



Dynamic Analysis and Motion Control of a Spherical Robot on Non-Flat Surfaces

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Aalipour M.¹ MSc,
Mokhtarian A.*¹ PhD,
Karimpour H.² PhD

How to cite this article

Aalipour M, Mokhtarian A, Karimpour H. Dynamic Analysis and Motion Control of a Spherical Robot on Non-Flat Surfaces. Modares Mechanical Engineering. 2020;20(3):659-667.

ABSTRACT

Spherical robots are the mobile robots with spherical shapes equipped to an internal drive mechanism that moves on the ground due to their external shell rolling. In this research, first, a pendulum spherical robot is modeled, then using the Lagrange method, dynamic equations of plane motion of robot on the non-flat surface are derived. Considering the scarcity of the number of operators relative to the number of degrees of freedom of the spherical robot, designing of a non-linear controller is performed based on feedback linearization techniques. Therefore, regarding non-confirm initial conditions on the trajectory, parametric uncertainty and disturbance torque on the robot, the performance of the system has been investigated. By selecting the appropriate rotation trajectory, the robot motion is simulated in MATLAB software and in following the pendulum rotation angle and actuating torque are obtained. The results indicate that the designed controller has proper and resistant performance in tracking selected trajectory for sphere shell rotation during moving on a non-flat surface.

Keywords Spherical Robot; Non-Flat Surface; Motion Equations; Non-Linear Control; Parametric Uncertainty

¹Mechanical Engineering Department, Mechanical Engineering Faculty, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

²Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, University of Isfahan, Isfahan, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Mechanical Engineering Faculty, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

Phone: +98 (31) 33660011

Fax: -

mokhtarian@iaukhsh.ac.ir

Article History

Received: July 13, 2018

Accepted: April 24, 2019

ePublished: March 01, 2020

CITATION LINKS

[1] Introducing the "Sphericle": An experimental testbed for research and teaching in non-holonomy [2] Motion control of a spherical mobile robot [3] Design experiments and motion planning of a spherical rolling robot [4] Dynamic trajectory planning of a spherical mobile robot [5] Motion control of spherical robot based on conservation of angular momentum [6] Dynamics modeling of spherical robot with arms by using Kane's Method [7] Design and analysis of a spherical mobile robot [8] Gyroscopic stability analysis of a rolling robot [9] Stabilization and path following of spherical robot [10] Dynamic Modeling and trajectory planning for a mobile spherical robot with a 3Dof inner mechanism [11] Omnidirectional locomotion control of a pendulum driven spherical robot [12] Controlled motion of a spherical robot with feedback. I [13] A Semi-manual master-slave algorithm for control of flexible micro-macro manipulators [14] Engineering mechanics: Dynamics

تحلیل دینامیکی و کنترل حرکت یک ربات کروی روی سطوح غیرتخت

محمد عالی‌پور MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، ایران

علی مختاریان* PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، ایران

حسین کریم‌پور PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

ربات کروی به ربات‌های سیار کروی شکل مجهز به مکانیزم محرک داخلی که روی زمین بر اثر غلتیدن پوسته خارجی‌شان حرکت می‌کنند، اطلاق می‌شود. در این تحقیق، ابتدا یک نمونه ربات کروی آونگی، مدل‌سازی شد و سپس به تحلیل دینامیکی و استخراج معادلات حرکت صفحه‌ای ربات بر مسیره‌های غیرتخت صفحه‌ای به روش لاگرانژ پرداخته شده است. همچنین با در نظر داشتن کمبود تعداد عملگر نسبت به تعداد درجات آزادی ربات کروی، طراحی یک کنترل‌کننده غیرخطی، مبتنی بر روش‌های خطی‌سازی به کمک فیدبک انجام گرفته است. پس از آن با در نظر گرفتن شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر، نامعینی پارامتری و نیز گشتاور اغتشاشی بر سیستم به بررسی عملکرد کنترل‌کننده پرداخته شده است. با انتخاب مسیر مناسب برای حرکت ربات، به شبیه‌سازی و حل عددی معادلات حرکت ربات در نرم‌افزار متلب پرداخته و زوایای چرخشی آونگ و گشتاور تولی شده توسط عملگر به دست آمده است. نتایج حاصل، گویای عملکرد مطلوب و مقاوم کنترل‌کننده در دنبال کردن مسیر تعیین شده برای چرخش پوسته کروی ربات حین عبور بر سطح غیرتخت انتخاب شده، است.

کلیدواژه‌ها: ربات کروی، سطح غیرتخت، معادلات حرکت، کنترل غیرخطی، نامعینی پارامتری

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۲

*نویسنده مسئول: mokhtarian@iaukhsh.ac.ir

۱- مقدمه

در میان انواع مختلف ربات‌های سیار، ربات‌های کروی در پانزده سال اخیر به‌طور فزاینده‌ای مورد توجه محققین واقع شده‌اند. ربات کروی به ربات‌های سیار کروی شکل مجهز به مکانیزم محرک داخلی که روی زمین بر اثر غلتیدن پوسته خارجی‌شان حرکت می‌کنند، اطلاق می‌شود. به‌طور کلی حرکت ربات‌های کروی ناشی از ایجاد تغییر موقعیت مرکز جرم آنها است. این ربات‌ها دارای مزایای ویژه‌ای هستند. آنها فقط یک نقطه تماسی با زمین دارند که اجازه می‌دهد حرکت ربات با حداقل اصطکاک و با کمترین میزان مصرف انرژی انجام شود. اجزای داخلی ربات‌های کروی نظیر تجهیزات و حسگرهای درونی از شوک‌های خارجی و گرد و غبار توسط پوسته محافظت می‌شود. علاوه بر این به دلیل بسته‌بودن بدنه ربات، این ربات‌ها در برخورد با محیط‌های مایع و گاز، نفوذناپذیر و مقاوم بوده و همچنین در صورت سقوط از ارتفاع، به دلیل شکل کروی دچار

واژگونی نمی‌شوند که این معضل برای اغلب ربات‌ها از جمله ربات‌های انسان‌نما بسیار چالش‌انگیز است. پوسته کروی فضای مناسبی برای قرارگرفتن اجزای داخلی فراهم کرده و می‌تواند به‌عنوان یک محافظ خوب برای مراقبت از اجزای داخلی عمل کند. از این رو، این نوع ربات اغلب در تحقیقات فضایی و کاوش در مناطق نظامی و ناشناخته استفاده می‌شود.

