



Hysteretic Constitutive Equations Based Continuous Dynamic Modeling of Bending Piezoelectric Actuators

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Ghafariarad H.*¹ PhD,
Rezaei S.M.¹ PhD,
Zareinejad M.² PhD

How to cite this article

Ghafariarad H, Rezaei S.M, Zareinejad M. Hysteretic Constitutive Equations Based Continuous Dynamic Modeling of Bending Piezoelectric Actuators. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(5):1229-1139.

¹Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

²New Technologies Research Centre, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, 424 Hafez Avenue, Tehran, Iran Postal Code: 1591634311

Phone: +98 (21) 64543422

Fax: +98 (21) 66419736

Ghafariarad@aut.ac.ir

Article History

Received: April 07, 2018

Accepted: December 12, 2018

ePublished: May 01, 2019

ABSTRACT

Piezoelectric bending actuators have been extensively utilized in recent years. Two major modeling methods, lumped and continuous, have been generally proposed in previous researches for these actuators. The lumped method can only express the transverse vibration of one specified point on the actuator. In addition, the effect of higher vibrational modes has been ignored. Hence, continuous dynamic models have been proposed to rectify the mentioned drawbacks. In this method, linear constitutive equations for low voltage applications are usually applied. But, the main challenge in continuous modeling of piezoelectric actuators is the hysteresis nonlinear phenomenon caused by high excitation voltages. In this paper, piezoelectric nonlinear hysteretic constitutive equations have been employed to carry out the continuous dynamic model for two general types of bimorph bending actuators i.e. Series and Parallel. In addition, zero dynamic analysis for nonlinear systems has been applied to clarify the effect of higher vibrational modes on the actuator dynamic behavior based on the location of target point. Experimental results show the maximum error 1.44 and 1.2% in the identification of first and second vibrational modes, respectively, and the maximum error 2.89% in the modeling of actuator nonlinear behavior by two vibrational modes. These results validate the efficiency of the proposed dynamic model to express the actuator nonlinear behavior; dynamic analysis, and its superiority over conventional models with one vibrational mode.

Keywords Piezoelectric Bending Actuator; Hysteretic Constitutive Equations; Dynamic Modeling and Analysis; Zero Dynamics

CITATION LINKS

[1] Development, analysis and control of a high-speed laser-free atomic ... [2] Piezoelectric bimorph charge mode ... [3] Mass detection of elastically distributed ultrathin layers using piezoresponse ... [4] A sensing and actuating transducer for measuring point impedance ... [5] On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration ... [6] MEMS in-plane motion/vibration measurement system based ... [7] Precision position/force interaction control of a piezoelectric multimorph microgripper ... [8] Dynamic characterization of human breast cancer cells using a ... [9] Bouc-Wen modeling and inverse multiplicative structure to compensate hysteresis nonlinearity in ... [10] Adaptive discrete-time sliding mode impedance control of a piezoelectric ... [11] Trajectory tracking control of a piezoelectric stage for dynamic ... [12] Novel multirate control strategy for ... [13] Robust position control of piezoelectric actuator using self ... [14] The actuation characterization of cantilevered unimorph beams with single crystal ... [15] Analytical modeling of piezoelectric vibration-induced micro ... [16] Tip tracking control of a micro-cantilever Timoshenko beam via ... [17] Disturbance-observer-based hysteresis compensation for piezoelectric ... [18] Efficient modeling of ferroelectric behavior for the analysis of ... [19] Robust control design for precision positioning of a generic piezoelectric system with consideration of microscopic ... [20] Non-linear modelling of multilayer piezoelectric actuators in non-trivial configurations based on actuator design parameters and piezoelectric ... [21] Non-linear constitutive modeling ... [22] Modeling and compensation of hysteresis in piezoceramic transducers for ... [23] Nonlinear nonconservative behavior and modeling of piezoelectric energy harvesters including proof ... [24] Self-sensing actuation using online capacitance measurement with application to active ... [25] Robust control with unknown dynamic estimation for multi-axial piezoelectric actuators with ... [26] An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from ... [27] Charge-based hysteresis compensation in low impedance piezoelectric actuators by a modified Prandtl ...

مدل‌سازی دینامیک پیوسته عملگرهای پیزوالکتریک خمشی بر پایه معادلات اساسی هیسترتیک

حامد غفاری‌راد* PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

سیدمهدی رضاعی PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

محمد زارعی‌نژاد PhD

پژوهشکده فناوری‌های نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده

عملگرهای خمشی پیزوالکتریک به‌طور گسترده‌ای در سال‌های اخیر مورد استفاده قرار گرفته است. به‌طور کلی، دو روش اصلی مدل‌سازی گسسته و پیوسته در تحقیقات پیشین برای این عملگرها پیشنهاد شده است. مدل‌سازی گسسته تنها می‌تواند ارتعاشات عرضی یک نقطه خاص روی عملگر را بیان نماید. به‌علاوه از اثر مودهای ارتعاشی فرکانس بالا در رفتار دینامیک صرف نظر می‌شود. بنابراین مدل‌های دینامیک پیوسته برای حل مشکلات مذکور ارائه شده است. در این نوع مدل‌سازی، معمولاً از معادلات اساسی خطی معتبر در ولتاژهای کاری پایین استفاده می‌شود. اما چالش اصلی در مدل‌سازی دینامیک پیوسته این عملگرها، پدیده غیرخطی هیسترتیزیس ناشی از تحریک ولتاژ بالا است. در این مقاله، معادلات اساسی غیرخطی هیسترتیک پیزوالکتریک ارائه و معادلات دینامیک پیوسته برای دو نوع متداول عملگرهای عرضی بایمورف، سری و موازی استخراج شده است. به‌علاوه، تحلیل دینامیک صفر برای سیستم‌های غیرخطی برای نمایان نمودن اثر مودهای ارتعاشی بالاتر بر رفتار دینامیک عملگر براساس مکان نقطه کاری به کار گرفته شده است. نتایج تجربی حداکثر خطای ۱.۴۴٪ و ۱.۲٪ در شناسایی مود ارتعاشی اول و دوم در نقاط کاری مختلف و خطای ۲.۸۹٪ در مدل‌سازی رفتار غیرخطی عملگر با دو مود ارتعاشی را نشان می‌دهد. این نتایج کارایی مدل دینامیک پیشنهادی را برای بیان رفتار غیرخطی عملگر، تحلیل رفتار و برتری آن بر مدل‌های مبتنی بر یک مود ارتعاشی را تایید می‌نماید.

کلیدواژه‌ها: عملگر خمشی پیزوالکتریک، معادلات اساسی هیسترتیک، مدل‌سازی و تحلیل دینامیک، دینامیک صفر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۲۱

* نویسنده مسئول: ghafarirad@aut.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، کاربردهای گوناگون ساختارهای خمشی پیزوالکتریک، به‌صورت یونیمورف (تک‌لایه) و بایمورف (دولایه)، یک موضوع قابل توجه برای محققان بوده است. با توجه به اثر مستقیم پیزوالکتریک، ساختارهای خمشی به‌عنوان انواع گوناگونی از سنسورها همچون سنسور موقعیت^[1]، نیرو^[2]، تشخیص جرم^[3]، اندازه‌گیری امپدانس^[4] و استخراج انرژی^[5] به کار رفته است. همچنین با توجه به اثر معکوس پیزوالکتریک، کاربرد آنها به‌عنوان عملگرها در حال افزایش است. به‌طور مثال، کاربردهای مختلف عملیات میکرونی همچون میکروسکوپ نیروی اتمی^[6]، میکرواسمبلی^[7] و تعیین مشخصات سلولی^[8] از این دست هستند. در حقیقت، قابلیت بالای این ساختارها به‌علت ساختار کنتیلور شکل و خمشی عرضی آنها است که این قابلیت، مانورپذیری آنها را در مقایسه با ساختارهای متداول طولی پیزوالکتریک‌ها افزایش می‌دهد. در نتیجه، مدل‌سازی دینامیک صحیح این عملگرها از اهمیت بالایی برخوردار است. اما مهم‌ترین چالش، رفتار غیرخطی هیسترتیزیس است که فرآیند مدل‌سازی دینامیک را پیچیده می‌نماید.

به‌طور کلی دو روش اصلی برای مدل‌سازی دینامیک عملگرهای

عرضی در تحقیقات پیشین ارائه شده است. در روش اول، مدل دینامیک گسسته برای بیان رفتار دینامیک عملگر لحاظ می‌شود. به‌علاوه، یک تابع غیرخطی کوپل با دینامیک اصلی، رفتار پدیده غیرخطی هیسترتیزیس را بیان خواهد نمود^[9, 10]. این روش تاکنون به‌طور گسترده‌ای برای عملگرهای طولی مورد استفاده قرار گرفته است^[11-13].

