



## Reliability-Based Robust Design Optimization of Mechanical Systems in the Presence of Uncertain Parameters Based on Bayesian Inference

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Hassani H.<sup>1</sup> MSc,  
Khodaygan S.\*<sup>1</sup> PhD

#### How to cite this article

Hassani H, Khodaygan S. Reliability-Based Robust Design Optimization of Mechanical Systems in the Presence of Uncertain Parameters Based on Bayesian Inference. Modares Mechanical Engineering, 2020;20(3):709-719.

### ABSTRACT

This competitive commercial space forces designers and manufactures to produce and supply products with high quality and low prices at a desirable level of reliability. On the other hand, during the design and production process, engineers are always faced with uncertainty. In recent years, to encounter these uncertainties and guarantee the quality and reliability of a system subsequently, reliability-based robust design optimization (RBRDO) algorithms have been developed based on robust design optimization (RDO) and reliability-based optimization (RBDO). In practical engineering, uncertainties of some design parameters or variables are epistemic and only a few samples are available for designer. Generally, some of the RBRDO methods ignore the information in the design process. This approach can lead to an enormous error. Other RBRDO methods ignore this valuable information in the design process. This study, a comprehensive RBRDO framework is developed by combining Bayesian reliability analysis and dimensionality reduction method (DRM) using NSGA2-II multi-objective optimization algorithm. For verification of the proposed algorithm, an engineering example is selected and the effects of epistemic uncertainty on objectives are studied. Moreover, the results of the proposed approach are compared with other existing approaches at a specific case of available data about epistemic uncertainty.

**Keywords** Reliability-Based Robust Design Optimization; Robust Design Optimization; Reliability-Based Optimization; NSGA2-II Algorithm

<sup>1</sup>Applied Mechanics Division Department, Mechanical Engineering School, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: S Mechanical Engineering School, Sharif University of Technology, Azadi Avenue, Tehran, Iran.  
Postal Code: 1458889694  
Phone: +98 (21) 66165518  
Fax: +98 (21) 66000021  
khodaygan@sharif.edu

#### Article History

Received: December 14, 2018  
Accepted: July 14, 2019  
ePublished: March 01, 2020

### CITATION LINKS

[1] Reliability-based robust design optimization: A multi-objective framework using hybrid quality loss function [2] Introduction to optimum design [3] Probability, reliability, and statistical methods in engineering design [4] Robust optimization-a comprehensive survey [5] Robust design: An overview [6] Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design [7] Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization [8] A survey on approaches for reliability-based optimization [9] Reliability-based robust design optimization: A multi-objective framework using hybrid quality loss function [10] Reliability-based robust design optimization: a general methodology using genetic algorithm [11] Reliability-based robust multi-objective optimization applied to engineering system design [12] A hybrid approach for reliability-based robust design optimization of structural systems with dependent failure modes [13] Bayesian inference in statistical analysis [14] An evolutionary based Bayesian design optimization approach under incomplete information [15] A bayesian approach to reliability-based optimization with incomplete information [16] Reliability analysis methods [17] First order and second reliability methods [18] Two improved algorithms for reliability analysis

## طراحی بهینه و مقاوم سیستم‌های مکانیکی در حضور پارامترهای غیرقطعی با رویکرد قابلیت اطمینان بر مبنای استنباط پیزین

حسین حسینی MSc

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

سعید خدایگان PhD\*

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

### چکیده

فضای تجاری و رقابتی جهان، تولیدکنندگان را وادار به عرضه محصولات با کیفیت بالا، هزینه پایین و در عین حال قابل اطمینان می‌کند. از طرف دیگر، در فرآیند طراحی و تولید یک محصول، مهندسان همواره با عدم قطعیت روبه‌رو هستند. در سال‌های اخیر، در راستای برخورد با عدم قطعیت‌های موجود و تضمین کیفیت و قابلیت اطمینان سیستم، الگوریتم‌هایی تحت عنوان طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان (RBRDO) با ترکیب رویکردهای طراحی بهینه مقاوم (RDO) و طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان (RBDO) توسعه یافته‌اند. در مهندسی طراحی، عدم قطعیت برخی از متغیرها یا پارامترهای طراحی از نوع شناختی بوده و تنها در قالب نمونه‌هایی محدود در اختیار طراح است. اکثر روش‌های موجود، این عدم کامل بودن اطلاعات را در نظر نمی‌گیرند که این خود می‌تواند منجر به خطاهای بزرگ‌تری شود. در دسته‌ای دیگر از روش‌های موجود نیز، از این اطلاعات ارزشمند در فرآیند طراحی صرف‌نظر می‌شود. در این پژوهش، با به‌کارگیری روش بهینه‌سازی چندهدفه NSGA2-II و ترکیب روش تحلیل قابلیت اطمینان پیزین و روش کاهش ابعادی تک‌متغیره (DRM)، یک الگوریتم جامع برای فرمول‌بندی مساله طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان در حضور عدم قطعیت شناختی پیشنهاد شده است. به‌منظور راستی‌آزمایی الگوریتم پیشنهادی، یک مثال مهندسی انتخاب شده و تاثیر عدم قطعیت شناختی بر توابع هدف بررسی شده و در انتها نیز، برای یک حالت خاص از تعداد داده موجود، نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی با نتایج سایر رویکردهای موجود در زمینه طراحی بهینه در شرایط عدم قطعیت مقایسه شده است.

**کلیدواژه‌ها:** طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان، طراحی بهینه و مقاوم، طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان، الگوریتم بهینه‌سازی NSGA-II

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۹/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۲۳

\*نویسنده مسئول: khodaygan@sharif.edu

### ۱- مقدمه

فضای تجاری و رقابتی امروزی جهان، تولیدکنندگان و طراحان را وادار به تولید محصولات باکیفیت و در عین حال مقرون‌به‌صرفه می‌کند. بنابراین در طراحی یک سیستم همواره سه هدف بهینگی، کیفیت و اطمینان در عملکرد و پاسخ مورد توجه قرار می‌گیرد [1]. در فرآیند طراحی و تولید یک محصول، مهندسان همواره با عدم قطعیت روبه‌رو هستند. انواع عدم قطعیت‌ها را می‌توان از نظر ماهیت به دو دسته ذاتی و شناختی تقسیم کرد. عدم قطعیت ذاتی در طول عمر با دخالت انسان قابل کاهش نیست؛ چراکه این نوع عدم قطعیت در اثر تغییرات طبیعی پدیده‌ها به‌وجود می‌آید. شرایط عملکردی،

خواص مواد، تolerانس‌های هندسی و غیره جزء این دسته از عدم قطعیت‌ها محسوب می‌شوند. در مقابل، عدم قطعیت شناختی که می‌تواند ناشی از کمبود شناخت نسبت به سیستم یا متغیرها، تقریب‌های موجود در مدل‌های رفتاری سیستم یا فقدان داده‌های کیفی باشد، با افزایش دانش نسبت به سیستم قابل کاهش است [2]. 3. طراحی بهینه متعین (Deterministic) به‌ندرت عدم قطعیت‌های موجود در متغیرهای طراحی و پارامترهای عملکردی مساله طراحی را در نظر می‌گیرد؛ در نتیجه طراحی حاصل‌شده از روش‌های بهینه‌سازی روی سطح قید یا نقطه برخورد چندین قید قرار می‌گیرد. بنابراین ممکن است این نوع طراحی منجر به طراحی‌هایی غیرمقاوم و با قابلیت اطمینان پایین شود، چراکه تغییرات پارامترها و متغیرهای طراحی (به‌عنوان ورودی) باعث ایجاد تغییراتی در خروجی سیستم می‌شوند. امروزه در راستای برخورد با تغییرات محصول در چرخه عمر آن و تولید محصولاتی متناسب با ذائقه مصرف‌کننده، چندین روش توسعه یافته است: بهینه‌سازی طراحی مقاوم (RDO)، طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان (RBDO)، طراحی بهینه و مقاوم با رویکرد قابلیت اطمینان (RBRDO).