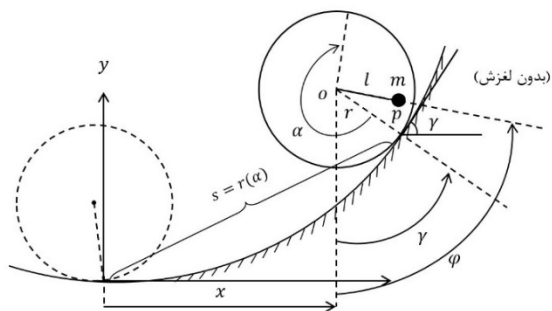
تا به امروز، تحقیقات گسترده‌ای در رابطه با طراحی، مدل‌سازی، شبیه‌سازی و کنترل حرکت ربات‌های کروی به انجام رسیده است. بیکیچی و همکاران از یک ارابه با دو چرخ به‌عنوان مکانیزم محرک برای به حرکت درآوردن پوسته کروی ربات استفاده کردند [1]. هالم و همکاران از یک چرخ درون کره برای حرکت دادن کره استفاده کردند [2]. باتاچاریا و آگراوال، یک ربات کروی با ساختار داخلی کاملاً متقارن را ابداع کردند. روتورهای نصب‌شده در پوسته کروی این ربات متقارن بوده و با استفاده از اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای، ربات را به حرکت در می‌آورد [3]. ژان و همکاران، یک ربات کروی را مورد بررسی قرار دادند که مکانیزم محرک آن یک آونگ دو درجه آزادی بود. معادلات حرکت این ربات با استفاده از معادلات بولتزمان و با فرض شبه استاتیکی بودن آونگ به دست آمده و برای حرکت روی مسیر دایره‌ای حل شده است [4]. شو و همکاران از اصل پایستگی مومنتم زاویه‌ای برای حرکت دادن یک ربات کروی استفاده کرده‌اند. معادلات حرکت این ربات برای حرکت روی خط مستقیم استخراج و حل شده است [5]. ژانگ و همکاران یک ربات کروی را مورد مطالعه قرار داده و معادلات حرکت را با استفاده از روش کین استخراج کرده‌اند. دینامیک مستقیم ربات با استفاده از معادلات حرکت در آن تحقیق بررسی شده است [6]. جوشی و همکاران به طراحی و تجزیه و تحلیل یک ربات کروی و سپس به مدل‌سازی آن در فضای سه‌بعدی پرداختند [7]. کریم‌پور و همکاران به بررسی پایداری ژيروسکپی حرکت غلتشی یک ربات کروی پرداختند [8]. لیو و همکاران به مطالعه حرکت ربات کروی با نوع جدیدی از محرک پرداخته و سپس پایداری آن را مورد ارزیابی قرار دادند [9]. عزیززی و نادری به مدل‌سازی دینامیکی و برنامه‌ریزی مسیر حرکت پهینه یک ربات کروی پرداختند [10]. مورالیدهاران و همکاران، حرکت همه جانبه یک ربات کروی آونگی را با استفاده از روشی مبتنی بر خطی‌سازی جزئی به کمک فیدبک برای سیستم‌های کم‌عملگر کنترل کردند. دو عملگر دورانی تعبیه‌شده در داخل پوسته، چرخش آونگ را در دو راستا برای پیشروی و حرکت جانبی ربات هدایت می‌کنند [11]. ایوانو و همکاران مدلی از یک ربات کروی با یک عملگر آونگی، کنترل‌شده با استفاده از یک سیستم بازخورد را ارائه کرده و پایداری آن را مورد بررسی قرار دادند [12].

با توجه به بررسی فعالیت‌ها و تحقیقات گذشته، تاکنون تحقیقی در رابطه با دینامیک و کنترل حرکت ربات کروی روی سطوح غیرتخت در حالت صفحه‌ای به انجام نرسیده است. این در حالی است که ضرورت پرداختن به چنین پژوهشی با توجه به موارد کاربردی آن در عبور ربات‌های کروی روی سطوح غیرتخت طی

شکل ۱، نشان‌دهنده یک ربات کروی با ساختار کلی محرک آونگی است که دوران آونگ در دو راستای مستقل باعث پیشروی و حرکت جانبی ربات می‌شود. البته در این پژوهش صرفاً حرکت پیشروی ربات و بدون درنظرگرفتن امکان حرکت جانبی، به کمک دوران آونگ در یک راستای یک حرکت صفحه‌ای، مورد تحلیل دینامیکی و کنترلی قرار گرفته است. در ادامه به ارایه مدل دینامیکی و استخراج معادلات حرکت صفحه‌ای ربات پرداخته شده است.

۳- مدل‌سازی ربات روی سطح غیرتخت

به‌منظور شبیه‌سازی حرکت و همچنین کنترل حرکت ربات کروی آونگی ابتدا به تحلیل دینامیک سیستم پرداخته می‌شود. حرکت صفحه‌ای ربات کروی روی یک سطح غیرتخت دلخواه با معادله کلی $y = f(x)$ (در دستگاه مختصات $x - y$) مطابق شکل ۲ را در نظر بگیرید. با توجه به شکل ۲، زاویه چرخش پوسته، φ زاویه چرخش آونگ و γ زاویه شیب متغیر مسیر (زاویه خط مماس بر سطح شیب‌دار در هر لحظه) است. α و φ را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافته سیستم در نظر گرفته و معادلات حرکت ربات بر حسب این دو مختصه و مشتقات آنها پس از محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و جایگذاری در روابط لاگرانژ مطابق آنچه در پیش است، بیان خواهد شد.



شکل ۲) نمایی از حرکت ربات کروی روی سطح غیرتخت

۳-۱ انرژی جنبشی سیستم

همان‌طور که می‌دانیم با درنظرگرفتن معادله مسیر حرکت مرکز ربات کروی به‌صورت تابع کلی $y = f(x)$ ، دیفرانسیل جابجایی مرکز ربات در مختصات دکارتی به‌صورت رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (1)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = F(x) \quad (2)$$

همچنین رابطه دیفرانسیلی بین جابجایی مرکز ربات و چرخش پوسته به‌صورت رابطه (۳) است.

$$ds = r da \quad (3)$$

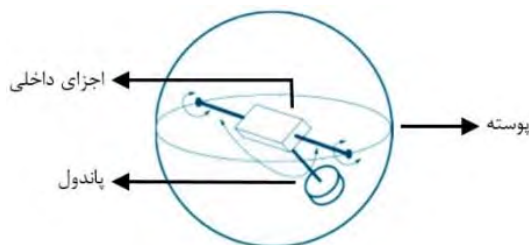
با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۳) و ترکیب با رابطه (۲) داریم:

$$F(x) = ra \quad (4)$$

کاوش‌های مختلف نظامی، فضایی و غیره واضح و مبرهن است. از این رو در ادامه اقدامات پیشین محققین، در تحقیق حاضر نیز تحلیل دینامیکی و کنترل حرکت صفحه‌ای یک ربات کروی آونگی روی مسیرهای غیرتخت به انجام رسیده است. در این راستا، ابتدا به مدل‌سازی دینامیکی و استخراج معادلات حرکت صفحه‌ای ربات کروی آونگی روی سطوح غیرتخت پرداخته شده است و پس از طراحی یک کنترل‌کننده غیرخطی، شبیه‌سازی حرکت ربات در نرم‌افزار متلب انجام شده است. سپس با درنظرگرفتن نامعینی‌های پارامتری و ساختاری بر سیستم، به بررسی میزان مقاومت‌بودن کنترل‌کننده پرداخته شده است. لازم به ذکر است با توجه به کمبود تعداد عملگر در این ربات، طراحی کنترل‌کننده غیرخطی مبتنی بر خطی‌سازی به کمک فیدبک و به‌کارگیری روش به‌کاررفته در مرجع [13] (برای کنترل ربات‌های میکرو-ماکرو) به انجام رسیده است.

