دیسک سیستم دیسک- پره بررسی می شود. جاذب از طریق کوپلینگ سازه‌ای دیسک با پره، انرژی ارتعاشی پره را دریافت و توسط میراگر خطی خود تلف می کند. به واسطه تقارن سیکی سیستم، طی تبدیل سیکیلیک از مختصات فیزیکی به مودال، تعداد درجات آزادی مورد نیاز برای تحلیل به تعداد موجود در یک سکتور کاهش می یابد. برای مطالعه تحلیلی، از مدل کاهش مرتبه یافته در محدوده فرکانسی مطالعه سیستم استفاده می شود. فرکانس‌های طبیعی و پاسخ اجباری سیستم با حل معادله مشخصه و معادلات ماتریسی سیستم به دست می آید.

دیسک- پره توربین بخاری نمونه، شامل ۲۵۹ پره است که در ۳۷ مجموعه ۷ تایی دور دیسک نصب شده‌اند. پره‌های هر مجموعه با شراذ نوک پره به هم متصل هستند. از تحلیل المان محدود مدل سیکیلیک در دور ۳۰۰۰rpm برای استخراج مودهای طبیعی و ترسیم دیاگرام فرکانسی استفاده می شود. برای مودهای اول و دوم مدل کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی شناسایی می شود. امکان رزونانس در ناحیه پس زنی فرکانسی دو مود در قطر ساکن سوم، به واسطه نزدیکی به خط تحریک وجود دارد لذا به تعداد مجموعه‌های پره، جاذب خطی انرژی روی دیسک نصب می شود. با استفاده از روابط دن هارتوگ پارامترهای بهینه اولیه برای مود اول و دوم تعیین شد که تا حدودی توانستند ارتعاشات سیستم را کاهش دهند و از پارامترهای آنها در بهینه‌سازی بعدی استفاده شد. با بهینه‌سازی، محدوده و میزان کاهش ارتعاشات نسبت به حالت‌های معیار دن هارتوگ به خصوص در مود دوم بهتر شده است.

**کلیدواژه‌ها:** جاذب خطی انرژی، معیار دن هارتوگ، دیاگرام فرکانسی، مدل کاهش مرتبه یافته، تبدیل سیکیلیک، بهینه‌سازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۲۹

\*نویسنده مسئول: p\_safarpour@sbu.ac.ir

### ۱- مقدمه

بخش قابل توجهی از مطالعات انجام شده در حوزه تجهیزات دوار معطوف به ارتعاشات اجزاء دوار همچون پره و دیسک و روش‌های کاهش آن برای افزایش عمر و جلوگیری از خرابی و شکست در این اجزاء شده است. منابع تحریک گوناگونی به واسطه دوران روتور و وجود جریان سیال در توربوماشین‌هایی همچون توربین‌ها و کمپرسورها وجود دارد. رویکرد طراحی دقیق اجزاء برای بهره‌برداری با حداکثر بازدهی و عملکرد در این ماشین‌ها، نیاز به مطالعه دقیق

دینامیک و ارتعاشات سیستم‌های دیسک- پره و حذف منابع ارتعاشی یا کاهش اثرات آنها دارد. معمولاً میرایی سازه‌ای و آئرویدینامیک موجود در سیستم به منظور کاهش دامنه ارتعاشات به ویژه هنگام گذر از سرعت‌های بحرانی کفایت نمی کند. به خصوص مورد اخیر که می تواند منشأ ناپایداری در سیستم نیز شود<sup>[1]</sup>. بدین سبب نیاز به تجهیزات افزودنی برای افزایش میرایی در سیستم وجود دارد. متصل کردن پره‌ها به یکدیگر در نقاط میانی و نوک پره‌ها و استفاده از میراگرهای اصطکاکی به خصوص در زیر پره‌ها که تداخلی با جریان ایجاد نکنند، روش‌های متداول کاهش دامنه ارتعاشات پره هستند. تجهیزات اخیر میرایی قابل توجهی در سیستم ایجاد می کنند، اما پیچیدگی مدل سازی آنها و تمایل صنعت به ساخت یکپارچه دیسک و پره، استفاده از آنها را محدود می سازد.

در رویکرد دیگر، از میراکننده‌های ارتعاشی که جاذب انرژی یا جرم و فنر تنظیم شده (TMD) نامیده می شوند، در سیستم‌های دوار استفاده می شود. برخی از این جاذب‌ها برای میرا کردن ارتعاشات پره نصب می شوند<sup>[2]</sup> و برخی برای میرا کردن ارتعاشات روتور<sup>[3]</sup>. انواع مختلفی از این نوع جاذب‌ها همچون جرم متحرک نصب شده روی پره<sup>[2]</sup>، پاندول سانتریفوژ نصب شده روی دیسک به منظور حرکت روی مسیر مشخص دایره‌ای یا سیکلوییدی<sup>[3]</sup>، پیزوالکتریک نصب شده روی پره<sup>[4]</sup>، مدار شانت پیزوالکتریک نصب شده روی دیسک جهت جذب انرژی پره از طریق کوپلینگ ارتعاشی دیسک و پره<sup>[5]</sup> و جاذب ضربه‌ای نصب شده روی پره<sup>[6]</sup> ارایه شده‌اند که مورد اخیر قابلیت تنظیم‌شوندگی فرکانسی نیز دارد. دمپرهای نصب شده روی پره مشکل فضای مورد نیاز روی پره یا قرارگیری در نقاط گره ارتعاشی را دارند که طراحی دقیق آنها را می طلبد. همچنین چاه‌های غیرخطی انرژی با خاصیت انتقال یک‌سویه انرژی ارتعاشی از طریق تشکیل پاسخ مدوله قوی در سیستم برای جذب ارتعاشات پره<sup>[7]</sup> یا روتور<sup>[8]</sup> مورد توجه محققان قرار گرفته است.

با تمایل صنعت به ساخت یکپارچه دیسک- پره (Blisk) امکان استفاده از میراکننده روی پره یا زیر پره محدود شده است و استفاده از جاذب‌هایی همچون پیزوالکتریک نصب شده روی دیسک<sup>[5]</sup> راهکاری برای کاهش دامنه ارتعاشات پره است. این میراگرها جذابیت پایین بودن وزن و تنظیم راحت‌تر پارامترها را دارند و هرچند برای بازیافت انرژی به صورت الکتریکی نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند<sup>[10]</sup>. مطالعه روی رفع نیاز مدار شانت یا غیرخطی آنها به منبع تغذیه و ضعف در کارکرد در دماهای بالاتر همچنان ادامه دارد. در این رهیافت قدرت کوپلینگ بین دیسک و پره، نقش اساسی در عملکرد جاذب خواهد داشت. بررسی این کوپلینگ و همچنین ارتعاشات فرکانس بالای پره که معمولاً تحریکات گذر پره و عبور جریان سیال به آن وارد می شود، نیازمند مطالعه دیاگرام فرکانسی سیستم است که مودهای مختلف در تعداد قطرهای ساکن مختلف روی دیسک را مطالعه می نماید.

معمولاً از دیاگرام کمپبل برای بررسی رزونانس‌های احتمالی سیستم استفاده می شود، اما رزونانس‌های قطعی را دیاگرام پیشرفته ارزیابی

به منظور کاهش دامنه ارتعاشات پره، تعدادی جاذب خطی انرژی که شامل جرم کوچک، فنر و میراگر خطی است به محل دیسک افزوده می شود و امکان کاهش دامنه ارتعاشات پره از طریق جاذب بررسی خواهد شد.

در ادامه، حل تحلیلی روی نمونه دیسک- پره واقعی مربوط به یک ردیف فشارپایین از توربین بخاری ۳۰ مگاواتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت که برای این منظور از دیاگرام فرکانسی منتج از نتایج آنالیز المان محدود و همچنین مدل های کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی برای مدل سازی سکتورهای آن استفاده خواهد شد و پارامترهای جاذب به منظور جذب انرژی ارتعاشی پره در تحریک قطر ساکن سوم از خانواده اول و دوم مودهای طبیعی بهینه سازی خواهد شد. در ناحیه مورد بررسی، پس زنی فرکانسی (Veering) بین خانواده مودهای اول و دوم نیز صورت می گیرد. دو مود نزدیک یکدیگرند و تداخل انرژی بین دو مود زیاد است و مساله انتقال انرژی از طریق کوپلینگ سازه ای مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این ناحیه نزدیک خط تحریک قرار دارد و امکان رخداد رزونانس و دامنه های بزرگ ارتعاشی وجود دارد. در نهایت پاسخ فرکانسی پره به ازای مقادیر مختلف پارامترهای جاذب ارائه خواهد شد.