اما دو چالش اساسی برای استفاده از این نوع مدل‌سازی برای عملگرهای عرضی پیزوالکتریک مفروض است. اول، مدل شناسایی شده، تنها برای یک نقطه خاص روی عملگر معتبر است. به بیان دیگر، مدل شناسایی شده نمی‌تواند رفتار دینامیک تمامی نقاط مختلف در طول عملگر را مستقل از مکان قرارگیری بیان نماید. دوم، از تاثیر مودهای ارتعاشی بالاتر روی رفتار عملگر در این نوع مدل‌سازی چشم‌پوشی شده است. اما به‌عنوان روش دوم، مدل‌سازی دینامیک پیوسته برای رفع مشکلات مدل‌های گسسته پیشنهاد شده است. در این راستا، رفتار دینامیک پیوسته عملگرهای پیزوالکتریک یونیمورف با یک و چند کریستال توسط بیلگن بررسی شد^[14]. همچنین یک مدل تحلیلی برای مولدهای توان بایمورف توسط چن و همکاران ارائه شد^[15]. در این تحقیق، اثرات هندسی عملگر و فرکانس تحریک نیز مد نظر قرار گرفته است. برای کاربردهای با تحریک ولتاژ بالا، شیرازی و همکاران، مدل دینامیک خطی براساس نظریه تیرهای تیموشنکو را ارائه نموده‌اند^[16]. به‌عنوان یک چالش اساسی، اثر غیرخطی هیسترتیزیس در تمامی تحقیقات مذکور منظور نشده است. با این وجود، یی و همکاران، اثر هیسترتیزیس را به‌عنوان یک تابع آشفته‌گی کوپل‌شده با دینامیک خطی لحاظ نمود^[17]. در حقیقت، رفتار هیسترتیزیس به‌صورت مجزا و نه برگرفته از معادلات اساسی پیزو، در مدل‌سازی منظور شده است.

برای لحاظ نمودن اثر هیسترتیزیس در معادلات اساسی پیزوالکتریک، مدل‌های متفاوتی ارائه شده است^[18]. با استفاده از معادلات اساسی غیرخطی، چاو و همکاران تلاش نمودند تا اثر هیسترتیزیس را وارد مدل دینامیک پیوسته عملگر نمایند^[19]. اما حل دقیقی برای دینامیک عملگر پیشنهاد نشد. به‌علاوه، تنها مود ارتعاشی اول عملگر برای بیان رفتار دینامیک آن منظور شد. این بدان معناست که تاثیر مودهای ارتعاشی بالاتر در پاسخ خروجی عملگر حذف شده است.

در این مقاله، مدل‌سازی و تحلیل رفتار دینامیک عملگر براساس معادلات اساسی هیسترتیک به‌صورت نظری و تجربی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، یک ترکیب از معادلات اساسی هیسترتیک، متناسب با ناحیه عملکرد ولتاژ ورودی عملگر به کار گرفته شده است. سپس، روش همپلتون برای استخراج معادلات دینامیک پیوسته برای دو نوع از عملگرهای بایمورف، سری و موازی مورد استفاده قرار گرفته است. برای ارزیابی مدل پیشنهادی، دو مود ارتعاشی برای مدل‌سازی دینامیک منظور شده است. همچنین شکل مودهای دقیق سیستم برای گسسته‌سازی دینامیک پیوسته و مدل پراتندل ایشیلینسکی (PI) برای شناسایی اثر هیسترتیزیس به کار گرفته شده است. به‌دلیل رفتار غیرخطی عملگر، از تحلیل دینامیک صفر سیستم برای تحلیل رفتار دینامیک، بنا بر مکان انتخاب نقطه کاری هدف در راستای طول عملگر استفاده می‌شود. نتایج آزمایش‌های تجربی، دقت مدل بر مبنای دو مود ارتعاشی پیشنهادی را در مقایسه با مدل‌های گسسته، برای بیان رفتار غیرخطی عملگر تایید می‌نماید. همچنین آزمایش‌های تجربی، صحت تحلیل رفتار دینامیک عملگر براساس انتخاب مکان

$$\begin{cases} S = s^E \sigma + d E \\ D = d \sigma + \varepsilon^\sigma E \end{cases} \quad (1)$$

در این رابطه، تنش و میدان الکتریکی (σ, E) به‌عنوان متغیرهای مستقل و کرنش و جابه‌جایی الکتریکی (S, D) به‌عنوان متغیرهای وابسته بیان شده‌اند. s^E نرمی ماده تحت میدان الکتریکی صفر، d ثابت کرنش پیزو و ε^σ گذردهی الکتریکی پیزوالکتریک است. معادله ۱ بیانگر رفتار الکترومکانیک پیزوالکتریک‌ها است. در حقیقت، رابطه اول عملکرد پیزو در حوزه مکانیکی به‌عنوان عملگر و رابطه دوم، رفتار این ماده در حوزه الکتریکی به‌عنوان سنسور را بیان می‌نماید.

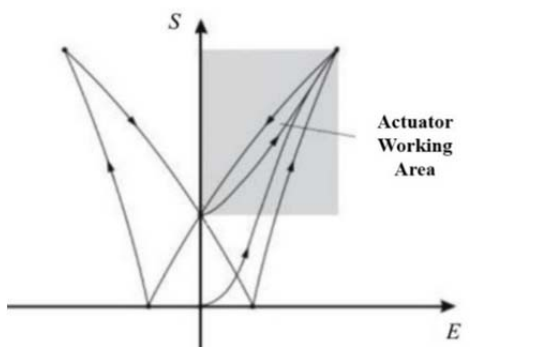
اما نکته مهم آن است که معادلات اساسی خطی معمولاً برای بیان رفتار عملگرهای پیزوالکتریک در کاربردهای میکرونی مناسب نیستند. این بدان دلیل بوده که در این کاربردها، میدان الکتریکی اعمالی بالا است. در نتیجه، رفتار خروجی پیزوالکتریک (کرنش یا جابه‌جایی الکتریکی) در اثر ورودی میدان الکتریکی، یک رفتار غیرخطی هیسترتیک خواهد بود. در چنین کاربردهایی، دیگر معادلات اساسی خطی بر رفتار پیزو حاکم نخواهد بود. برای در نظر گرفتن اثر هیستریزیس در خروجی پیزو، در چنین حالاتی، کرنش و جابه‌جایی الکتریکی به دو قسمت بازگشت‌پذیر خطی و بازگشت‌ناپذیر غیرخطی تقسیم خواهند شد [18, 20].

$$\begin{cases} S = S^r + S^{ir} = s^E \sigma + d E + S^{ir} \\ D = D^r + D^{ir} = d \sigma + \varepsilon^\sigma E + D^{ir} \end{cases} \quad (2)$$

S^r و D^r قسمت‌های بازگشت‌پذیر کرنش و جابه‌جایی الکتریکی بوده که بیانگر رفتار خطی ماده است، در حالی که S^{ir} و D^{ir} بر رفتار بازگشت‌ناپذیر غیرخطی ناشی از هیستریزیس ماده دلالت خواهد داشت.

تاکنون تحقیقات گسترده‌ای به‌منظور تعیین توابع غیرخطی S^{ir} و D^{ir} صورت گرفته است [18, 20, 21]. در این تحقیقات به‌طور عمده، دو تابع متفاوت برای بیان این دو تابع غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. در این نوع مدل‌سازی معمولاً ناحیه وسیعی از ورودی میدان الکتریکی مثبت و منفی که شامل پلاریزاسیون و دی‌پلاریزاسیون ماده است، برای بررسی رفتار غیرخطی ماده در نظر گرفته می‌شود. این امر سبب می‌شود که معادلات به‌دست‌آمده برای این توابع غیرخطی، بسیار پیچیده شده باشد و عملاً قابل استفاده در کاربردهای مدل‌سازی دینامیک نباشد.

به همین دلیل و بنا بر هدف این پژوهش مبنی بر مدل‌سازی دینامیک، تنها یک ناحیه محدود یک‌طرفه از ورودی میدان الکتریکی موسوم به ناحیه کاری عملگرهای پیزوالکتریک مطابق با شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۳ ناحیه کاری عملگر پیزوالکتریک

نقطه هدف را تایید می‌نماید.

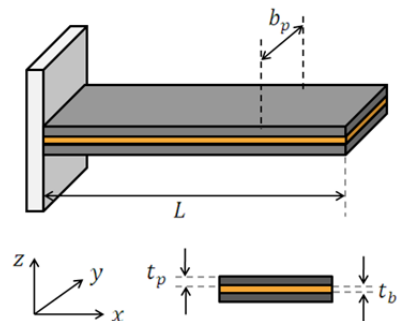
۲- ساختار عملگر بایمورف

شکل ۱ نمایی کلی از یک عملگر بایمورف با مشخصات هندسی آن را نمایش می‌دهد. همان گونه که مشخص است، دو لایه پیزوالکتریک به‌طور متقارن لایه پایه را پوشانده است. لایه پایه معمولاً فلزی از جنس فولاد یا برنج است که برای افزایش استحکام و پایداری عملگر تعبیه می‌شود. L بیانگر طول کل عملگر بوده که برابر با طول پایه و لایه‌های پیزوالکتریک است. t_p و t_b به ترتیب ضخامت لایه پایه و لایه‌های پیزوالکتریک است. هر دو لایه پیزوالکتریک و پایه دارای عرض یکسان $b_p = b_b$ هستند.