۲- مدل ساختاری ربات کروی

ربات کروی مورد مطالعه در این تحقیق از نوع آونگی است. اجزای اصلی تشکیل‌دهنده این ربات کروی شامل یک موتور، پوسته ربات، مجموعه اجزای داخلی ربات و آونگ محرک است (شکل ۱). موتور در محل مفصل بین آونگ و اجزای داخلی ربات واقع شده است و با ایجاد حرکت دورانی آونگ و تغییر موقعیت مرکز جرم ربات کروی منجر به پیشروی ربات می‌شود.



شکل ۱) ساختار کلی ربات کروی آونگی

در این پژوهش معادلات دینامیکی ربات را با درنظرگرفتن فرضیات زیر به‌دست خواهیم آورد:

- ۱- ربات حین حرکت روی مسیر دچار لغزش نمی‌شود؛
- ۲- از نیروی اصطکاک بین اجزای داخلی ربات صرف‌نظر می‌شود؛
- ۳- مرکز جرم مجموعه اجزای داخلی (بدون احتساب آونگ) ربات روی مرکز هندسی کره در نظر گرفته می‌شود؛
- ۴- شرط عدم جدایش از زمین طی حرکت ربات برقرار است؛
- ۵- آونگ به‌صورت یک جرم متمرکز که به‌وسیله یک لینک بدون جرم به مرکز هندسی پوسته متصل است، مدل می‌شود؛
- ۶- پوسته کروی با ضخامت کم و همگن است؛ یعنی توزیع جرم در پوسته یکنواخت و متقارن است.

با حل معادله (۴)، x به صورت تابعی از α به صورت کلی مطابق رابطه (۵) قابل بیان است.

$$x = g(\alpha) \quad (5)$$

همچنین برای زاویه شیب مسیر در موقعیت x خواهیم داشت:

$$\tan(\gamma) = f'(x) \quad (6)$$

بنابراین با ترکیب با رابطه (۵) برای زاویه شیب مسیر داریم:

$$\gamma = \tan^{-1}(f'(x)) = \tan^{-1}(f'(g(\alpha))) = h(\alpha) \quad (7)$$

رابطه (۷) گویای آن است که می توان زاویه γ را بر حسب α در هر لحظه بیان کرد. مطابق رابطه (۸) انرژی جنبشی ربات کروی به صورت مجموع انرژی جنبشی پوسته (T_s) ، انرژی جنبشی آونگ (T_p) و همچنین انرژی جنبشی اجزای داخلی سیستم (T_i) قابل بیان است.

$$T = T_s + T_p + T_i \quad (8)$$

انرژی جنبشی پوسته کروی با استفاده از رابطه (۹) تعیین می شود.

$$T_s = \frac{1}{2}(m_s r^2 + I_s) \dot{\alpha}^2 \quad (9)$$

که در آن، m_s جرم پوسته ربات، I_s ممان اینرسی پوسته حول مرکز جرم آن و r شعاع پوسته ربات است. همچنین انرژی جنبشی آونگ از طریق رابطه (۱۰) قابل محاسبه است.

$$T_p = \frac{1}{2} m_p V_p^2 = \frac{1}{2} m_p \vec{V}_p \cdot \vec{V}_p \quad (10)$$

که در آن، m_p جرم آونگ و \vec{V}_p بردار سرعت جرم نقطه ای متصل به آونگ بوده که بر حسب مختصات تعمیم یافته و مشتقات آن مطابق رابطه (۱۱) محاسبه می شود [14].

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{op} = r \dot{\alpha} \hat{i} + (-\dot{\varphi}) \hat{k} \times (-l \cos(\varphi - h(\alpha)) \hat{j} + l \sin(\varphi - h(\alpha)) \hat{i}) = (r \dot{\alpha} - l \dot{\varphi} \cos(\varphi - h(\alpha))) \hat{i} + (-l \dot{\varphi} \sin(\varphi - h(\alpha))) \hat{j} \quad (11)$$

که در آن l طول آونگ، \vec{V}_o بردار سرعت مرکز ربات و $\vec{\omega}_p$ بردار سرعت زاویه ای آونگ است. با جایگذاری \vec{V}_p به دست آمده از رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰) برای انرژی جنبشی آونگ داریم:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \left((r \dot{\alpha} - l \dot{\varphi} \cos(\varphi - h(\alpha)))^2 + (l \dot{\varphi} \sin(\varphi - h(\alpha)))^2 \right) = \frac{1}{2} m_p (r^2 \dot{\alpha}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2rl \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos(\varphi - h(\alpha))) \quad (12)$$

همچنین با در نظر گرفتن مرکز جرم اجزای داخلی ربات بر مرکز هندسی پوسته کروی داریم:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i V_o^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} (m_i r^2 + I_i) \dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

که در آن m_i جرم اجزای داخلی ربات و I_i ممان اینرسی اجزای داخلی حول مرکز جرم آن است. با بازنویسی رابطه (۸)، برای انرژی جنبشی ربات کروی خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2} (m_s r^2 + I_s) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_p (r^2 \dot{\alpha}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2rl \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos(\varphi - h(\alpha))) + \frac{1}{2} (m_i r^2 + I_i) \dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

همان طور که مشاهده می شود، رابطه (۱۴) بر حسب مختصات تعمیم یافته و مشتقات آنها بیان شده است.

