ISSN: 2476-6909; Modares Mechanical Engineering. 2020;20(3):539-551

Effect of Temperature Variation and Mass Distribution on the Optimal Design of the Constrained-Layer-Damping for a Beam

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Mahmoudkhani S.*[1] *PhD*,
Kolbadi-Hajikalaee S. [1] *MSc*

How to cite this article
Mahmoudkhani S, Kolbadi-Hajkalaee S. Effect of Temperature Variation and Mass Distribution on the Optimal Design of the Constrained-Layer-Damping for a Beam. Modares Mechanical Engineering. 2020-;20(3):539-551.

[1]Aerospace Engineering Department, Faculty of New Technologies & Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

***Correspondence**
Address: Aerospace Engineering Department, New Technologies & Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Velenjak Square, Tehran, Iran
Postal Code: 3815688349
Phone: +98 (21) 29903244
Fax: +98 (21) 22431964
s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

Article History
Received: November 3, 2018
Accepted: July 8, 2019
ePublished: March 01, 2020

ABSTRACT

In this research, the vibration of a beam treated with a viscoelastic constrained-layer-damping has been studied and the effects of thermal variations and the attached lumped mass on the variation of the optimal design of the constrained layer have been investigated. For modeling the core, the second and third order polynomials were used respectively for out-of-plane and in-plane displacements, and for outer layers, the Euler-Bernoulli beam theory was used. With this modeling, the effect of the through-the-thickness normal strain in the mid-layer (core) can be included in the analyses, and the model will be applicable for studying the cases with moderately thick cores. The finite element method with 3-node elements has also been used for the solution purpose. Moreover, the viscoelastic material is assumed to be isotropic and its constitutive behavior is described by a complex shear modulus dependent on temperature and frequency. This dependence on frequency and temperature has been obtained by using the graphs of the experimental results presented in the relevant references. Numerical studies have been carried out to investigate the variation of the damping and harmonic response amplitude with the thickness of the core and the constraining layer at different temperatures. The results showed that the thermal variation could considerably change the region associated with the optimal design and the maximum damping. This implies that the range of thermal variations in the operating environment of the structure should be considered in designing a viscoelastic-damping layer. In the numerical studies, the effect of added rigid masses on changing the optimal design was investigated. The results show the necessity to consider all the added masses before designing the constrained layer damping.

Keywords Constrained Layer Damping; Viscoelastic Materials; Through-The-Thickness Normal Strain; Attached Rigid Mass; Thermal Variations

CITATION LINKS

[1] The forced vibration of a three layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions [2] Damping analysis of partially covered sandwich beams [3] Vibration analysis of a beam with PCLD Patch [4] Vibration analysis of simply supported beams with enhanced self-sensing active constrained layer damping treatments [5] Analytical solution for free vibrations for laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory [6] High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core [7] High-order buckling analysis of sandwich beams with transversely flexible core [8] Buckling of sandwich panels with a flexible core-high-order theory [9] High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core [10] Free vibration of sandwich beams with a transversely flexible core: A high order approach [11] Forced vibration of a sandwich panel with composite layers and a FGM core [12] A free vibration analysis of three-dimensional sandwich beams using hierarchical one-dimensional finite elements [13] Damping properties of various materials [14] Dimensionless analysis of constrained damping treatments [15] Optimal design of frequency dependent three-layered rectangular composite beams for low mass and high damping [16] Damping mechanism of elastic-viscoelastic-elastic sandwich structures [17] Vibration and thermal analysis and optimum design of viscoelastic sandwich beam

اثر تغییرات دما و توزیع جرم در تعیین شکل بهینه لایه میرایی مقید موضعی برای تیر

سعید محمودخانی* PhD
گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فن‌آوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
سینا کلبادی حاجیکلائی MSc
گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فن‌آوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده
در پژوهش حاضر، رفتار ارتعاشی تیر با لایه میرایی مقید ویسکوالاستیک بررسی شده و اثر تغییر دما و جرم صلب در تغییر طرح بهینه برای لایه میرایی مقید، مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مدل‌سازی هسته از چندجمله‌ای‌های درجه دو و سه به‌ترتیب برای جابجای‌های بیرون‌صفحه‌ای و درون‌صفحه‌ای استفاده شده و لایه‌های بیرونی بالا و پایین با استفاده از مدل اویلر- برنولی مدل‌سازی شده‌اند. با استفاده از این مدل‌سازی، امکان درنظرگرفتن اثر کرنش نرمال راستای ضخامت برای لایه میانی (هسته) فراهم شده و مدل برای ضخامت‌های بالای هسته نیز قابل اعمال خواهد بود. برای حل مساله نیز از روش المان محدود با المان‌های سه‌گرهی استفاده شده است. در بیان رفتار ماده ویسکوالاستیک از مدول برشی مختلط وابسته به فرکانس و دما و همچنین فرض ایزوتروپ‌بودن استفاده شده است. این وابستگی به فرکانس و دما با استفاده از نمودارهای حاصل از نتایج تجربی که در مراجع مربوطه ارایه شده، به‌دست آمده است. مطالعات عددی انجام‌شده شامل بررسی تغییرات میرایی و دامنه پاسخ هارمونیک با ضخامت هسته و لایه مقیدکننده در دماهای مختلف است که نشان‌دهنده تغییر قابل توجه ناحیه مربوط به طرح بهینه و همچنین تغییر میرایی بیشینه سازه با تغییر دما است. بر این اساس، آگاهی از محدوده تغییرات دمایی محیط کارکرد سازه برای طراحی بهینه لایه میرایی مهم خواهد بود. در مطالعات عددی، همچنین اثر افزوده‌شدن جرم صلب به سازه در تغییر طراحی بهینه مورد بررسی قرار گرفته که نتایج حاصل نشان‌دهنده لزوم درنظرگرفتن همه جرم‌های اضافه‌شده قبل از طراحی لایه میرایی مقید است.

کلیدواژه‌ها: لایه میرایی مقیدشده، ماده ویسکوالاستیک، کرنش نرمال راستای ضخامت، جرم صلب متصل‌شده، تغییرات دما

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۱۷
*نویسنده مسئول: s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

۱- مقدمه

پیشنهاد استفاده از میرایی با لایه مقید به‌منظور کنترل و کاهش ارتعاشات و کاهش آلودگی صوتی از اواسط قرن بیستم مطرح بوده است. استفاده از این روش کنترل ارتعاش منجر به شکل‌گیری ساختار ساندویچی می‌شود که در آن، بخشی (یا تمام) سطح سازه اصلی با لایه میراکننده و لایه مقیدکننده پوشانده می‌شود. لایه میراکننده به‌طور معمول از جنس ماده ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود که علاوه‌بر خاصیت میرایی بالا از سفتی پایینی در مقایسه با لایه اصلی و همچنین لایه مقیدکننده برخوردار است. مقیدشدن لایه با سفتی پایین‌تر بین لایه‌های با سفتی بالاتر موجب افزایش کرنش‌های برشی خارج صفحه‌ای در لایه میانی حین خمش سازه شده و از این طریق موجب افزایش قابل توجه میرایی در مودهای خمشی می‌شود. ویژگی‌هایی مانند نسبت استحکام و سفتی به وزن بالا و همچنین رسانایی حرارتی پایین از جمله موارد قابل توجه در این سازه‌ها بوده که سبب استفاده از آن در بسیاری سازه‌های تحت بارهای دینامیکی در صنایع مختلف مانند هوافضا، خودروسازی، کشتی‌سازی سازه‌های ساختمانی شده است.

مطالعات متعددی تا به امروز روی ارتعاشات این نوع سازه‌ها انجام‌شده و اشکال مختلف سازه همانند تیر، ورق و انواع پوسته در نظر گرفته شده است. از نخستین مطالعات انجام‌شده در این زمینه می‌توان به مطالعه *مید* و *مارکوس*[1] اشاره کرد که در آن مدل‌سازی نظری تیر ساندویچی به‌منظور تعیین خواص ارتعاشی انجام شده است. در مدل ارایه‌شده در این مقاله هر یک از لایه‌ها به‌طور جداگانه در نظر گرفته شده و شرط پیوستگی جابجایی در سطوح تماس لایه‌ها اعمال شده است؛ به‌طوری که لایه‌ها روی هم سر نمی‌خورند. لایه‌های الاستیک رویه به‌صورت اویلر- برنولی مدل شده‌اند و جابجایی عرضی و چرخش یکسان دارند. برای هسته ویسکوالاستیک فقط تغییر شکل برشی در کنار جابجایی‌های محوری صورت می‌گیرد که به شکل خطی در امتداد ضخامت هسته توزیع شده است و تنش وکرنش نرمال نیز نادیده گرفته شده است.

روش به‌کارگرفته‌شده در مرجع[1] مبنای بخش وسیعی از مطالعاتی است که تا به امروز در این زمینه انجام شده است. از جمله این مقالات می‌توان به مطالعه *لال*[2] بر ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی شامل بخش میرایی موضعی اشاره کرد که با درنظرگرفتن نظریه مرتبه اول بدون فرض کرنش نرمال راستای ضخامت برای هسته انجام گرفت. همچنین *کای* و همکاران[3] و *گائو* و همکاران[4] نیز مطالعاتی روی ارتعاشات تیر، شامل بخش میرایی موضعی مقید با فرضیات مید- مارکوس انجام دادند. با این حال به نظر می‌رسد در صورت افزایش ضخامت لایه میانی و همچنین در حضور بارهای اعمالی به لایه مقیدکننده، نیاز به استفاده از نظریه‌های با مراتب بالاتر و همچنین احتساب کرنش نرمال راستای ضخامت برای دستیابی به مدل‌های دقیق‌تر باشد.

نظریه‌های مرتبه بالای ارایه‌شده برای سازه‌های ساندویچی از دو روش عمده برای مدل‌سازی استفاده می‌کنند. در روش اول از لایه معادل استفاده می‌شود، به این معنی که کل سازه به‌عنوان یک لایه معادل در نظر گرفته می‌شود. این روش برای نمونه در مطالعه *کانت و سوامیناتان*[5] روی صفحه ساندویچی انجام گرفت که در آن ارتعاشات آزاد به کمک نظریه مراتب بالا بررسی شد. در روش دوم همانند مدل مید- مارکوس صفحات به‌صورت مجزا در نظر گرفته می‌شوند و شرایط پیوستگی در محل تماس لایه‌ها اعمال می‌شوند؛ با این تفاوت که به‌جای نظریه برشی مرتبه اول از نظریه‌های با مراتب بالا برای بیان رفتار لایه میانی استفاده می‌شود. از جمله افرادی که از این مدل استفاده کردند می‌توان به *فراستیگ* و *تامسون*[6] اشاره کرد که با مدل‌کردن هسته توسط نظریه مرتبه بالا

به ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی پرداختند. همچنین فعالیت‌های دیگر *فراستیگ* و همکاران در این زمینه، بررسی کمانش صفحات و تیرهای ساندویچی با هسته درونی انعطاف‌پذیر[7, 8] و بررسی خمش و ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی همراه هسته انعطاف‌پذیر[9, 10] است. در آن و پژوهش‌های انجام‌شده توسط *خضریان* و همکاران[11] و *هوی* و همکاران[12] نیز ضمن استفاده از نظریه مرتبه بالا، کرنش نرمال راستای ضخامت در مدل‌سازی هسته برای بررسی ارتعاشات اجباری و آزاد تیر ساندویچی، در نظر گرفته شده است.