## ۲- مدل سازی

ویژگی های ناشی از تقارن سیکلی که مشخصه تمام دیسک- پره های تیون است برای مدل سازی سیستم این مطالعه استفاده خواهد شد. دیسک- پره، آرایه قطبی از سکتورها است که هر سکتور شامل یک یا تعدادی پره و قطاعی از دیسک است. هر چند مدل سازی دقیق همچون مدل های المان محدود، تعداد بسیار زیادی المان و درجه آزادی در نظر می گیرد، اما مطالعه تحلیلی آن بسیار مشکل به نظر می رسد. ساده ترین مدلی که برای هر سکتور می توان در نظر گرفت، شامل یک جرم منفرد است که فنریت دیسک با فنر معادل مدل سازی شده است و همچنین کوپلینگ آن با سکتورهای مجاور نیز با فنر مدل سازی شده است. در مدل بهبود یافته می توان دو جرم در هر سکتور در نظر گرفت که یکی جرم مودال پره و دیگری دیسک است. سختی پره و دیسک هر یک با المان منفرد فنر می تواند در نظر گرفته شود. در اینجا فرض می شود سکتور  $m$  دارای درجات آزادی  $U_i$  در مختصات فیزیکی، ماتریس اینرسی  $[M]$  و ماتریس سختی  $[K]$  است. ابعاد این ماتریس ها  $m \times m$  است که  $m$  تعداد درجات آزادی در هر سکتور است. ماتریس سختی کوپلینگ با  $[K_c]$  نشان داده می شود و فرض می شود نیروی تحریک  $f_i$  به سکتور وارد می شود. با صرف نظر از میرایی، معادله حرکت سکتور به فرم زیر است:

$$[M]\ddot{U}_i + [K]U_i + [K_c](U_i - U_{i-1}) + [K_c](U_i - U_{i+1}) = f_i, i = 1 \dots N \quad (1)$$

یا

$$[M]\ddot{U}_i + ([K] + 2[K_c])U_i - [K_c]U_{i-1} - [K_c]U_{i+1} = f_i, i = 1 \dots N \quad (2)$$

فرکانسی سینگ یا دیاگرام سیف، ارائه شده توسط شرکت درس- رندا [11] مشخص می کند. بر اساس آن نقاطی که در آن علاوه بر برابری فرکانس طبیعی با فرکانس تحریک، شکل تحریک نیز با شکل مود ایجاد شده یکسان باشد نقطه رزونانس قطعی سیستم خواهد بود [12-14].

تحریک می تواند ناشی از عبور جریان سیال از پره های ساکن باشد که در این صورت فرکانس تحریک مضرب تعداد پره های ثابت و سرعت روتور است که به آن فرکانس گذر پره نیز اطلاق می شود. همچنین هارمونیک تفاضل تعداد پره های ثابت ردیف های جلوتر یا عقب تر نیز ممکن است تحریک ایجاد کند [15]. در توربین های بخار عمدتاً مودهای قطر ساکن ۲ تا ۶ در بررسی احتمال رزونانس های ارتعاشی مهم هستند [13]. وجود میستیونینگ در جرم، سختی و میرایی می تواند موجب افزایش ارتعاشات و تمرکز آن در یک یا چند پره و بروز خستگی سیکل بالا و خرابی شود. مطالعات متعددی در زمینه مدل سازی و پیش بینی پاسخ سیستم در این شرایط وجود دارد [16-18]. یکی از مشکلات بررسی میستیونینگ در سیستم، از بین رفتن تقارن سیکلی سکتورهای دیسک- پره است و معمولاً نیاز به مدل سازی کل سیستم با تعداد درجه آزادی زیاد است. از این رو روش های مختلفی برای کاهش تعداد درجات آزادی و استخراج مدل های کاهش مرتبه یافته، ارائه شده است [18-20].

بررسی تداخل دینامیک دیسک و پره با استفاده از مدل های پاندولی [21] و مدل پیوسته تیر [22, 23] انجام شده است. مطالعه با مدل ساده پاندولی، نشان می دهد که میرایی پره ها اثری روی ناپایداری سیستم ندارد. بررسی با مدل پیوسته نیز نشان داد که میزان اثر ناپایداری روتور در سرعت های فوق بحرانی به قدرت کوپلینگ بین پره و رتور بستگی دارد [23]. در پره های بلند با فرکانس نزدیک به رتور امکان تداخل قوی دینامیک پره با رتور وجود خواهد داشت [22].

در سیستم های دیسک- پره تیون، به واسطه خاصیت پررودیک بودن سازه، تحلیل فرکانسی و مطالعه موج های ارتعاشی به تعداد معادلات و درجات آزادی کمتر منجر خواهد شد و با تبدیلات مودال صورت گرفته به تحلیل دینامیک یک سکتور منجر می شود [6, 24, 25]. که کاهش قابل توجهی در حجم محاسبات خواهد داشت. هر سکتور معمولاً شامل یک یا چند پره و برشی از دیسک است. به واسطه درجات آزادی زیاد حتی در یک سکتور معمولاً امکان آنالیز تحلیلی آن به سادگی میسر نمی شود و اغلب از مدل های کاهش مرتبه یافته، با تعداد درجات آزادی محدود و مدل های پاندول و فنری در محدوده فرکانسی مورد مطالعه استفاده می شود [16, 26].

در مواردی که تعداد پره زیاد است، میرا کردن ارتعاشات پره از طریق تعداد محدودی جاذب نصب شده روی دیسک می تواند راهکار مناسبی باشد و همچنین استفاده از جاذب مکانیکی محدودیت تجهیزاتی دیگر همچون پیزوالکتریک ها را ندارد. از این رو در این مقاله، ارتعاشات اجباری دیسک- پره دوار با تقارن سیکلی مورد بررسی قرار خواهد گرفت و دیاگرام فرکانسی آن تحلیل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} [M_{D1}] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [M_{DN}] \\ [K_{D1}] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [K_{DN}] \end{bmatrix} \ddot{u} + ([E]^T Y [I]) \sum_1^N (e_i Y f) u = \quad (7)$$

$$[\tilde{M}_D] \ddot{u} + [\tilde{K}_D] u = \sum_1^N ([E]^T Y [I]) (e_i Y f) = \quad (8)$$

$[\tilde{M}_D]$  و  $[\tilde{K}_D]$  ماتریس‌های قطری هستند و  $e_i$  ستون  $i$ ام ماتریس فوریه یا همان بردار مودال شکل مود سکتورها در مود قطری - 1) ام است. با تبدیل مودال صورت گرفته، معادلات سیستم دی کوپل شده‌اند. با توجه به اینکه  $e_i^* e_i = \begin{cases} 0; & i \neq k \\ 1; & i = k \end{cases}$ ، چنانچه نیروی تحریک در مود قطری مشخصی وارد شود، سمت راست معادله ۸، نیروی تعمیم‌یافته‌ای خواهد بود که تمام مولفه‌های آن جز مولفه مودال مود قطری متناظر صفر خواهد بود و این به این معنی است که هارمونیک  $k$ ام نیرویی، تنها مود مودال  $u_k$  را می‌تواند تحریک کند و پاسخ نیرویی سایر مودها صفر است و  $u = \{0, \dots, 0, u_k, 0, \dots, 0\}$  و حل سیستم ۸ به حل سیستم کوچک‌تری تبدیل خواهد شد. پاسخ سکتور مرجع ( $i = 1$ ) و سکتور  $i$ ام سیستم در فضای فیزیکی از رابطه ۵ به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}^T = \{u_k, e^{i\sigma_k} u_k, e^{2i\sigma_k} u_k, \dots, e^{i(N-1)\sigma_k} u_k\}^T \quad (9)$$

معادله ۹ نشان می‌دهد که وقتی شکل تحریک مشخصی (در مود قطری خاصی) به سیستم وارد شود دامنه پاسخ تمام سکتورها یکسان خواهد بود و فقط به اندازه زاویه فاز بین پره‌ای در مود قطری  $k$ ام ( $\sigma_k$ )، بین پاسخ سکتورهای مجاور اختلاف فاز وجود خواهد داشت. از این رو به جای تحلیل پاسخ فرکانسی کل سیستم، فقط کافی است پاسخ یکی از سکتورها به تحریک مشخص شود تا پاسخ سایر سکتورها نیز از روی آن به دست آید. این خاصیت سیستم‌های متقارن سیکی است. فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد سیستم طی تبدیل مودال سیستم ثابت می‌ماند [8] یا [4] و برای سیستم ۲ یا ۸، محاسبه فرکانس‌های طبیعی یک سکتور به جای کل سیستم کافی است.

سیستم کاهش مرتبه یافته با دو درجه آزادی، در هر سکتور که یکی مربوط به پره و دیگری مربوط به دیسک است (شکل ۱) در این مطالعه استفاده می‌شود. در این مدل کوپلینگ سکتورها به یکدیگر از طریق درجه آزادی دیسک و با سختی  $k_c$  است. بسته به نوع و دقت مورد نظر برای تحلیل، سیستم‌های با درجات آزادی بالاتر و کوپلینگ‌های پیچیده‌تر می‌تواند مورد استفاده واقع شود. اما برای این مطالعه، مدل ذکر شده در بالا کفایت می‌کند.

مختصات فیزیکی سکتور  $i$ ام با آرایه  $U_i = \{U_{i,b}, U_{i,d}\}^T$  قابل توصیف است. طبق بررسی فوق که اگر فرض شود که تحریک در  $k$ امین هارمونیک مودال وارد می‌شود، سیستم در  $k$ امین مود مودال خود ( $k - 1$ امین قطر ساکن) ارتعاش خواهد کرد و بنابراین دامنه پاسخ سیستم در فضای فیزیکی با دامنه مودال مود تحت تحریک

که  $N$  تعداد سکتورهای دیسک- پره است. معادله کل سیستم با لحاظ تمام درجات آزادی به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} [M_1] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [M_N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \vdots \\ \ddot{U}_i \\ \vdots \\ \ddot{U}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 \\ 0 & -[K_c] & & & 0 \\ 0 & -[K_c] & [K] + 2[K_c] & & -[K_c] \\ 0 & & -[K_c] & [K] + 2[K_c] & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ \vdots \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (3)$$

یا

$$[\tilde{M}] \ddot{U} + [\tilde{K}] U = f \quad (4)$$

که در آن  $[\tilde{M}]$  و  $[\tilde{K}]$  ماتریس‌های جرم و سختی کل دیسک- پره است. معادله ۴ نشان می‌دهد که ماتریس جرم به فرم بلوکه‌ای قطری است و هر دو ماتریس، ماتریس بلوکه‌ای سیرکولانت (Block Circulant; BC) هستند. هنگامی یک ماتریس سیرکولانت است که هر ردیف آن با یک ستون شیفت آرایه‌های ردیف قبلی به سمت راست ساخته شده باشد. اگر هر آرایه، خود یک ماتریس باشد به آن ماتریس BC گفته می‌شود.