هدف از طراحی مقاوم افزایش کیفیت محصول به‌واسطه کمینه‌سازی حساسیت عملکرد نسبت به عوامل نویز و تolerانس‌ها است. بنابراین محصولی که با این رویکرد طراحی و تولید می‌شود، بیشترین احتمال را برای دستیابی به مقدار هدف دارد؛ اگرچه عوامل عدم قطعیت در مساله وجود داشته باشد [4, 5]. هدف در طراحی بر مبنای قابلیت اطمینان، رسیدن به شرایطی است که احتمال عملکرد مطلوب سیستم در سطح قابل قبولی از اطمینان قرار داشته باشد [6]. در فرمول‌بندی این رویکرد، ابتدا توزیع‌های احتمالاتی توابع عملکرد سیستم با استفاده از توزیع‌های احتمالاتی پارامترها و متغیرهای تصادفی ورودی تخمین زده شده و سپس قیود معین به قیود احتمالاتی تبدیل می‌شود؛ بدین صورت که احتمال نقض شدن قید کمتر از احتمال از کار افتادگی از پیش تعیین‌شده باشد [7, 8]. هیچ یک از روش‌های طراحی مقاوم و طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان به تنهایی، کیفیت و قابلیت اطمینان یک سیستم را تضمین نمی‌کند. بنابراین، در سال‌های اخیر در راستای بهره‌گیری از مزایای هر یک، روش‌هایی تحت عنوان طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان (RBRDO) توسعه یافته‌اند. در واقع، RBRDO ترکیب روش‌های طراحی مقاوم و طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان در فضای بهینه‌سازی چندهدفه است؛ بدین معنی که در طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان، یک مساله بهینه‌سازی با اهداف بهینه‌سازی تابع هدف و کمینه‌سازی تغییرات توابع عملکرد حل می‌شود، به‌نحوی که امکان‌پذیری قیود در سطح قابل قبولی ارضا شود. کارایی هر الگوریتم طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان به چهار عامل بستگی دارد: الف) روش مورد استفاده برای تقریب توابع عملکرد، ب) روش تحلیل قابلیت اطمینان به‌کارگرفته‌شده در ارزیابی امکان‌پذیری قیود طراحی، ج)

$$\begin{aligned} & \min [\mu_f(x, y), \sigma_f] \\ & s. t. P(g_j(x, y) \geq 0) \geq R_j \\ & x^l \leq x \leq x^u, y^l \leq y \leq y^u \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن،  $x$  بردار متغیرهای طراحی و  $y$  بردار پارامترهای طراحی است. همچنین،  $\mu_f(x, y)$  میانگین تابع هدف و  $\sigma_f^2$  واریانس تابع هزینه است. در این پژوهش یک فرمول‌بندی جدید برای انجام طراحی بهینه در حضور عدم قطعیت به کار برده شده است. در این فرمول‌بندی، در شرایط عدم قطعیت، مساله طراحی به یک مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه با سه هدف کمینه‌سازی تابع هزینه، کمینه‌سازی واریانس تابع هزینه و بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان سیستم تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min \mu_f \\ & \min \sigma_f^2 \\ & \min R_s \end{aligned} \quad (2)$$

$\mu_f$  میانگین تابع هزینه،  $\sigma_f^2$  واریانس تابع هزینه و  $R_s$  قابلیت اطمینان سیستم است. به این دلیل که تقریباً تمام مسائل طراحی مهندسی فاقد قید مساوی هستند، در این فرمول‌بندی قیود مساوی لحاظ نشده است. پس از فرمول‌بندی مساله طراحی، مهم‌ترین گام، مدل‌سازی عدم قطعیت شناختی در محاسبه توابع هدف طراحی است. در ادامه، نحوه مدل‌سازی عدم قطعیت شناختی در توابع هدف تشریح شده است.

در انجام طراحی مقاوم، دو هدف بهینه‌سازی تابع هدف و کمینه‌سازی تغییرات وجود دارد. برای رسیدن به این اهداف دو دسته روش وجود دارد: ۱- ماکزیم‌سازی نسبت مقدار هدف به واریانس که در قالب مفهوم سیگنال روی نویز تعریف می‌شود و ۲- تعریف دو هدف مجزا و ماکزیم‌سازی هدف اصلی (ماکزیم‌سازی سیگنال اصلی) و مینیم‌سازی واریانس تغییرات هدف اصلی (مینیم‌سازی نویزها).

در روش اول که سیگنال به نویز ماکزیم‌سازی می‌شود، هزینه محاسباتی پایین است ولی تضمینی وجود ندارد که به‌طور همزمان هم صورت کسر (تابع هدف) ماکزیم‌سازی و هم مخرج کسر (واریانس) مینیم‌سازی شود. در روش دوم مساله منجر به حل یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه خواهد شد ولی قطعاً همزمان تابع هدف اصلی بهینه و واریانس به‌عنوان هدف مقاوم‌سازی نسبت به تغییرات مینیم‌سازی می‌شود، لذا در این پژوهش از روش دوم استفاده شده است.

### ۳- مدل‌سازی عدم قطعیت شناختی در تابع هزینه و واریانس

در این پژوهش، میانگین تابع هدف با استفاده از روش کاهش ابعادی تک‌متغیره محاسبه شده و به‌عنوان تابع هزینه در فرمول‌بندی طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد. در روش کاهش ابعادی تک‌متغیره، فرض بر این است که تمام متغیرهای تصادفی از نوع ذاتی باشند. به عبارت دیگر، توزیع احتمالاتی تمامی متغیرهای تصادفی موجود باشد. اگر بردار متغیرهای تصادفی به‌صورت  $d = [X, P]$  نشان داده شود که در آن  $X$  بردار متغیرهای طراحی و  $P$  بردار پارامترهای طراحی باشد،

معیار مقاوم‌بودن استفاده‌شده برای تضمین کیفیت و د) تکنیک بهینه‌سازی اعمال‌شده [9, 10]. لایاتو و همکاران، با در نظر گرفتن قابلیت اطمینان و ضرایب مقاومت به‌صورت توابع هدف اضافی به مساله بهینه‌سازی و سپس حل مساله با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات یک الگوریتم فراابتکاری را در حوزه طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان پیشنهاد دادند [11]. در همین راستا لو و همکاران، با ترکیب مفاهیم تقریب نقطه زین‌اسبی، روش کاهش ابعادی و روش کاپولا یک الگوریتم ترکیبی را برای طراحی قابل اطمینان یک سیستم در شرایط وجود چندین حالت خرابی به‌هم‌وابسته توسعه دادند [12].

توصیف احتمالاتی عدم قطعیت‌ها بر اساس اطلاعات کامل از مساله طراحی انجام می‌شود، درحالی‌که در اکثر مسائل مهندسی طراحی به علت عدم شناخت کافی نسبت به فیزیک مساله و محدودیت‌های زمانی و هزینه، این اطلاعات تنها به‌صورت مجموعه‌ای محدود از نقاط نمونه در اختیار طراح قرار می‌گیرد. روش‌های موجود معمولاً این عدم کافی بودن نمونه‌ها را فرض می‌کنند که این خود از منابع خطا است. یکی از روش‌های مورد استفاده در مقابله با عدم قطعیت شناختی، بهبود تکراری روش‌های احتمالاتی با استفاده از روش‌های خودرانداز (Bootstrap)، بر اساس استنباط بیزین (Bayesian) است [13, 14]. در این مطالعه، با استفاده از روش قابلیت اطمینان بیزین [15]، یک الگوریتم جامع برای طراحی بهینه و مقاوم سیستم‌های مکانیکی در حضور عدم قطعیت شناختی به‌صورت کمبود داده معرفی شده است. از طرف دیگر، به‌منظور محاسبه واریانس تابع هزینه به‌عنوان معیار مقاوم‌بودن طراحی، یک روش محتاطانه به‌کار گرفته شده است، به نحوی که خطاهای ناشی از حدس‌زدن توزیع‌های احتمالاتی عدم قطعیت‌های شناختی و پارامترهای مربوط به آنها به حداقل برسد. در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا مساله طراحی به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه با سه هدف کمینه‌سازی تابع هزینه، کمینه‌سازی تغییرات تابع هزینه و بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان طراحی فرمول‌بندی شده و سپس مجموعه جواب غیرمغلوب در قالب جبهه پارتو با استفاده از روش بهینه‌سازی (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm) به‌دست می‌آید. در انتها نیز مجموعه جواب پارتو با استفاده از روش تاپسیس تحلیل شده و مناسب‌ترین جواب به‌عنوان نقطه طراحی انتخاب می‌شود. به‌منظور راستی‌آزمایی الگوریتم پیشنهادی، یک مثال مهندسی انتخاب شده و تأثیر عدم قطعیت شناختی بر توابع هدف بررسی شده و سپس برای یک حالت خاص از تعداد داده موجود، نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی با نتایج سایر رویکردهای موجود در زمینه طراحی بهینه در شرایط عدم قطعیت مقایسه شده است.