یکی دیگر از عواملی که در مدل‌سازی و پیش‌بینی دقیق رفتار سازه‌های با لایه میرایی مقید موثر است، درنظرگرفتن اثر دما است. این موضوع به علت وابستگی قابل توجه خواص ماده ویسکوالاستیک به دما است. پیرامون این وابستگی، مطالعات گسترده‌ای انجام‌شده که نمونه‌ای از آن در مرجع[13] مورد توجه قرار گرفته است. در این مرجع نمودارهایی برای تغییرات مدول برشی ماده و میرایی بر حسب تغییرات فرکانس و دما ارایه شده است.

در معدود مطالعات انجام‌شده پیرامون تاثیر دما بر رفتار سازه با میرایی مقید، *شیر* و *موریرا*[14] پژوهشی پیرامون بهینه‌سازی ضخامت لایه ویسکوالاستیک و لایه مقیدکننده در کاهش ارتعاشات تیر انجام داده‌اند که در آن اگرچه تاثیر تغییرات دما در تغییر ویژگی‌های طرح بهینه به‌طور مستقیم مورد توجه قرار نگرفته است، اما بازه و محدوده دمایی که در آن تحقیق انجام شده، بیان شده است. در رابطه با اثر دما همچنین باید توجه داشت که طراحی بهینه برای لایه میرایی و لایه مقیدکننده ممکن است تحت تاثیر وابستگی خواص به دما قرار گیرد، به‌طوری که با تغییرات دما، ویژگی‌های مورد نظر برای دستیابی به بیشترین میرایی تغییر کند و این موضوعی است که تا به امروز مورد بررسی قرار نگرفته است. با این وجود، مطالعات دیگری در ارتباط با تعیین ویژگی‌های طرح بهینه با تغییر سایر پارامترهای تاثیرگذار در عملکرد تا به امروز انجام شده که از آن جمله می‌توان به مطالعه *همدوبی* و همکاران[15] اشاره کرد که از دو ماده ویسکوالاستیک ISD112 و PVB برای دستیابی به طرح بهینه با درنظرگرفتن ضخامت و جرم بخش میراکننده استفاده کرده‌اند. در پژوهشی دیگر نیز *هوانگ* و همکاران[16] از ماده ویسکوالاستیک ZN1 برای بررسی تاثیر کم یا زیادبودن ضخامت هسته در کاهش ارتعاشات استفاده کرده‌اند.

از دیگر مواردی که می‌تواند در تغییر طراحی بهینه لایه میرایی مقید موثر باشد، تغییرات توزیع جرم سازه به علت نصب تجهیزات روی سازه است. در واقع، در موارد استفاده‌ای که لایه میرایی مقید در سازه‌ها دارد، گاهی تجهیزاتی نیز روی تیر و در کنار این لایه قرار می‌گیرند، که روی خواص مودال و توزیع نیرویی تیر تاثیر می‌گذارند. اما ممکن است اثر این جرم متمرکز اضافه‌شده در شبیه‌سازی برای تعیین طرح بهینه برای لایه میرایی مقید در نظر گرفته نشود. لذا در این پژوهش اثر جرم صلب در تغییرات طرح بهینه نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

با توجه به موارد اشاره‌شده که در پژوهش‌های پیشین چندان مورد توجه قرار نگرفته است، در پژوهش حاضر تغییرات میرایی و پاسخ فرکانسی تیر با ضخامت‌های مختلف لایه میرایی و لایه مقیدکننده، برای دماهای مختلف و توزیع جرم‌های مختلف، مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدل‌سازی هسته از نظریه مرتبه بالا استفاده شده و از کرنش نرمال راستای ضخامت صرف‌نظر نشده است. اما برای لایه رویه و پایه، به‌دلیل نازکی و سفتی بالاتر در مقایسه با هسته از مدل اویلر- برنولی برای مدل‌سازی استفاده شده است. برای حل نیز از روش اجزاء محدود به‌همراه المان‌های سه‌گرهی استفاده شده است. توابع شکل درنظرگرفته‌شده نیز برای جابجایی‌های عمودی لایه بالا و پایین از نوع توابع هرمیتی بوده و لذا دارای پیوستگی C^1 هستند. باقی عبارات جابجایی اما با توابع لاگرانژی با پیوستگی C^0 تقریب زده شده‌اند. در نهایت با استخراج ماتریس‌های سفتی و جرم و همچنین بردار نیرو، تغییرات میرایی، فرکانس طبیعی و پاسخ فرکانسی تیر تحت تاثیر تغییرات دمایی و جرم صلب مورد مطالعه قرار گرفته است.

سوالاتی که به‌صورت خاص سعی شده در این پژوهش بدان پاسخ داده شود به شرح زیر هستند:

۱- آیا تغییرات گسترده دما نقطه بهینه را تغییر خواهد داد؟ و همچنین آیا لازم است تغییرات کوچک‌تر دمایی در تعیین نقطه بهینه بررسی شود؟. لازم به ذکر است که منظور از نقطه بهینه، مقادیر مشخص از ابعاد هندسی میراکننده، شامل ضخامت لایه مقیدکننده و لایه ویسکوالاستیک است که منجر به بیشترین میزان کاهش دامنه ارتعاشات در پاسخ به تحریک هارمونیک شود. همچنین منظور از تغییرات کوچک دما در اینجا تغییرات در حد کاهش یا افزایش ۵درجه سانتی‌گراد است.

۲- آیا نقطه بهینه مربوط به میرایی بیشینه مود اول، همان نقطه بهینه مربوط به پاسخ کمینه است؟.

۳-آیا توزیع جرم ناشی از افزودن جرم صلب به سازه موجب تغییر در نقطه بهینه مربوط به پاسخ کمینه موثر می‌شود؟. باید توجه داشت که در صورتی که سازه تحت تحریک پایه باشد، افزودن جرم به سازه علاوه‌بر تغییر خواص مودال سازه موجب تغییر توزیع نیروهای تحریک اعمالی نیز خواهد شد. بر همین اساس اثر افزودن جرم برای دو حالت تحریک پایه و تحریک نیروی یکنواخت خارجی مورد بررسی قرار گرفته است.

۴- احتساب کرنش راستای ضخامت تا چه میزان برای تعیین میرایی سیستم در دماهای مختلف مهم است؟.

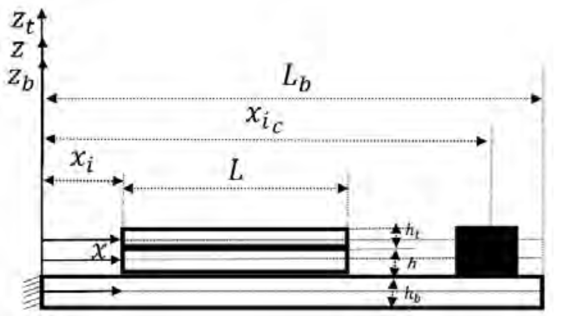
۲- روابط حاکم

در این بخش روابط حاکم بر تیر سه‌لایه با تشریح روابط سینماتیکی و ساختاری ارایه شده و توضیحات لازم درباره نحوه مدل‌سازی ماده ویسکوالاستیک داده شده است.

۲-۱- روابط سینماتیکی

در شکل ۱ هندسه مساله و دستگاه‌های مختصات مورد استفاده،

نمایش داده شده‌اند. z ،z_b و z_t به‌ترتیب از میانه لایه‌های پایین، میانی و بالا شروع شده و در مختصه x نیز در ابتدای تیر پایه قرار گرفته شده است. همچنین، ضخامت لایه‌های بالا، وسط و پایین به‌ترتیب با h ،h_t و h_b نشان داده شده و عرض تیر واحد است.



شکل ۱) هندسه تیر همراه لایه میرایی موضعی مقید و دستگاه‌های مختصات درنظرگرفته‌شده

برای استخراج روابط حاکم، میدان‌های جابجایی در لایه‌های بالا و پایین از نظریه اویلر- برنولی استخراج شده‌اند و برای هسته ویسکوالاستیک از نظریه مراتب بالا استفاده شده است. در نظریه مرتبه بالا برای جابجایی‌های محوری و جابجایی عرضی لایه میانی، به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های مرتبه ۳ و ۲ استفاده شده‌اند که در رابطه (۱) آورده شده است.

$$u = u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3 \quad (۱)$$
$$w = w_0 + zw_1 + z^2w_2$$

همچنین در نظریه اویلر- برنولی همان طور که در رابطه (۲) آورده شده است، برای جابجایی‌های محوری و جابجایی عرضی لایه میانی، به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های مرتبه ۲ و ۱ استفاده شده است.

$$u_m = u_{m0} + zu_{m1}, w_m = w_{m0}, m: t, b \quad (۲)$$

در رابطه ۱ که مربوط به نظریه مرتبه بالا می‌شود، کمیت‌های w_2، w_1، w_0، u_3، u_2، u_1 و u_0 عبارات جابجایی مجهول هستند. به این کمیت‌ها، عبارات میدان جابجایی لایه‌های بالا و پایین که از رابطه اویلر- برنولی (رابطه ۲) استخراج شده‌اند (u_{t0}، u_{t1}، w_{t0}، w_{b0}، u_{b0} و u_{b1}) نیز اضافه خواهند شد. در این نام‌گذاری اندیس‌های t و b به‌ترتیب به لایه‌های بالا و پایین اشاره می‌کنند. برای برقراری شرط عدم لغزش بین لایه‌ها، جابجایی‌ها در محل تماس، برابر قرار داده می‌شوند. یعنی:

$$w_t|_{z=-h_t/2} = w|_{z=h/2}, u_t|_{z=-h_t/2} = u|_{z=h/2}$$
$$w_b|_{z=h_b/2} = w|_{z=-h/2}, u_b|_{z=h_b/2} = u|_{z=-h/2} \quad (۳)$$

با اعمال شرط عدم لغزش، مجهول‌های جابجایی به هفت عدد شامل w_{b0}، w_{t0}، u_{b0}، u_{t0}، w_0، u_1 و u_0 کاهش می‌یابند.

۲-۲- روابط کرنش- جابجایی

روابط کرنش- جابجایی بدون درنظرگرفتن عبارت‌های غیرخطی هندسی و با فرض کرنش‌های کوچک و چرخش کوچک به‌صورت زیر هستند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (٤)$$

که در این روابط ε_{xx} و ε_{zz} به‌ترتیب، کرنش‌های عمودی در راستای x و z هستند و ε_{xz} کرنش برشی عرضی در راستای ضخامت است. رابطه کرنش برای نظریه مرتبه بالا با جایگزین‌کردن میدان‌های جابجایی از رابطه ۱ در رابطه ٤ به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z\varepsilon_{xx}^1 + z^2\varepsilon_{xx}^2 + z^3\varepsilon_{xx}^3$$
$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^0 + z\varepsilon_{zz}^1 + z^2\varepsilon_{zz}^2 + z^3\varepsilon_{zz}^3 \quad (۵)$$
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^0 + z\varepsilon_{xz}^1 + z^2\varepsilon_{xz}^2$$

که در رابطه ۵، $\varepsilon_{xx}^3, \varepsilon_{xx}^2, \varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{xx}^0$ عبارات مرتبه صفر تا سه کرنش نرمال راستای محوری بدون وابستگی به z هستند. مشابه همین تعریف نیز برای کرنش‌های راستای z و xz قابل استفاده است.