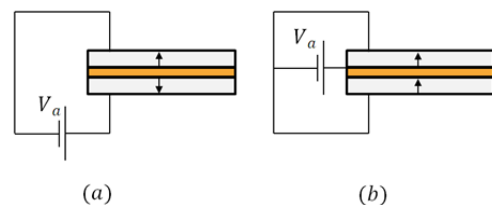
در عملگرهای بایمورف به‌منظور فراهم‌سازی امکان خمش تیر، باید راستای پلاریزاسیون پیزو و میدان الکتریکی اعمالی به پیزو در دو لایه بالا و پایین متفاوت باشد. به بیانی ساده‌تر، به‌منظور ایجاد خمش در تیر، همواره وضعیت اتصالات الکتریکی باید به‌گونه‌ای باشد که یکی از لایه‌ها تحت کشش و لایه دیگر تحت فشار باشد. بر همین اساس، عملگرهای بایمورف به‌طور کلی به دو دسته بایمورف سری (X) و بایمورف موازی (Y) تقسیم می‌شوند.

مطابق با شکل ۲، در بایمورف سری (X)، نحوه اتصال الکتریکی دو لایه پیزوالکتریک به‌صورت سری است. در عوض، نحوه قرارگیری پیزوالکتریک‌ها به‌گونه‌ای است که جهت پلاریزاسیون آنها مخالف یکدیگر است. علامت فلش کوچک جهت پلاریزاسیون هر لایه پیزو را نشان می‌دهد.

در بایمورف موازی (Y)، نحوه اتصال الکتریکی دو لایه پیزوالکتریک به‌صورت موازی است. در عوض نحوه قرارگیری پیزوالکتریک‌ها به‌گونه‌ای است که جهت پلاریزاسیون آنها همسو با یکدیگر است.



شکل ۱ نمای کلی از عملگر بایمورف



شکل ۲ بایمورف نوع سری و موازی: (a) بایمورف نوع سری، (b) بایمورف نوع موازی

۳- معادلات اساسی غیرخطی پیزوالکتریک با در نظر گرفتن اثر هیستریزیس

فرم ماتریسی معادلات اساسی خطی حاکم بر سرامیک‌های پیزوالکتریک، تحت میدان الکتریکی پایین به‌صورت رابطه ۱ است.

σ_1 و S_1 تنش و کرنش در راستای x هستند. رابطه میان تنش و کرنش در لایه پایه توسط قانون هوک و به صورت $\sigma_1 = c_b S_1$ تعریف می‌شود، به طوری که c_b مدول الاستیسیته (مدول یانگ) ماده پایه است. همچنین مطابق با نظریه تیر اویلر-برنولی، کرنش S_1 می‌تواند تابعی از جابه‌جایی عرضی تیر و به صورت رابطه ۸ در نظر گرفته شود.

$$S_1 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۸)$$

به طوری که z فاصله از تار خنثی است. با جای‌گذاری روابط تنش و کرنش در انرژی پتانسیل، انرژی لایه پایه به صورت رابطه ۹ ساده‌سازی می‌شود.

$$\delta U_b = \int_0^L c_b I_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (۹)$$

I_b ممان اینرسی لایه پایه و به صورت $I_b = b_b t_b^3 / 12$ خواهد بود. معادلات اساسی هیسترتیک برای دو لایه بالا و پایین پیزوالکتریک به صورت روابط ۱۰ و ۱۱ خواهد بود.

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_{11}^E S_1 - e_{31} E_3 - h_{31} P_3^i(E_3) \\ D_3 = e_{31} S_1 + \xi_{33}^S E_3 + P_3^i(E_3) \end{cases} \text{ For Upper} \quad (۱۰)$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_{11}^E S_1 + e_{31} E_3 + h_{31} P_3^i(E_3) \\ D_3 = -e_{31} S_1 + \xi_{33}^S E_3 + P_3^i(E_3) \end{cases} \text{ For Lower I} \quad (۱۱)$$

در این معادلات زیرنویس‌های ۱ و ۳، به راستای x و z اشاره می‌نماید. در حقیقت، عمل تحریک پیزو در راستای z صورت گرفته است و کرنش حاصل در راستای x مورد نظر خواهد بود.

آنتالپی الکتریکی (H_e) برای محاسبه انرژی پیزوالکتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد. این کمیت در حقیقت، بیانی از انرژی الکترومکانیکی پیزوالکتریک است، چنانچه متغیرهای مستقل میدان الکتریکی و کرنش در نظر گرفته شده باشد [23]. بر این اساس، تغییرات آنتالپی الکتریکی به صورت رابطه ۱۲ خواهد بود.

$$\delta H_e = \int_{V_{pU}} (\sigma_1 \delta S_1 - D_3 \delta E_3) dV + \int_{V_{pL}} (\sigma_1 \delta S_1 - D_3 \delta E_3) dV \quad (۱۲)$$

با جای‌گذاری معادلات اساسی از روابط ۱۰ و ۱۱ برای لایه بالا و پایین و همچنین بیان رابطه خطی میان میدان الکتریکی و ولتاژ اعمالی به پیزو به صورت $E_3 = V_a / t_p$ ، تغییرات آنتالپی الکتریکی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta H_e &= \int_0^L \left\{ c_{11}^E I_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p V_a \right. \\ &+ M_p \left. \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right\} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &- \left\{ M_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{2C_p}{L} V_a \right. \\ &+ b_p P_3^i \left. \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right\} \delta V_a \quad dx \end{aligned} \quad (۱۳)$$

I_p ممان اینرسی کل دو لایه پیزوالکتریک است. M_p و C_p به ترتیب بیانگر ضریب ورودی ولتاژ و ظرفیت خازنی هر لایه پیزو خواهد بود. این پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

در ناحیه کاری میدان الکتریکی، نتایج تجربی حاکی از رابطه غیرخطی هیسترتیک ($E - D$)، رابطه خطی ($D - S$)، رفتار خطی ($\sigma - S$) تحت جابه‌جایی الکتریکی صفر ($D = 0$) و رفتار هیسترتیک تنش-کرنش ($\sigma - S$) تحت میدان الکتریکی صفر ($E = 0$) خواهد بود [22].

بنابراین نتایج معادله اساسی حاکم بر پیزو در این ناحیه می‌تواند به شکل رابطه ۳ نمایش داده شود.

$$\begin{cases} S = s^D \sigma + g D \\ D = d \sigma + \varepsilon^S E + D^{ir} \end{cases} \quad (۳)$$

s^D نرمی ماده تحت جابه‌جایی الکتریکی صفر و g نوع دیگری از ثابت کرنش پیزو است.

پس از مرتب‌سازی معادلات با در نظر گرفتن میدان الکتریکی و تنش (σ, E) به عنوان متغیرهای مستقل، معادلات اساسی غیرخطی هیسترتیک حاکم بر پیزو به صورت رابطه ۴ خواهد بود.

$$\begin{cases} S = s^E \sigma + d E + g D^{ir} \\ D = d \sigma + \varepsilon^S E + D^{ir} \end{cases} \quad (۴)$$

به طوری که $s^E = s^D + g d$ و $d = g \varepsilon^T$ است. از آنجایی که برای مدل‌سازی دینامیک نیاز است که معادلات اساسی براساس متغیرهای مستقل کرنش و میدان الکتریکی (S, E) بیان شود، رابطه ۴ پس از اندکی تغییرات به شکل مناسب رابطه ۵ تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} \sigma = c^E S - e E - h P^{ir} \\ D = e S + \varepsilon^S E + P^{ir} \end{cases} \quad (۵)$$

به طوری که $c^E = 1/s^E$ ، $e = d/s^E$ ، $e = d/s^E$ ، $\varepsilon^S = \varepsilon^T - d e$ و $h = g/s^D$ هستند. P^{ir} یک تابع غیرخطی جدید است که براساس همان تابع D^{ir} و به صورت $P^{ir} = (1 - e g) D^{ir}$ می‌تواند تعریف شود. این معادلات اساسی، اکنون می‌توانند برای حصول معادلات دینامیک مورد استفاده قرار گیرند.

۴- مدل‌سازی دینامیک پیوسته با در نظر گرفتن رفتار هیسترتیزس

در این تحقیق روش همیلتون برای مدل‌سازی دینامیک پیوسته عملگرهای بایمورف مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مدل‌سازی از نظریه تیر اویلر-برنولی استفاده شده است. این فرض با توجه به نسبت جابه‌جایی عرضی انتهای تیر و همچنین ضخامت آن در مقایسه با طول عملگر، معقول و قابل قبول است. با این وجود، صحت‌گذاری نتایج حاصل از این روش با نتایج تجربی، صحت فرض مورد نظر را تأیید می‌نماید.