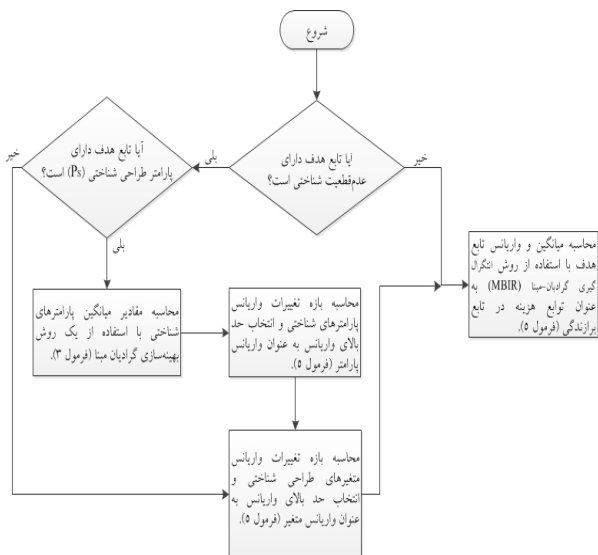
### ۲- فرمول‌بندی پیشنهادی مساله طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان (RBRDO)

فرمول‌بندی کلی یک مساله طراحی با رویکرد طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان (RBRDO) به‌صورت زیر است:

طراحی، بعد از آنکه مقادیر میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی به دست آمد، میانگین و واریانس تابع هدف اصلی مساله طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان با استفاده از روش کاهش ابعادی تک‌متغیره محاسبه می‌شود. روش کاهش ابعادی تک‌متغیره شامل تجزیه تابع حالت حدی  $n$  متغیره به  $n$  تابع تک‌متغیره و سپس محاسبه انتگرال با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی ممان-مینا (Moment Based Integration Rule; MBIR) است. در ادامه فرمول‌بندی این روش آورده شده است.

$$\begin{aligned} \mu_H &\equiv E[H] \cong \\ &E[\sum_{i=1}^N h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - \\ &(N-1)h(\mu_1, \dots, \mu_N)] \cong \\ &\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N w_i^j h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - \\ &(N-1)h(\mu_1, \dots, \mu_N) \sigma_H^2 \equiv E[h(X) - \mu_H^2] \cong \quad (1) \\ &E[\sum_{i=1}^N h^2(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - \\ &(N-1)h^2(\mu_1, \dots, \mu_N)] - \mu_H^2 \cong \\ &\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N w_i^j h^2(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - \\ &(N-1)h^2(\mu_1, \dots, \mu_N) - \mu_H^2 \end{aligned}$$

در شکل ۱، فلوجارت محاسبه میانگین و واریانس تابع هزینه مساله طراحی در حضور عدم قطعیت شناختی رسم شده است.



شکل ۱) فلوجارت محاسبه میانگین و واریانس تابع هزینه در حضور عدم قطعیت شناختی به صورت کمبود داده

#### ۴- مدل‌سازی عدم قطعیت شناختی در تحلیل قابلیت اطمینان

در حضور عدم قطعیت‌های شناختی به صورت داده‌های ناکافی، قابلیت اطمینان یک متغیر تصادفی بوده و دارای عدم قطعیت است. هدف از این بخش، مدل‌سازی قابلیت اطمینان به فرم احتمالاتی است. برای این کار از روش قابلیت اطمینان بی‌زین [15] استفاده شده است که در ادامه توضیح داده خواهد شد. توزیع احتمالاتی دو جمله‌ای را در نظر بگیرید:

$$P_r(X = x, N|p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \dots, N \quad (7)$$

$N$  تعداد تمام سعی‌ها (رویدادها)،  $x$  تعداد موفقیت‌ها و  $p$  احتمال موفقیت هر رویداد است. در فرمول فوق،  $p$  مربوط به قبل از محاسبه

متغیرهای طراحی خود به دو دسته متغیرهای طراحی ذاتی  $X_t$  و شناختی  $X_s$  و پارامترهای طراحی نیز به دو دسته پارامترهای طراحی ذاتی  $P_t$  و شناختی  $P_s$  تقسیم می‌شوند. برای متغیرهای تصادفی ذاتی، مشکلی در استفاده از روش کاهش ابعادی تک‌متغیره وجود ندارد؛ اما در حضور عدم قطعیت شناختی به صورت کمبود داده، خود پارامترهای احتمالاتی دارای عدم قطعیت هستند. از آنجا که طراح هیچ گونه کنترلی روی پارامترهای طراحی ندارد، روش طراحی باید در بین تمام مقادیر ممکن پارامترهای شناختی، برای دستیابی به جواب بهینه جستجو کند. بنابراین، در هر نقطه طراحی، ابتدا مقادیر پارامترهای طراحی شناختی را با استفاده از یک روش بهینه‌سازی گرادین مینا محاسبه کرده و به عنوان میانگین پارامتر طراحی در روش کاهش ابعادی تک‌متغیره برای محاسبه توابع هدف مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این رویکرد، طراحی مقاوم حاصل شده یک طراحی محتاطانه است. مقادیر بهینه پارامترهای طراحی در هر نقطه طراحی به صورت زیر به دست می‌آید [11]:

$$\mu_{P_s}^* = \arg_{\mu_{P_s}} \max \{ w^* \mu_f(X^*, \mu_{P_s}) + (1-w)^* \sigma_f(X^*, \mu_{P_s}) \} \quad (3)$$

$$P_{S_l} \leq \mu_{P_s} \leq P_{S_u}$$

در فرمول فوق،  $P_{S_l}$  و  $P_{S_u}$  به ترتیب حدود پایین و بالای متغیرهای طراحی برای حلقه بهینه‌سازی درونی هستند. همچنین،  $w$  ضریب وزنی است که بیانگر اهمیت هر کدام از توابع هدف است. در این پژوهش این ضریب برابر با  $0.5$  در نظر گرفته شده است. متغیرهای طراحی حلقه درونی، پارامترهای طراحی شناختی حلقه بیرونی هستند. همچنین،  $X^*$  مقادیر متغیرهای طراحی در هر مرحله از طراحی بوده و در فرمول فوق ثابت در نظر گرفته می‌شوند. بردارهای  $P_{S_l}$  و  $P_{S_u}$  به صورت زیر به دست می‌آیند [11]:

$$P_{S_l} = \bar{P}_s - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{\mu_3}{6s^2 n} \quad (4)$$

$$P_{S_u} = \bar{P}_s + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{\mu_3}{6s^2 n}$$

$\bar{P}_s$  بردار میانگین پارامتر شناختی،  $n$  اندازه نمونه،  $S$  بردار واریانس نمونه،  $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$  توزیع تی-استودنت (Student's t-

distribution)  $n-1$  درجه آزادی و سطح اطمینان  $\alpha$  و  $\mu_3$  ممان مرکزی سوم است. همچنین، بعد از محاسبه میانگین پارامترهای شناختی، برای محاسبه واریانس پارامترها و متغیرهای شناختی، ابتدا یک بازه محافظه کارانه به صورت زیر محاسبه می‌شود [11]:

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{C_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}; \frac{(n-1)s^2}{C_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right] \quad (5)$$

که  $n$  اندازه نمونه،  $S$  انحراف معیار نمونه و  $C_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$  با استفاده از توزیع کای-اسکوئر (Chi Squared) با  $n-1$  درجه آزادی و درجه اهمیت  $\alpha$  به دست می‌آید. بعد از محاسبه بازه واریانس‌های متغیرهای تصادفی شناختی (اعم از متغیر طراحی و پارامتر طراحی)، بازه بالایی واریانس‌ها برای تقریب واریانس تابع هدف به عنوان معیار پایداری مورد استفاده قرار می‌گیرد [11]. در هر نقطه

- برای هر کدام از مجموعه داده شناختی به صورت  $(X_S, P_S)_k$ ، قابلیت اطمینان با استفاده از روش تحلیل قابلیت اطمینان مرتبه اول (FORM; First Order Reliability Method) محاسبه شود.

- پس از محاسبه قابلیت اطمینان‌ها به ازای تمام مجموعه داده‌های شناختی، تعداد تحقق‌های ممکن  $E_j(p)$ ، با استفاده از فرمول (۱۰) محاسبه شود.

- پس از محاسبه  $E_j(p)$ ، با استفاده از فرمول (۱۱) توزیع احتمالاتی پسین قابلیت اطمینان قید تقریب زده شود.