در تعدادی از مطالعات صورت گرفته [16, 27, 28] که از تقارن سیکی استفاده کرده‌اند، نشان داده شده است که فرکانس‌های طبیعی سیستم دیسک- پره و پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک نوسانی، تنها با مطالعه یک سکتور به جای کل سیستم می‌تواند به دست آید. برای حل معادلات دینامیکی سیستم متقارن سیکی تبدیلی از مختصات فیزیکی به مختصات مودال صورت می‌گیرد که به فرم زیر است:

$$U = ([E] Y [I]) u \quad (5)$$

که در آن  $[E]$  و  $[I]$  به ترتیب، ماتریس فوریه و همانی هستند و  $Y$  ضرب کرونیگر است که در پیوست، برخی خواص آن آرایه شده است. ماتریس فوریه یک ماتریس  $N \times N$  است و حاوی بردارهای ویژه ماتریس‌های سیرکولانت است و می‌تواند آنها را قطری نماید و به صورت زیر است:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\sigma_2} & e^{i\sigma_3} & \dots & e^{i\sigma_{N-1}} & -1 \\ 1 & e^{i2\sigma_2} & e^{i2\sigma_3} & \dots & e^{i2\sigma_{N-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{i(N-1)\sigma_2} & e^{i(N-1)\sigma_3} & \dots & e^{i2\sigma_{N-1}} & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

که در آن  $\sigma_k = 2\pi(k - 1)/N$  زاویه فاز بین پره‌ای (Interblade Phase Angle) در مود مودال  $k$ ام یا اختلاف فاز بین دامنه حرکت پره‌های مجاور هم در قطر ساکن  $k - 1$ ام است. با قراردادن تبدیل ۵ در ۴ و ضرب معادلات در ترانهاده ماتریس فوریه و همچنین بسط نیرو بر حسب مودهای متعامد بردارهای ویژه ماتریس  $[E]$ ، معادلات سیستم به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

که در آن  $c_a$  میرایی ویسکوز و  $k_a$  سختی جاذب متصل به دیسک است. با بردن معادلات به فرم ماتریسی، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$[M]\ddot{u}_k + [C]\dot{u}_k + [K]u_k = f$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_a \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_b & 0 & 0 \\ 0 & c_a & -c_a \\ 0 & -c_a & c_a \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} k_b & -k_b & 0 \\ -k_b & k_2 & -k_a \\ 0 & -k_a & k_a \end{bmatrix}$$

$$k_2 = k_b + k_d + k_a + 2k_c(1 - \cos \sigma_k) \quad (15)$$

که در آن  $u_k = [u_{k,b}, u_{k,d}, u_{k,a}]^T$  و  $f = [f_b, 0, 0]^T$  است. با فرض اعمال تحریک هارمونیک به پره  $f = f_0 e^{i\omega t}$ ، پاسخ سیستم نیز هارمونیک خواهد بود و  $u_k = \tilde{u}_0 e^{i\omega t}$  که  $\tilde{u}_0 = u_0 e^{i\phi_0}$  نوسان پره، دیسک و جاذب خواهد بود و  $\phi_0$  اختلاف فاز حرکتی درجات آزادی با تحریک است. معادله ۱۵ به صورت زیر در می‌آید.

$$[Z(\omega)]\tilde{u}_0 = f_0 \quad (16)$$

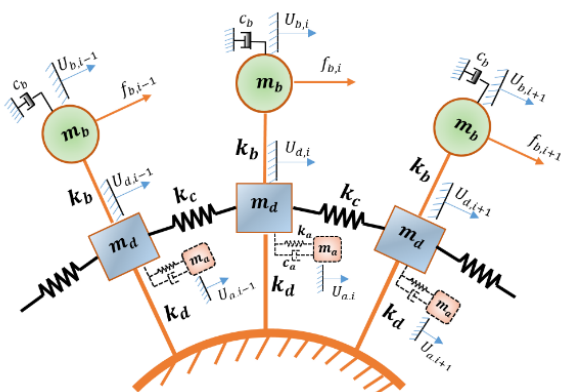
که در آن  $[Z(\omega)] = [K] + i\omega[C] - \omega^2[M]$ ، ماتریس سختی دینامیکی سیستم است که به صورت زیر است:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} k_b + i\omega c_b - \omega^2 m_b & -k_b & 0 \\ -k_b & k_2 + i\omega c_a - \omega^2 m_d & -k_a - i\omega c_a \\ 0 & -k_a - i\omega c_a & k_a + i\omega c_a - \omega^2 m_a \end{bmatrix} \quad (17)$$

دامنه مختلط درجات آزادی با استفاده از معادله ۱۶ به صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{u}_0 = [Z(\omega)]^{-1} f_0 \quad (18)$$

برای در نظر گرفتن میرایی سازه‌ای یا هیستریزس در معادلات دینامیکی سیستم، کافی است سختی دیسک و پره به ترتیب با  $k_b(1 + i\gamma_b)$  و  $k_d(1 + i\gamma_d)$  جایگزین شوند که در آن  $\gamma_b$  و  $\gamma_d$  ضریب میرایی سازه‌ای دیسک و پره است.



شکل ۱ مدل کاهش مرتبه یافته دیسک پره با دو درجه آزادی در هر سکتور (خطوط توپر) و جاذب ارتعاشی نصب شده (خط چین)

### ۳- مطالعه موردی

یک دیسک- پره با ۲۵۹ پره که شامل ۳۷ مجموعه ۷ پره‌ای است در این بخش مطالعه خواهد شد. پره‌های هر مجموعه توسط شردا نوک پره به هم متصل هستند. پره‌ها به طول ۲۵۰ میلی‌متر، از جنس فولاد

یکسان خواهد بود و تبدیل  $\omega$  به تبدیل مودال ساده  $U_i = u_k$  یا  $\{U_{i,b}, U_{i,d}\}^T = \{u_{k,b}, u_{k,d}\}^T$  در این صورت پاسخ سکتورهای مجاور  $U_{i-1} = U_i e^{i\sigma_k}$  و  $U_{i+1} = U_i e^{-i\sigma_k}$  خواهد بود و معادله حرکت ارتعاشی سیستم ۲ به صورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$\begin{bmatrix} m_b & \cdot \\ \cdot & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{k,b} \\ \ddot{u}_{k,d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b + k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{k,b} \\ u_{k,d} \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{k,b} \\ \dot{u}_{k,d} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{k,b} \\ u_{k,d} \end{Bmatrix} e^{-j\sigma_k} - \begin{bmatrix} f_b \\ f_d \end{Bmatrix} e^{j\sigma_k} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{k,b} \\ \dot{u}_{k,d} \end{Bmatrix} e^{j\sigma_k} = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_d \end{Bmatrix} \quad (19)$$

که در آن  $m_b$  و  $m_d$  به ترتیب جرم پره و دیسک،  $k_b$  و  $k_d$  و  $k_c$  به ترتیب سختی پره، سختی دیسک و سختی کوپلینگ بین سکتورها است. با فرض حرکت هارمونیک برای ارتعاشات آزاد نامیرای سیستم، معادله مشخصه سیستم به فرم زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} k_b - m_b \omega^2 & -k_b \\ -k_b & k_b + k_d + 2k_c(1 - \cos(\sigma_k)) - m_d \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{k,b} \\ u_{k,d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$m_d \omega^4 - \left( \frac{m_d}{m_b} k_b + k_b + k_d + 2k_c(1 - \cos(\sigma_k)) \right) \omega^2 + \frac{k_b}{m_b} (k_d + 2k_c(1 - \cos(\sigma_k))) = 0 \quad (12)$$

ریشه‌های معادله ۱۲، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی است که به واسطه عبارت کسینوسی  $\cos(\sigma_k) = \cos(\sigma_{N+2-k})$  به صورت جفت موج‌های رونده (TW) با اندازه یکسان ولی در جهت مخالف هم در سیستم دیسک- پره ظاهر می‌شوند. البته به ازای  $k = 1$  و  $k = \frac{N+2}{2}$  (اگر N زوج باشد)، این موج منفرد خواهد بود و به صورت جفت ظاهر نخواهد شد. برای این دو مورد اخیر موج‌های ایستا در سیستم شکل می‌گیرد. معادله ۱۱ نشان می‌دهد که برای سیستم دو درجه آزادی فوق با افزایش تعداد قطره‌های ساکن سیستم، فرکانس‌های طبیعی افزایش خواهند یافت که ناشی از بالا بودن سختی دیسک در مدهای قطری بالاتر است.