۲-۳- انرژی پتانسیل سیستم

انرژی پتانسیل کل سیستم (U) نیز به صورت مجموع انرژی پتانسیل پوسته کروی (U_s) ، انرژی پتانسیل آونگ (U_p) و انرژی پتانسیل اجزای داخلی سیستم (U_i) مطابق رابطه (۱۵) قابل تعیین است.

$$U = U_s + U_p + U_i \quad (15)$$

همان طور که می دانیم، تابع پتانسیل گرانشی هر بخش به صورت حاصل ضرب وزن در ارتفاع مرکز جرم آن بخش تعیین می شود. لذا هر یک از بخش های تابع انرژی پتانسیل با استفاده از روابط (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) و با توجه به شکل ۲ محاسبه می شود.

$$U_s = m_s g h_o = m_s g (f(\alpha) + r \cos(h(\alpha))) \quad (16)$$

$$U_p = m_p g h_p = m_p g (f(\alpha) + r \cos(h(\alpha)) - l \cos(\varphi)) \quad (17)$$

$$U_i = m_i g h_o = m_i g (f(\alpha) + r \cos(h(\alpha))) \quad (18)$$

که در آنها h_o ارتفاع مرکز کره و h_p ارتفاع جرم متمرکز روی آونگ هستند. با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۵)، تابع پتانسیل ربات کروی مطابق رابطه (۱۹) حاصل می شود.

$$U = m_s g (f(\alpha) + r \cos(h(\alpha))) + m_p g (f(\alpha) + r \cos(h(\alpha)) - l \cos(\varphi)) + m_i g (f(\alpha) + r \cos(h(\alpha))) \quad (19)$$

۳-۳- استخراج معادلات حرکت

همان طور که ذکر شد، مختصات تعمیم یافته در نظر گرفته شده برای حرکت ربات شامل پارامترهای α و φ که بیانگر دوران پوسته ربات و چرخش آونگ هستند، است. بیان معادلات لاگرانژ بر حسب این دو مختصه به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) است.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = Q_\alpha \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (21)$$

که در این روابط Q_α و Q_φ نیروهای تعمیم یافته در جهت های α و φ بوده و برای تعیین آنها با استفاده از رابطه مجموع کار مجازی نیروهای موثر داریم:

$$\delta W = \delta W_{T_p} + \delta W_{T_i} = \tau \delta \varphi + \tau \delta \alpha = Q_\alpha \delta \alpha + Q_\varphi \delta \varphi \quad (22)$$

که در آن τ_p و τ_i به ترتیب بیانگر گشتاور موتور روی آونگ و معکوس گشتاور موتور روی اجزای داخلی ربات (با مقدار برابر τ) هستند. بنا بر رابطه (۲۲) و با توجه به دلخواه بودن دوران های مجازی $\delta \varphi$ و $\delta \alpha$ ، نیروهای تعمیم یافته سیستم تعیین خواهد شد:

$$\begin{cases} Q_\alpha = \tau \\ Q_\varphi = \tau \end{cases} \quad (23)$$

پس از جایگذاری توابع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در روابط (۲۰) و (۲۱) و انجام مشتق گیری ها، معادلات حرکت ربات کروی به صورت روابط (۲۴) و (۲۵) استخراج خواهد شد.

$$\begin{aligned} m_s r^2 \ddot{\alpha} + I_s \ddot{\alpha} + m_p r^2 \ddot{\alpha} - m_p r l \dot{\varphi} \cos(\varphi - h(\alpha)) + m_p r l \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - h(\alpha)) - m_p r l \dot{\varphi} \dot{\alpha} h'(\alpha) \sin(\varphi - h(\alpha)) + m_i r^2 \ddot{\alpha} + I_i \ddot{\alpha} + m_p r l \dot{\alpha} \dot{\varphi} h'(\alpha) \sin(\varphi - h(\alpha)) + m_s g f'(\alpha) - m_s g r h'(\alpha) \sin(h(\alpha)) + m_p g f'(\alpha) + \end{aligned} \quad (24)$$

کنترلی به سیستم، معادله کنترل مدار بسته سیستم به صورت معادله (۳۵) تعیین می‌شود.

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad (35)$$

که در آن e تابع زمانی خطای زاویه چرخش پوسته نسبت به حالت مطلوب مطابق رابطه (۳۶) است.

$$e = \alpha - \alpha_d \quad (36)$$

با انتخاب مقادیر مثبت برای ضرایب کنترلی، پاسخ معادله (۳۵) که همان خطای پاسخ سیستم است به شکل نمایی به صفر همگرا خواهد شد و این به معنای پایداربودن کنترل کننده است.

۵- شبیه‌سازی حرکت ربات

با انتخاب مسیر مطلوب برای حرکت ربات کروی و اعمال گشتاور کنترلی به ربات، به انجام شبیه‌سازی و حل عددی معادلات حرکت ربات پرداخته شده است که در پی آن، زوایای چرخشی پوسته و آونگ و گشتاور کنترلی ایجادشده توسط موتور به دست می‌آید.

مطابق آنچه بیان شد، برای محاسبه انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم به بیان زاویه شیب مسیر (γ) در هر لحظه بر حسب زاویه چرخش پوسته ربات (α)، در قالب تابع $h(\alpha)$ نیاز است. به این منظور (برای مسیر دایره‌ای انتخاب شده) به طریقی که در ادامه می‌آید عمل می‌شود.

برای مسافت طی شده توسط مرکز کره داریم:

$$s = R\theta = r\alpha \quad (37)$$

بنابراین:

$$\theta = \frac{r\alpha}{R} \quad (38)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$x = R\sin(\theta) \quad (39)$$

با جایگذاری θ به دست آمده از رابطه (۳۸) در رابطه (۳۹) خواهیم داشت:

$$x = R\sin\left(\frac{r\alpha}{R}\right) \quad (40)$$

همچنین برای تعیین $f(x)$ (معادله مسیر)، با استفاده از معادله دایره داریم:

$$x^2 + (R - f(x))^2 = R^2 \quad (41)$$

بنابراین:

$$y = f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (42)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۴۰) و با مشتق گیری از $f(x)$ نسبت به متغیر α خواهیم داشت:

$$f'(\alpha) = r\cos\left(\frac{r\alpha}{R}\right) \left(\frac{R\sin\left(\frac{r\alpha}{R}\right)}{\sqrt{R^2 - (R\sin\left(\frac{r\alpha}{R}\right))^2}}\right) \quad (43)$$

بنابراین زاویه شیب مسیر بر حسب زاویه چرخش ربات به صورت رابطه (۴۴) بیان می‌شود.

$$h(\alpha) = \arctan\left(\frac{R\sin\left(\frac{r\alpha}{R}\right) r\cos\left(\frac{r\alpha}{R}\right)}{\sqrt{R^2 - (R\sin\left(\frac{r\alpha}{R}\right))^2}}\right) \quad (44)$$

طی شبیه‌سازی، بر اساس نوع عملکرد کنترل کننده و مشخصه‌های پاسخ گذرا و با در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها و با استفاده از روش

$$\begin{aligned} & m_p grh'(\alpha)\sin(h(\alpha)) + m_i gf'(\alpha) - \\ & m_i grh'(\alpha)\sin(h(\alpha)) = \tau \\ & m_p l^2 \ddot{\phi} - m_p r l \ddot{\alpha} \cos(\varphi - h(\alpha)) + \\ & m_p r l \dot{\alpha} \dot{\phi} \sin(\varphi - h(\alpha)) - \\ & m_p r l \dot{\alpha}^2 h'(\alpha) \sin(\varphi - h(\alpha)) - \\ & m_p r l \dot{\alpha} \dot{\phi} \sin(\varphi - h(\alpha)) + m_p g l \sin(\varphi) = \tau \end{aligned} \quad (25)$$

در بخش بعد با در اختیار داشتن معادلات دینامیکی، به طراحی یک کنترل کننده غیرخطی مناسب برای حرکت صفحه‌ای ربات کروی پرداخته خواهد شد.