- با استفاده از سطح اطمینان مطلوب در فرمول (۱۳) قابلیت اطمینان قید محاسبه شود.

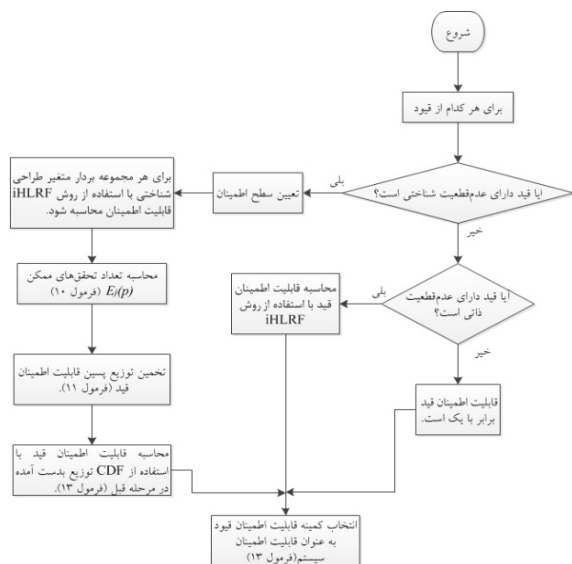
• در صورتی که قید فاقد عدم قطعیت شناختی باشد:

- با استفاده از روش FORM قابلیت اطمینان قید محاسبه شود.  
- اگر قید فاقد متغیر یا پارامتر طراحی غیرقطعی باشد، قابلیت اطمینان آن برابر با یک است.

پس از محاسبه قابلیت اطمینان تمام قیود، قابلیت اطمینان مساله طراحی (قابلیت اطمینان سیستم) با استفاده از فرمول زیر محاسبه شود:

$$R_S = \min(R_j), j = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

$R_j$  قابلیت اطمینان قید و  $R_j$  قابلیت اطمینان کلی سیستم است. در شکل ۲، فلوجارت محاسبه قابلیت اطمینان کلی سیستم مشاهده می‌شود.



شکل ۲) فلوجارت تقریب قابلیت اطمینان با استفاده از روش قابلیت اطمینان بی‌زیان

#### ۲-۴- روش تحلیل قابلیت اطمینان FORM

در روش FORM [16, 17]، تابع حالت حدی با استفاده از بسط مرتبه اول سری تیلور خطی‌سازی می‌شود. این عمل در فضای استاندارد نرمال و در محتمل‌ترین نقطه (Most probable point) MPP صورت می‌گیرد. محتمل‌ترین نقطه نزدیک‌ترین نقطه بر رویه حالت

احتمال  $\frac{x}{N}$  است. به هر حال، زمانی که  $p$  یک پارامتر غیرقطعی است و یک توزیع پیشین وجود دارد، می‌توان با استفاده از استنباط بی‌زیان توزیع  $p$  را بر اساس خروجی آزمایش‌ها به‌روز کرد [15]:

$$f(p|x) = \frac{f(p)f(x|p)}{\int_0^1 f(p)f(x|p)dx} \quad (8)$$

با انتخاب یک توزیع بتا، توزیع مزدوج استنباط بی‌زیان دوجمله‌ای، به‌عنوان توزیع پیشین، توزیع  $p$  به‌صورت زیر بروز می‌شود [15]:

$$f(p|x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}, B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (9)$$

که در آن  $\alpha = x + 1$  و  $\beta = N + x - 1$  است. توزیع پسین  $f(r|x)$ ، یک توزیع بتا بوده و بیانگر توزیع احتمال قابلیت اطمینان است. همچنین مشخص شده است که این توزیع، تابعی از  $x$  و  $N$  است. در حضور عدم قطعیت شناختی، خروجی یک تحلیل قابلیت اطمینان را می‌توان با استفاده از یک توزیع دوجمله‌ای مدل کرد. برای یک قید احتمالاتی  $Pr [P_{g_j}(X, P) \leq 0] = P_{g_j}(0)$ ، توزیع احتمالاتی  $P_{g_j}(0)$  با استفاده از مفهوم استنباط بی‌زیان و با تعریف تعداد تحقق‌های ممکن طراحی  $E_j(r)$ ، قابل تخمین است:

$$E_j(p) = \sum_{k=1}^N Pr [g_j(X_t, P_t) \leq 0 | (X_S, P_S)_k] \quad (10)$$

$N$  تعداد نمونه‌ها در بردار متغیرهای تصادفی شناختی است. با استفاده از استنباط دوجمله‌ای بی‌زیان شرح داده شده در بالا، تخمینی از توزیع پسین  $P_{g_j}(0)$  با استفاده از توزیع احتمالاتی بتا حاصل می‌شود:

$$Pr [P_{g_j}(0)] = Beta(P_{g_j}(0); E_j(r) + 1, N - E_j(r) + 1) \quad (11)$$

برای هر طراحی، سطح اطمینان از طراحی نسبت به قید نامساوی  $Z_j$  به‌صورت احتمال فراگذشت از قابلیت اطمینان هدف تعریف می‌شود:

$$\xi_j = Pr [P_{g_j}(0) | \mu_x \geq R_j]; j = 1, 2, \dots, J \quad (12)$$

با تعریف یک سطح اطمینان هدف، قابلیت اطمینان با توجه به توزیع به‌دست آمده با استفاده از استنباط بی‌زیان برای قابلیت اطمینان تابع عملکرد، به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$R_j = 1 - CDF[1 - \xi_j]; j = 1, 2, \dots, J \quad (13)$$

#### ۴-۱- فلوجارت محاسبه قابلیت اطمینان

برای محاسبه قابلیت اطمینان یک مساله طراحی تحت قیود مختلف، در حضور عدم قطعیت شناختی به‌ترتیب زیر عمل می‌شود. برای هر کدام از قیود:

• اگر قید دارای عدم قطعیت شناختی باشد:

- با توجه به حساسیت محصول و طراحی، سطح اطمینان  $\xi$  تعیین می‌شود. در این پژوهش فرض بر این است که  $\xi$  ابتدا تعیین شده و سپس قابلیت اطمینان طراحی به‌عنوان یک هدف در مساله طراحی بیشینه شود. این عمل می‌تواند برعکس نیز صورت بگیرد. بدین صورت که ابتدا قابلیت اطمینان مورد نظر مشخص شده و سپس سطح اطمینان طراحی به‌عنوان یک هدف بیشینه شود.

$$\text{otherwise: } C = \eta \cdot \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\nabla G(\tilde{y})\|}$$

در روش FORM سه شرط زیر به عنوان معیار همگرایی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\left| \frac{G(\tilde{y}_m)}{G_0} \right| \leq e_1 \approx 0.001, \quad (۲۴)$$

$$|\tilde{y}_m - (\alpha_m^T \tilde{y}_m) \alpha_m| \leq e_2 \approx 0.001,$$

$$|\beta_m - \beta_{m-1}| \leq e_3,$$

اولین شرط این است که در گام فعلی بهینه‌سازی، نقطه جدید حاصل‌شده به اندازه کافی به رویه حالت حدی نزدیک شده باشد. شرط دوم بیان می‌کند که نقطه فعلی نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ هست و در نتیجه گرادیان رویه حالت حدی باید از مبدأ عبور کند. در شرط سوم نرخ تغییرات اندیس قابلیت اطمینان نسبت به افزایش گام از یک مقدار معین کمتر شود. با دور شدن از مبدأ، شرط دوم سخت‌گیرانه‌تر می‌شود. بنابراین این شرط به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left| \frac{\tilde{y}_m}{\|\tilde{y}_m\|} - (\alpha_m^T \frac{\tilde{y}_m}{\|\tilde{y}_m\|}) \alpha_m \right| \leq e_2 \approx 0.001 \quad (۲۵)$$

### ۵- مراحل الگوریتم پیشنهادی

۱-۵- تعریف مساله: در اولین گام از الگوریتم، مساله بهینه‌سازی به طور کامل تعریف می‌شود. در این گام تابع برازندگی (Fitness Function)، تعداد متغیرهای طراحی و بازه متغیرها تعیین می‌شود. در این پژوهش، مساله طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان به صورت سه هدفه با سه هدف کمینه‌سازی تابع هزینه، کمینه‌سازی واریانس تابع هزینه و بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان طراحی فرمول‌بندی شده است. توجه شود که قیود مساله به صورت احتمالاتی بوده و در قالب یک تابع هدف اضافی (قابلیت اطمینان) در دل تابع برازندگی تعریف می‌شود. بنابراین این تابع فاقد قید معین است.