۲-۳- روابط ساختاری

روابط ساختاری برای ماده ویسکوالاستیک را می‌توان در حوزه فرکانس یا در حوزه زمان تعریف نمود. در اینجا به کمک کرنش‌های تعریف‌شده در بخش ۲-۲، روابط ساختاری برای هسته در حوزه فرکانس و به کمک قانون هوک به‌صورت زیر تعریف شدند:

$$\sigma_{xx} = \frac{2G(1+\eta I)}{(1-\nu)(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{zz})}$$
$$\sigma_{zz} = \frac{2G(1+\eta I)}{(1-\nu)(\varepsilon_{zz}+\nu\varepsilon_{xx})} \quad (٦)$$
$$\sigma_{xz} = G(1+\eta I)\varepsilon_{xz}$$

که در رابطه بالا $I = \sqrt{-1}$ و η, ν, G به‌ترتیب بیانگر مدول انباشت، ضریب پواسون و ضریب میرایی هستند. برای لایه‌های رویه نیز رابطه ساختاری به کمک قانون الاستیسیته هوک به‌صورت زیر حاصل شدند.

$$\sigma_{xx}^i = E_i\varepsilon_{xx}^i \quad (۷)$$

که $i=b,t$ است. برای انتخاب ماده ویسکوالاستیک و تعیین مدول انباشت و ضریب میرایی از گزارشی که در مرجع[13] تهیه شده، استفاده شده است. در این گزارش رفتار ماده ویسکوالاستیک و وابستگی فرکانسی و دمایی مواد مختلف از جمله ISD112 مورد آزمایش و بررسی قرار گرفت که خواص دینامیکی این مواد از انطباق توابعی به نمودارهای حاصل‌شده از نتایج آزمایش به‌دست آمدند. در این گزارش خواص دینامیکی ماده ISD112 به شرح زیر است[13]:

$$G = log(ML) + \frac{\left(2\,log\left(\frac{MROM}{ML}\right)\right)}{1+(FQROM/FR)^{SLOPE}}$$
$$log(\eta) = log(ETFROL)$$
$$+\frac{((SH+SL)A+(SL-SH)(1-\sqrt{1+A^2}))C}{2} \quad (۸)$$
$$log(FR) = log(\omega) - \frac{12(T-T_0)}{525+T-T_0}$$
$$A = (log(FR) - log(FROL))/C$$

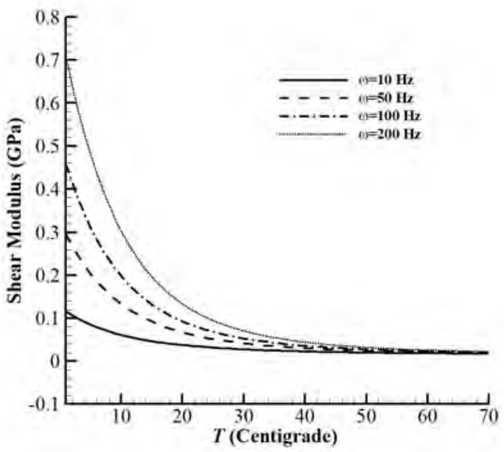
که در این روابط G، η، T و ω به‌ترتیب مدول برشی، میرایی، دمای محیط و فرکانس هستند. مقادیر ثابت در روابط بالا به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$MROM = 6.45e02, FQROM = 2.45e5, T_0 = 150°F$$
$$ETFROL = 0.870, ML = 2.194e01, SLOPE = 0.372 \quad (۹)$$
$$C = 1.800, SH = 0.385, SL = 0.115, FROL = 7.340e05$$

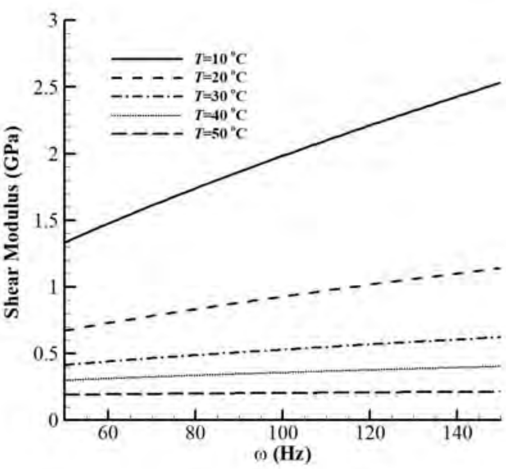
واحدها در روابط بالا به‌صورت انگلیسی تعریف شده‌اند و واحد دما فارنهایت است. همچنین قابل ذکر است که در محاسبات انجام‌شده

طی پژوهش، مدول برشی نیز برحسب پوند بر اینچ مربع به‌دست آمده و در ادامه به پاسکال تبدیل شده است.

برای روشن‌ترشدن نحوه تغییرات مدول برشی، نمودار این تغییرات برای ماده ISD112 در فرکانس‌ها و دماهای مختلف، از ۱ تا ۷۰درجه سانتی‌گراد رسم شده است (نمودار ۱). همان طور که مشاهده می‌شود، وقتی به دمای حدود ۴۰درجه سانتی‌گراد می‌رسیم و از آن به بعد با افزایش دما، مدول برشی کاهش نمی‌یابد. همچنین در این دما (۴۰درجه سانتی‌گراد) و از آن به بعد مدول برشی بسیار پایینی برای ماده گزارش شده است. در قسمت نتایج، تاثیر این موضوع بر پاسخ نیز مشاهده شده است.



(الف)



(ب)

نمودار ۱) تغییرات مدول برشی به‌دست آمده از رابطه ۸، الف) با دما برای فرکانس‌های مختلف و ب) با فرکانس برای دماهای مختلف

پس از تعریف خواص مواد و به کمک روابط ۶ و ۷، تنش‌های منتجه برای هسته به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$N_{\alpha\beta}^{i}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\alpha\beta}z^{i}\,dz,i=0,1,2,3\,,\alpha,\beta:x,z \qquad (۱۰)$$

مشابه همین تعریف برای تنش‌های منتجه لایه‌های بالا و پایین استفاده شده که در اینجا ارایه نشده است.

۳- تعیین انرژی کرنشی و جنبشی هر المان

در مطالعه حاضر، تیر در راستای طولی به تعداد دلخواه المان تقسیم شده است که از رابطه لاگرانژ برای محاسبه ماتریس‌های سفتی و جرم هر المان استفاده خواهد شد. در این راستا در گام اول نیاز به تعیین روابط مربوط به انرژی جنبشی، T و انرژی پتانسیل، U و کار نیروهای خارجی است. برای انرژی پتانسیل لایه میانی می‌توان نوشت:

$$U=\frac{1}{2}\int_{0}^{L_e}(N_{xx}^{0}\,\varepsilon_{xx}^{0}+N_{xx}^{1}\varepsilon_{xx}^{1}+N_{xx}^{2}\varepsilon_{xx}^{2}+N_{xx}^{3}\varepsilon_{xx}^{3}+N_{zz}^{0}\varepsilon_{zz}^{0}+N_{zz}^{1}\varepsilon_{zz}^{1}+N_{zz}^{2}\varepsilon_{zz}^{2}+N_{zz}^{3}\varepsilon_{zz}^{3}+N_{xz}^{0}\varepsilon_{xz}^{0}+N_{xz}^{1}\varepsilon_{xz}^{1}+N_{xz}^{2}\varepsilon_{xz}^{2})dx \qquad (۱۱)$$

در رابطه ۱۱، L_e بیانگر طول هر المان است. به همین ترتیب انرژی پتانسیل برای لایه مقیدکننده و لایه پایه به این صورت تعریف شده که دو جمله اول آن (که تا مرتبه اول را در بر می‌گیرند) را شامل می‌شود. در نهایت، انرژی کل از جمع انرژی سه لایه حاصل می‌شود. انرژی جنبشی نیز برای بخش سه لایه T و برای تیر پایه T_b بدون میرایی موضعی با فرض تحریک پایه تیر به شکل زیر بیان می‌شود:

$$T=\frac{1}{2}\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\int_{0}^{L_e}\rho_t[\dot{u}_t^2+(\dot{w}_t+\dot{w}_F)^2]dxdz+\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{L_e}\rho[\dot{u}^2+(\dot{w}+\dot{w}_F)^2]dxdz+\frac{1}{2}\int_{-h_b/2}^{h_b/2}\int_{0}^{L_e}\rho_b[\dot{u}_b^2+(\dot{w}_b+\dot{w}_F)^2]dxdz \qquad (۱۲)$$

$$T_b=\frac{1}{2}\int_{-h_b/2}^{h_b/2}\int_{0}^{L_e}\rho_b(\dot{u}_b^2+(\dot{w}_b+\dot{w}_F)^2)dxdz+\frac{1}{2}\int_{0}^{L_e}[(\frac{I_c}{L_c})\omega_c{}^2+(\frac{m_c}{L_c})v_c{}^2]dx \qquad (۱۳)$$

که ρ، ρ_t و ρ_b به‌ترتیب چگالی مربوط لایه میانی، لایه بالا و لایه پایین را نشان می‌دهند. همچنین w_F مربوط به تحریک پایه است که به‌صورت یکنواخت و ثابت به قسمت پایه تیر که گیردار است وارد می‌شود و همچنین توجه شود که تابعی از زمان است. همان طور که بیان شد، این جابجایی مربوط به تحریک خارجی است. بنابراین بعد از بسط توان‌ها در رابطه انرژی جنبشی، ترم‌هایی که شامل w_F هستند بعد از قرارگرفتن در رابطه لاگرانژ استخراج می‌شوند و در بردار نیرو قرار می‌گیرند. در رابطه ۱۳، انتگرال آخر مربوط به انرژی جنبشی جرم صلب مستقر روی بخش بدون میرایی تیر می‌شود و در آن I_c، m_c، v_c و ω_c به‌ترتیب ممان اینرسی، جرم، سرعت و سرعت زاویه‌ای این جرم هستند که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\omega_c=\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x},v_c=\sqrt{v_{cx}^2+v_{cz}^2} \qquad (۱٤)$$

که:

$$v_{cz}=\dot{w}_b+\dot{w}_F,\quad v_{cx}=\dot{u}_b\left(z=\frac{h_b}{2}\right)-h_g\left(\frac{d\dot{w}_b}{dx}\right), \qquad (۱۵)$$

و L_c طول جرم صلب و h_g فاصله مرکز جرم صلب را از خط میانی تیر پایه نشان می‌دهد. همچنین ممان اینرسی I_c با استفاده از رابطه $I_c=m_c r_g{}^2$ بر حسب شعاع ژیراسیون r_g قابل تعریف است. علاوه‌بر تحریک پایه در مساله حاضر، حالت اعمال مستقیم نیروی خارجی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. تغییرات کار نیروی خارجی طبق رابطه زیر قابل بیان است.

$$\delta w_{ext} = \int_0^{L_e} F(x,t)\delta w_t dx \quad (۱۶)$$

که در رابطه ۱۷، δw_t تغییرات میدان جابجایی لایه بالای تیر است. همچنین نیروی اعمالی خارجی طبق رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$F(x,t) = F_0 e^{I\omega t} \quad (۱۷)$$

در رابطه فوق، ω فرکانس نیروی هارمونیک خارجی است. همچنین F_0 نیرو در واحد طول است که به‌صورت یکنواخت به تمام نقاط تیر اعمال می‌شود.