۴- طراحی کنترل کننده ربات

با توجه به اینکه ربات کروی، در حرکت صفحه‌ای خود دارای دو درجه آزادی و یک عملگر بوده، بنابراین یک ربات کم عملگر است و باید از روش‌های کنترلی ویژه ربات‌های کم عملگر برای کنترل آن استفاده کرد. روش کنترلی ارائه شده در این تحقیق مبتنی بر روش کلی ارائه شده برای کنترل حرکت ربات‌های میکرو-ماکرو در مرجع [13] است.

با استفاده از روابط (۲۴) و (۲۵)، شکل ماتریسی معادلات حرکت به صورت رابطه (۲۶) قابل بیان است.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(\alpha, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\phi}) \\ N_2(\alpha, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\phi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن:

$$M_{11} = (m_s + m_p + m_i)r^2 + I_s + I_i \quad (27)$$

$$M_{12} = -m_p r l \cos(\varphi - h(\alpha)) \quad (28)$$

$$M_{21} = -m_p r l \cos(\varphi - h(\alpha)) \quad (29)$$

$$M_{22} = m_p l^2 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} N_1 = & \\ & + m_p r l \dot{\phi}^2 \sin(\varphi - h(\alpha)) \\ & + m_s g [f'(\alpha) - r h'(\alpha) \sin(h(\alpha))] + \\ & m_p g [f'(\alpha) - r h'(\alpha) \sin(h(\alpha))] + \\ & m_i g [f'(\alpha) - r h'(\alpha) \sin(h(\alpha))] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & m_p r l \dot{\alpha} h'(\alpha) \sin(\varphi - h(\alpha)) + \\ & m_p g l \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (32)$$

با توجه به اینکه متغیر اصلی کنترلی ربات، زاویه چرخش پوسته یعنی α است، با استفاده از معادله ماتریسی (۲۶)، گشتاور موتور محرک ربات به شکل رابطه (۳۳) بیان می‌شود.

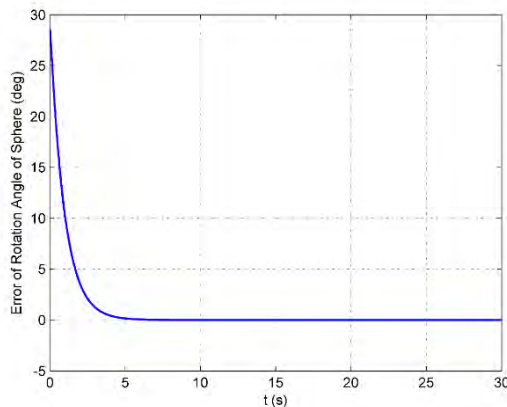
$$\tau = \left(\frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{M_{22} - M_{12}}\right) \ddot{\alpha} + \frac{M_{22}N_1 - M_{12}N_2}{M_{22} - M_{12}} \quad (33)$$

چنانچه گشتاور کنترلی اعمال شونده به ربات به صورت رابطه (۳۴) در نظر گرفته شود:

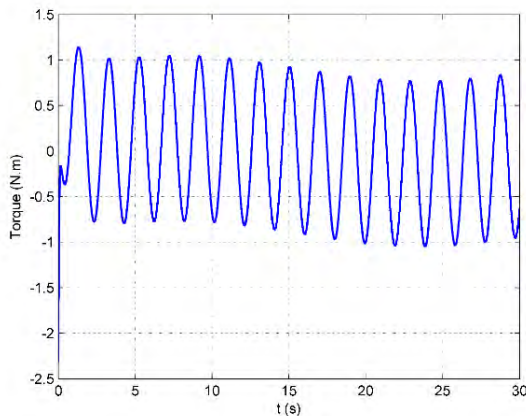
$$\begin{aligned} \tau = & \left(\frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{M_{22} - M_{12}}\right) (\ddot{\alpha}_d - k_v(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_d) - \\ & k_p(\alpha - \alpha_d)) + \frac{M_{22}N_1 - M_{12}N_2}{M_{22} - M_{12}} \end{aligned} \quad (34)$$

که در آن α_d بیانگر تابع زمانی مطلوب حرکت دورانی پوسته کره است. همچنین k_p و k_v به ترتیب ضرایب مثبت مشتقی و تناسبی کنترلی سیستم هستند که مقادیر آنها در شکل و مشخصه‌های پاسخ گذرای خروجی سیستم تاثیرگذار هستند. با اعمال این گشتاور

همان طور که مشاهده می‌شود، ربات توانسته است مسیر مطلوب در نظر گرفته شده برای زاویه چرخش پوسته خود را پس از زمان نشست کوتاهی (حدود ۳ ثانیه) دنبال کند. به منظور مشاهده بهتر عملکرد کنترل کننده غیرخطی طراحی شده، نمودار زمانی خطای پاسخ سیستم مطابق نمودار ۲ ارایه شده است و به منظور بررسی عدم خروج میزان گشتاور کنترلی از محدوده مجاز تعیین شده، نمودار گشتاور موتور بر حسب زمان مطابق نمودار ۳ ترسیم شده است. همان طور که در نمودار ۳ مشاهده می‌شود موتور محرک سیستم طی حرکت ربات، به حد اشباع گشتاور تعیین شده برای شبیه‌سازی نرسیده است.



نمودار ۲) خطای زاویه دوران کره نسبت به حالت مطلوب تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر



نمودار ۳) گشتاور موتور ربات کروی تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر مطلوب

۲-۵- کنترل ربات با در نظر گرفتن نامعینی پارامتری

در اندازه‌گیری پارامترهای طراحی ربات برای به کارگیری در تعیین گشتاور کنترلی، همواره احتمال ایجاد خطای اندازه‌گیری وجود دارد. لذا با فرض وجود خطا در تعیین مقادیر واقعی پارامترهای سیستم، کنترل کننده باید توانایی کنترل حرکت را کماکان داشته باشد. به منظور بررسی میزان مقاوم بودن کنترل کننده به نامعینی پارامتری، با در نظر گرفتن خطایی به میزان ۱٪ برای همگی پارامترهای فیزیکی ربات، نتایج شبیه‌سازی و کنترل حرکت ربات کروی ارایه خواهد شد.