در این پژوهش، در راستای افزایش نرخ همگرایی مساله بهینه‌سازی با تعداد جمعیت کمتر، قیود طراحی با استفاده از مفهوم تابع پله و استفاده از یک تابع جریمه به توابع هدف اضافه شده‌اند. تابع هزینه و واریانس آن (معیار مقاوم‌بودن) با استفاده از الگوریتم موجود در فلوچارت شکل ۱ و قابلیت اطمینان طراحی با استفاده از الگوریتم موجود در شکل ۲ محاسبه می‌شود.

۲-۵- تعریف پارامترهای روش بهینه‌سازی NSGA-II: در این گام با توجه به ابعاد مساله بهینه‌سازی، پارامترهای روش NSGA-II مانند تعداد جمعیت، معیارهای توقف، احتمال جهش، احتمال تقاطع (Crossover)، تعداد نوزادان، تعداد جمعیت جهش‌یافته، نرخ جهش و گام جهش تعریف می‌شود.

۳-۵- مقداره‌ی اولیه: در این گام، جمعیت اولیه ایجاد شده و سپس توابع هدف برای هر کروموزوم محاسبه می‌شود.

۴-۵- فاصله ازدحامی برای هر کدام از اعضای جمعیت محاسبه شده و سپس این اعضا بر اساس فاصله ازدحامی مرتب می‌شوند.

۵-۵- مرتب‌سازی: اعضای جمعیت با استفاده از الگوریتم مرتب‌سازی

حدی به مبدأ در فضای استاندارد نرمال است. این نقطه با استفاده از حل یک مساله بهینه‌سازی به صورت زیر محاسبه می‌شود [16]:

$$y^* = \operatorname{argmin}\{\|\tilde{y}\| \mid G(\tilde{y}) = 0\} \quad (۱۵)$$

روش‌های متفاوتی برای حل مساله بهینه‌سازی فوق توسعه‌یافته است. در تمامی این روش‌ها، در هر مرحله از فرآیند جستجو و به صورت تکراری باید چک شود که آیا شرط ارضا می‌شود یا خیر. بنابراین در هر مرحله از بهینه‌سازی باید بردار  $y$  به کمک تحلیل توابع به  $\tilde{y}$  تبدیل‌شده و شرط صفربودن تابع حالت حدی چک شود. بعد از تعیین نقطه MPP، اندیس قابلیت اطمینان پیدا شده و احتمال شکست به‌راحتی با استفاده از تابع توزیع تجمعی استاندارد نرمال به صورت زیر محاسبه می‌شود [17]:

$$\beta = \|y^*\| \rightarrow p_f = \varphi(-\beta) \quad (۱۶)$$

### ۳-۴ الگوریتم iHLRF

فرآیند جستجوی MPP با استفاده از یک رابطه بازگشتی به فرم زیر انجام می‌گیرد [18]:

$$y_{m+1} = y_m + S_m d_m \quad (۱۷)$$

$m$  شمانده مرحله،  $S_m$  طول گام و  $d_m$  جهت گام است. این معادله بازگشتی با استفاده از یک حدس اولیه شروع می‌شود که معمولاً میانگین متغیرهای تصادفی به‌عنوان حدس اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در هر مرحله، تابع حالت حدی خطی‌شده را در نظر بگیرید [18]:

$$G(\tilde{y}) \approx G(\tilde{y}_m) + [\nabla G(\tilde{y}_m)]^T (\tilde{y} - \tilde{y}_m) \quad (۱۸)$$

با استفاده از رابطه بالا، نقطه جدید به صورت زیر به دست می‌آید [18]:

$$\tilde{y}_{m+1} = \left( \frac{G(\tilde{y}_m)}{\|\nabla G(\tilde{y}_m)\|} + \alpha^T \tilde{y}_m \right) \alpha \quad (۱۹)$$

که در آن  $\alpha = -\frac{\nabla G(\tilde{y}_m)}{\|\nabla G(\tilde{y}_m)\|}$  است. با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۱۷)، حاصل ضرب طول گام در جهت گام به صورت زیر به دست می‌آید [18]:

$$S_m d_m = \tilde{y}_{m+1} - \tilde{y}_m = \left( \frac{G(\tilde{y}_m)}{\|\nabla G(\tilde{y}_m)\|} + \alpha^T \tilde{y}_m \right) \alpha - \tilde{y}_m \quad (۲۰)$$

در الگوریتم iHLRF [18]، برای دوری از فرآیند بهینه‌سازی اضافی، ابتدا طول گام چک شده و در صورت ارضاشدن شرایط به مرحله بعد می‌رود. در ابتدای هر مرحله طول گام با استفاده از قانون آرمیجو (Armijo Rule) انتخاب می‌شود:

$$S_m = b^k, 0 < b < 1, k = 0, 1, \dots \quad (۲۱)$$

در این پژوهش،  $b$  برابر با ۰/۵ در نظر گرفته شده است. سپس معیار مناسب بودن طول گام با استفاده از تابع شایستگی چک می‌شود:

$$m(\tilde{y}_{m+1}) - m(\tilde{y}_m) \leq a S_m (\nabla_m^T(\tilde{y}_m) d_m) \quad (۲۲)$$

$$m(\tilde{y}) = 0.5 * \|\tilde{y}\|^2 + C * \|G(\tilde{y})\|$$

$$\nabla_m(\tilde{y}) = y_m + C \cdot \nabla G(\tilde{y}) * \operatorname{sgn}(G(\tilde{y}))$$

در روابط فوق بایستی  $C \geq \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\nabla G(\tilde{y})\|}$  باشد؛ بنابراین این پارامتر در این پژوهش به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{if } |G(\tilde{y})| \geq 0 : C = \eta \cdot \max \left\{ \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\nabla G(\tilde{y})\|}, \frac{1}{2} \frac{\|\tilde{y}+d\|}{\|G(\tilde{y})\|} \right\} \quad (۲۳)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_0^2) \quad (26)$$

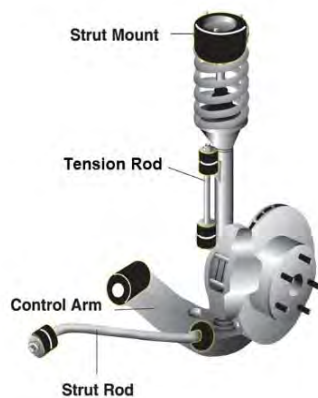
تنش درون میله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{4Q}{\pi(d_1^2 - d_0^2)} \quad (27)$$

با توجه به هندسه و خصوصیات فیزیکی میله، دو قید برای این طراحی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$-d_1 + d_0 \leq 0, \quad \frac{4Q}{\pi(d_1^2 - d_0^2)} - r \leq 0 \quad (28)$$

$r$  تنش تسلیم ماده مورد استفاده است. در این مثال،  $Q$  و  $r$  دارای عدم قطعیت بوده و به عنوان پارامترهای طراحی در نظر گرفته شده‌اند. همچنین، فرض می‌شود که قطر داخلی دارای عدم قطعیت شناختی بوده و تعداد محدودی نمونه از این متغیر در دست باشد. در جداول ۱ و ۲، توزیع‌های احتمال و پارامترهای مربوط به متغیرها و پارامترهای طراحی بیان شده است. ابعاد هندسی برحسب میلی‌متر،  $Q$  بر حسب مگاپاسکال و واحد  $r$  مگاپاسکال است. در حل این مساله فرض می‌شود که تنها یک متغیر تصادفی با عدم قطعیت شناختی موجود باشد و آن متغیر طراحی دوم، یعنی  $d_0$  است.



شکل ۴) میله محوری تحت کشش

جدول ۱) توزیع احتمالاتی و بازه متغیرهای طراحی

متغیر طراحی	کران بالا	کران پایین	انحراف از معیار	توزیع احتمالاتی
قطر خارجی $d_1$	۴۰	۳۰	۳/۵	نرمال
قطر داخلی $d_0$	۳۰	۲۰	۲/۵	نرمال

جدول ۲) مشخصات آماری پارامترهای طراحی

پارامتر طراحی	انحراف از معیار	میانگین	توزیع احتمالاتی
$Q$	۲۶	۱۷۰	نرمال
$r$	۱۱	۴۰۰	نرمال

مساله بهینه‌سازی در سه سطح متفاوت از تعداد نمونه مربوط به متغیر طراحی با عدم قطعیت شناختی حل شده و تأثیر تعداد نمونه‌های در دسترس بر قابلیت اطمینان طراحی در نمودار ۱ نشان داده شده است. سطح اطمینان برابر با ۹/۰ در نظر گرفته شده است.