تغییرات انرژی جنبشی کل عملگر شامل لایه پایه و پیزوها به صورت رابطه ۶ خواهد بود.

$$\begin{aligned} \delta T &= \delta T_b + \delta T_{pU} + \delta T_{pL} \\ &= \int_0^L (\rho_b t_b b_b + 2\rho_p t_p b_p) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx \end{aligned} \quad (۶)$$

مشاهده می‌شود که انرژی جنبشی شامل انرژی لایه پایه و دو لایه پیزو است. ρ چگالی جرمی و $w(x, t)$ بیانگر جابه‌جایی عرضی است. زیرنویس‌های b ، pU و pL به ترتیب به لایه پایه، پیزوی بالایی و پایینی اشاره دارد. به منظور استخراج انرژی پتانسیل، انرژی لایه پایه و پیزوها به صورت مجزا بررسی می‌شود. انرژی پتانسیل لایه پایه به صورت رابطه ۷ خواهد بود.

$$\delta U_b = \int_V \sigma_1 \delta S_1 dV \quad (۷)$$

در این رابطه ولتاژ ورودی می‌تواند به صورت تابعی از متغیر x و به صورت زیر تعریف شود^[24]:

$$V_a(x, t) = V_a(t)[H_1(x) - H_1(x - L)] \quad (22)$$

به طوری که $H_1(x)$ تابع هویساید است. با جای‌گذاری ولتاژ ورودی $V_a(x, t)$ معادله دینامیک ۱۸ به صورت رابطه ۲۳ ساده‌سازی خواهد شد.

$$(\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w}{\partial t} + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -M_p [\delta'(x) - \delta'(x - L)] \left\{ V_a(t) + \frac{t_p h_{31}}{e_{31} [\delta'(x) - \delta'(x - L)]} \frac{\partial^2 P_3^i \left(\frac{V_a(x, t)}{t_p} \right)}{\partial x^2} \right\} \quad (23)$$

$\delta(x)$ تابع دلتای دیراک بوده و $\delta'(x)$ مشتق مکانی نسبت به x خواهد بود.

مولفه $\frac{t_p h_{31}}{e_{31} [\delta'(x) - \delta'(x - L)]} \frac{\partial^2 P_3^i \left(\frac{V_a(x, t)}{t_p} \right)}{\partial x^2}$ قسمت غیرخطی ناشی از هیستریزاسیون ولتاژ ورودی است. این اثر می‌تواند به صورت یک تغییرات غیرخطی روی ورودی ولتاژ اعمالی و به صورت $\delta V_a(t)$ در نظر گرفته شود که باید به صورت تجربی شناسایی شود. بنابراین کل ورودی عملگر می‌تواند به صورت یک تابع غیرخطی $H(V_a(t)) = V_a(t) + \delta V_a(t)$ در نظر گرفته شود. در نهایت، معادله دینامیک حاکم به صورت رابطه ۲۴ استخراج می‌شود.

$$(\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w}{\partial t} + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -M_p [\delta'(x) - \delta'(x - L)] H(V_a(t)) \quad (24)$$

نکته: معادلات ارائه شده متعلق به عملگر بایمورف نوع موازی بوده است. همان گونه که در بخش‌های قبل نیز بیان شد، عملگرهای موازی و سری از نظر نوع عملکرد مشابه هستند، با این تفاوت که در عملگرهای سری، ولتاژ اعمال شده به هر لایه پیزوالکتریک نصف خواهد شد. در این صورت به منظور حصول معادلات، کافی است که تمامی شرایط یکسان در نظر گرفته شود، فقط ولتاژ اعمالی در محاسبه تغییرات آنتالپی الکتریکی، نصف و به صورت $\frac{V_a}{2}$ منظور شود.

$$\delta H_e = \int_0^L \left\{ c_{11}^E I_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{V_a}{2} + M_p \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{2t_p} \right) \right\} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \left\{ M_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{2C_p V_a}{L} + b_p P_3^i \left(\frac{V_a}{2t_p} \right) \right\} \delta \left(\frac{V_a}{2} \right) dx \quad (25)$$

$$I_p = \frac{b_p \left[(t_b + 2t_p)^3 - (t_b)^3 \right]}{12} \quad (14)$$

$$M_p = (t_b + t_p) e_{31} b_p$$

$$C_p = \frac{b_p L \xi_{33}^S}{t_p}$$

در نهایت کل انرژی پتانسیل عملگر بایمورف به صورت حاصل جمع انرژی لایه پایه و پیزوها به صورت $\delta U = \delta U_b + \delta H_e$ خواهد بود.

بر اساس روش همپلتون، تغییرات لاگرانژی به منظور حصول معادلات دینامیک مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nce} + \delta W_{ncm}) dt = 0 \quad (15)$$

در این رابطه کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta W_{nce} = Q \delta V_a \quad (16)$$

Q بار موجود روی الکترودهای پیزوالکتریک است. همچنین برای در نظر گرفتن اثر میرایی، دو نوع متداول میرایی ویسکوز و ساختاری به عنوان کار نیروهای ناپایستار مکانیکی در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta W_{ncm} = - \int_0^L \left(c_a \frac{\partial w}{\partial t} + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) \delta w dx \quad (17)$$

c_s ضریب معادل میرایی ساختاری وابسته بر نرخ کرنش و c_a ضریب میرایی ویسکوز است.

با جای‌گذاری روابط ۱۶ و ۱۷ در رابطه ۱۵ و پس از ساده‌سازی روابط توسط انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء مطابق روابط موجود در پیوست، معادلات حاکم بر حوزه مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$(\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w}{\partial t} + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -M_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] \quad (18)$$

$$Q = -M_p \left[\frac{\partial w}{\partial x} (x = L) - \frac{\partial w}{\partial x} (x = 0) \right] + 2 C_p \left[V_a + \frac{t_p}{\xi_{33}^S} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] \quad (19)$$

معادله ۱۸، رفتار پیزو به صورت یک عملگر در حوزه مکانیکی و رابطه ۱۹ بیانگر رفتار سنسوری پیزو در حوزه الکتریکی خواهد بود. همچنین روابط ۲۰ و ۲۱، شرایط مرزی حاکم بر مساله را بیان می‌نمایند.

$$\left\{ (cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_p \left[V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] \right\} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \quad (20)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{\partial}{\partial x} \left[V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] \right\} \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (21)$$

در این صورت و پس از ساده‌سازی روابط به معادلات نهایی ۲۶ و ۲۷ می‌توان دست یافت.

$$\ddot{q}_i + \left[\frac{c_a}{(\rho A)_{eq}} + \frac{c_s}{(cl)_{eq}} \omega_i^2 \right] \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = m_{pi} H(V_a(t)) \quad i = 1 \dots n \quad (۳۲)$$

$m_{pi} = -M_p \{ \varphi'_i(L) - \varphi'_i(0) \} = -M_p \varphi'_i(L)$
اثر میرایی می‌تواند به‌صورت میرایی تناسبی در نظر گرفته شود [5].
بنابراین، مدل دینامیک گسسته به‌طور معادل به‌صورت رابطه ۳۳ قابل بیان خواهد بود.

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = m_{pi} H(V_a(t)) \quad i = 1 \dots n \quad (۳۳)$$

$$2\xi_i \omega_i = \frac{c_a}{(\rho A)} + \frac{c_s}{(cl)} \omega_i^2 = \alpha + \beta \omega_i^2$$

ضرایب میرایی α و β باید به‌صورت تجربی برای هر عملگر به‌طور مجزا شناسایی شود. همچنین مدل پرنده ایشلینسکی (PI) برای شناسایی رفتار غیرخطی مستقیم ولتاژ- جابه‌جایی $H(V_a(t))$ مورد استفاده قرار خواهد گرفت [25].

۶- تحلیل رفتار دینامیکی عملگر

سیستم‌های ارتعاشی در حالت حلقه باز، به‌طور کلی دارای رفتار دینامیک پایدار هستند. این پایداری به‌دلیل وجود قطب‌های پایدار است. اما رفتار دینامیک دقیق سیستم و همچنین تحلیل رفتار حلقه بسته، وابسته به تحلیل رفتار صفرهای سیستم است. از آنجایی که سیستم دینامیک مورد نظر غیرخطی است، با تحلیل دینامیک داخلی یا به‌طور معادل، دینامیک صفر برای سیستم‌های غیرخطی، رفتار دینامیک سیستم تحلیل می‌شود. برای این منظور، دینامیک غیرخطی سیستم شامل دو شکل مود اول سیستم به‌صورت رابطه ۳۴ خواهد بود.

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\xi_1 \omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = m_{p1} H(V_a(t)) \\ \ddot{q}_2 + 2\xi_2 \omega_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = m_{p2} H(V_a(t)) \end{cases} \quad (۳۴)$$

همچنین جابه‌جایی نقطه هدف عملگر که به‌طور مثال در فاصله l_t از انتهای تیر قرار دارد، به‌صورت رابطه ۳۵ خواهد بود.

$$w(l_t) = \varphi_1(l_t) q_1(t) + \varphi_2(l_t) q_2(t) \quad (۳۵)$$

مشخص است که با توجه به این نوع تعریف خروجی و در نظر گرفتن دینامیک سیستم، درجه نسبت برای این سیستم دینامیک، دو ($r = 2$) خواهد بود. با توجه به اینکه دینامیک سیستم دارای چهار متغیر فضای حالت بوده و درجه نسبت دو است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این سیستم دارای دینامیک داخلی با دو متغیر حالت خواهد بود. به‌منظور بررسی وضعیت دینامیک سیستم و پایداری آن، دینامیک داخلی سیستم باید مورد بررسی قرار گیرد. برای بررسی دینامیک داخلی می‌توان به‌طور معادل، دینامیک صفر سیستم را مورد بررسی قرار داد. هر چند نتایج این تحلیل به‌صورت محلی خواهد بود، ولی نمادی از وضعیت دینامیک سیستم حول نقطه کاری را نشان خواهد داد.