برای بررسی پاسخ اجباری سیستم، اگر مطابق شکل ۱ فرض شود که نیروی تحریک تنها به پره وارد می‌شود، معادلات سیستم ۱۰ با در نظر گرفتن میرایی به فرم زیر در می‌آید.

$$m_b \ddot{u}_{k,b} + c_b \dot{u}_{k,b} + k_b u_{k,b} - k_b u_{k,d} = f_b \quad (13)$$

$$m_d \ddot{u}_{k,d} + (k_b + k_d + 2k_c(1 - \cos(\sigma_k))) u_{k,d} - k_b u_{k,b} = 0$$

که در آن  $c_b$  میرایی آئرو دینامیک وارد بر پره است. با افزودن جاذب خطی انرژی به دیسک به صورتی که در شکل ۱ نشان داده شده است، معادلات حرکت به فرم زیر در خواهد آمد.

$$m_b \ddot{u}_{k,b} + c_b \dot{u}_{k,b} + k_b (u_{k,b} - u_{k,d}) = f_b$$

$$m_d \ddot{u}_{k,d} + c_a (\dot{u}_d - \dot{u}_a) + (k_b + k_d + k_a + 2k_c(1 - \cos(\sigma_k))) u_{k,d} - k_b u_{k,b} - k_a u_a = 0$$

$$m_a \ddot{u}_a + c_a (\dot{u}_a - \dot{u}_d) + k_a (u_a - u_d) = 0 \quad (14)$$

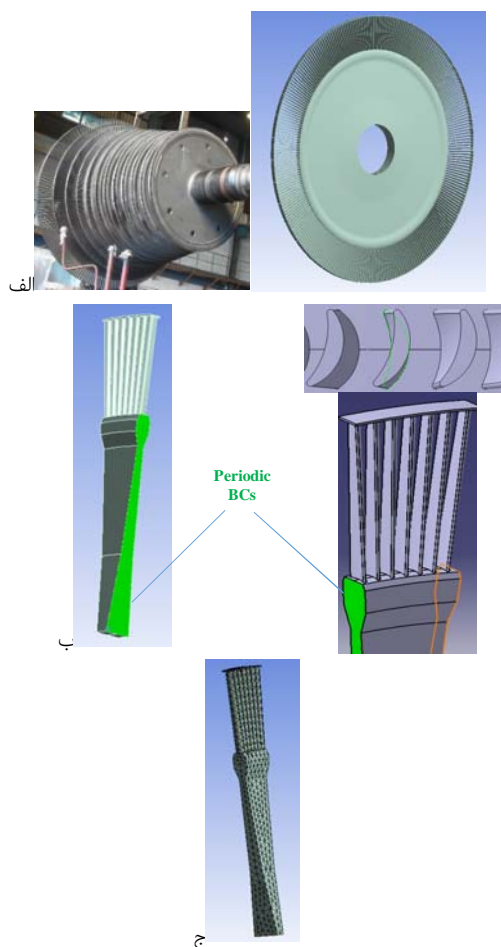
دیاگرام فرکانسی این دیسک-پره در نمودار ۱ نشان داده شده است. فرکانس‌های طبیعی سیستم نسبت به فرکانس طبیعی خمش پره تنها  $\omega_b = \sqrt{\frac{k_b}{m_b}}$  بی‌بعد شده‌اند که برای مدل دیسک-پره نمونه برابر  $\frac{1128}{4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  یا  $179/6 \text{ Hz}$  است. با توجه به مدل ۳۷ سکتوری، حداکثر  $(37-1)/2 = 16$  قطر ساکن می‌تواند در دیسک ایجاد شود. سیستم دارای تقارن سیکی است. این تقارن در سطح سکتورها است و در نظر گرفتن تعداد سکتورها به اندازه تعداد پره‌ها به گونه‌ای است که هر سکتور شامل یک پره باشد. تقارن سیکی مورد نظر، تحلیل سیستم‌های متقارن سیکی در شرایط مرزی را ارضاء نمی‌کند، زیرا مجموعه‌ها به هم متصل نیستند و اتصال سکتورها از طریق دیسک است.

هر یک از منحنی‌های نشان‌داده‌شده در دیاگرام فرکانسی، یک خانواده از مدهای طبیعی سیستم را مشخص می‌کند. در تعداد قطر ساکن کم، چهار مود اول سیستم به ترتیب، مود اول خمشی بیرون صفحه دیسک (OBending1)، مود اول خمش داخل صفحه پره‌ها (IBending)، مود دوم خمش بیرون صفحه دیسک (OBending2) و پیچش محلی پره‌ها حول محور شعاعی خود (Torsion) است. تعدادی مود محلی در فرکانس‌های بالاتر نیز وجود دارند که به صورت خانواده‌های همسایه هم در نمودار ۱ نشان داده شده‌اند. مدهای ۴ الی ۱۰ در قطرهای ساکن خاصی از این خانواده جدا می‌شوند. مدهای با فرکانس پایین، محلی نیستند. بنابراین امکان صرف‌نظر از حرکت موضعی پره در این مدها وجود دارد و می‌توان یک مدل معادل برای هر سکتور فرض نمود. بنابراین در محدوده فرکانس‌های پایین که مورد نظر این مطالعه است، یک سکتور با یک مدل کاهش مرتبه یافته، مدل‌سازی می‌شود.

شکل مدهای دو مود اول و همچنین تعدادی از مدهای محلی قطر ساکن سوم دیسک-پره در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل مدهای هر دسته و توزیع انرژی کرنشی در آن، مدها به سه دسته دیسک-غالب، پره-غالب یا ترکیبی تقسیم شده‌اند. فرکانس مود دیسک غالب (OBending) که عموماً ارتعاش بیرون صفحه دیسک را شامل می‌شود، با افزایش زاویه فاز بین پره‌ای یا قطرهای ساکن دیسک به سرعت افزایش می‌یابند. مود پره غالب که عموماً ارتعاش داخل صفحه (IBending)، پیچش پره (Torsion) و مدهای محلی (Local Modes) را شامل می‌شوند، تاثیر چندانی از قطرهای ساکن نمی‌گیرد و در نمودار ۱ نشان داده شده‌اند.

در هر خانواده از مدها، معمولاً مود دیسک-غالب در یک قطر ساکن، کوپلینگ قوی با یک مود پره-غالب دارد. انتقال انرژی زیادی بین دو مود در این ناحیه اتفاق می‌افتد و ناحیه Veering فرکانسی نامیده می‌شود. شکل مود مجموعه دیسک-پره در این حالت پیچیده است. با توجه به شرحی که در قبل آمده است، امکان مدل‌سازی ارتعاشات دیسک-پره در قطرهای ساکن و مدهای فرکانسی پایین با مدل کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی، امکان‌پذیر است که برای حل تحلیلی به‌ویژه برای دیسک-پره با مجموعه پره‌های متصل به

و هر یک به وزن ۲۸۰ گرم دارای پیچ‌خوردگی حدود ۱۵ درجه حول محور شعاعی گذشته از مرکز پره و مرکز دیسک هستند. این دیسک-پره، مرحله یازدهم یک توربین بخار دوازده مرحله‌ای ۳۰ مگاواتی است و بعد از ردیف آخر، بیشترین قطر بیرونی دیسک-پره را دارد و در شکل ۲-الف، مدل هندسی آن نشان داده شده است. در شکل ۲-ب، مدل قطاع پریودیک ۳ بعدی آن که شامل یک مجموعه ۷ پره‌ای است، نشان داده شده است. هر سکتور شامل یک قطاع از دیسک و یک مجموعه ۷ پره‌ای از ردیف دیسک پره است که در شراد بهم متصل هستند. مجموعه‌های کنار هم، به هم متصل نیستند و اتصال سکتورهای مجاور تنها از طریق دیسک است. این قطاع کوچک‌ترین مدل پریودیک قابل استخراج برای سیستم دیسک-پره است. مش‌بندی سازه‌ای این قطاع در شکل ۲-ج، ارایه شده است که از ۴۵۹۹ المان حجمی سازه‌ای و ۸۹۶۶ گره تشکیل شده است. به منظور تحلیل مودال سیستم، نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران با سرعت دورانی ۳۰۰۰ دور در دقیقه به مدل المان محدود اعمال شده است. تحلیل ارتعاشات آزاد این دیسک-پره به روش المان محدود با فرض تقارن سیکی حول محور مرکزی دیسک و اعمال پیش‌تنش ناشی از دوران انجام شده است.



شکل ۲) ردیف متحرک توربین بخار نمونه (الف)؛ یک سکتور از دیسک-پره (شامل یک مجموعه پره پیچ‌خورده متصل به هم و یک قطاع از دیسک) با شرایط مرزی پریودیک (ب)؛ مدل المان محدود سکتور مش‌بندی‌شده با المان‌های حجمی (ج)

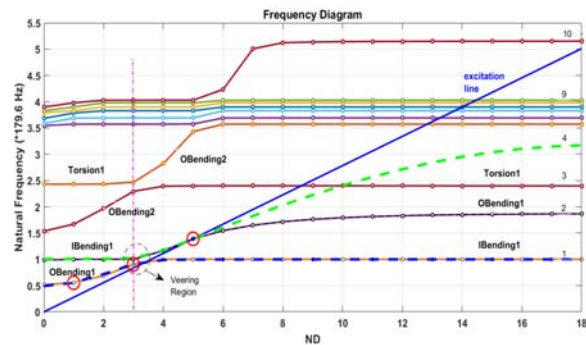
می‌شوند که در نمودار ۱ نیز با دایره‌هایی مشخص شده‌اند. پارامترهای مدل کاهش مرتبه یافته در جدول ۱ ارایه شده است و میزان انطباق آن با نتایج المان محدود در نمودار ۱ (خطوط خط چین) نشان می‌دهد که این مدل، می‌تواند رفتار فرکانسی سیستم در این محدوده فرکانس و قطر ساکن را به خوبی مدل نماید.