۴- تشریح روش اجزاء محدود

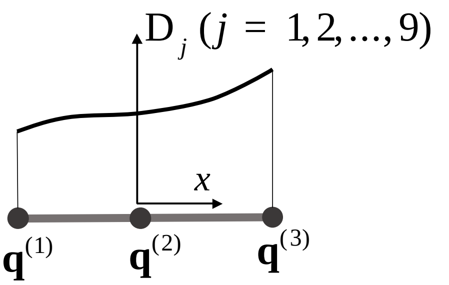
در ادامه برای تشریح روش اجزاء محدود، ابتدا مجهول‌های جابجایی برای بخش حاوی لایه میرایی مقید به‌صورت زیر به شکل مولفه‌های بردار Δ نوشته می‌شوند.

$$\Delta = [u_{b0}, w_{b0}, w_{b0,x}, u_0, u_1, u_{t0}, w_0, w_{t0}, w_{t0,x}] \quad (۱۸)$$

و برای بخش بدون لایه میرایی مقید شده، Δ_b به‌صورت زیر تعریف شده که حاوی مجهول‌های جابجایی بخش بدون میرایی است.

$$\Delta_b = [u_{b0}, w_{b0}, w_{b0,x}] \quad (۱۹)$$

تعداد مجهول‌های جابجایی همان طور که در روابط بالا مشاهده می‌شود، برای بخش حاوی میرایی و بدون میرایی به‌ترتیب ۹ و ۳ عدد هستند که با همان ترتیب چینش در ماتریس‌ها آورده شده‌اند. برای تعیین تابع وابستگی هر یک از مجهول‌های بردار، Δ به راستای طولی (x) از المان سه‌گرهی استفاده خواهد شد (شکل ۲).



شکل ۲) المان سه‌گرهی درنظرگرفته‌شده برای تیر با میرایی موضعی (بردار جابجایی هر یک از گره‌ها با $q^{(i)}$ نشان داده شده که شامل ۹ عضو است)

در شکل ۲، ξ نشان‌دهنده مختصات بی‌بعدشده هر المان است که رابطه آن با مختصات طولی برای المان n_eام مطابق با رابطه زیر است.

$$\xi = \left(\frac{2x}{L_e} - 1\right) - 2(n_e - 1) \quad (۲۰)$$

همچنین، $q^{(i)}$ بردار مقادیر گرهی مربوط به بردار ۹عضوی Δ را در گره iام هر المان نشان می‌دهد و لذا خود، برداری ۹تایی است. Δ_j نیز در شکل ۲، عضو jام بردار Δ را نشان می‌دهد که با استفاده از توابع شکل حاصل از درون‌یابی توابع چندجمله‌ای، مطابق رابطه زیر بر حسب ξ قابل بیان هستند.

$$\Delta = \mathrm{N}\mathrm{q} \quad (۲۱)$$

q بردار ۲۷عضوی از عبارات جابجایی سه گره است که با زیر هم قراردادن سه بردار $q^{(1)}$، $q^{(2)}$ و $q^{(3)}$ تشکیل می‌شود. همچنین N ماتریس با تعداد ۹ سطر و ۲۷ ستون است که مقادیر غیرصفر مربوط به ردیف‌های ۱، ۴، ۵، ۶، و ۷ آن مطابق با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$N_{(j)(9i-9+j)} = S_i^{(1)}(\xi), i = 1,2,3, j = 1,4,5,6,7 \quad (۲۲)$$

$S_i^{(1)}$ توابع شکل المان سه‌گرهی هستند. با توجه به اینکه مجهولات ردیف‌های یک و چهار تا هفت بردار Δ مربوط به عبارات جابجایی طولی لایه‌های بالا و پایین یا جابجایی عرضی لایه میانی بر مبنای نظریه برشی مراتب بالا هستند، توابع شکل $S_i^{(1)}$ برای این مجهولات به شکل تابع لاگرانژی و با پیوستگی C^0، در نظر گرفته شده که به علت سه‌گرهی‌بودن المان از مرتبه دو هستند. این توابع به شکل زیر به‌دست‌می‌آیند:

$$S_1^{(1)} = \frac{\xi^2-\xi}{2}, S_2^{(1)} = -\xi^2 + 1, S_3^{(1)} = \frac{\xi^2+\xi}{2} \quad (۲۳)$$

سایر اعضای بردار Δ، مربوط به عبارات جابجایی لایه‌های بالا و پایین در راستای ضخامت است که به علت استفاده از نظریه اویلر- برنولی با استفاده از توابع شکل هرمیتی (Hermitian) با پیوستگی C^1 تعریف می‌شوند. بر این اساس مقادیر غیرصفر ردیف‌های ۲، ۳، ۸ و ۹ ماتریس N به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$N_{(j)(9i-9+j)} = S_i^{(2)}(\xi), N_{(j)(9i-8+j)} = D_i^{(2)}(\xi),$$
$$N_{(j+1)(9i-9+j)} = \frac{2}{L_e}\frac{dS_i^{(2)}(\xi)}{d\xi}, N_{(j+1)(9i-8+j)} = \frac{2}{L_e}\frac{dD_i^{(2)}(\xi)}{d\xi}, i = 1,2,3, j = 2,3,8,9 \quad (۲۴)$$

که توابع شکل هرمیتی $S_i^{(2)}(\xi)$ و $D_i^{(2)}(\xi)$ برای المان سه‌گرهی به شکل چندجمله‌ای مرتبه ۵ هستند که مطابق زیر تعریف می‌شوند:

$$S_1^{(2)} = \frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2$$
$$S_2^{(2)} = \xi^4 - 2\xi^2 + 1 \quad (۲۵)$$
$$S_3^{(2)} = -\frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2$$

$$D_1^{(2)} = \frac{L_e}{8}(\xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2)$$
$$D_2^{(2)} = \frac{L_e}{2}(\xi^2 - 2\xi^3 - \xi) \quad (۲۶)$$
$$D_3^{(2)} = \frac{L_e}{8}(\xi^5 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^2)$$

برای بردار Δ_b که بردار جابجایی تیر پایه در المان‌های مستقر در بخش بدون میرایی تیر را نشان می‌دهد، شکل المان مربوطه همانند شکل ۲ خواهد بود، با این تفاوت که در این حالت بردارهای جابجایی در هر یک از سه گره، بردارهایی سه‌عضوی خواهند بود. بردار عبارات جابجایی گرهی نیز در این حالت با q_b نشان داده شده که از زیر هم قراردادن بردارهای جابجایی سه گره به‌دست آمده و لذا برداری ۹عضوی است. بردار Δ_b نیز در این حالت طبق رابطه $\Delta_b = N_b q_b$ قابل تعیین است که N_b ماتریس توابع شکل بوده و شامل ۳ سطر و ۹ ستون است. مقادیر غیرصفر ردیف اول این ماتریس طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(N_b)_{(j)(3i-3+j)} = S_i^{(1)}(\xi), i = 1,2,3, j = 1 \quad (۲۷)$$

که همان طور که مشخص است از توابع شکل لاگرانژی $S_i^{(1)}(\xi)$ در آن استفاده شده است. ردیف دوم و سوم این ماتریس نیز مربوط

به w_{b0} و $w_{b0,x}$ بوده و با استفاده از توابع هرمیتی به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$(N_b)_{(j)(3i-3+j)} = S_i^{(2)}(\xi), N_{(j)(3i-2+j)} = D_i^{(2)}(\xi), (N_b)_{(j+1)(3i-3+j)} = \frac{2}{L_e}\frac{dS_i^{(2)}(\xi)}{d\xi}, (N_b)_{(j+1)(3i-2+j)} = \frac{2}{L_e}\frac{dD_i^{(2)}(\xi)}{d\xi}, i = 1,2,3, j = 2,3 \quad (۲۸)$$

در نهایت بعد از تعریف مجهول‌های جابجایی و جایگذاری در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل، این روابط به اختصار به‌صورت زیر برای هر المان حاصل می‌شوند:

$$U^{(e)} = 1/2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_{ij}^{(e)} q_i(t) q_j(t) \quad (۲۹)$$

$$T^{(e)} = 1/2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}^{(e)} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \quad (۳۰)$$

که در این روابط، N برای بخش حاوی لایه میرایی مقید ۲۷ و برای بخش بدون میرایی ۹ است و همان طور که در شکل ۱ نمایش داده شده است، بخش بدون میرایی، شامل دو قسمت می‌شود که در دو طرف بخش حاوی میرایی قرار دارند. ماتریس‌های $\mathrm{K}^{(e)}$ و $\mathrm{M}^{(e)}$ نیز به‌ترتیب ماتریس‌های سفتی و جرم برای هر المان را نشان می‌دهند که عبارات مرتبط با آنها در حالت کلی و به‌ویژه برای المان حاوی میرایی مقید، عباراتی بسیار طولانی بوده و لذا قابل ارایه در اینجا نیست. با این حال به‌منظور روشن‌شدن شکل کلی این ماتریس‌ها، عبارات به‌دست‌آمده برای ماتریس المان بدون میرایی مقید و حاوی جرم متمرکز در زیر آورده شده است.

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{4E_b h_b}{L_e^2}\frac{d(N_b)_{1i}}{d\xi}\frac{d(N_b)_{1j}}{d\xi} + \frac{4E_b h_b^3}{3L_e^4}\frac{d^2(N_b)_{2i}}{d\xi^2}\frac{d^2(N_b)_{2j}}{d\xi^2}\right]d\xi, i,j = 1,2 \dots 9 \quad (۳۱)$$

$$M_{ij}^{(e)} = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1}\left\{m_{b1}(N_b)_{1i}(N_b)_{1j} + m_{b1}(N_b)_{2i}(N_b)_{2j} - \frac{2}{L_e}m_{b2}\left[(N_b)_{1i}\frac{d(N_b)_{2j}}{d\xi} + (N_b)_{1j}\frac{d(N_b)_{2i}}{d\xi}\right] + \frac{4}{L_e^2}m_{b3}\frac{d(N_b)_{2i}}{d\xi}\frac{d(N_b)_{2j}}{d\xi} + \frac{4h_b h_g m_c}{L_c L_e^2}\frac{d(N_b)_{2i}}{d\xi}\frac{d(N_b)_{2j}}{d\xi}\left(1 + \frac{h_g}{h_b} + \frac{h_b}{4h_g}\right) + \frac{m_c}{L_c}\left[(N_b)_{1i}(N_b)_{1j} + (N_b)_{2i}(N_b)_{2j}\right] - \frac{h_b m_c}{L_c L_e}\left[(N_b)_{1i}\frac{d(N_b)_{2j}}{d\xi} + (N_b)_{1j}\frac{d(N_b)_{2i}}{d\xi}\right]\left(1 + \frac{2h_g}{h_b}\right) + \frac{4I_c}{L_c L_e^2}\frac{d(N_b)_{2i}}{d\xi}\frac{d(N_b)_{2j}}{d\xi}\right\}d\xi \quad (۳۲)$$

که:

$$m_{bi} = \int_{-h_b/2}^{h_b/2} \rho_b z^{i-1} dz, i = 1,2,3 \quad (۳۳)$$

بدیهی است که برای المان‌های بدون جرم متمرکز، عبارات با ضریب m_c و I_c از رابطه ۳۲ حذف می‌شوند. برای بردار نیروی خارجی هر المان نیز می‌توان به کمک رابطه ۱۶ و رابطه $Q_i^{(e)} = \frac{\partial \delta w_{ext}}{\partial \delta q_i}$ به رابطه زیر برای عناصر غیرصفر بردار نیروی المان‌های حاوی میرایی مقید رسید.