برای بررسی دینامیک صفر، باید خروجی و تمامی مشتقات زمانی آن متحد با صفر قرار داده شوند. در نتیجه می‌توان داشت:

$$q_1 = -\frac{\varphi_2(l_t)}{\varphi_1(l_t)} q_2$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{\varphi_2(l_t)}{\varphi_1(l_t)} \dot{q}_2 \quad (۳۶)$$

$$\ddot{q}_1 = -\frac{\varphi_2(l_t)}{\varphi_1(l_t)} \ddot{q}_2$$

$$(\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w}{\partial t} + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cl)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (۲۶)$$

$$= -\frac{1}{2} M_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[V_a + \frac{2t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{2t_p} \right) \right]$$

$$Q = -\frac{1}{2} M_p \left[\frac{\partial w}{\partial x} (x=L) - \frac{\partial w}{\partial x} (x=0) \right] \quad (۲۷)$$

$$+ \frac{1}{2} C_p \left[V_a + \frac{2t_p}{\xi_{33}^s} P_3^i \left(\frac{V_a}{2t_p} \right) \right]$$

۵- گسسته‌سازی دینامیک پیوسته

به‌منظور گسسته‌سازی مدل دینامیک پیوسته، از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. برای این منظور، جابه‌جایی عرضی $w(x,t)$ به‌صورت حاصل جمع یک سری یکنوای همگرا از متغیرهای مودال تعریف می‌شود.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i(t) \quad (۲۸)$$

بنابراین، شکل مود غیرمیرای دقیق $\varphi_i(x)$ برای گسسته‌سازی دقیق دینامیک پیوسته باید مورد استفاده قرار گیرد. شرایط مرزی ارائه‌شده در روابط ۲۰ و ۲۱ به‌منظور حصول فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم باید مورد استفاده قرار گیرد. با اعمال شرایط مرزی، معادله اساسی برای یافتن فرکانس‌های طبیعی به‌صورت رابطه ۲۹ به دست خواهد آمد.

$$1 + \text{Cos}(\beta_i L) \text{Cosh}(\beta_i L) = 0$$

$$\beta_i^4 = \frac{[\rho_b t_b b_b + 2\rho_p t_p b_p]}{[c_{11}^E I_p + c_b I_b]} \omega_i^2 \quad (۲۹)$$

با یافتن فرکانس‌های طبیعی تیر، شکل مودهای سیستم به‌صورت زیر خواهد بود:

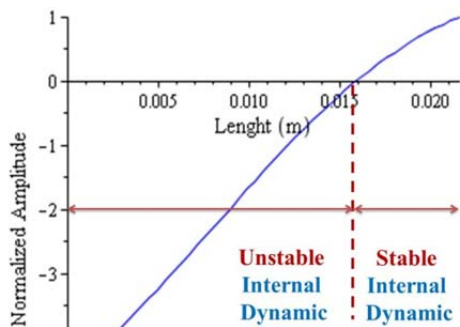
$$\varphi_i(x) = A_i \left\{ [\text{Cos}(\beta_i x) - \text{Cosh}(\beta_i x)] - \frac{\text{Cos}(\beta_i L) + \text{Cosh}(\beta_i L)}{\text{Sin}(\beta_i L) + \text{Sinh}(\beta_i L)} [\text{Sin}(\beta_i x) - \text{Sinh}(\beta_i x)] \right\} \quad (۳۰)$$

به‌منظور گسسته‌سازی دینامیک پیوسته، معادله ۲۸ باید در معادله ۲۴ جایگزین شود.

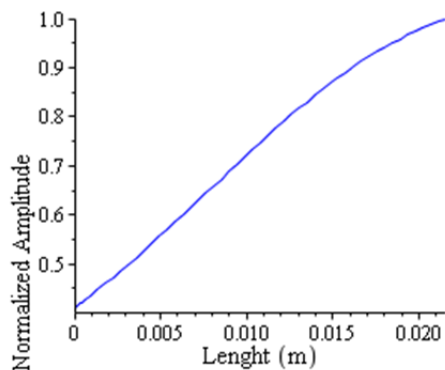
$$(\rho A)_{eq} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2} + c_a \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \frac{\partial q_i(t)}{\partial t} + c_s \sum_{i=1}^n \frac{\partial^4 \varphi_i(x)}{\partial x^4} \frac{\partial q_i(t)}{\partial t} + (cl)_{eq} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^4 \varphi_i(x)}{\partial x^4} = -M_p [\delta'(x) - \delta'(x-L)] H(V_a(t)) \quad (۳۱)$$

با ضرب $\varphi_j(x)$ در دو طرف معادله دینامیک پیوسته، انتگرال‌گیری روی طول عملگر و با استفاده از شرایط تعامد مودها، مدل دینامیک گسسته به‌صورت رابطه ۳۲ خواهد بود.

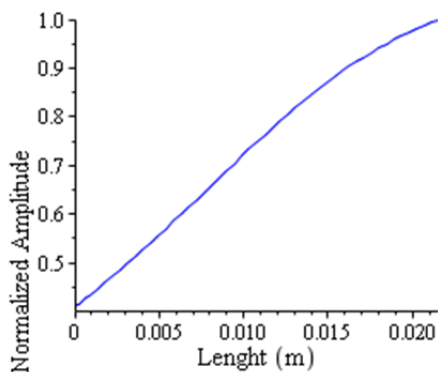
رابطه ۳۸ استفاده شده است. برای این منظور به‌ازای هر نقطه کاری، مقادیر شکل مودهای اول و دوم $\varphi_1(l_t)$ و $\varphi_2(l_t)$ از رابطه ۳۰ محاسبه و ضرایب ورودی عملگر m_{p1} و m_{p2} از رابطه ۳۲ استخراج شده است. بنابراین مقدار و علامت ضرایب رابطه ۳۸ به‌ازای هر نقطه کاری تعیین می‌شود. مشاهده می‌شود که ضرایب a_2 و a_3 همواره مثبت هستند، اما ضریب a_1 بنابر مکان نقطه کاری می‌تواند منفی شود.



الف



ب



ج

نمودار (۱) رفتار پارامترهای دینامیک صفر: الف) a_1 ، ب) a_2 ، ج) a_3

برای محاسبه دقیق مرز تغییر رفتار سیستم (l_t^*) ، باید ریشه معادله مربوط به a_1 را محاسبه نمود. رابطه ۳۹ این مساله را بیان می‌نماید.

$$a_1 = m_{p1} \varphi_1(l_t^*) + m_{p2} \varphi_2(l_t^*) = 0$$

$$\frac{\varphi_1(l_t^*)}{\varphi_2(l_t^*)} = -\frac{m_{p2}}{m_{p1}} \quad (39)$$

با استفاده از تساوی‌های رابطه ۳۶ و جای‌گذاری آنها در رابطه ۳۴ می‌توان دینامیک سیستم را براساس متغیر مودال دوم مرتب نمود. چنانچه ورودی غیرخطی سیستم $H(V_a(t))$ از رابطه اول استخراج و در رابطه دوم جایگزین شود، دینامیک صفر سیستم مطابق با رابطه ۳۷ حاصل خواهد شد.

$$\ddot{q}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 = \frac{m_{p2}}{m_{p1}} (\ddot{q}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2q_1) \quad (37)$$

با استفاده از رابطه ۳۶ و با ساده‌سازی ضرایب می‌توان نوشت:

$$a_1\ddot{q}_2 + a_2\dot{q}_2 + a_3q_2 = 0$$

$$a_1 = [m_{p1} \varphi_1(l_t) + m_{p2} \varphi_2(l_t)] \quad (38)$$

$$a_2 = [m_{p1} \varphi_1(l_t) 2\xi_2\omega_2 + m_{p2} \varphi_2(l_t) 2\xi_1\omega_1]$$

$$a_3 = [m_{p1} \varphi_1(l_t) \omega_2^2 + m_{p2} \varphi_2(l_t) \omega_1^2]$$

رابطه ۳۸ دینامیک صفر و به بیانی، رفتار دینامیک داخلی سیستم را نشان می‌دهد. وضعیت این دینامیک، پایداری دینامیک داخلی سیستم و به عبارتی پایداری سیستم حلقه بسته در کاربردهای کنترلی را نشان خواهد داد.