جدول ۱) پارامترهای مدل کاهش مرتبه یافته ۲ درجه آزادی

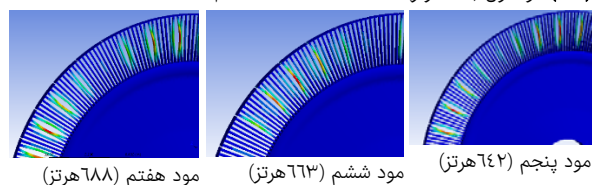
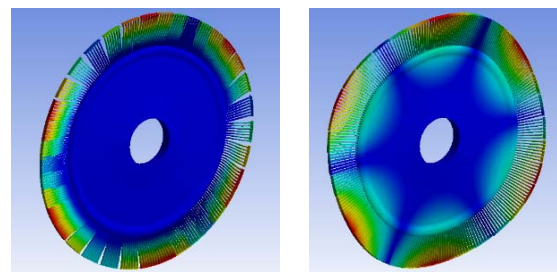
$140/2 \times 10^6 \text{ N/m}$	$k_b$
$39/991 \times 10^6 \text{ N/m}$	$k_c$
$3/971 \times 10^6 \text{ N/m}$	$k_d$
$12/789 \text{ Kg}$	$m_d$
$0/11 \text{ Kg}$	$m_b$
$179/6 \text{ Hz}$	$f_b = \frac{\omega_b}{2\pi}$
$285/19$	$\kappa_c = \frac{k_c}{k_b}$
$28/32$	$\kappa_d = \frac{k_d}{k_h}$
$116/26$	$\bar{m} = \frac{m_d}{m_b}$

از مهم‌ترین تحریک‌های وارد بر توربوماشین‌های دوار، مرتبه تحریک موتوری (EO) است که به واسطه عبور جریان گاز یا بخار از پره‌های ساکن و برخورد آن به پره‌های متحرک ایجاد می‌شود. EO برابر با فرکانس عبور از مقابل پره‌های ثابت و همچنین دو برابر آن، در محدوده سرعت کارکردی توربین نباید اتفاق بیفتند. همچنین یکی از منابع تحریک در توربین‌های بخار، چهار هارمونیک اول سرعت توربین است [15]. مودهای با تعداد قطر ساکن بین ۲-۶ در توربین‌های بخار مهم هستند [13]. با توجه به نزدیکی خط EO هارمونیک اول سرعت (نمودار ۱) به ناحیه *Veering* مود اول و دوم، امکان رخداد رزونانس در این ناحیه به‌ویژه هنگام راه‌اندازی واحد زیاد است. از این رو ارتعاش پره در دو مود اول خود در قطر ساکن سوم و انتقال انرژی ارتعاشی پره به دیسک و جذب آن توسط جاذب انرژی نصب شده روی دیسک موضوعی است که در این مقاله بررسی خواهد شد. در این ناحیه دو مود دیسک- غالب و پره- غالب تداخل دارند و اثر جاذب نصب شده روی هر دو مود بررسی و ارایه خواهد شد.

هر سکتور شامل ۷ پره متصل به هم در ناحیه شراد است. تعدادی جاذب خطی روی قطاع دیسک نزدیک به محیط بیرونی نصب می‌شوند تا دامنه ارتعاش مجموعه پره‌ها از طریق کنترل ارتعاشات دیسک کاهش یابد و انرژی ارتعاشی دیسک- پره توسط میراگر جاذب تلف شود. بنابراین ۳۷ جاذب برای کل سیستم نصب خواهد شد. مکرانی و پرومونت [5] نشان دادند که برای کنترل ارتعاشات دیسک- پره توسط پیروالکترونیک، با نصب ۴ جاذب به ازای هر قطر ساکن، امکان جذب کامل انرژی در شرایط مختلف قرارگیری قطر ساکن و جاذب روی دیسک وجود خواهد داشت. در این مطالعه رفتار ارتعاشی سیستم در قطر ساکن سوم مورد تحلیل قرار خواهند گرفت، از این رو تعداد جاذب کافی برای جذب انرژی سیستم در شرایط مختلف، برابر با ۱۲ است و تعداد انتخاب شده بیشتر از حداقل تعداد مورد نیاز است. هر جاذب خطی شامل یک جرم کوچک (از



نمودار ۱) دیاگرام فرکانسی دیسک- پره توربین بخار با ۳۷ مجموعه و هر مجموعه شامل ۷ پره متصل به هم از ناحیه شراد نوک (خطوط توپر). مود خمشی بیرون صفحه دیسک (OBending)، مود خمشی داخل صفحه پره‌ها (IBending)، مود پیچش پره‌ها (Torsion) و دیاگرام فرکانسی مدل کاهش مرتبه یافته (خط چین)؛ نقاط انتخاب شده برای مدل کاهش مرتبه یافته (دایره‌های با لبه خط توپر).



شکل ۳) دو مود اول طبیعی سیستم دیسک- پره نمونه با ۳۷ مجموعه ۷ عددی از پره‌های متصل به هم از ناحیه شراد نوک، (الف) مود اول خارج صفحه دیسک، (ب) مود اول خمشی داخل صفحه پره و (ج) تعدادی از مودهای محلی سیستم در قطر ساکن سوم یا مود مودال چهارم سیستم ( $k=4$ ).

چنانچه قبلاً نیز اشاره شد، مدل کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی، با کوپلینگ فزنی ساده برای این مطالعه مناسب است. شماتیک مدل دو درجه آزادی که شامل یک درجه برای پره و یک درجه آزادی برای دیسک است در شکل ۱ نشان داده شده است. به منظور تخمین پارامترهای این مدل می‌توان از تناظر فرکانسی بین فرکانس‌های المان محدود و مدل کاهش مرتبه یافته، در قطرهای ساکن نزدیک نقاط مورد مطالعه استفاده کرد [16] و با قراردادن این نقاط در معادله ۱۲، پارامترهای مدل کاهش مرتبه یافته را می‌توان به دست آورد. برای تخمین این پارامترها، حداقل سه نقطه فرکانسی مورد نیاز است. برای دقت بالاتر، نقاط نزدیک ناحیه مورد مطالعه، اولویت بالاتری دارند و بنابراین مود قطر ساکن ۱ و ۳ از خانواده اول مودهای طبیعی و مود قطر ساکن ۵ از خانواده دوم مودهای طبیعی با فرکانس‌های به ترتیب برابر با ۱۰۰/۱، ۱۶۳/۳ و ۲۴۹/۴ هرتز انتخاب

$$\frac{\omega_a}{\omega_{3,1}} = \frac{1}{1+m_a/m_d} \Rightarrow k_a = m_a \left( \frac{\omega_{3,1}}{1+m_a/m_d} \right)^2 \quad (19)$$

$$\zeta_a = \left( \frac{3\epsilon}{2(1+\epsilon)} \right)^2 \Rightarrow c_a = 2\zeta_a m_a \omega_a$$

که در آن  $\omega_a$ ،  $c_a$  و  $\zeta_a$  به ترتیب، فرکانس طبیعی ( $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ )، ضریب میرایی و نسبت میرایی بهینه جاذب هستند. در این حالت طبق روابط دن هارتوگ و خواص آن، دامنه دو پیک ارتعاشی ایجادشده در دو طرف رزونانس، یکسان خواهد شد و در غیر این صورت یکی از پیکها مقدار بزرگی خواهد داشت که از نظر کاهش دامنه ارتعاشی نامناسب خواهد بود. برای سیستم مورد مطالعه (جدول ۲)، چنانچه جاذب خطی نسبت به مود اول طبیعی سیستم در قطر ساکن سوم ( $ND=3$ ) یا مود مودال سوم ( $k=4$ ) با فرکانس طبیعی  $\frac{1021}{6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  طبق روابط دن هارتوگ تنظیم شود، مقدار  $\zeta_a$  برابر با  $0.209$  یا  $c_a$  برابر  $159/8 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$ ، سختی جاذب برابر  $3/807 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  و  $\omega_a$  برابر  $995/7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  بر اساس این روابط به دست می‌آید که مقادیر مناسبی به نظر می‌رسند. پاسخ فرکانسی سیستم با جاذب تنظیم‌شده با مقادیر دن هارتوگ برای مود اول در نمودار ۲ نشان داده شده است که نشان می‌دهد که جاذب توانسته است دامنه مود اول در نقطه رزونانس را تا  $56\%$  و مود دوم را تا  $14\%$  کاهش دهد. از دلایل اصلی کاهش دامنه ارتعاش داخل صفحه پره در رزونانس دوم، کوپلینگ قوی بین مود اول و دوم در قطر ساکن سوم است که در ناحیه **Veering** فرکانسی قرار گرفته‌اند و انرژی ارتعاشی خمش داخل صفحه پره به خمش بیرون صفحه دیسک و پره منتقل و توسط جاذب، جذب و تلف می‌شود.