$$[Q_{(9i-1)}^{(e)}, Q_{(9i)}^{(e)}] = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1}\left\{F(\xi,t) - \left[\frac{m_{t2}}{h} + \frac{2m_{t3}}{h^2} + m_{t1}\right]\ddot{w}_F\right\}[S_i^{(2)}(\xi), D_i^{(2)}(\xi)]d\xi, \quad (۳٤)$$

$$\left[Q_{(9i-8)}^{(e)}, Q_{(9i-7)}^{(e)}\right] = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1}\left\{-\left[\frac{m_{t2}}{h} + \frac{2m_{t3}}{h^2} + m_{t1}\right]\ddot{w}_F\right\}\left[S_i^{(2)}(\xi), D_i^{(2)}(\xi)\right]d\xi,$$

$$Q_{(9i-2)}^{(e)} = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1}\left\{-\left[\frac{4m_{t3}}{h^2} + m_{t1}\right]\ddot{w}_F\right\}S_i^{(1)}(\xi)d\xi,, i = 1,2,3$$

که در آن عبارات مربوط به اینرسی ناشی از تحریک پایه تیر و همچنین اثر جرم صلب ظاهرشده در انرژی جنبشی نیز افزوده شده است. واضح است که بردار نیروی $\mathrm{Q}^{(e)}$ نیز بردار ۲۷عضوی است. در صورتی که نیرو به بخشی بدون میرایی مقید اعمال شود نیز، عناصر غیرصفر بردار ۹عضوی طبق رابطه زیر قابل تعیین خواهد بود:

$$\left[Q_{(3i-1)}^{(e)}, Q_{(3i)}^{(e)}\right] = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1}\left\{F(\xi,t) - \left[\frac{m_c}{L_c} + m_{b1}\right]\ddot{w}_F\right\}\left[S_i^{(2)}(\xi), D_i^{(2)}(\xi)\right]d\xi, i = 1,2,3 \quad (۳۵)$$

در نهایت با اعمال رابطه لاگرانژ می‌توان ماتریس‌های مربوط به هر المان را محاسبه نمود. پس از آن نیز با مونتاژ ماتریس به‌دست‌آمده معادله حرکت نهایی به‌صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{q}} + \mathrm{K}\mathrm{q} = \mathrm{F} \quad (۳٦)$$

در رابطه ۳۶، بردار K ،M و F به‌ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی و بردار نیروی مونتاژشده را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که در این ماتریس‌ها شرط مرزی یک سر گیردار با حذف سطر و ستون مجهول‌های جابجایی مربوط به جابجایی‌های مقیدشده از ماتریس‌ها اعمال شده است. در ادامه با استفاده از ماتریس جرم و سختی، می‌توان فرکانس طبیعی و میرایی تیر را محاسبه نمود. برای به‌دست‌آوردن این مقادیر و با توجه به اینکه ماتریس سختی، خود تابعی از فرکانس ($\mathrm{K} = \mathrm{K}(\omega)$) است، برای محاسبه مقادیر ویژه، نیاز به اجرای فرآیند تکراری با مراحل زیر خواهد بود:

۱- ابتدا $\mathrm{K}(\omega)$ با حذف عبارات حاوی ω به شکل ماتریس با مقادیر عددی ثابت تبدیل می‌شود.

۲- مساله مقدار ویژه مربوط به ماتریس جرم و ماتریس سفتی حاصل، حل شده و فرکانس طبیعی (جذر قسمت حقیقی مقدار ویژه) محاسبه می‌شود.

۳- از فرکانسی که به‌دست آمد برای به‌روزرسانی K استفاده شده و مساله مقدار ویژه برای تعیین مقدار جدید فرکانس حل می‌شود.

۴- در صورتی که مقدار به‌دست‌آمده برای فرکانس با فرکانس مرحله قبل یکسان نباشد، گام ۳ با مقدار جدید فرکانس تکرار می‌شود. این تکرار تا زمانی انجام می‌شود که شرط اختلاف کمتر از ۰/۰۰۱% بین فرکانس مرحله قبل و فرکانس جدید برقرار شود.

بعد از دستیابی به همگرایی، میرایی (η_1) نیز از تقسیم بخش موهومی بر قسمت حقیقی مقدار ویژه به‌دست می‌آید. بردارهای ویژه حاصل از حل معادله مقدار ویژه نیز، ماتریس مودال روابط را تشکیل می‌دهند.

در ادامه، برای تعیین پاسخ به تحریک هارمونیک ($\mathrm{F} = \mathrm{F}_0\exp(I\omega t)$)، معادله مربوط به رابطه ۳۶ را می‌توان با استفاده از روش مستقیم یا روش بسط مودال حل کرد. منظور از حل مستقیم این است که برای به‌دست‌آوردن پاسخ فرکانسی، وارون ماتریس $[\mathrm{K} - \omega^2\mathrm{M}]$ را به‌طور مستقیم در بردار F_0 ضرب می‌کنیم. به علت نیاز به وارون‌کردن ماتریس که در صورت زیادبودن

تعداد المان‌ها دارای ابعاد بزرگی است، روش مستقیم نیازمند صرف زمان بیشتری است. برای حل از طریق بسط مودال که روش استفاده‌شده در این پژوهش است، بردار جابجایی‌های گرهی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{q} = \psi \mathrm{r} \qquad (۳۷)$$

که در این رابطه، ψ ماتریس مودال نرمال‌شده نسبت به ماتریس جرم است. نکته حائز اهمیت، استفاده از مدل کاهش‌یافته ماتریس مودال برای افزایش سرعت در محاسبات است. بدین معنی که تنها از تعدادی محدود از بردارهای ویژه برای تشکیل ماتریس ψ استفاده شده که در نتیجه آن تعداد ستون ماتریس کاهش می‌یابد. با جایگذاری رابطه ۳۷ در رابطه ۳۶ و بعد از ضرب‌کردن طرفین این معادله در ترانهاده ماتریس مودال (ψ^T)، این معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{\mathrm{r}} + \mathrm{diag}[{\omega_i}^2(1+\eta_i I)]\mathrm{r} = \psi^T \mathrm{F}_0 e^{I\omega t} \qquad (۳۸)$$

که در رابطه فوق، ω_i و η_i به‌ترتیب فرکانس طبیعی و میرایی سازه‌ای مود iام سیستم هستند. همچنین $\mathrm{diag}[X_i]$ نشان‌دهنده ماتریس قطری است که قطر iام آن برابر با X_i است. پاسخ رابطه ۳۸ بدون نیاز به محاسبه وارون ماتریس و به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\mathrm{r} = \mathrm{diag}[\frac{1}{{\omega_i}^2(1+\eta_i I)-\omega^2}]\psi^T \mathrm{F}_0 e^{I\omega t} \qquad (۳۹)$$

۵- نتایج عددی

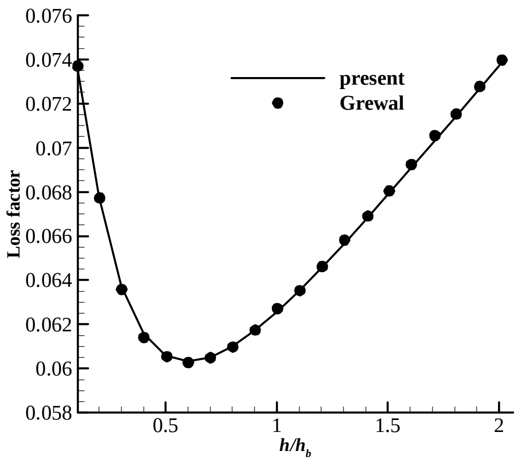
در این بخش، میرایی و پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار با لایه میرایی مقید موضعی، تحت تحریک پایه و برای ضخامت‌های مختلف لایه میرایی و لایه مقیدکننده مورد بررسی قرار گرفته و نحوه اثرگذاری دما و جرم صلب روی تغییر طرح بهینه و همچنین میزان اهمیت کرنش نرمال راستای ضخامت مورد توجه قرار گرفته است. برای اعمال شرط مرزی در بخش گیردار تیر، ستون و ردیف‌هایی از ماتریس مربوط به جابجایی و دوران در گره ابتدایی تیر که شامل $w_{b0.x}$، w_{b0} و u_{b0} *هستند* از ماتریس سفتی و جرم مونتاژشده حذف شده‌اند. علت اینکه درجات آزادی تنها شامل عبارات جابجایی تیر پایه شده، آن است که در تمام مطالعات عددی انجام‌شده، المان در نقطه ابتدایی تیر، حاوی لایه میرایی مقید نیست. همچنین، با توجه به اینکه مرز گیردار در نقطه ابتدایی تیر قرار دارد، ردیف و ستون‌های حذف‌شده از ماتریس‌های مونتاژشده، ردیف و ستون‌های اول تا سوم هستند. قبل از ارایه نتایج اصلی، مقایسه‌ای برای صحت‌سنجی روابط انجام شده است. این صحت‌سنجی به کمک نرم‌افزار انسیس و مقالات موجود انجام شده و سپس ماده ویسکوالاستیک مورد نظر برای پژوهش حاضر انتخاب شده است. به‌منظور این انتخاب، نمودارهای ماده ISD112 مورد مطالعه قرار گرفته و رفتار ماده ویسکوالاستیک در دماهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است که در بخش ۳-۲ آورده شد. مقایسه اولیه با پژوهشی که توسط *گروال*[17] انجام شد، صورت گرفت. در این پژوهش که بر تیرهای ساندویچی انجام‌شده، *گروال* از ماده نئوپرن که تابعی از فرکانس و دما است، به‌عنوان ماده ویسکوالاستیک استفاده کرد. خواص دینامیکی این ماده ویسکوالاستیک به‌صورت زیر است:

$$G(\omega) = \acute{G}(\omega)(1+\eta(\omega)I) \qquad (۴۰)$$

که،

$$\acute{G}(\omega) = 1.007 \times 10^{-3}(\omega/2\pi) + 1.386(\mathrm{MPa}) \qquad (۴۱)$$
$$\eta(\omega) = 1.608 \times 10^{-4}(\omega/2\pi) + 0.256$$

همچنین در این مقاله، لایه میرایی مقید به شکل پوشش سرتاسری (سرتاسری یعنی بخش میرایی مقید کل طول تیر را پوشش داده است) در نظر گرفته شده است. مقایسه انجام‌شده برای تغییرات ضریب میرایی با نسبت h/h_b در نمودار ۲ آمده است.



نمودار ۲) مقایسه میرایی محاسبه‌شده برای تیر با لایه میرایی مقید سرتاسری با نتایج مطالعه *گروال*[17]

همان طور که مشاهده می‌شود، نتایج از انطباق خوبی برخوردار هستند. همچنین در مقایسه‌ای دیگر، مساله مورد نظر برای تیر با بخش میرایی موضعی مقید که ۶۰% از کل تیر را پوشش داده است، مورد بررسی قرار گرفت. در این حالت، ابتدای لایه میرایی مقید در فاصله ۰/۱ از طول کل تیر (یعنی x_i =۰/۱L_b) قرار گرفته و ضخامت هسته بین ۱۰ تا ۳۰میلی‌متر در نظر گرفته شده است. همچنین هسته دارای مدول برشی ۰/۸۹۶مگاپاسکال و چگالی ۱۰۰۰کیلوگرم بر متر مکعب است. مقایسه فرکانس طبیعی سازه بر حسب هرتز برای ۵ مود اول با نرم‌افزار انسیس در جدول ۱ انجام شده که در این شبیه‌سازی، طول تیر پایه، یک متر در نظر گرفته شده است و ضخامت لایه پایه و رویه که از جنس آلومینیوم قرار داده شده، به‌ترتیب ۱۰ و ۵میلی‌متر است. ضریب پواسون برای هسته ۰/۴۹ و برای لایه رویه و پایه ۰/۳ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان‌دهنده نزدیکی پاسخ‌ها به‌ویژه در مودهای پایین‌تر است که البته در مودهای بالاتر، میزان اختلاف افزایش می‌یابد. این اختلاف که در مود پنجم به ۴% نیز می‌رسد را می‌توان مربوط به تفاوت در نوع المان استفاده‌شده در انسیس (المان SOLSH190) با المان استفاده‌شده در کار حاضر دانست. المان SOLSH190 در واقع

نوعی المان شِل (Shell) سه‌بعدی است که همانند المان SOLID نیازمند المان‌بندی‌سازه در راستای ضخامت است. بر این اساس تفاوت قابل توجهی بین نوع المان استفاده‌شده در مطالعه حاضر با المان انسیس وجود داشته و همین تفاوت، عامل اصلی در ایجاد اختلاف بین نتایج است.