غیرمغلوب دسته‌بندی و مرتب می‌شوند. در صورتی که معیارهای توقف ارضاء نشود این فرآیند ادامه می‌یابد.

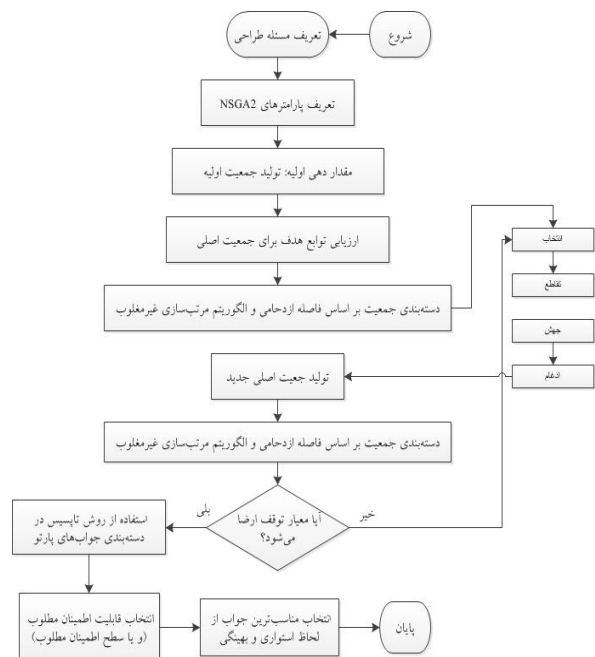
۶-۵- تقاطع و جهش.

۷-۵- ادغام: با ادغام جمعیت اصلی، جمعیت جهش یافته و جمعیت فرزندان، جمعیت اصلی جدید تولید می‌شود.

۸-۵- توقف: جمعیت اصلی جدید بر اساس فاصله ازدحامی و الگوریتم مرتب‌سازی غیرمغلوب دسته‌بندی شده و سپس معیار توقف چک می‌شود. در صورت ارضاء نشدن معیارهای توقف به گام ۶ برگردانده می‌شود.

۹-۵- تاپسیس: پس از توقف و دستیابی به جبهه پارتو، با استفاده از روش تاپسیس، کلیه جواب‌ها از لحاظ بهینگی، مقاوم بودن و قابلیت اطمینان دسته‌بندی و ارزش‌گذاری می‌شوند.

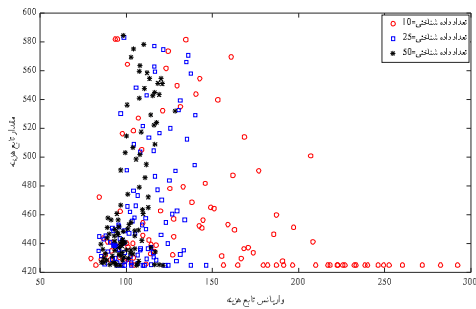
۱۰-۵- تحلیل نهایی: در گام آخر، با توجه به اینکه سطح اطمینان یا قابلیت اطمینان به عنوان هدف سوم در نظر گرفته شده باشد، در یک قابلیت اطمینان مطلوب (یا سطح اطمینان مطلوب)، نزدیک‌ترین جواب به جواب ایده‌آل به عنوان جواب طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان انتخاب می‌شود. الگوریتم چارچوب پیشنهادی در شکل ۳ ترسیم شده است.



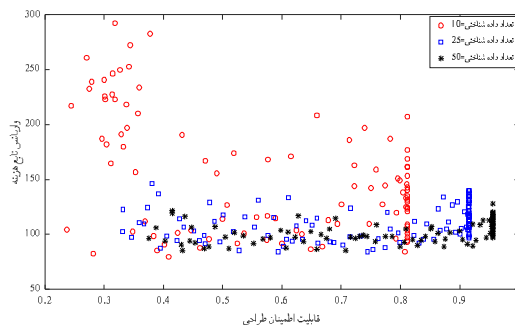
شکل ۳) مراحل الگوریتم پیشنهادی برای طراحی RBRDO

۶- مطالعه موردی: طراحی یک میله توخالی تحت بار محوری در این بخش به منظور به کارگیری الگوریتم پیشنهادی در فرآیند طراحی، یک میله توخالی با قطر داخلی  $d_0$  و قطر خارجی  $d_1$  انتخاب شده است. فرض می‌شود این میله که کاربرد فراوانی در صنعت خوردروسازی دارد (شکل ۴) تحت کشش محوری  $Q$  قرار داشته باشد. هدف در این طراحی، کمینه کردن وزن میله با انتخاب صحیح قطر داخلی  $d_0$  و قطر خارجی  $d_1$  است. بنابراین تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود:



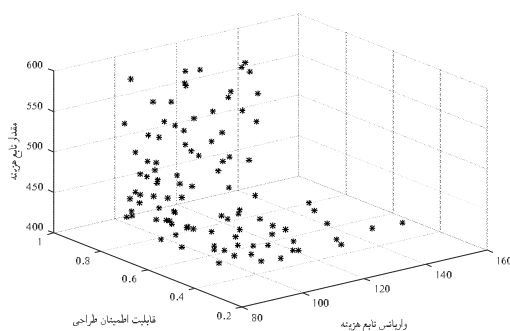


نمودار (۳) تاثیر تعداد داده بر تغییرات واریانس در جبهه پارتوی نهایی



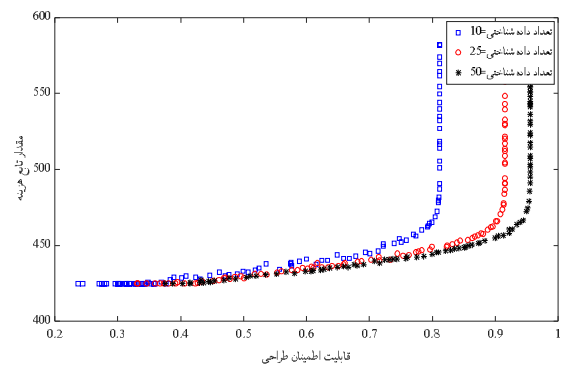
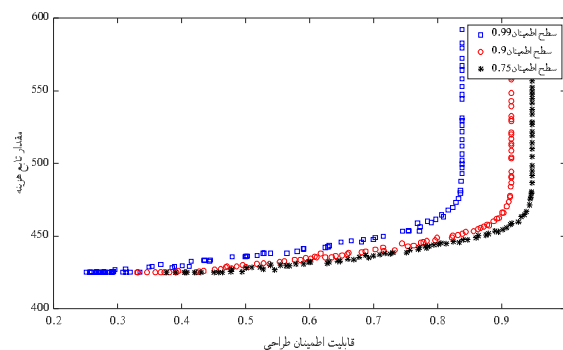
نمودار (۴) تاثیر تعداد داده بر تغییرات واریانس و قابلیت اطمینان طراحی

در نمودار ۵، جبهه پارتو برای مساله میله در حالتی که تعداد داده از عدم قطعیت شناختی ۲۵ و سطح اطمینان ۰/۹ است، رسم شده است. برای این مساله، در حالتی که مساله طراحی سه‌بعدی باشد، جبهه پارتو یک ابرصفحه در فضای سه‌بعدی است. با توجه به مساله طراحی، جبهه پارتو در فضای سه‌بعدی می‌تواند اشکال متفاوتی داشته باشد. برای درک بهتر از جبهه پارتو، در قالب نمودارهای ۶ تا ۸ جبهه پارتو به صورت دوبعدی ترسیم شده است. تصمیم‌گیری در مورد انتخاب بهترین جواب در بین تمامی جواب‌های غیرمغلوب حاصل شده در جبهه پارتوی نهایی سخت است، چراکه این امر یک فرآیند تصمیم‌گیری سه‌بعدی است. بدین منظور، مجموعه جواب نهایی با استفاده از روش تاپسیس ارزش‌گذاری شده‌اند (نمودار ۹). روش تاپسیس، نقاط طراحی را بر اساس فاصله نسبی آنها از نقطه طراحی ایده‌آل ارزش‌گذاری می‌کند. به منظور انتخاب یک نقطه به‌عنوان نقطه نهایی، ابتدا قابلیت اطمینان هدف و سطح اطمینان را تعیین کرده و سپس با ارزش‌ترین جواب موجود در دسته‌بندی نمودار ۹ که قابلیت اطمینان را ارضا می‌کند، به‌عنوان نقطه طراحی نهایی در نظر گرفته می‌شود.