به‌طور قطع، وضعیت دینامیک داخلی، تابعی از مقدار ضرایب a_i و آن هم تابع مکان قرارگیری نقطه کاری l_t در راستای طول تیر است. چنانچه این دینامیک ناپایدار شود، رفتار سیستم را غیرکمینه فاز می‌نماید. معادل این پدیده در سیستم‌های خطی، انتقال صفر سیستم به سمت راست محور موهومی و غیرکمینه فاز شدن سیستم خواهد بود. برای به‌وجود آمدن چنین شرایطی در معادله مرتبه دو، مانند رابطه ۳۸، کافی است یکی از ضرایب منفی شود.

۷- مطالعه شبیه‌سازی به‌منظور بررسی رفتار دینامیکی

برای بررسی تحلیل صورت‌گرفته، یک مطالعه عددی با استفاده از ابعاد عملگر مورد استفاده در نتایج آزمایشگاهی صورت گرفته است. در این تحلیل، یک عملگر بایمورف با لایه پایه برنجی توسط دو لایه پیزوالکتریک PZT-5A پوشش داده شده است. مشخصات ماده مورد نظر برای PZT و ماده پایه در جدول ۱ ارائه شده است. براساس روابط بیان‌شده، فرکانس‌های طبیعی مطابق با جدول ۲ خواهد بود.

جدول (۱) مشخصات ماده پیزو و پایه

مشخصات	نماد	PZT-5A	لایه برنج
طول (mm)	L	۲۱.۶	۲۱.۶
عرض (mm)	b_b, b_p	۳.۲	۳.۲
ضخامت (هر لایه: mm)	t_b, t_p	۰.۱۳	۰.۱۲
چگالی (Kg/m^3)	ρ_b, ρ_p	۷۸۰۰	۹۰۰۰
مدول الاستیک (GPa)	c_b, c_{11}^E	۵۹	۱۰۵
ثابت پیزوالکتریک (C/m^2)	e_{31}	-۱۲.۵۴	-

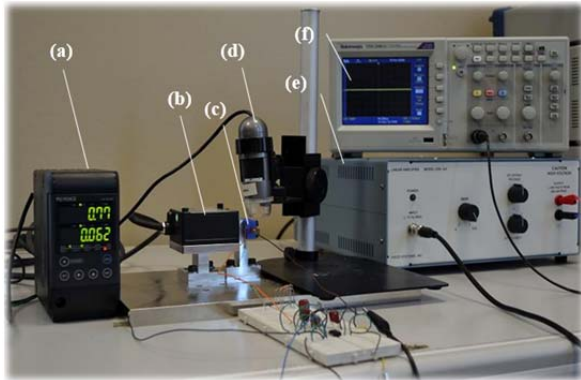
جدول (۲) فرکانس‌های طبیعی عملگر

شماره مود	فرکانس طبیعی (Rad/s)
۱	۲۲۴۹
۲	۱۴۰۹۴.۲۴
۳	۳۹۴۶۴.۲۹

با استفاده از مشخصات عملگر، علامت ضرایب معادله دینامیک صفر سیستم نسبت به نقطه کاری عملگر یا همان محل قرارگیری سنسور مطابق با نمودار ۱ خواهد بود. برای ترسیم رفتار ضرایب، از

۸- نتایج تجربی

مدل دینامیک ارایه شده به صورت تجربی صحت‌گذاری شد. برای این منظور، عملگر بایمورف T215-A4-103X و تقویت‌کننده ولتاژ EPA-104-230 محصول شرکت Piezo System Co. مورد استفاده قرار گرفت [26]. برای اندازه‌گیری جابه‌جایی عرضی عملگر، از سنسور لیزری LK-G5000 استفاده شد [27]. شکل ۴ نمایی از تجهیزات آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.



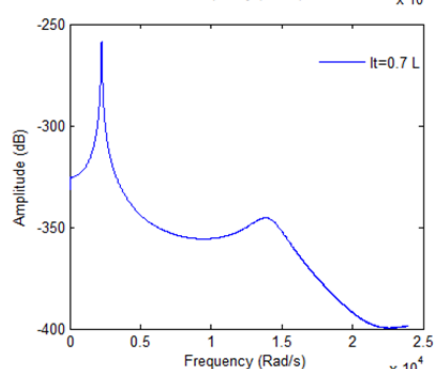
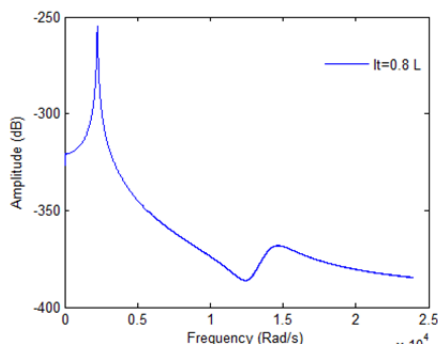
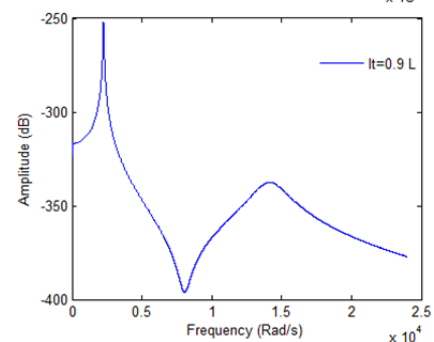
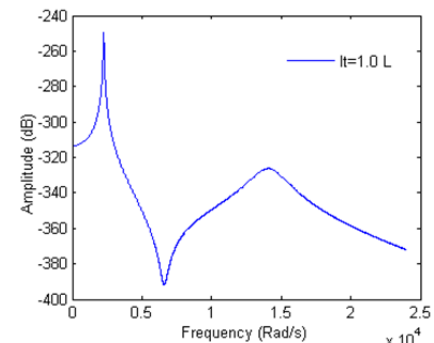
شکل ۴ (تجهیزات آزمایشگاهی؛ (a) کنترلر سنسور لیزری، (b) سنسور لیزری، (c) عملگر پیزوالکتریک بایمورف، (d) میکروسکوپ، (e) آمپلی فایر پیزوالکتریک، (f) اسیلوسکوپ

از پاسخ فرکانسی سیستم برای شناسایی سیستم استفاده می‌شود. برای این منظور، نقطه هدف که محل اندازه‌گیری جابه‌جایی عرضی عملگر توسط لیزر است، در مکان $l_t = 20.5 \text{ mm} = 0.95 L$ در نظر گرفته می‌شود. نمودار ۳، پاسخ فرکانسی برای مدل دینامیک و شناسایی شده تجربی را نمایش می‌دهد. این نمودار، تطابق مناسب میان نتایج آزمایشگاهی و تجربی را نشان می‌دهد. به‌وضوح می‌توان مشاهده نمود که پاسخ فرکانسی تجربی و مدل نظری در غالب فرکانس‌ها از انطباق بالایی برخوردار هستند. نکته قابل تامل، انحراف اندک پاسخ تجربی در حوالی فرکانس‌های طبیعی است. این انحراف به دلیل رفتار غیرخطی نرم‌شوندگی پیزوالکتریک در حوالی فرکانس‌های طبیعی به دلیل کرنش بالای عملگر در آن فرکانس بوده و بحث آن خارج از موضوع این مقاله است. به‌منظور حذف رفتار غیرخطی حوالی فرکانس طبیعی می‌توان از دامنه تحریک پایین‌تری برای استخراج دقیق‌تر پاسخ فرکانسی استفاده نمود. نتایج تجربی در این حالت حاکی از شناسایی فرکانس مود اول و دوم ارتعاشی به ترتیب با خطای ۰.۷٪ و ۱.۲٪ و فرکانس صفر کمینه فاز سیستم با دقت ۷٪ است.

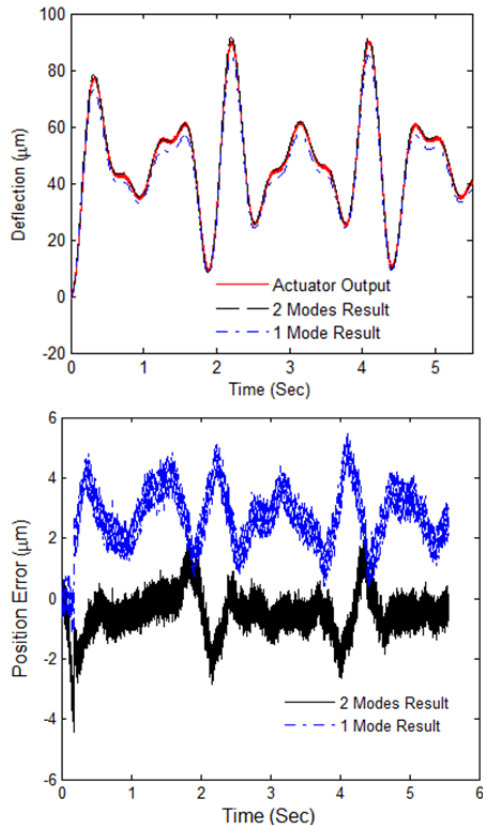
به‌منظور صحت‌گذاری مجدد مدل شناسایی شده برای سایر نقاط عملگر، پاسخ سیستم در نقطه هدف دیگری مانند $l_t = 0.7 L$ و به‌ازای دامنه ۱۷ تحریک بررسی شد. نمودار ۴، نتیجه شبیه‌سازی و تجربی را نشان می‌دهد. نتایج بیانگر شناسایی فرکانس مود اول و دوم ارتعاشی به ترتیب با خطای ۱.۴۴٪ و ۰.۵۸٪ است. همچنین مشاهده می‌شود که نتایج مدل‌سازی و تجربی در بیان رفتار غیرکمینه فاز سیستم در این نقطه، تطابق مناسبی از خود نشان می‌دهد. در حقیقت در هر دو مدل تجربی و نظری، دره موجود در پاسخ فرکانسی که ناشی از صفر کمینه فاز سیستم بوده، حذف شده است و سیستم رفتار غیرکمینه فاز از خود نشان می‌دهد.