جدول ۱) مقایسه نتایج با نرم‌افزار انسیس (فرکانس‌ها بر حسب هرتز)

ضخامت (میلی‌متر)	۱۰		۲۰		۳۰	
مود	انسیس	نتایج حاضر	انسیس	نتایج حاضر	انسیس	نتایج حاضر
۱	۵/۹۲	۵/۸۳	٦/۲۷	٦/۱۹	٦/۷۵	٦/٦۹
۲	٤۰/۷۸	٤۰/۰۸	٤۲/۸۲	٤۲/۲۲	٤۵/۵۲	٤٤/۹۰
۳	۱۱۷/۰۷	۱۱٤/٤۰	۱۲۲/۵۱	۱۲۰/۱۱	۱۲۹/۳۳	۱۲۷/۰۳
٤	۱۷۳/۹۳	۱۷۳/۰٤	۲۲۹/٦۰	۲۲۷/۲۰	۷۱۲۵٤	۲٤۷/۷٦
۵	۲۳۰/۱۷	۲۱۹/٦۵	۲٤۳/۲۲	۲۳٦/۲۵	۳۵٦/۲۵	۳۵۵/۸۳

اینک به بررسی نتایج عددی پژوهش حاضر می‌پردازیم. در این پژوهش درصد پوشش بخش میرایی موضعی و محل قرارگیری آن، به‌صورت مشابه مقایسه قبلی انجام‌شده با انسیس در نظر گرفته شده است. خواص فیزیکی لایه‌ها در جدول ۲ آورده شده است و مدول برشی لایه ویسکوالاستیک (هسته) نیز در بخش ۲-۳ ارایه شده است. همچنین، تیر پایه درنظرگرفته‌شده به طول ۳۰سانتی‌متر و ضخامت یک میلی‌متر است. ضخامت لایه مقیدکننده از ۰/۱ تا یک میلی‌متر و لایه ویسکوالاستیک از ۰/۱ تا ۲میلی‌متر و دما از ۲۰ تا ۶۵درجه سانتی‌گراد متغیر هستند. در ابتدا، مطالعه همگرایی برای تعیین تعداد المان کافی انجام شد که نتیجه آن در جدول ۳ ارایه شده است. مشخصات تیر بررسی‌شده در این جدول بدین قرار است: h=۲mm، h_t=۰/۴mm و h_b=۱mm؛ به علاوه سطح پوشش لایه میرایی مقید و مکان قرارگرفتن آن مشابه با مورد مقایسه‌شده با انسیس است. در جدول ۳ مقدار فرکانس طبیعی مود اول که در تکرار اول به‌دست آمده و همچنین مقدار همگراشده در انتهای فرآیند تکرار، به‌ازای تعداد متفاوت از المان‌ها ارایه شده است. نتایج نشان‌دهنده اختلاف کمتر از ۰/۶% بین فرکانس حاصل از ۲۰ المان و فرکانس حاصل از ۴۰ المان است. بر این اساس تعداد ۲۰ المان برای تعیین فرکانس مود اول کافی به نظر می‌رسد. در ضمن مقایسه بین فرکانس اولیه و فرکانس همگراشده، نشان‌دهنده اختلاف نزدیک به یک هرتز بین فرکانس حاصل از گام اول و فرکانس همگراشده است که به‌طور معمول در کمتر از ۵ تکرار حاصل می‌شود.

جدول ۲) خواص مکانیکی لایه‌ها

لایه	مدول الاستیسیته (GPa)	مدول برشی (GPa)	چگالی (kg/m^3)	ضریب پواسون
مقیدکننده و پایه	۲۰۷	$E_{t.b}/2(1+\nu_t)$	۷۸۰۰	۰/۳
میانی (هسته)	$2G(1+\nu)$	بخش ۲-۳	۹٦۸/۷۹	۰/٤۹

جدول ۳) بررسی همگرایی فرکانس طبیعی اول به‌ازای تعداد مختلف المان

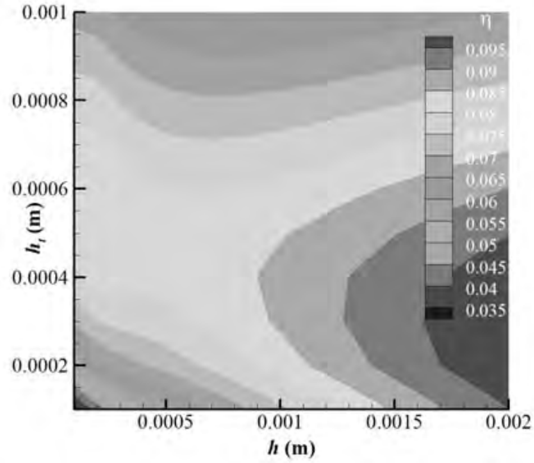
تعداد المان	فرکانس در تکرار اول (هرتز)	فرکانس همگراشده (هرتز)
۱۰	۹/۰	۱۰/٤۰۵
۱۵	۸/۸۰۹	۹/۸۸۸
۲۰	۸/۷۲٦	۹/٦۷۱
٤۰	۸/٦۷٤	۹/٦۱۵

اولین نتایج مربوط به مطالعات عددی کار حاضر در نمودار ۳ ارایه شده است که کانتور تغییرات ضریب میرایی مود اول با تغییر ضخامت هسته و لایه مقیدکننده در سه دمای ۲۰، ۲۵ و ۳۰درجه سانتی‌گراد را نشان می‌دهد. در دمای ۲۰درجه سانتی‌گراد، همان طور که در نمودار ۳- الف مشاهده می‌شود، مقدار میرایی بیشینه ۰/۰۹۵ است که از ضخامت ۰/۰۰۱۷ تا ۰/۰۰۲متر هسته و در ضخامت ۰/۱ تا ۰/۵میلی‌متر لایه رویه اتفاق می‌افتد. در دمای ۲۵درجه (نمودار ۳-ب) بیشینه میرایی ۰/۰۸ است که در همان محدوده مربوط به دمای ۲۰درجه رخ می‌دهد، با این تفاوت که بازه مربوط به ضخامت هسته از ۱/۶میلی‌متر شروع می‌شود. در نمودار ۳- ج که مربوط به دمای ۳۰درجه است، این میرایی به ۰/۰۷ کاسته می‌شود و این بازه در ضخامت ۱/۸ تا ۲/۰میلی‌متر هسته و ضخامت ۱/۵ تا ۴/۵میلی‌متر لایه مقیدکننده رخ می‌دهد. پیرامون میرایی حاصل در محدوده دمایی درنظرگرفته‌شده در نمودار ۳ را به‌طور کلی این‌طور می‌توان بیان کرد که نقطه بهینه در ضخامت‌های بالای لایه ویسکوالاستیک (۱/۹میلی‌متر) و ضخامت‌های پایین لایه مقیدکننده (۰/۳میلی‌متر؛ ناحیه اول) یا در ضخامت بیشتر لایه مقیدکننده (۰/۶میلی‌متر) با کاهش در ضخامت هسته (۰/۱ تا ۰/۲میلی‌متر) رخ می‌دهد که ناحیه دوم در دماهای ۲۵ و ۳۰درجه سانتی‌گراد مشهود است. اما در مجموع، محدوده مطلوب برای کاهش ارتعاشات، مربوط به ضخامت‌های بیشتر هسته است که پیرامون بازه ضخامت و میرایی آن بحث شد. علت این امر هم کمتربودن جرم اضافه‌شده در این ناحیه است؛ چراکه در این ناحیه جرم اضافه‌شده به‌خاطر لایه میرایی مقید برابر با ۳۰% از جرم تیر پایه بوده و بسیار کمتر از جرمی است که به‌ازای مقادیر بالای ضخامت لایه مقیدکننده به سیستم اضافه می‌شود.

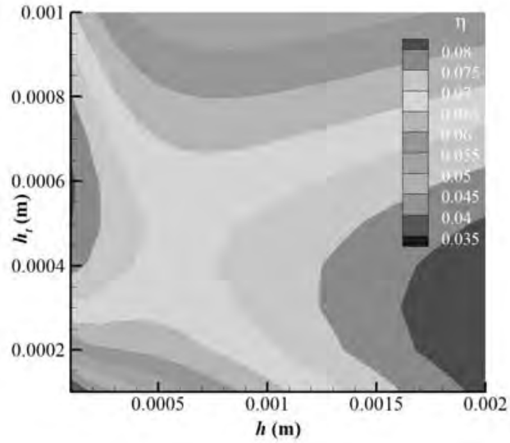
به‌طور کلی در مقایسه بین نتایج مربوط به سه دمای ۲۰، ۲۵ و ۳۰درجه، وسیع‌ترین محدوده و بالاترین مقدار میرایی ماده ISD112 در دمای ۲۰درجه سانتی‌گراد است و همچنین مشاهده می‌شود که هرچه دما بالاتر می‌رود، ناحیه با میرایی بیشینه کاهش می‌یابد. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات اندک دما می‌تواند موجب تغییر محدوده ناحیه بهینه شود. با این حال تفاوت‌های مشاهده شده در این نمودارها چندان قابل توجه نبوده و نحوه تغییرات میرایی با ضخامت برای هر سه دما شبیه به هم است.

به‌منظور بررسی اثر تغییرات بزرگ دما در ناحیه بهینه در ادامه، نمودار تغییرات میرایی با ضخامت هسته و لایه مقیدکننده برای دماهای ۴۵ و ۶۵ رسم شده که به‌ترتیب در نمودارهای ۴- الف و ب

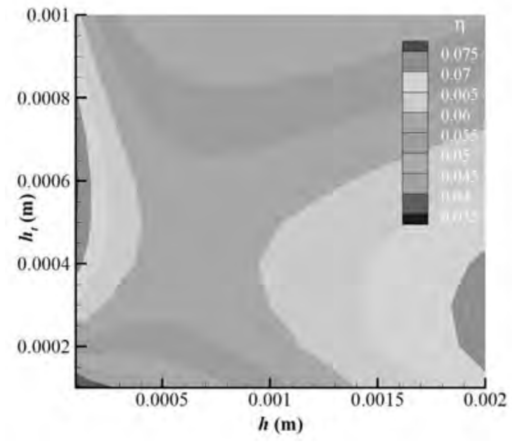
آورده شده است. در اینجا نیز همانند قبل با افزایش دما مقدار میرایی کاهش می‌یابد. به‌طور نمونه مشاهده می‌شود که در دمای ۴۵درجه مقدار بیشینه میرایی ۰/۰۵۸ و در دمای ۶۵درجه این مقدار برابر ۰/۰۴۲ است و در هر دو مورد فقط در ناحیه دوم، یعنی تنها برای ضخامت‌های پایین هسته اتفاق می‌افتد.