با تنظیم مجدد جاذب نسبت به مود دوم با فرکانس  $\frac{1129}{9} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، پارامترهای جاذب با استفاده از روابط معادله ۱۹ به صورت  $\zeta_a$  برابر  $0.208$  یا  $c_a$  برابر  $180/1 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$ ، سختی  $4/837 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  و  $\omega_a$  برابر  $1122/3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  به دست می‌آیند. همچنین در نمودار ۲، پاسخ فرکانسی سیستم با جاذب تنظیم‌شده با مقادیر دن هارتوگ برای مود دوم نیز نشان داده می‌شود. مشاهده می‌شود که تاثیر جاذب موجب کاهش دامنه رزونانس مود اول تا  $53\%$  و مود دوم تا  $13/7\%$  می‌شود. همچنین با تنظیم جاذب برای مود دوم، برخلاف انتظار، کاهش دامنه چندانی در مود دوم اتفاق نیفتاده است. همچنین در هر دو تنظیم ذکرشده، پیک دومی ایجاد نشده است و در واقع انتظار سه پیک در این ناحیه بر اساس روابط دن هارتوگ وجود داشت که رخ نداده است.

موارد ذکرشده ریشه در این موضوع دارد که روابط دن هارتوگ برای سیستم اصلی یک درجه آزادی است و در اینجا سیستم اصلی دو درجه آزادی است. وجود کوپلینگ بین مودها و جذب انرژی غیرمستقیم ارتعاش پره نیز مساله را پیچیده‌تر می‌کند. بنابراین در این تحقیق، پارامترهای جاذب‌های دن هارتوگ مود اول و دوم با اینکه تا حدی توانستند در جذب ارتعاشات موثر باشند، به‌عنوان یک

مرتبه  $\epsilon$ ، یک فنر و یک میراگر خطی است. به‌منظور افزایش بازدهی و عملکرد جاذب خطی، لازم است پارامترهای این جاذب با توجه به دینامیک و مشخصات مکانیکی سیستم تنظیم شود. بهینه‌سازی جاذب برای عملکرد مناسب برای محدوده مورد مطالعه در ادامه ارایه خواهد شد.

### ۳-۱- تحلیل عملکرد جاذب خطی انرژی

پارامترهای سیستم دیسک- پره مجهز به چاه غیرخطی در جدول ۲ و پارامترهای مدل کاهش مرتبه یافته در جدول ۱ ارایه شده است. جرم جاذب طبق تعریف استاندارد موجود در ادبیات فن، کوچک فرض شده است و نسبت جرمی آن به جرم قطاع دیسک ( $\epsilon$ ) برابر  $0.3\%$  فرض می‌شود. میرایی آئرودینامیک  $c_b$  برابر با  $10 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$  (نسبت میرایی ( $\zeta_b$ ) برابر با  $0.04$ ) و میرایی سازه‌ای ( $\gamma$ ) برای دیسک و پره برابر  $0.1$  در نظر گرفته شده‌اند. اندازه نیروی تحریک ( $f_b$ ) از طریق تخمین میانگین اختلاف فشار واقعی وارد بر پره‌های متصل به هم محاسبه و برابر با  $360N$  تعیین شده است.

جدول ۲) پارامترهای سیستم دیسک- پره و جاذب خطی انرژی

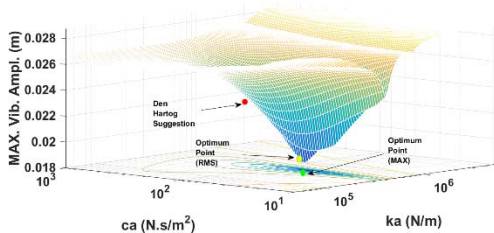
پارامتر	مقدار	واحد	توضیح
$\omega_{3,1}$	۱۰۲۱/۶	rad/s	فرکانس مود اول از خانواده مودهای طبیعی سیستم در مود مودال چهارم (یا قطر ساکن سوم)
$\omega_{3,2}$	۱۱۲۹/۹	rad/s	فرکانس مود دوم از خانواده مودهای طبیعی سیستم در مود مودال چهارم (یا قطر ساکن سوم)
$c_b$	۱۰	N.s/m	میرایی آئرودینامیک پره
$m_a$	۰/۳۸۴	Kg	جرم جاذب
$f_b$	۳۶۰	N	نیروی تحریک خارجی وارد بر مجموعه پره‌های متصل به هم
$2R$	۱۳۹۵	mm	قطر دیسک
$\gamma_d, \gamma_b$	۰/۰۱	-	میرایی سازه‌ای پره و دیسک

معادله ۱۸، دامنه پاسخ سیستم شامل پره، دیسک و جاذب در فرکانس و تحریک مورد نظر را محاسبه می‌کند. پاسخ فرکانسی سیستم در نزدیکی مودهای اول و دوم سیستم در قطر ساکن سوم در نمودار ۲ (منحنی پاسخ بدون جاذب) نشان داده شده است. دو رزونانس سیستم نزدیک یکدیگرند و دامنه حرکت پره در رزونانس اول که دیسک- غالب است، مقدار بزرگی دارد. با به‌کارگیری جاذب خطی، ارتعاش سیستم در نزدیکی رزونانس تا حد زیادی کاهش می‌یابد، اما دو پیک دامنه در دو طرف رزونانس ایجاد خواهد شد که جزء خواص شناخته شده این تجهیزات است. در این سیستم، انرژی ارتعاشی پره به‌صورت غیرمستقیم از طریق دیسک توسط جاذب، جذب خواهد شد.

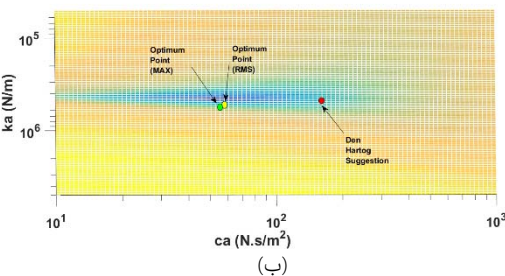
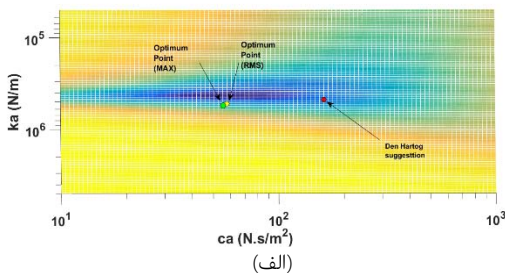
برای پارامترهای بهینه جاذب متصل به یک سیستم یک درجه آزادی اصلی، دن هارتوگ، روابطی را ارایه داده است که با پارامترهای سیستم حاضر به‌صورت زیر است [29]:



قرار دارند. از آنجا که علاوه بر جذر میانگین مربعات، حداکثر دامنه ارتعاش پره نیز می‌تواند پارامتر مهمی در طراحی جاذب برای سیستم باشد، منحنی تغییرات حداکثر دامنه ارتعاشی پره در بازه فرکانسی فوق بر حسب مقادیر سختی و میرایی در نمودار ۴ نشان داده شده است. سختی و  $C_a$  بهینه برای حداقل سازی پیک دامنه ارتعاش، برابر با به ترتیب  $4/462 \times 10^5 \frac{N}{m}$  و  $55/91 \frac{N.s}{m}$  به دست می‌آیند که نزدیک مقادیر به دست آمده برای بهینه سازی جذر میانگین مربعات دامنه ارتعاش است. مقادیر تنظیمی دن هارتوگ نیز در نمودار ۲ نشان داده شده‌اند که اختلاف قابل توجهی با مقدار بهینه از لحاظ کاهش دامنه ارتعاشی و مقادیر تنظیمی دارد. جاذب تنظیم شده به روش بهینه سازی، دارای میرایی حدود یک سوم و سختی  $1/15$  برابر مقادیر دن هارتوگ است. محدوده پارامترهای جاذب در دو معیار جذر میانگین مربعات و حداکثر دامنه ارتعاش پره در نمودار ۵ که در واقع ترسیم دوبعدی نمودارهای ۳ و ۴ است، نشان می‌دهد که مقادیر دن هارتوگ خارج از تنظیم هستند و همچنین حساسیت تنظیم با معیار حداکثر دامنه ارتعاش بالاتر از جذر میانگین مربعات است.



نمودار ۴) تغییرات حداکثر دامنه ارتعاش پره به ازای مقادیر مختلف سختی و میرایی جاذب. نقاط: بهینه بر اساس جذر میانگین مربعات، حداکثر دامنه ارتعاش، معیار دن هارتوگ- مود اول (۱) و مود دوم (۲)



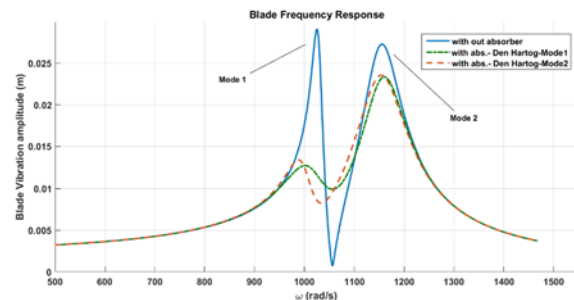
نمودار ۵) نمودار گرافیکی تغییرات جذر میانگین مربعات ارتعاشات پره (الف) و حداکثر دامنه ارتعاش پره (ب) بر حسب مقادیر مختلف سختی و میرایی جاذب؛ نقاط: بهینه بر اساس جذر میانگین مربعات، حداکثر دامنه ارتعاش، معیار دن هارتوگ- مود اول (۱) و مود دوم (۲).