سعی و خطا، مقادیر k_p و k_v برابر عدد ۱۰ انتخاب شده است. همچنین مقادیر پارامترهای سیستم برای شبیه‌سازی، مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است. به علاوه، برای ممان اینرسی مرکزی پوسته ربات (I_s) داریم:

$$I_s = m_s r^2 \quad (۴۵)$$

همچنین حد اشباع در نظر گرفته شده برای موتور محرک سیستم گشتاور ۲ Nm است. تابع هدف برای مسیر مطلوب زاویه چرخش کره در حین حرکت روی سطح دایره‌ای شکل، به صورت رابطه (۴۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$\alpha_d = \sin(0.2t) \quad (۴۶)$$

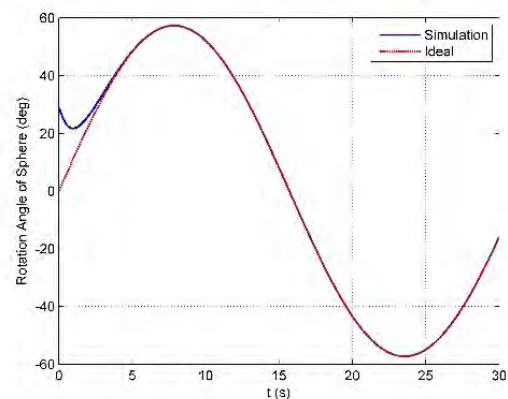
هدف از کنترل حرکت ربات کروی آن است که ربات بتواند تحت شرایط ناخواسته متفاوتی که در ادامه ذکر شده است، تابع مطلوب دوران پوسته خود را طی حرکت روی سطح غیرتخت دنبال کند.

جدول ۱) مقادیر پارامترهای سیستم برای شبیه‌سازی

مقدار	پارامتر سیستم
۱kg	M_s
۱kg	M_i
۲kg	M_p
۰/۵m	r
۵۰m	R
$۱۰s^{-1}$	K_v
$۱۰s^{-1}$	K_p
۰/۱kgm ²	I_i
۰/۴۵m	l
۹/۸۱ms ⁻²	g

۱-۵- کنترل ربات تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر مطلوب

در حالی که زاویه اولیه و سرعت زاویه‌ای اولیه مطلوب برای چرخش ربات مطابق رابطه (۴۶) برابر صفر است، به منظور بررسی عملکرد کنترل کننده، زاویه چرخش اولیه ربات را برابر ۰/۵rad و سرعت زاویه‌ای اولیه ربات را صفر رادیان بر ثانیه در نظر می‌گیریم. با شبیه‌سازی و حل عددی معادلات دیفرانسیل کنترل مدار بسته سیستم، پاسخ متناظر با زاویه چرخش واقعی ربات در مقایسه با حالت مطلوب مطابق نمودار ۱ به دست می‌آید.



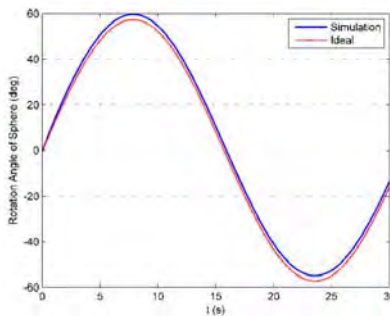
نمودار ۱) زاویه چرخش ربات کروی در مقایسه با زاویه مطلوب تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر مطلوب

۳-۵- کنترل سیستم با در نظر گرفتن گشتاور اغتشاشی

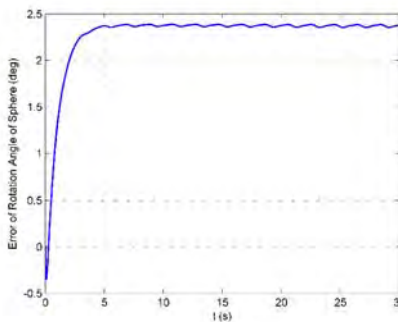
با توجه به اینکه در واقعیت همواره نیروهای مقاوم در مقابل حرکت از جمله نیروی مقاومت باد و همچنین نیروهای اصطکاکی وجود دارد، لذا توانایی کنترل کننده طراحی شده در حذف اثر این نوع اغتشاشات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین در این بخش با در نظر گرفتن یک گشتاور اغتشاشی (τ_d) روی ربات در حالت حرکت روی سطح غیرتخت، به بررسی عملکرد کنترل کننده در ایجاد پاسخ مطلوب برای چرخش پوسته ربات پرداخته شده است. اثر گشتاور اغتشاشی در معادلات حرکت به صورت ظهور یک ترم اضافی (τ_d) در نیروی تعمیم یافته متناظر با مختصه α است.

$$Q_\alpha = \tau + \tau_d \quad (47)$$

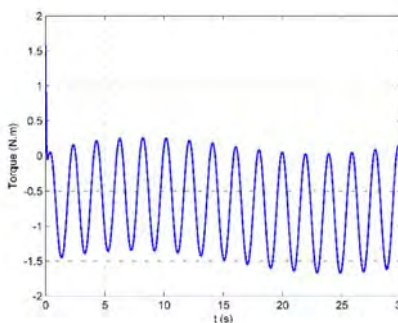
برای شبیه سازی حرکت کنترل شده ربات در این بخش، τ_d را برابر $0.7 \sin(\pi t)$ در نظر می‌گیریم. نتایج پاسخ خروجی، خطای تعقیب مسیر و گشتاور عملگر به ترتیب در نمودارهای ۷ تا ۹ آورده شده است.