(الف)

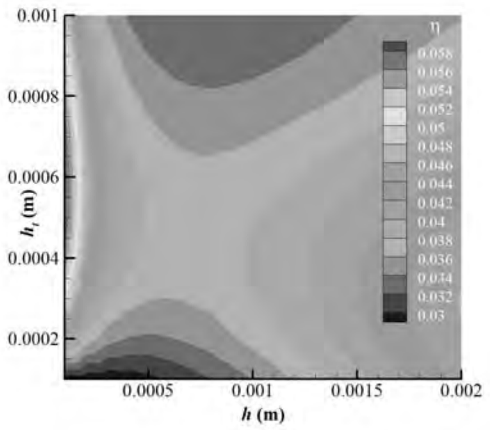


(ب)

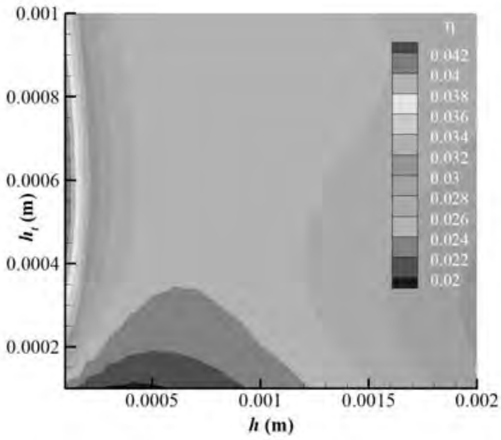


(ج)

نمودار ۳) تغییرات میرایی مود اول با ضخامت لایه‌های میانی و مقیدکننده در دماهای ۲۰ (الف)، ۲۵ (ب) و ۳۰درجه سانتی‌گراد (ج)



(الف)



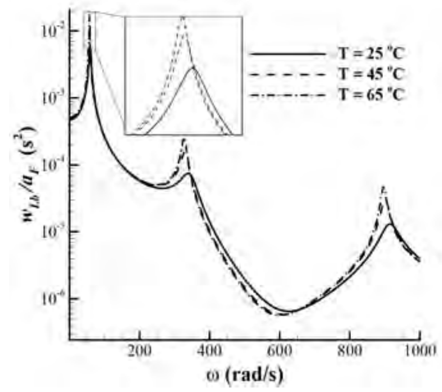
(ب)

نمودار ۴) تغییرات میرایی مود اول با ضخامت لایه‌های میانی و مقیدکننده در دماهای ٤٥ (الف) و (ب) ٦٥درجه سانتی‌گراد

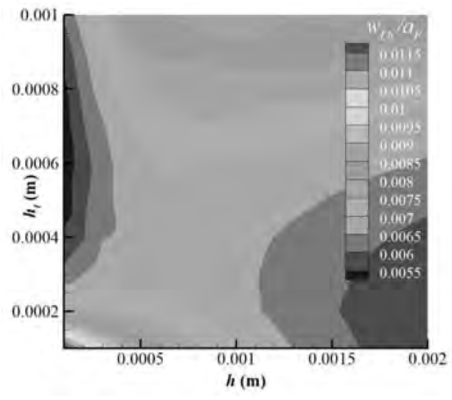
به‌منظور ارایه تصویری بهتر از اثر دما در کارآیی لایه میرایی مقید، دامنه پاسخ فرکانس تیر برای ضخامت هسته برابر با ۰/۰۰۱۷متر و ضخامت لایه بالایی برابر با ۰/۰۰۰۳متر و برای سه دمای ۲۵، ۴۵ و ۶۵درجه سانتی‌گراد در نمودار ۵ رسم شده است. در این نمودار، منظور از a_F و w_{Lb} به‌ترتیب، شتاب در تحریک پایه $(\ddot{w}_F)$ و جابجایی نوک تیر است. هر چه دما بالاتر می‌رود اثر لایه میرایی مقید بر کاهش ارتعاش پایین می‌آید که علت آن تغییرات مدول و ضریب اتلاف ماده ویسکوالاستیک با دما و فرکانس است که در بخش قبل در مورد آن توضیحات لازم ارایه شد. همچنین می‌توان از نمودار ۵ دریافت که اثر لایه میرایی مقید در مودهای بالاتر سازه بیشتر است.

موضوع دیگری که در این مطالعه بررسی شده، آن است که آیا جابجایی تیر در نقاطی که بیشترین میرایی مود اول را دارند، به کمترین حد خود می‌رسد؟. برای بررسی این موضوع، تغییرات جابجایی بیشینه نوک تیر با ضخامت هسته و لایه مقیدکننده برای دمای ۲۵درجه سانتی‌گراد در نمودار ۶ آورده شده است. محدوده به‌دست‌آمده طبق این نمودار برای کمترین میزان جابجایی در بازه ضخامت ۱/۶۵ تا ۲میلی‌متر برای هسته و ضخامت بین ۰/۱ تا

۰/۴۵میلی‌متر برای لایه رویه قرار دارد. اگرچه شکل کلی این نمودار بسیار نزدیک به نمودار مربوط به تغییرات مود میرایی اول است، اما تفاوت‌هایی نیز بین دو نمودار وجود دارد. این تفاوت به این شکل است که، میرایی بیشینه در هر دو ناحیه اول و دوم وجود دارد اما کمینه جابجایی فقط در ناحیه دوم رخ می‌دهد. علت این موضوع تاثیر مودهای دیگر به‌جز مود اول در پاسخ است. این بدان معنی است که از روی تغییرات میرایی مود اول همواره نمی‌توان برای تعیین دقیق نقطه با کمترین دامنه پاسخ استفاده کرد.



نمودار ۵) پاسخ فرکانسی در انتهای تیر برای سه دمای مختلف



نمودار ۶) تغییرات بیشترین مقدار دامنه جابجایی در نوک تیر با تغییرات ضخامت لایه‌های میانی و مقیدکننده (۲۵درجه سانتی‌گراد)

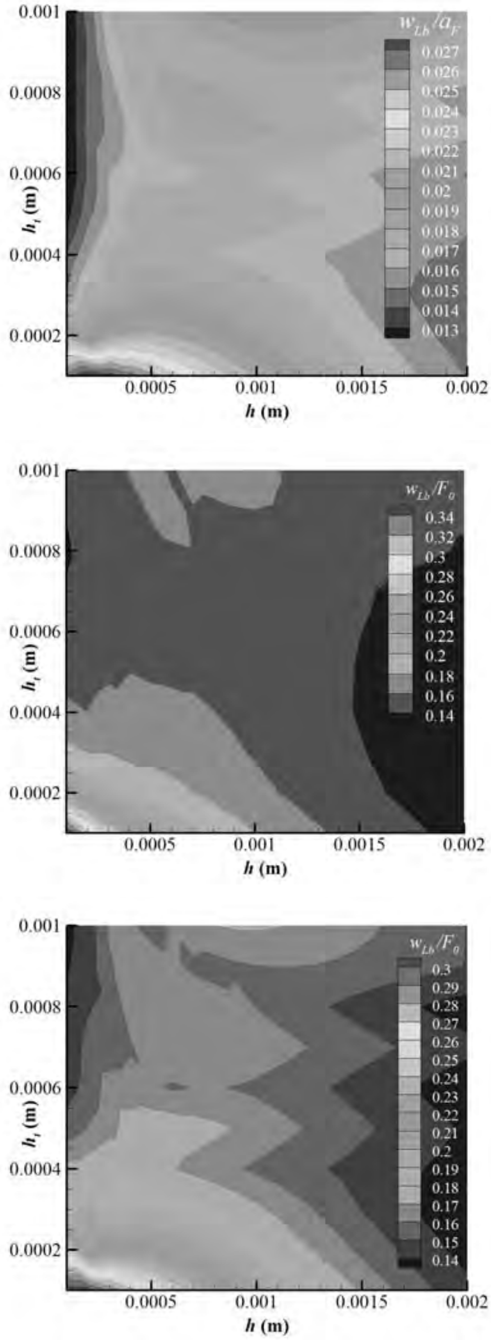
در ادامه، اثر جرم صلب در تغییر نقطه با کمترین دامنه پاسخ، مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور از جرمی برابر جرم تیر پایه در فاصله x_{i_b} =۰/۷۵Lb از لبه سمت چپ به طول L_e، شعاع ژیراسیون r_g =۰/۰۱ و ارتفاع h_g =۰/۰۱ که برحسب متر بیان شدند، استفاده شده است. مطالعه انجام‌شده در این ارتباط، بررسی تغییرات دامنه پاسخ بیشینه با ضخامت هسته و لایه بالا در حالت تحریک پایه و دمای ۲۵درجه است که در نمودار ۷- الف ارایه شده است. مشاهده می‌شود که محدوده بهینه در مقایسه با نمودار ۶ به ناحیه دوم انتقال پیدا کرده است. در این نمودار و در ناحیه دوم ضخامت لایه ویسکوالاستیک به کمتر از ۰/۲میلی‌متر کاهش پیدا کرده و ضخامت لایه رویه از ۰/۵ تا بیشتر از یک میلی‌متر تغییر می‌کند.

این موضوع نشانه تاثیر بسزای جرم صلب در تغییر نقطه بهینه طراحی است که در نتیجه دو عامل اصلی اتفاق می‌افتد. عامل اول تغییر خواص مودال و عامل دوم تغییر توزیع نیروی تحریک است که هر دو در نتیجه افزوده‌شدن جرم صلب به سازه تحت تحریک پایه ایجاد می‌شوند. به‌منظور بررسی بیشتر اثر جرم در تغییر ناحیه بهینه، مطالعه عددی دیگری با جایگزین‌کردن تحریک پایه با تحریک نیروی گسترده یکنواخت خارجی انجام شده که نتیجه آن در نمودارهای ۷- ب و ج داده شده است. نمودار ۷- ب مربوط به حالت بدون جرم صلب و نمودار ۷- ج مربوط به حالت با جرم صلب است که اندازه و مکان قرارگیری جرم صلب همانند مورد بررسی‌شده قبلی است. باید توجه داشت که در این حالت، عامل دوم یعنی تغییرات توزیع نیرو در اثر حضور جرم موضعی حذف شده و هر نوع تغییری در نتایج تنها ناشی از تغییرات خواص مودال سیستم خواهد بود. مقایسه بین این دو نمودار، نشان از تغییر قابل توجه نحوه تغییر دامنه پاسخ با ضخامت لایه‌های میانی و بالایی و همچنین تغییر ناحیه بهینه می‌دهد که این تغییر تنها ناشی از تغییر خواص مودال سیستم به علت عوض‌شدن توزیع جرم سازه است. همچنین مقایسه نمودارهای ۷- الف و ج و تفاوت‌های عمده‌ای که بین این دو نمودار قابل مشاهده است، نشان می‌دهد که نوع و توزیع تحریک اعمالی نیز می‌تواند موجب تغییرات قابل توجه در طراحی بهینه لایه میرایی مقید شود.

در نمودار ۸، نمودار دامنه پاسخ فرکانسی برای تیر با لایه میرایی مقیدشده موضعی که ضخامت هسته و لایه رویه آن به‌ترتیب ۱/۷ و ۰/۳میلی‌متر هستند، برای دو حالت بدون جرم و با جرم صلب و تحت تحریک نیروی خارجی گسترده یکنواخت در دمای ۲۵درجه سانتی‌گراد ارایه شده و با پاسخ سازه بدون میرایی مقید مقایسه شده است. طبق این نمودار، میزان کارآیی لایه میراکننده در کاهش دامنه ارتعاش در حالت بدون جرم صلب اندکی بیشتر از حالت با جرم صلب است.