نمودار (۵) جبهه پارتو مساله میله محوری در فضای سه‌بعدی

مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نمونه‌ها در یک سطح مقطع ثابت، قابلیت اطمینان افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، در یک مقدار ثابت از تابع هزینه با کاهش عدم قطعیت شناختی، قابلیت اطمینان طراحی و متعاقباً بیشینه قابلیت اطمینان قابل حصول در فرآیند طراحی افزایش می‌یابد. همچنین این مساله بهینه‌سازی در سه سطح مختلف از سطح اطمینان نیز حل شده و تاثیر این پارامتر بر جبهه پارتو مربوط به قابلیت اطمینان و سطح مقطع سیستم در نمودار ۲ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش سطح اطمینان، بیشینه قابلیت اطمینان قابل دستیابی در فرآیند طراحی، کاهش می‌یابد. همچنین، در یک سطح مقطع ثابت، هرچه سطح اطمینان تعریف شده، کمتر باشد قابلیت اطمینان بیشتر است.

نمودار (۱) تاثیر تعداد داده از عدم قطعیت شناختی متغیر  $do$  بر قابلیت اطمینان طراحی

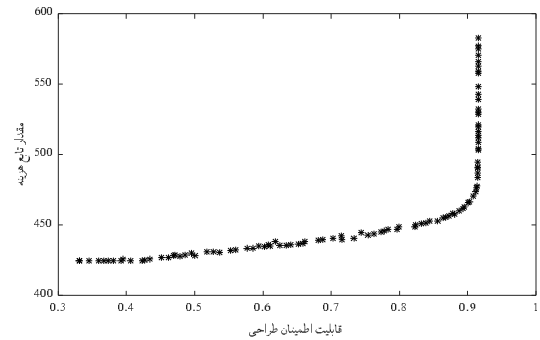
نمودار (۲) تاثیر سطح اطمینان انتخابی (۷) بر قابلیت اطمینان طراحی

تاثیر تعداد داده از عدم قطعیت شناختی بر پراکندگی واریانس در جبهه پارتوی نهایی در نمودار ۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد داده شناختی، پراکندگی واریانس تابع هزینه کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، عدم قطعیت واریانس تابع هزینه که از وجود عدم قطعیت‌های شناختی ناشی می‌شود، کاهش می‌یابد. در تمامی این مثال‌ها سطح اطمینان  $\alpha$  برابر با ۰/۵ در نظر گرفته شده است. در نمودار ۴، جبهه پارتو مربوط به واریانس تابع هزینه و قابلیت اطمینان طراحی در فضای دوبعدی در اندازه‌های مختلف از عدم قطعیت شناختی مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد داده موجود از عدم قطعیت شناختی، قابلیت اطمینان طراحی، افزایش و پراکندگی واریانس تابع هزینه کاهش می‌یابد.

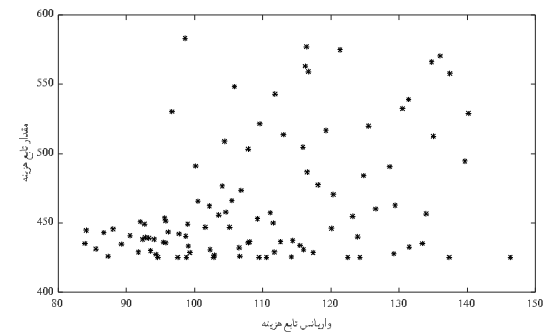


بهینه معین آورده شده است. مشاهده می‌شود که در این رویکرد، طراحی کمترین مقدار سطح مقطع را دارد، در حالی که تغییرات تابع هزینه (واریانس) بسیار بالا بوده و قابلیت اطمینان طراحی در کمترین سطح ممکن است. در ردیف دوم، رویکرد بهینه‌سازی مقاوم برای دستیابی به یک طراحی مقاوم استفاده شده است. در این حالت تغییرات تابع هزینه در کمترین مقدار ممکن قرار دارد. این در حالی است که نسبت به رویکرد طراحی متعین، تابع هزینه و قابلیت اطمینان اندکی افزایش یافته است. این رویکرد نیز قابلیت اطمینان مطلوب طراحی را ارضاء نمی‌کند. در ردیف سوم روش طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان به منظور افزایش قابلیت اطمینان طراحی استفاده شده است. مشاهده می‌شود که در این رویکرد، قابلیت اطمینان طراحی به مقدار قابل توجهی افزایش یافته است. در واقع در این رویکرد دو هدف متناقض وجود دارد: قابلیت اطمینان و تابع هزینه؛ به طوری که با افزایش قابلیت اطمینان، مقدار تابع هزینه نیز افزایش می‌یابد. در هر سه رویکرد فوق فرض بر این است که تابع توزیع احتمال متغیرها و پارامترهای طراحی موجود باشد. در حالی که در عمل، تنها نمونه‌هایی محدود از عدم قطعیت برخی متغیرها موجود است. در ستون چهارم، نتایج حاصل از طراحی با رویکرد طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین آورده شده است. در این رویکرد نسبت به رویکرد پیشین قابلیت اطمینان طراحی، کاهش و واریانس تابع هزینه افزایش یافته است؛ در حالی که مقدار تابع هزینه ثابت است. دلیل افزایش واریانس و کاهش قابلیت اطمینان طراحی، وجود عدم قطعیت شناختی ناشی از کمبود داده است. با افزایش تعداد نمونه‌ها از عدم قطعیت شناختی، نتایج رویکرد طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین به نتایج طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان نزدیک می‌شوند، تا جایی که با داشتن توزیع کامل متغیرها، طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین به طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان تبدیل می‌شود. در ردیف پنجم، نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی نشان داده شده است. در واقع در الگوریتم پیشنهادی با ترکیب رویکرد بهینه‌سازی مقاوم و طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین، مساله طراحی به یک مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه با سه هدف متناقض تبدیل شده است. بنابراین مشاهده می‌شود که در روش پیشنهادی نسبت به رویکرد طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین، قابلیت اطمینان کاهش یافته است؛ این در حالی است که مقدار تابع هزینه و واریانس آن نیز کاهش یافته است. به عبارتی، الگوریتم پیشنهادی با کاهش قابلیت اطمینان طراحی مقدار تابع هزینه و واریانس آن را کاهش می‌یابد.

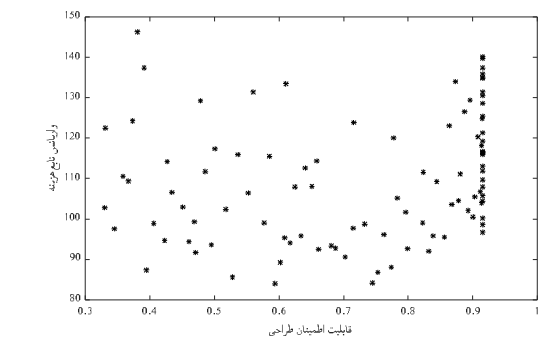
برای درک درست‌تر از کارایی الگوریتم پیشنهادی، جواب موجود در جبهه پارتو نهایی حاصل از طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین که دارای سطح مقطع یکسان با جواب الگوریتم پیشنهادی است، نیز با جواب حاصل از الگوریتم پیشنهادی در ردیف ششم مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که جواب الگوریتم پیشنهادی دارای قابلیت اطمینان بیشتر و همچنین واریانس کمتر نسبت به



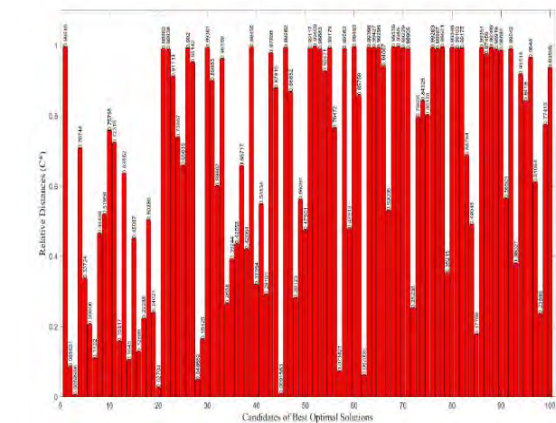
نمودار ۶) جبهه پارتو مربوط به قابلیت اطمینان طراحی و مقدار تابع هزینه مساله میله محوری



نمودار ۷) جبهه پارتو مربوط به مقدار تابع هزینه و واریانس مساله میله محوری



نمودار ۸) جبهه پارتو مربوط به واریانس تابع هزینه و قابلیت اطمینان طراحی در مساله میله محوری



نمودار ۹) ارزش‌گذاری مجموعه جواب نهایی با استفاده از روش تاپسیس

در جدول ۳، نتایج طراحی در شرایط عدم قطعیت با رویکردهای مختلف با هم مقایسه شده‌اند. در ردیف اول، نتایج حاصل از طراحی

بیزین به صورت محتاطانه و با استفاده از فرمول ۵ محاسبه شده است. مشاهده می‌شود که واریانس طراحی نسبت به حالتی که مدل‌سازی عدم قطعیت شناختی در واریانس تابع هزینه صرف‌نظر شده است، افزایش می‌یابد.