نمودار ۷) زاویه چرخش ربات کروی در مقایسه با زاویه مطلوب با در نظر گرفتن گشتاور اغتشاشی وارد بر سیستم



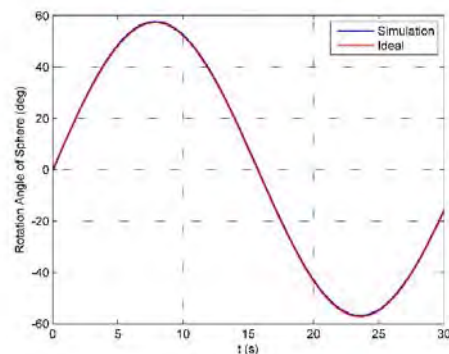
نمودار ۸) خطای زاویه دوران کره نسبت به حالت مطلوب با در نظر گرفتن گشتاور اغتشاشی وارد بر سیستم



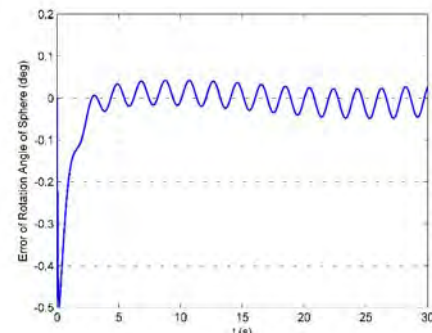
نمودار ۹) گشتاور موتور ربات کروی با در نظر گرفتن گشتاور اغتشاشی وارد بر سیستم

بدین صورت که در معادلات دینامیکی حاکم بر مدل، ۱٪ کاهش مقادیر طولی و جرمی (مبتنی بر جدول ۱) اعمال می‌شود، در حالی که این تغییرات برای تعیین گشتاور کنترلی وارد بر ربات در نظر گرفته نمی‌شود و کنترل کننده بر مبنای مقادیر اولیه پارامترها (جدول ۱) عمل می‌کند.

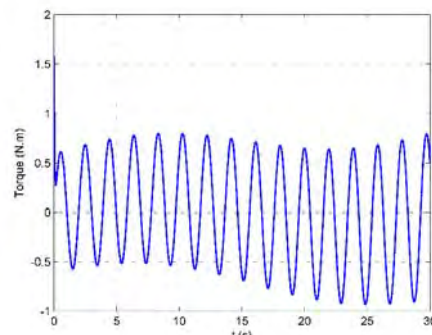
در این بخش، شرایط اولیه حرکت دورانی ربات منطبق بر شرایط اولیه مسیر مطلوب در نظر گرفته می‌شود. نتایج شبیه سازی حرکت کنترل شده در این حالت، در نمودارهای ۴ تا ۶ ارائه شده است. با توجه به نمودارهای ۴ و ۵، مشاهده می‌شود که کنترل کننده به صورت قابل قبولی توانسته بر اثر نامطلوب نامعینی‌های پارامتری فائق آید و زاویه چرخش ربات، مسیر مطلوب از پیش تعیین شده خود را به خوبی دنبال کند. همچنین با توجه به نمودار ۶، گشتاور محرک از حد اشباع در نظر گرفته شده برای آن تجاوز نکرده است.



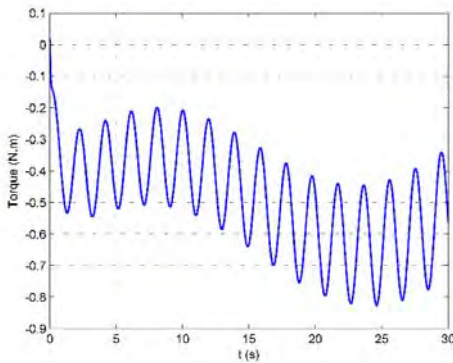
نمودار ۴) زاویه چرخش ربات کروی در مقایسه با زاویه مطلوب با در نظر گرفتن نامعینی پارامتری



نمودار ۵) خطای زاویه دوران کره نسبت به حالت مطلوب با در نظر گرفتن نامعینی پارامتری



نمودار ۶) گشتاور موتور ربات کروی با در نظر گرفتن نامعینی پارامتری روی سیستم



نمودار ۱۲) گشتاور موتور ربات کروی تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر مطلوب، نامعینی پارامتری و گشتاور اغتشاشی

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به مدل‌سازی دینامیکی و کنترل حرکت صفحه‌ای یک ربات کروی آونگی روی یک سطح غیرتخت پرداخته شد. به این منظور ابتدا تشریح ساختار ربات کروی و مدل‌سازی آن بر مبنای فرضیات مذکور به انجام رسیده و در ادامه با انتخاب دو مختصه تعمیم‌یافته نظیر زاویه دوران پوسته (α) و زاویه دوران آونگ (φ) به تحلیل دینامیکی و استخراج معادلات حرکت صفحه‌ای ربات روی سطوح غیرتخت (با معادله کلی مسیر) با استفاده از روش لاگرانژ پرداخته شد.

با توجه به کمبود تعداد عملگر نسبت به تعداد درجات آزادی کره، کنترل ربات از نظر برقراری پایداری چالش‌برانگیز بوده و لذا به طراحی یک کنترل‌کننده غیرخطی، با روشی مبتنی بر خطی‌سازی به کمک فیدبک پرداخته شد. در ادامه، با در نظر گرفتن شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر، نامعینی پارامتری و همچنین گشتاور اغتشاشی وارد بر سیستم، میزان مقاومت بودن کنترل‌کننده را مورد بررسی قرار داده که البته نتایج به دست آمده در چنین شرایط ناپایدارکننده‌ای گویای عملکرد مطلوب کنترل‌کننده در دنبال کردن مسیر (تابع زمانی) تعیین شده برای زاویه دوران پوسته کروی حین حرکت بر سطح غیرتخت انتخاب شده برای شبیه‌سازی بوده است. طراحی این کنترل‌کننده امکان استفاده از عملگری با گشتاور قابل تامین برای ربات را فراهم ساخته که این موضوع (حد اشباع عملگر) یکی از محدودیت‌های طراحی در ربات‌های کروی محسوب می‌شود.

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

تاییدیه اخلاقی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

تعارض منافع: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

سهم نویسندگان: محمد عالی‌پور (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۶۰٪)؛ علی مختاریان (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۳۰٪)؛ حسین کریم‌پور (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی (۱۰٪)

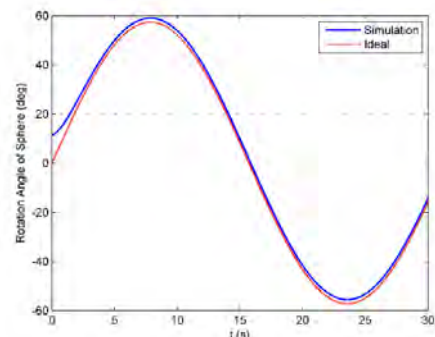
منابع مالی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

با توجه به نمودارهای ۷ و ۸ مشاهده می‌شود که ربات با وجود اعمال گشتاور اغتشاشی بر آن، طی حرکت توانسته تابع زمانی مطلوب تعریف شده برای زاویه دوران پوسته کروی خود را با وجود خطای اندکی دنبال نماید. همچنین گشتاور عملگر در محدوده مجاز تعیین شده برای آن طی حرکت ربات باقی مانده است (نمودار ۹).