راهنما از محدوده مناسب پارامترهای جاذب در مرحله بعدی بهینه سازی استفاده می‌شود.

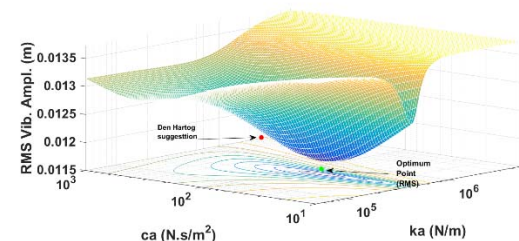
### ۳-۲- بهینه سازی پارامترهای جاذب خطی

همان طور که پیش تر نیز گفته شد، لازم است پارامترهای جاذب خطی تنظیم شوند. از این رو میرایی و سختی فنر جاذب در یک محدوده تغییر داده می‌شود و پس از ترسیم منحنی سه بعدی تغییرات حداکثر و جذر میانگین مربعات پاسخ فرکانسی ارتعاشات پره در محدوده قطر ساکن سوم مودهای اول و دوم طبیعی سیستم، پارامترهای بهینه جاذب تعیین خواهد شد.

بهینه سازی پارامترهای جاذب برای کاهش ارتعاشات سیستم در محدوده فرکانس تحریک بین  $800-1400 \frac{rad}{s}$  صورت می‌گیرد که دو مود مورد نظر در این ناحیه قرار دارد (نمودار ۲). بازه سختی و میرایی حول مقدار اولیه به دست آمده از روابط دن هارتوگ (رابطه ۱۹) انتخاب می‌شود، لذا بازه سختی جاذب  $5 \times 10^4 - 5 \times 10^5 \frac{N}{m}$  و  $C_a$ ،  $10-1000$  انتخاب می‌شود. پاسخ سیستم به ازای هر یک از مقادیر پارامترهای جاذب با استفاده از معادله ۱۸ به دست می‌آید و منحنی تغییرات جذر میانگین مربعات دامنه ارتعاش پره در بازه فرکانسی فوق در نمودار ۳ نشان داده شده است. سختی و  $C_a$  بهینه بر اساس حداقل جذر میانگین مربعات دامنه ارتعاش برابر با به ترتیب  $4/259 \times 10^5 \frac{N}{m}$  و  $58/57 \frac{N.s}{m}$  به دست می‌آیند.



نمودار ۲) نمودار پاسخ فرکانسی پره، سیستم بدون جاذب (منحنی توپر)، سیستم با جاذب بهینه برای مود اول (خط نقطه) و مود دوم (خط چین) بر اساس روابط دن هارتوگ



نمودار ۳) تغییرات جذر میانگین مربعات دامنه ارتعاش پره به ازای مقادیر مختلف سختی و میرایی جاذب. نقاط: بهینه بر اساس جذر میانگین مربعات، حداکثر دامنه ارتعاش، معیار دن هارتوگ- مود اول (۱) و مود دوم (۲).

در نمودار ۳، مقادیر تنظیمی دن هارتوگ مربوط به مود اول و مود دوم نیز نشان می‌دهد که اختلاف قابل توجهی بین مقادیر تنظیم شده با دن هارتوگ و مقدار بهینه وجود دارد، اما در یک مرتبه

- به واسطه تقارن سیکلی، مطالعه رفتار ارتعاشی کل سیستم، تنها با مطالعه رفتار ارتعاشی یک سکتور می‌تواند انجام شود و به جای مطالعه دینامیک کل سیستم با تعداد درجات آزاد زیاد، تنها نیاز به مطالعه دینامیک یک سکتور با تعداد محدودی از درجات آزادی است که این امر منطبق بر ادبیات فن موضوع نیز است.

- در نواحی مورد مطالعه که مودهای اول و دوم از خانواده مودهای طبیعی در تعداد قطر ساکن کم است، امکان شبیه‌سازی سیستم دارای پره‌های متصل به هم با مدل کاهش مرتبه یافته و مطالعه رفتار ارتعاشی سیستم با جاذب خطی انرژی متصل به آن وجود دارد. به‌ویژه در قطر ساکن سوم که این دو مود تداخل فرکانسی دارند و نزدیک خط EO سیستم قرار دارند و امکان وقوع دامنه‌های بزرگ ارتعاش در آن وجود دارد.

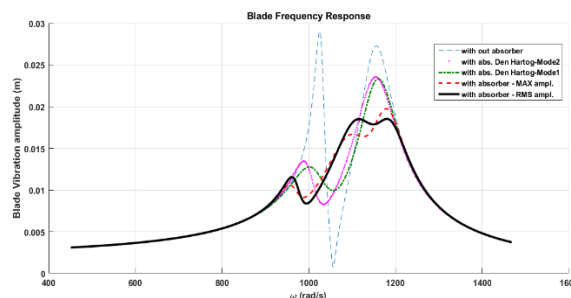
- با استفاده از روابط دن هارتوگ جاذب‌های بهینه برای مود اول و دوم در قطر ساکن سوم تعیین شد که تا حد مناسبی توانستند ارتعاشات سیستم را در محدوده مورد مطالعه کاهش دهند. البته روابط دن هارتوگ برای سیستم اصلی یک درجه آزادی است و در این مطالعه، سیستم اصلی دو درجه آزادی است و کوپلینگ مودها و جذب انرژی غیرمستقیم موجود پیچیده است. بنابراین پارامترهای جاذب‌های دن هارتوگ، به‌عنوان یک راهنما از محدوده مناسب پارامترهای جاذب در بهینه‌سازی مرحله بعد استفاده شد.

- بهینه‌سازی بر اساس بهینه‌کردن حداکثر دامنه ارتعاش در بازه فرکانسی شامل دو رزونانس و همچنین بر اساس بهینه‌سازی جذر میانگین مربعات دامنه ارتعاشی در بازه مورد نظر، نشان داد که مورد اول در کاهش دامنه ارتعاشی مود دوم و دومی در کاهش دامنه مود اول موثرتر است. همچنین مورد اول در بازه مشخصی حول رزونانس دوم به‌صورت یکنواخت و کاملاً موثر دامنه را کاهش می‌دهد. تفاوت اصلی این دو در مقدار سختی جاذب است که در مورد اول کمی بزرگ‌تر از مورد دوم است و این ناشی از اثر دامنه‌های بزرگ ارتعاش رزونانس دوم در بهینه‌سازی بر اساس حداکثر دامنه است.

- مشاهده می‌شود که با بهینه‌سازی، محدوده کاهش ارتعاشات نسبت به حالت‌های معیار دن هارتوگ، به‌خصوص در مود دوم بهتر شده است.

- بررسی پاسخ فرکانسی پره با جاذب خطی نصب‌شده نشان داد که جاذب خطی می‌تواند دامنه رزونانس مود اول و دوم را که به‌ترتیب خمشی خارج صفحه دیسک- پره و خمشی داخل صفحه پره است، کاهش دهد که میزان کاهش در مود اول بیشتر است و این ناشی از دامنه حرکت بزرگ‌تر دیسک در حرکت خمشی بیرون صفحه نسبت به حرکت پیشی داخل صفحه آن است. از دلایل اصلی کاهش دامنه ارتعاش داخل صفحه پره در رزونانس دوم، کوپلینگ قوی بین مود اول و دوم در قطر ساکن سوم است که در ناحیه **Veering** فرکانسی قرار گرفته‌اند و انرژی ارتعاشی خمشی داخل صفحه پره به خمشی بیرون صفحه دیسک و پره منتقل و توسط جاذب، جذب و تلف می‌شود.

با ترسیم پاسخ فرکانسی سیستم با جاذب تنظیم‌شده با پارامترهای بهینه‌شده برای ماکزیمم ارتعاشات و جذر میانگین مربعات و همچنین معیار دن هارتوگ در مود اول و دوم می‌توان عملکرد آنها را در یک نمودار مقایسه نمود که در نمودار ۶ نشان داده شده است و بیانگر این است که با بهینه‌سازی پارامترهای جاذب بر اساس حداکثر دامنه ارتعاش، دامنه ارتعاش پره در رزونانس اول تا ۶۰٪ و در رزونانس دوم تا ۳۲٪ کاهش می‌یابد. همچنین با بهینه‌سازی بر اساس جذر میانگین مربعات دامنه، دامنه ارتعاش در رزونانس اول تا ۶۲٪ و در رزونانس دوم تا ۲۷٪ کاهش می‌یابد که در هر دو، بهبود قابل توجهی در عملکرد جاذب به‌ویژه در رزونانس دوم ایجاد می‌شود. مشاهده می‌شود که با بهینه‌سازی، محدوده کاهش ارتعاشات نسبت به حالت‌های معیار دن هارتوگ (جاذب تنظیم‌شده برای مود اول با کاهش دامنه ارتعاش در رزونانس اول تا ۵۶٪ و در رزونانس دوم تا ۱۴٪ و برای جاذب تنظیم‌شده برای مود دوم با کاهش دامنه ارتعاش در رزونانس اول تا ۵۳٪ و در رزونانس دوم تا ۱۳/۷٪) در هر دو مود بسیار بهتر شده است.