در ادامه مدل PI برای شناسایی رفتار غیرخطی مستقیم ولتاژ-جابه‌جایی مورد استفاده قرار گرفت. این تابع رابطه غیرخطی میان

با جایگزین نمودن شکل مودها از رابطه ۳۰ و حل معادله غیرخطی ۳۹، می‌توان مرز تغییر رفتار را در محل $l_t^* = 0.7373 L$ به دست آورد. در نتیجه با قرارگیری نقطه هدف در ناحیه $l_t < l_t^* = 0.7373 L$ ، دینامیک صفر سیستم ناپایداری خواهد داشت. این پدیده در مدل‌های گسسته یا پیوسته یک‌درجه آزادی که در تحقیقات گذشته مورد استفاده قرار گرفته است، قابل مشاهده و تحلیل نیست. برای تبیین این موضوع، پاسخ فرکانسی برای چهار نقطه هدف مطابق با نمودار ۲ مقایسه شده است. واضح است که با عبور محل نقطه هدف از نقطه مشخص شده $l_t^* = 0.7373 L$ ، رفتار کمینه فاز سیستم (دره موجود در پاسخ فرکانسی)، حذف و سیستم دارای دینامیک داخلی ناپایدار خواهد شد.



نمودار ۲) پاسخ فرکانسی سیستم براساس مکان نقطه هدف



نمودار ۶) صحنه‌گذاری شناسایی دینامیک عملگر با یک و دو مود ارتعاشی

به‌وضوح مشاهده می‌شود که دینامیک آرایه‌شده با دو مود ارتعاشی در تطابق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی، حتی در فرکانس‌های بسیار پایین خواهد بود. نتایج نشان می‌دهد در حالت مدل‌سازی با یک مود ارتعاشی، بیشینه خطا ۶.۰۱٪ و در حالت مدل‌سازی با دو مود ارتعاشی ۲.۸۹٪ است. در نتیجه، ورود اثر مودهای بالاتر در مدل‌سازی دینامیک می‌تواند دقت مدل‌سازی سیستم را افزایش دهد.

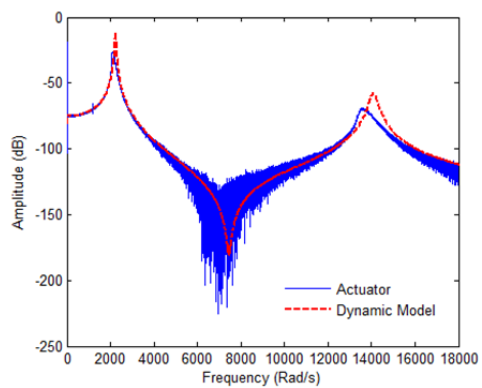
درباره عوامل ایجاد خطای نتایج تجربی و مدل‌سازی می‌توان به خطای شناسایی رفتار هیسترتیزس عملگر توسط روش PI اشاره نمود. از آنجایی که این روش، رفتار هیسترتیزس را توسط ترکیب تعداد مناسبی از توابع لقی انجام می‌دهد، به‌طور ذاتی دارای اندکی خطا خواهد بود. همچنین از دیگر عوامل خطا می‌توان به حذف مودهای ارتعاشی بالاتر سیستم در مدل‌سازی اشاره نمود.

۹- نتیجه‌گیری

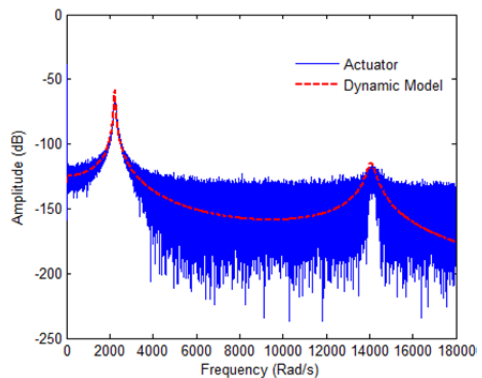
در این مقاله، مدل‌سازی دینامیک عملگر پیزوالکتریک بایمورف به‌صورت تحلیلی و تجربی مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، یک مجموعه از معادلات اساسی غیرخطی هیسترتیک مناسب در محدوده ولتاژ کاری پیزوالکتریک انتخاب شد. با استفاده از روش همپلتون، مدل دینامیک پیوسته برای دو نوع از عملگرهای بایمورف عرضی، سری و موازی استخراج شد. شکل مودهای دقیق سیستم برای گسسته‌سازی دینامیک پیوسته منظور شد. با توجه به وجود پدیده هیسترتیزس، مدل پراندتل ایشلینسکی به‌منظور شناسایی رفتار هیسترتیزس به کار گرفته شد. به‌دلیل رفتار غیرخطی عملگر، از دینامیک صفر سیستم برای تحلیل رفتار دینامیک با در نظر گرفتن دو مود ارتعاشی و براساس مکان نقطه کاری عملگر در راستای طول آن استفاده شد. نتایج نشان می‌دهد که رفتار سیستم

ورودی ولتاژ $V(t)$ و جابه‌جایی عرضی نقطه هدف $w(t)$ را بیان می‌نماید. نمودار ۵، نتیجه این شناسایی را نشان می‌دهد. برای شناسایی رفتار هیسترتیزس عملگر، یک ورودی ولتاژ شبه‌استاتیک به عملگر، اعمال و خروجی موقعیت آن به دست آمده است. سپس رابطه هیسترتیزس بین ورودی و خروجی، ترسیم و در نهایت توسط روش PI شناسایی شده است. واضح بوده که رفتار هیسترتیزس سیستم با دقت مناسبی شناسایی شده است.

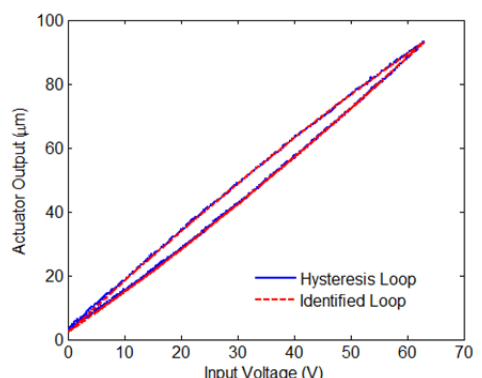
در نهایت، مدل دینامیک خطی شناسایی‌شده در کنار رفتار غیرخطی هیسترتیزس قرار گرفت تا مدل نهایی عملگر تعیین شود. به‌منظور صحنه‌گذاری ترکیب دینامیک خطی و رفتار هیسترتیزس، پاسخ زمانی عملگر به‌ازای ورودی‌های ولتاژ مختلف بررسی شد. نمودار ۶، نتیجه خروجی عملگر و همچنین مدل شبه‌سازی‌شده به‌همراه خطای مدل‌سازی را با در نظر گرفتن یک و دو مود ارتعاشی به‌ازای یک ورودی هارمونیک با چند فرکانس کاری به‌صورت

$$31.5 + 35 * [0.4 \cos(7t) + 0.3 \cos(10t) + 0.2 \cos(13t)]$$


نمودار ۳) پاسخ فرکانسی عملگر



نمودار ۴) پاسخ فرکانسی در نقطه کاری $t = 0.7 L$



نمودار ۵) شناسایی رفتار هیسترتیزس

p	لایه پیزوالکتریک
pU	لایه پیزوالکتریک پایینی
pL	لایه پیزوالکتریک بالایی
3	جهت z
1	جهت x
n_{ce}	ناپایستار الکتریکی
n_{cm}	ناپایستار مکانیکی
t	نقطه هدف

بنا بر انتخاب نقطه هدف، می‌تواند به دینامیک داخلی ناپایدار تغییر یابد. آزمایش‌های تجربی، صحت مدل دینامیک پیشنهادی و رفتار دینامیک آن براساس مکان نقطه هدف را تایید می‌نماید. حداکثر خطای شناسایی مود ارتعاشی اول و دوم در نقاط کاری مختلف به ترتیب ۱.۴۴ و ۱.۲٪ است. همچنین خطای پاسخ زمانی غیرخطی کامل مدل ارایه شده، با یک و دو مود ارتعاشی و یک مود ارتعاشی به ترتیب ۶.۰۱ و ۲.۸۹٪ است که برتری مدل‌سازی با دو مود ارتعاشی را نشان می‌دهد. همچنین نتایج تجربی، قابلیت تشخیص دینامیک غیرکمیته فاز عملگر برحسب نقطه کاری مورد استفاده را نشان می‌دهد.