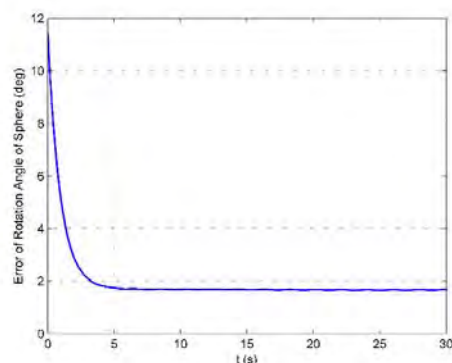
۴-۵- کنترل ربات کروی تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر

مطلوب، نامعینی پارامتری و گشتاور اغتشاشی

اکنون شرایطی را در نظر می‌گیریم که هر سه عامل ناپایدارکننده ربات، یعنی شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر، نامعینی‌های پارامتری و گشتاور اغتشاشی وارد بر سیستم به‌طور همزمان وجود داشته باشند. با فرض وجود ۱٪ خطا در مقادیر همه پارامترهای فیزیکی ربات و اعمال گشتاور اغتشاشی ۰/۵ Nm به پوسته کروی و نیز انتخاب شرایط اولیه نامطلوب متناظر با زاویه چرخشی ۰/۲ rad، به بررسی عملکرد کنترل‌کننده در ایجاد پاسخی که مسیر مطلوب از پیش تعیین شده را دنبال کند، پرداخته می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در این حالت، شامل نمودار زاویه چرخش پوسته، نمودار خطای پاسخ زمانی و نمودار گشتاور موتور محرک است (نمودارهای ۱۰ تا ۱۲). همان طور که از نمودارهای ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود با وجود عوامل ناپایدارکننده حرکت، زاویه چرخش ربات کروی تابع زمانی مطلوب خود را با خطای دائم بسیار اندکی به‌خوبی تعقیب کرده است. همچنین با توجه به نمودار ۱۲، گشتاور موتور از حد مجاز اشباع تجاوز نکرده است.



نمودار ۱۰) زاویه چرخش ربات کروی در مقایسه با زاویه مطلوب تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر مطلوب، نامعینی پارامتری و گشتاور اغتشاشی



نمودار ۱۱) خطای زاویه دوران کره نسبت به حالت مطلوب تحت شرایط اولیه غیرمنطبق بر مسیر مطلوب، نامعینی پارامتری و گشتاور اغتشاشی

Piscataway: IEEE; 2002.

3- Bhattacharya S, Agrawal S. Design experiments and motion planning of a spherical rolling robot. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 24-28 April 2000, San Francisco, CA, USA. Piscataway: IEEE; 2002.

4- Zhan Q, Zhou T, Chen M, Cai S. Dynamic trajectory planning of a spherical mobile robot. IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, 1-3 June 2006, Bangkok, Thailand. Piscataway: IEEE; 2006.

5- Shu G, Zhan Q, Cai Y. Motion control of spherical robot based on conservation of angular momentum. 2009 International Conference on Mechatronics and Automation, 9-12 Aug. 2009, Changchun, China. Piscataway: IEEE; 2009.

6- Zhang W, Liu X, Fang C, Sun H. Dynamics modeling of spherical robot with arms by using Kane's Method. 2008 Fourth International Conference on Natural Computation, 18-20 Oct. 2008, Jinan, China. Piscataway: IEEE; 2008.

7- Joshi V, Banavar RN, Hippalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot. Mechanism and Machine Theory. 2010;45(2):130-136.

8- Karimpour H, Keshmiri M, Mahzoon M. Gyroscopic stability analysis of a rolling robot. Sharif Mechanical Engineering. 2014;30-3(2.2):105-112. [Persian]

9- Liu DL, Sun HX, Jia QX. Stabilization and path following of spherical robot. IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, 21-24 Sept. 2008, Chengdu, China. Piscataway: IEEE; 2008.

10- Azizi MR, Naderi D. Dynamic Modeling and trajectory planning for a mobile spherical robot with a 3Dof inner mechanism. Mechanism and Machine Theory. 2013;64:251-261.

11- Muraleedharan N, Cohen DS, Isenberg DR. Omnidirectional locomotion control of a pendulum driven spherical robot. SoutheastCon.2016, 30 March-3 April 2016, Norfolk, VA, USA. Piscataway: IEEE; 2016.

12- Ivanova TB, Kilin AA, Pivovarova EN. Controlled motion of a spherical robot with feedback. I. Journal of Dynamical and Control Systems. 2018;24(3):497-510.

13- Sadigh MJ, Salehi A, Keshmiri M. A Semi-manual master-slave algorithm for control of flexible micro-macro manipulators. International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics. Unknown Publisher; 2007.

14- Meriam JL, Kraige LG, Bolton JN. Engineering mechanics: Dynamics. 8th Edition. Hoboken: John Wiley & Sons; 2016. P. 313-390.

فهرست علائم

شتاب جاذبه (ms^{-2})	g
ممان اینرسی (kgm^2)	I
ضریب تناسبی کنترل کننده (s^{-2})	k_p
ضریب مشتقی کنترل کننده (s^{-1})	k_v
طول آونگ (m)	l
جرم آونگ (kg)	m
شعاع کره (m)	r
گشتاور موتور محرک (Nm)	τ
انرژی جنبشی (J)	T
انرژی پتانسیل (J)	U
کار مجازی نیروهای موثر (J)	δW

علائم یونانی

زاویه چرخش کره (rad)	α
سرعت زاویه‌ای کره ($rads^{-1}$)	$\dot{\alpha}$
شتاب زاویه‌ای کره ($rads^{-2}$)	$\ddot{\alpha}$
زاویه شیب سطح (rad)	γ
گشتاور موتور (Nm)	τ
زاویه چرخش آونگ (rad)	φ
سرعت زاویه‌ای آونگ ($rads^{-1}$)	$\dot{\varphi}$
شتاب زاویه‌ای آونگ ($rads^{-2}$)	$\ddot{\varphi}$
بردار سرعت زاویه‌ای آونگ ($rads^{-1}$)	$\vec{\omega}_p$

زیرنویس‌ها

پوسته	s
اجزای داخلی	i
مرکز ربات	o
آونگ	p

منابع

- 1- Bicchi A, Balluchi A, Prattichizzo D, Gorelli A. Introducing the "Sphericle": An experimental testbed for research and teaching in non-holonomy. Proceedings of International Conference on Robotics and Automation, 25-25 April 1997, Albuquerque, NM, USA, USA. Piscataway: IEEE; 2002.
- 2- Halme A, Schonberg T, Wang Y. Motion control of a spherical mobile robot. Proceedings of 4th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control - AMC '96 - MIE, 18-21 March 1996, Mie, Japan, Japan.