نمودار ۶) پاسخ فرکانسی سیستم دیسک- پره بدون جاذب خطی، با جاذب خطی بهینه‌شده و با جاذب تنظیم‌شده با روابط دن هارتوگ

همچنین نمودار ۶ نشان می‌دهد که با جاذب بهینه‌شده بر اساس حداکثر دامنه ارتعاش، در رزونانس دوم، دو پیک تقریباً مساوی در دو طرف ایجاد شده است و بین دو پیک، حداقل دامنه ارتعاش پره در محدوده مود دوم اتفاق می‌افتد. از این رو به نظر می‌رسد که معیار برابری دامنه پیک‌ها اتفاق افتاده و همچنین رفتار سیستم یکنواخت است. بنابراین انتخاب پارامترهای جاذب بر اساس کاهش حداکثر دامنه، بهبود قابل اطمینان‌تری در سیستم ایجاد می‌کند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کاهش دامنه ارتعاشات سیستم دیسک- پره متقارن سیکلی با استفاده از جاذب خطی انرژی مکانیکی نصب‌شده روی دیسک بررسی شد. سیستم دیسک- پره انعطاف‌پذیر است و از خواص سیستم‌های متقارن سیکلی برای استخراج معادلات حاکم بر دینامیک سیستم استفاده شد. رفتار ارتعاشی سیستم دیسک- پره با جاذب خطی متصل به دیسک، در نزدیکی فرکانس‌های طبیعی سیستم در قطر ساکن سوم یک نمونه دیسک- پره واقعی، مطالعه و پارامترهای جاذب بهینه‌سازی شد و نتایج زیر به‌دست آمد:

جرم دیسک	$m_d$
نسبت جرم مودال دیسک به جرم مودال پره	$\bar{m}$
سختی پره	$k_b$
سختی دیسک	$k_d$
سختی کوپلینگ بین سکتورها	$k_c$
نسبت سختی دیسک و کوپلینگ به سختی پره	$\kappa_d, \kappa_c$
سختی دینامیکی سیستم	$Z(\omega)$
فرکانس طبیعی خمشی پره	$\omega_b$
سختی سازه‌ای پره و دیسک	$\gamma_b, \gamma_d$
فرکانس جاذب	$\omega_a$
ضریب میرایی جاذب	$c_a$
سختی جاذب	$k_a$
جرم جاذب	$m_a$

**تشکر و قدردانی:** موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.  
**تأییدیه اخلاقی:** موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.  
**تعارض منافع:** مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.  
**سهم نویسندگان:** جعفر آفاباری (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۴۰٪)؛ پدرام صفرپور (نویسنده دوم)، روش‌شناسی/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۲۰٪)؛ عباس رهی (نویسنده سوم)، روش‌شناسی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۲۰٪)؛ سعید باب (نویسنده چهارم)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر کمکی/نگارنده بحث (۲۰٪)  
**منابع مالی:** موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

### منابع

- Zhai Y, Bladh R, Dyverfeldt G. Aeroelastic stability assessment of an industrial compressor blade including mistuning effects. *Journal of Turbomachinery*. 2012;134(6):60903.
- Olson BJ, Shaw SW, Pierre C. Order-tuned vibration absorbers for a rotating flexible structures. ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, September 24-28, 2005, Long Beach, California, USA. New York: ASME; 2008.
- Alsuwaiyan AS, Shaw SW. Performance and dynamic stability of general-path centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*. 2002;252(5):791-815.
- Schwarzendahl SM, Szwedowicz J, Neubauer M, Panning L, Wallaschek J. On blade damping technology using passive piezoelectric dampers. ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition, June 11-15 2012, Copenhagen, Denmark. New York: ASME; 2013.
- Mokrani B, Preumont A. A numerical and experimental investigation on passive piezoelectric shunt damping of mistuned blisks. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2017;29(4):610-622.
- Pufy KP, Brown GV, Bagley RL. Self-tuning impact damper for rotating blades. United States patent US6827551B1. 2000
- Bab S, Khadem SE, Mahdiabadi MK, Shahgholi M. Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES). *Journal of Vibration and Control*. 2015;23(6):1001-1025.
- Bab S, Khadem SE, Shahgholi M. Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using non-linear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014;(67):251-266.
- Guo C, AL-Shudeifat MA, Vakakis AF, Bergman LA, McFarland DM, Yan J. Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy sinks. *Nonlinear Dynamics*. 2015;79(1):527-538.
- Nili Ahmadabadi Z, Khadem SE. Nonlinear vibration control and energy harvesting of a beam using a nonlinear energy sink and a piezoelectric device. *Journal of Sound and Vibration*. 2014;333(19):4444-4457.
- Singh M. SAFE Diagram-A dresser-rand evaluation tool for packeted bladed disc assembly [Report]. Houston:

### پیوست

#### برخی خواص ضرب کرونیگر

- ضرب کرونیگر دو بردار

$$a \otimes b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

- ضرب کرونیگر دو ماتریس

$$[A] \otimes [B] = \begin{bmatrix} a_{11}[B] & \cdots & a_{1n}[B] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}[B] & \cdots & a_{nn}[B] \end{bmatrix}$$

- و برخی خواص دیگر

$$([A] \otimes [B])([C] \otimes [D]) = ([A][C]) \otimes ([B][D]) \quad ([A] \otimes [B])^* = [A]^* \otimes [B]^*$$

### لیست علائم

فرکانس n امین خانواده مودهای طبیعی در k امین مود	$\omega_{k,n}$
مودال یا k-1 امین مود قطری	
نیروی خارجی (آئرو دینامیک) وارد بر پره	$f_b$
شعاع دیسک	$R$
موقعیت درجات آزادی سکتور i ام در مختصات فیزیکی یا ساکن	$U_i$
جابجایی پره در k امین مود مودال دیسک-پره	$u_{k,b}$
جابجایی دیسک در k امین مود مودال دیسک-پره	$u_{k,d}$
جابجایی جاذب در مختصات فیزیکی	$u_a$
زاویه فاز بین پره‌ای در k امین مود مودال سیستم	$\sigma_k$
ماتریس جرم سکتور	$[M]$
ماتریس سختی سکتور	$[K]$
ماتریس سختی کوپلینگ	$[K_c]$
ماتریس‌های جرم سیستم	$[\tilde{M}], [\tilde{M}_D]$
ماتریس‌های سختی سیستم	$[\tilde{K}], [\tilde{K}_D]$
ماتریس تبدیل فوریه	$[E]$
ستون i ام ماتریس فوریه	$\{e_i\}$
دامنه نوسان	$\tilde{u}_0$
تعداد سکتورها	$N$
میرایی آئرو دینامیک پره ( $2\pi = \zeta_b$ )	$c_b$
نسبت جرمی چاه	$\epsilon$
جرم پره	$m_b$

- 2004-22 April 2004, Palm Springs, California. Reston: AIAA; 2004.
- 20- Lim SH, Bladh R, Castanier MP, Pierre C. Compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration. *AIAA Journal*. 2007;45(9):2285-2298.
- 21- Genta G. On the stability of rotating blade arrays. *Journal of Sound and Vibration*. 2004;273(4-5):805-836.
- 22- Najafi A, Ghazavi MR, Jafari AA. Stability and Hamiltonian Hopf bifurcation for a nonlinear symmetric bladed rotor. *Nonlinear Dynamics*. 2014;78(2):1049-1064.
- 23- Najafi A. The stability and nonlinear analysis of a rotating bladed disk at the critical speed. *Archive of Applied Mechanics*. 2018;88(3):405-418.
- 24- Mead DJ. Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. multi-coupled systems, with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*. 1975;40(1):19-39.
- 25- Mead DJ. Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1975;40(1):1-18.
- 26- Genta G. *Dynamics of rotating systems*. New York: Springer-Verlag New York; 2005.
- 27- Zhou B, Thouverez F, Lenoir D. Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*. 2014;333(9):2520-2542.
- 28- Nyssen F. Numerical modeling and experimental identification of mistuned multi-stage bladed assemblies [Dissertation]. Liège: Université de Liège; 2016.
- 29- Den Hartog JP. *Mechanical vibrations*. New York: Dover Publications; 1985.
- Dresser-Rand Company; 1984.
- 12- Kharyton V, Gibert C, Blanc L, Thouverez F. Elements of dynamic characterization of a bladed disk by using the tip-timing method under vacuum conditions. *ASME 2011 Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition*, June 6-10, 2011, Vancouver, British Columbia, Canada. New York: ASME; 2012. Pp. 1127-1135.
- 13- Polach P. Evaluation of the suitability of the bladed disk design regarding the danger of the resonant vibration excitation. *Engineering Mechanics*. 2011;18(3-4):181-191.
- 14- Singh MP, Thakur BK, Sullivan WE, Donald G. Resonance Identification For Impellers. *Turbomachinery and Pump Symposia*. 2003;59-70.
- 15- American Petroleum Institute. *API Standard 612, Petroleum, Petrochemical, and Natural Gas Industries-Steam Turbines-Special-purpose Applications*. 7<sup>th</sup> Edition. Washington: American Petroleum Institute; 2014.
- 16- Óttarsson G. *Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks [Dissertation]*. Michigan: University of Michigan; 1994.
- 17- Petrov EP, Ewins DJ. Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk assemblies. *Journal of Turbomachinery*. 2003;125(4):623-631.
- 18- Kielb RE, Feiner DM, Griffin JH, Miyakozawa T. Flutter of mistuned bladed disks and blisks with aerodynamic and fmm structural coupling. *ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air*, June 14-17, 2004, Vienna, Austria. New York: ASME; 2008.
- 19- Lim SH, Castanier M, Pierre C. Vibration modeling of bladed disks subject to geometric mistuning and design changes. *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, 19 April