۱۱- پیوست

تغییرات انرژی جنبشی به صورت پ ۱ است.

(پ ۱)

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\delta T\} dt = \int_0^L \left\{ \left[(\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dt \right\} dx = - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx \right\} dt$$

همچنین، تغییرات انرژی پتانسیل با استفاده از معادلات پ ۲ به دست می‌آید.

(پ ۲)

$$\delta U = \left\{ \left[(cI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) \right] \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_0^L - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{\partial}{\partial x} \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) \right\} \delta w \Big|_0^L + \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) \right\} \delta w dx - \left\{ M_p \left[\frac{\partial w}{\partial x} (x=L) - \frac{\partial w}{\partial x} (x=0) \right] - 2 C_p \left[V_a + \frac{t_p}{\xi_{33}^S} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] \right\} \delta V_a$$

با در نظر گرفتن معادلات نیروهای ناپایستار مکانیکی ۱۶ و الکتریکی ۱۷، تغییرات لاگرانژی به صورت پ ۳ استخراج می‌شود.

(پ ۳)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nce} + W_{ncm}) dt = 0 \delta L = - \int_0^L \left((\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) \delta w dx + \left\{ Q + M_p \left[\frac{\partial w}{\partial x} (x=L) - \frac{\partial w}{\partial x} (x=0) \right] - 2 C_p \left[V_a + \frac{t_p}{\xi_{33}^S} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] \right\} \delta V_a - \left\{ \left[(cI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) \right] \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_0^L + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{\partial}{\partial x} \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) \right\} \delta w \Big|_0^L$$

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

تاییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

سهم نویسندگان: حامد غفاری‌راد (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۵۰٪)؛ سیدمهدی رضاعی (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی (۲۵٪)؛ محمد زارعی‌نژاد (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی (۲۵٪)

منابع مالی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

۱۰- پی‌نوشت

علائم	
b	عرض عملگر
L	طول عملگر
t	ضخامت
V_a	ولتاژ اعمالی
S	کرنش
E	میدان الکتریکی
D	جابه‌جایی الکتریکی
d	ثابت کرنش
s	نرمی
c	مدول یانگ
e	ثابت کرنش
T	انرژی جنبشی
H_e	آنتالپی الکتریکی
I	ممان اینرسی
M	ضریب ولتاژ
C	ظرفیت خازنی
W	کار
Q	بار الکتریکی
c_a	ضریب میرایی ویسکوز
c_s	ضریب میرایی ساختاری
A	سطح مقطع
q	متغیر مودال

علائم یونانی

σ	تنش
ε	ضریب گزردهی
ρ	چگالی
φ	شکل مود
ω	فرکانس طبیعی

بالانویس‌ها

ir	بازگشت‌ناپذیر
r	بازگشت‌پذیر
E	تحت میدان الکتریکی صفر
σ	تحت تنش صفر
S	تحت کرنش صفر
D	تحت جابه‌جایی الکتریکی صفر

زیرنویس‌ها

b	لایه پایه
-----	-----------

Control Engineering. 2009;223(5):673-682.

13- Asghari M, Rezaei SM, Zareinejad M. Robust position control of piezoelectric actuator using self sensing actuation. *Modares Mechanical Engineering*. 2016;16(8):37-46. [Persian]

14- Bilgen O, Karami MA, Inman DJ, Friswell MI. The actuation characterization of cantilevered unimorph beams with single crystal piezoelectric materials. *Smart Materials and Structures*. 2011;20(5):055024.

15- Chen SN, Wang GJ, Chien MC. Analytical modeling of piezoelectric vibration-induced micro power generator. *Mechatronics*. 2006;16(7):379-387.

16- Shirazi MJ, Salarieh H, Alasty A, Shabani R. Tip tracking control of a micro-cantilever Timoshenko beam via piezoelectric actuator. *Journal of Vibration and Control*. 2013;19(10):1561-1574.

17- Yi J, Chang S, Shen Y. Disturbance-observer-based hysteresis compensation for piezoelectric actuators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2009;14(4):456-464.

18- Hegewald T, Kaltenbacher B, Kaltenbacher M, Lerch R. Efficient modeling of ferroelectric behavior for the analysis of piezoceramic actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2008;19(10):1117-1129.

19- Chao PCP, Liao PY, Tsai MY, Lin CT. Robust control design for precision positioning of a generic piezoelectric system with consideration of microscopic hysteresis effects. *Microsystem Technologies*. 2011;17(5-7):1009-1023.

20- Cao Y, Yang B. Non-linear modelling of multilayer piezoelectric actuators in non-trivial configurations based on actuator design parameters and piezoelectric material properties. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012;23(8):875-884.

21- Landis CM. Non-linear constitutive modeling of ferroelectrics. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*. 2004;8(1):59-69.

22- Lee SH, Royston TJ, Friedman G. Modeling and compensation of hysteresis in piezoceramic transducers for vibration control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2000;11(10):781-790.

23- Stanton SC, Erturk A, Mann BP, Dowell EH, Inman DJ. Nonlinear nonconservative behavior and modeling of piezoelectric energy harvesters including proof mass effects. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012;23(2):183-199.

24- Asghari M, Rezaei SM, Rezaei AH, Zareinejad M, Ghafarirad H. Self-sensing actuation using online capacitance measurement with application to active vibration control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2015;26(2):186-200.

25- Ghafarirad H, Rezaei SM, Zareinejad M, Hamdi M, Jaberzadeh Ansari R. Robust control with unknown dynamic estimation for multi-axial piezoelectric actuators with coupled dynamics. *Comptes Rendus Mécanique*. 2012;340(9):646-660.

26- Erturk A, Inman DJ. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*. 2009;18(2):025009.

27- Ghafarirad H, Rezaei SM, Zareinejad M, Mardi N. Charge-based hysteresis compensation in low impedance piezoelectric actuators by a modified Prandtl-Ishlinskii model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*. 2019;233(1):83-93.

در نتیجه، معادله دینامیک مکانیکی (پ ۴) توسط ضرب δW به دست می‌آید.

(پ ۴)

$$(\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((cI)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(V_a + \frac{t_p h_{31}}{e_{31}} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right) + c_a \frac{\partial w}{\partial t} + c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0$$

به‌طور مشابه، رابطه حوزه الکتریکی پیزوالکتریک، توسط ضرب δV_a مطابق رابطه پ ۵ به دست می‌آید.

(پ ۵)

$$Q + M_p \left[\frac{\partial w}{\partial x} (x=L) - \frac{\partial w}{\partial x} (x=0) \right] - 2 C_p \left[V_a + \frac{t_p}{\xi_{33}^S} P_3^i \left(\frac{V_a}{t_p} \right) \right] = 0$$

منابع

- 1- Bashash S, Saeidpourazar R, Jalili N. Development, analysis and control of a high-speed laser-free atomic force microscope. *Review of Scientific Instruments*. 2010;81(2):023707.
- 2- Kursu O, Kruusing A, Pudas M, Rahkonen T. Piezoelectric bimorph charge mode force sensor. *Sensors and Actuators A Physical*. 2009;153(1):42-49.
- 3- Bashash S, Salehi-Khojin A, Jalili N, Thompson GL, Vertegel A, Müller M, et al. Mass detection of elastically distributed ultrathin layers using piezoresponse force microscopy. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2009;19(2):025016.
- 4- Xiaoyan H, Ling SF. A sensing and actuating transducer for measuring point impedance to moment. *Measurement*. 2010;43(3):363-369.
- 5- Erturk A, Inman DJ. On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2008;19(11):1311-1325.
- 6- Teyssieux D, Euphrasie S, Cretin B. MEMS in-plane motion/vibration measurement system based CCD camera. *Measurement*. 2011;44(10):2205-2216.
- 7- Xu Q. Precision position/force interaction control of a piezoelectric multimorph microgripper for microassembly. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2013;10(3):503-514.
- 8- Shim S, Kim MG, Jo K, Kang YS, Lee B, Yang S, et al. Dynamic characterization of human breast cancer cells using a piezoresistive microcantilever. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2010;132(10):104501.
- 9- Rakotondrabe M. Bouc-Wen modeling and inverse multiplicative structure to compensate hysteresis nonlinearity in piezoelectric actuators. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2011;8(2):428-431.
- 10- Xu Q. Adaptive discrete-time sliding mode impedance control of a piezoelectric microgripper. *IEEE Transactions on Robotics*. 2013;29(3):663-673.
- 11- Sofla MS, Rezaei SM, Zareinejad M, Saadat M. Trajectory tracking control of a piezoelectric stage for dynamic load applications. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I Journal of Systems and Control Engineering*. 2010;224(8):983-994.
- 12- Zareinejad M, Rezaei SM, Najafabadi HH, Ghidary SS, Abdullah A, Saadat M. Novel multirate control strategy for piezoelectric actuators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I Journal of Systems and*