حل طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان است. در الگوریتم پیشنهادی، واریانس تابع هزینه به صورت محتاطانه و با استفاده از کران بالای حاصل‌شده از فرمول (۵) تعریف می‌شود. بنابراین، برای مقایسه واریانس‌ها در دو روش، در ردیف آخر جدول، واریانس سطح مقطع طراحی حاصل از طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان

جدول ۳) مقایسه نتایج حاصل از طراحی با رویکردهای مختلف و الگوریتم پیشنهادی

رویکرد طراحی	قابلیت اطمینان	واریانس سطح مقطع	سطح مقطع	قطر داخلی $d_0$	قطر خارجی $d_1$
بهینه‌سازی متعین	۰/۵۰۰	۱۱۷/۱۸۹	۴۲۵/۰۱۷	۲۸/۸۵۷	۳۴/۷۸۱
بهینه‌سازی مقاوم	۰/۵۰۵	۸۵/۲۴۰	۴۳۰/۶۰۷	۲۰/۱۲۸	۳۰/۸۷۷
طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان	۰/۹۸۴	۹۶/۹۴۰	۴۷۹/۹۰۰	۲۱/۶۶۰	۳۲/۸۶۷
طراحی بهینه و مقاوم بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین	۰/۶۲۵	۱۱۲/۶۵۰	۴۶۶/۰۶۲	۲۴/۸۸۶	۳۴/۵۳۰
الگوریتم پیشنهادی	۰/۸۷۰	۹۹/۰۰۰	۴۴۸/۰۰۰	۲۱/۴۹۵	۳۲/۹۷۳
طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین (سطح مقطع یکسان نسبت به روش پیشنهادی)	۰/۸۱۱	۱۱۱/۸۱۶	۴۴۸/۲۵۰	۲۴/۵۳۳	۳۴/۲۴۳
طراحی بهینه بر مبنای قابلیت اطمینان بیزین (با لحاظ عدم قطعیت شناختی به صورت محتاطانه)*	۰/۸۱۰	۱۱۸/۱۲۳	۴۴۸/۲۵۰	۲۴/۲۳۳	۳۴/۲۳۴

بخشی از آن) به چاپ نرسیده است و همچنین برای بررسی یا چاپ برای نشریه دیگری فرستاده نشده است.

**تعارض منافع:** بدین وسیله نویسندگان اعلام می‌کنند که این اثر حاصل از یک پژوهش مستقل بوده و هیچ گونه تضاد منافعی با سازمان‌ها و اشخاص دیگری ندارد.

**سهم نویسندگان:** حسین حسینی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۵۰٪): سعید خدایگان (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر کمکی (۵۰٪)

**منابع مالی:** هیچ منبع مالی برای انجام این تحقیق استفاده نشده است.

#### منابع

- 1- Yadav OP, Bhamare SS, Rathore A. Reliability-based robust design optimization: A multi-objective framework using hybrid quality loss function. *Quality and Reliability Engineering International*. 2010;26(1):27-41.
- 2- Arora JS. *Introduction to optimum design*. 2nd Edition. Amsterdam: Elsevier; 2004.
- 3- Haldar A, Mahadevan S. *Probability, reliability, and statistical methods in engineering design*. 1st Volume. New York: Wiley; 2000.
- 4- Beyer HG, Sendhoff B. Robust optimization-a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007;196(33-34):3190-3218.
- 5- Park GJ, Lee TH, Lee KH, Hwang KH. Robust design: An overview. *AIAA Journal*. 2006;44(1):181-191.
- 6- Du X, Chen W. Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design. *Journal of Mechanical Design*. 2000;122(4):385-394.
- 7- Aoues Y, Chateaufneuf A. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*. 2010;41(2):277-294.

#### ۷- نتیجه‌گیری

با استفاده از روش قابلیت اطمینان بیزین، یک الگوریتم جامع همراه با یک فرمول‌بندی جدید به منظور طراحی بهینه و مقاوم سیستم‌های مکانیکی بر مبنای قابلیت اطمینان و در حضور عدم قطعیت شناختی ارائه شده است. در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا مساله طراحی به صورت یک مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه با سه هدف کمینه‌سازی تابع هزینه، کمینه‌سازی واریانس تابع هزینه به عنوان معیار پایداری و بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان طراحی فرمول‌بندی شده و سپس مساله بهینه‌سازی با استفاده از روش NSGA-II حل می‌شود. در انتهای الگوریتم پیشنهادی نیز به منظور تعیین مناسب‌ترین جواب، مجموعه جواب نهایی با استفاده از روش تاپسیس ارزش‌گذاری شده و مناسب‌ترین جواب به عنوان نقطه طراحی انتخاب می‌شود. با بررسی اندازه نمونه موجود از عدم قطعیت شناختی روی جبهه‌های پارتو مشاهده شد که با افزایش تعداد داده (کاهش عدم قطعیت شناختی)، قابلیت اطمینان طراحی و بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان قابل حصول افزایش می‌یابد و پراکندگی واریانس تابع هزینه نیز کاهش می‌یابد. همچنین با بررسی نتایج طراحی حاصل‌شده در یک حالت خاص با سایر رویکردها، مشاهده شد که الگوریتم پیشنهادی در حالت کلی جواب‌هایی به مراتب بهتر را در اختیار طراح می‌گذارد، چراکه جواب حاصل‌شده با الگوریتم پیشنهادی، مناسب‌ترین جواب ممکن از لحاظ کمینه‌بودن تابع هزینه و واریانس آن و بیشینه‌بودن قابلیت اطمینان طراحی است.

**تشکر و قدردانی:** بدین وسیله از حمایت مسئولین آزمایشگاه اندازه‌گیری ابعادی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف که امکان انجام این پژوهش را فراهم آوردند، تشکر و قدردانی می‌شود.

**تاییدیه اخلاقی:** این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به‌طور کامل یا

- 13- Box GE, Tiao GC. Bayesian inference in statistical analysis. Hoboken: John Wiley & Sons; 2011.
- 14- Srivastava R, Deb K. An evolutionary based Bayesian design optimization approach under incomplete information. *Engineering Optimization*. 2013;45(2):141-165.
- 15- Gunawan S, Papalambros PY. A bayesian approach to reliability-based optimization with incomplete information. *Journal of Mechanical Design*. 2006;128(4):909-918.
- 16- Bastidas-Arteaga E, Soubra AH. Reliability analysis methods. Unknown Location: ALERT Doctoral School; 2014.
- 17- Du X. First order and second reliability methods. Rolla: University of Missouri - Rolla; 2005. pp. 1-33.
- 18- Zhang Y, Der Kiureghian A. Two improved algorithms for reliability analysis. In: Rackwitz R, Augusti G, Borri A, editors. Reliability and optimization of structural systems. Boston: Springer; 1995. pp. 297-304.
- 8- Valdebenito MA, Schuëller GI. A survey on approaches for reliability-based optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010;42(5):645-663.
- 9- Yadav OP, Bhamare SS, Rathore A. Reliability-based robust design optimization: A multi-objective framework using hybrid quality loss function. *Quality and Reliability Engineering International*. 2010;26(1):27-41.
- 10- Forouzandeh Shahraki A, Noorossana R. Reliability-based robust design optimization: a general methodology using genetic algorithm. *Computers & Industrial Engineering*. 2014;74:199-207.
- 11- Lobato FS, Da Silva MA, Cavalini Jr AA, Steffen Jr V. Reliability-based robust multi-objective optimization applied to engineering system design. *Engineering Optimization*. 2019;52(1):1-21.
- 12- Lu H, Zhu Z, Zhang Y. A hybrid approach for reliability-based robust design optimization of structural systems with dependent failure modes. *Engineering Optimization*. 2019.