آخرین بررسی انجام‌شده در این مطالعه مربوط به اثر احتساب کرنش نرمال راستای ضخامت در پاسخ فرکانسی و میرایی سازه در دماهای مختلف است. برای حذف اثر کرنش نرمال، عبارات w_1 و w_2 از رابطه ۱ حذف شده و در نتیجه، جابجایی راستای عمودی در هرسه لایه، یکسان در نظر گرفته شده است. با این کار تعداد جابجایی‌های گرهی المان‌های حاوی میرایی مقید از ۹ به ۶ کاهش پیدا می‌کند. ضخامت هسته برای این بررسی، برابر با ۲میلی‌متر و ضخامت لایه بالا و پایین برابر با یک میلی‌متر در نظر گرفته شده‌اند. مقایسه بین نمودارهای پاسخ فرکانسی در نمودار ۹ ارایه شده است که نشان‌دهنده افزایش جزیی دامنه پاسخ در نقطه تشدید، به‌ازای حذف اثر کرنش نرمال است. این افزایش در مودهای بالاتر، البته مقدار بیشتری دارد. اثر کرنش نرمال، همچنین در دمای بالاتر (دمای ۸۰درجه) بیشتر از دمای پایین‌تر (دمای ۲۵درجه) است که در واقع، ناشی از کاهش مدول برشی ماده ویسکوالاستیک با افزایش دما است. در نمودار ۱۰ نیز تغییرات میرایی مود اول با ضخامت هسته

برای سه دمای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته که در هر سه دما، احتساب کرنش نرمال راستای ضخامت، موجب افزایش میزان میرایی پیش‌بینی‌شده برای سازه شده است. در این نمودار نیز بیشترین تفاوت مربوط به بالاترین دما است. ضمن اینکه با افزایش ضخامت هسته، میزان خطای ناشی از حذف کرنش نرمال بیشتر شده، به‌طوری که خطا از حدود ۱۰% در ضخامت‌های پایین هسته به حدود ۲۰% در ضخامت‌های بالا تغییر می‌کند.

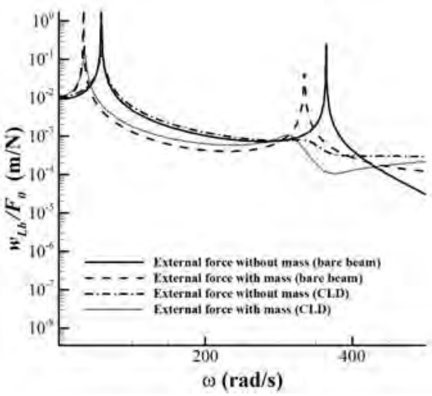


(الف)

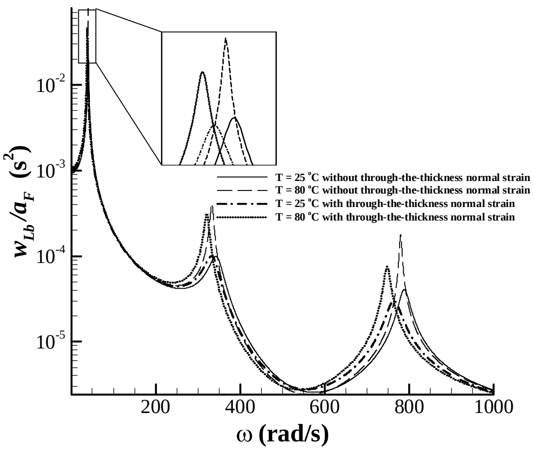
(ب)

(ج)

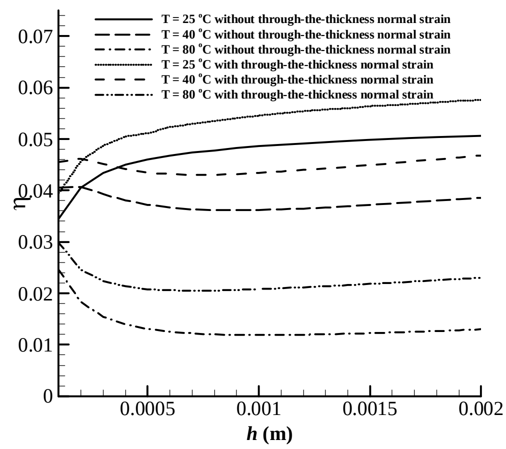
نمودار ۷) تغییرات بیشترین مقدار دامنه جابجایی در نوک تیر با تغییرات ضخامت لایه میانی و لایه بالایی در دمای ۲۵درجه سانتی‌گراد (الف) همراه جرم صلب تحت تحریک پایه (ب)، تحت تحریک با نیروی یکنواخت هارمونیک و بدون جرم صلب و (ج) تحت تحریک با نیروی یکنواخت هارمونیک و همراه با جرم صلب



نمودار ۸) دامنه پاسخ فرکانسی برای تیر همراه بخش میرایی مقید و بدون آن با جرم صلب (۲۵درجه سانتی‌گراد)



نمودار ۹) تغییرات پاسخ فرکانسی نوک تیر در اثر حذف کرنش نرمال راستای ضخامت در دماهای مختلف



نمودار ۱۰) اثر حذف کرنش راستای ضخامت در تغییرات میرایی با ضخامت هسته به‌ازای مقادیر مختلف دما

۶- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر تغییرات میرایی و پاسخ فرکانسی تیر با ضخامت لایه میرایی و لایه مقیدکننده، برای دماهای مختلف و تحت اثر توزیع جرم متفاوت، به کمک حل عددی المان محدود مورد بررسی

قرار گرفت. برای مدل‌سازی هسته از نظریه مرتبه بالا و برای لایه رویه و پایه مدل اویلر- برنولی استفاده شد و کرنش نرمال راستای ضخامت برای هسته نیز در نظر گرفته شد. در بررسی اولیه و در پاسخ به این سوال که تغییرات دما چه تاثیری در محدوده بهینه میرایی دارد؟، مشخص شد که برای ماده ویسکوالاستیک استفاده‌شده در این پژوهش، بیشترین میرایی و همچنین بیشترین مساحت از محدوده با میرایی بیشینه در دماهای کمتر رخ می‌دهد. سوال دیگری که در این مطالعه بدان پرداخته شد آن است که آیا محدوده‌ای که در آن بیشینه جابجایی تیر به کمترین مقدار خود می‌رسد در محدوده‌ای رخ می‌دهد که بیشینه میرایی در آن رخ داده است؟. برای بررسی این موضوع، نمودار تغییرات دامنه پاسخ بیشینه تیر تحت تحریک پایه هارمونیک با نمودار تغییرات میرایی مود اول مقایسه شد که نتایج نشان‌دهنده تفاوت‌های کوچک اما قابل توجه در محدوده بهینه طراحی به‌دست‌آمده از دو نمودار بود. این تفاوت نشان می‌داد که بیشینه جابجایی، علی‌رغم این که بیشتر متاثر از میرایی مود اول است، اما مودهای دیگر نیز در آن بی‌تاثیر نیستند و لذا برای انجام محاسبات با دقت کافی نیاز به درنظرگرفتن مودهای بالاتر خواهد بود. در ادامه، تاثیر جرم صلب روی تیر بر ناحیه با کمینه دامنه جابجایی مورد مطالعه قرار گرفت که نشان‌دهنده اثر بسیار زیاد آن در نحوه تغییرات دامنه پاسخ با ضخامت لایه‌های میانی و بالایی و همچنین تغییر ناحیه بهینه بود. طبق نتیجه این بررسی، در صورت اضافه‌شدن تجهیزات که با جرم صلب در کار حاضر مدل شده، نیاز به بازبینی در طراحی لایه میرایی مقید خواهد بود. بررسی انجام‌شده برای تعیین میزان تاثیر کرنش راستای ضخامت در دماهای مختلف نیز نشان‌دهنده اختلاف ۱۰ تا ۲۰درصدی در میرایی محاسبه‌شده برای نمونه‌های مورد مطالعه بود. این اختلاف به‌ویژه در دماهای بالاتر و برای ضخامت‌های بیشتر لایه میانی دارای مقادیر بیشتری بود.

تشکر و قدردانی: نویسندگان این مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را از دانشگاه شهید بهشتی به دلیل حمایت از این پژوهش اعلام می‌دارند.

تاییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: سعید محمودخانی (نویسنده اول)، روش‌شناس/پژوهشگر کمکی/نگارنده بحث (۵۰%)؛ سینا کلبادی حاجیکلائی (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰%)

منابع مالی: این تحقیق هیچ گونه منابع مالی دریافت نکرده است.

منابع

1- Mead DJ, Markus S. The forced vibration of a three layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. Vibration Acoust. 1969;10(2):163-175.
2- Lall AK, Asnani NT, Nakra BC. Damping analysis of partially covered sandwich beams. Journal of Sound and Vibration. 1988;123(2):247-259.
3- Cai C, Zheng H, Liu GR. Vibration analysis of a beam with PCLD Patch. Applied Acoustics. 2004;65(11):1057-1076.
4- Gao JX, Liao WH. Vibration analysis of simply supported beams with enhanced self-sensing active constrained layer damping treatments. Journal of Sound and Vibration. 2005;280(1-2):329-357.
5- Kant T, Swaminathan K. Analytical solution for free vibrations for laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. Composite Structures. 2001;53(1):73-85.
6- Frostig Y, Thomson OT. High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. International Journal of Solids and Structures. 2004;41(5-6):1697-1724.
7- Frostig Y, Baruch M. High-order buckling analysis of sandwich beams with transversely flexible core. Journal of American Society of Civil engineering. 1993;119(3):476-495.
8- Frostig Y. Buckling of sandwich panels with a flexible core-high-order theory. International Journal of Solids and Structures. 1998;35(3-4):183-204.
9- Frostig Y, Baruch M, Vilnay O, Sheinman I. High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core. Journal of American Society of Civil Cngineering. 1992;118(5):1026-1043.
10- Frostig Y, Baruch M. Free vibration of sandwich beams with a transversely flexible core: A high order approach. Journal of Sound and Vibration. 1994;176(2):195-208.
11- Khezrian R, Jafari AA, Khalili SMR. Forced vibration of a sandwich panel with composite layers and a FGM core. Aerospace Mechanics Journal. 2010;6(3):83-95. [Persian]
12- Hui Y, Giunta G, Belouettar S, Huang Q, Hu H, Carrera E. A free vibration analysis of three-dimensional sandwich beams using hierarchical one-dimensional finite elements. Composites Part B: Engineering. 2017;110:7-19.
13- Drake ML. Damping properties of various materials [Internet]. Dayton: University of Dayton Research Institute; 1989 [cited 2018 July 2]. Available from: https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/640465.pdf
14- Sher BR, Moreira RAS. Dimensionless analysis of constrained damping treatments. Composite Structures. 2013;99:241-254.
15- Hamdaoui M, Robin G, Jrad M, Daya EM. Optimal design of frequency dependent three-layered rectangular composite beams for low mass and high damping. Composite Structures. 2015;120:174-182.
16- Huang Z, Qin Z, Chu F. Damping mechanism of elastic-viscoelastic-elastic sandwich structures. Composite Structures. 2016;153:96-107.
17- Grewal JS. Vibration and thermal analysis and optimum design of viscoelastic sandwich beam [Dissertation]. Montréal: Concordia University; 2011.