



Tracking Controller Design for Polynomial Nonlinear Systems Using Sum of Squares Optimization and Input to State Stability

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Roshanravan S.¹ MSc,
Shamghadri S.*¹ PhD

How to cite this article

Roshanravan S, Shamghadri S. Tracking Controller Design for Polynomial Nonlinear Systems Using Sum of Squares Optimization and Input to State Stability. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(6):1375-1384.

ABSTRACT

This paper presents a new method to design stabilizing and tracking control laws for a class of nonlinear systems whose state space description is in the form of polynomial functions. This method employs the nonlinear model directly in the controller design process without the need for local linearization about an operating point. The approach is based on the sum of squares (SOS) decomposition of multivariate polynomials which is transformed into a convex optimization problem. It is shown that the design problem can be formulated as a sum of squares optimization problem. This method can guarantee globally exponential stability of the nonlinear system with less conservatism than other linearization based methods. Also, a sum of squares technique is used to evaluate the stability of closed loop system state with respect to exogenous input. The nonlinear dynamic model of air vehicles can usually be expressed by polynomial nonlinear equations. Therefore, the proposed method can be applied to design an air vehicle autopilot. The hardware in the loop (HIL) simulation is an important test for evaluation of the aerospace control system before flight test. The HIL results using designed controller for a supersonic air vehicle are presented. The results from HIL is compared to the software simulation that the appropriate consistency of results shows the efficiency of the proposed method in the air vehicle autopilot control loop.

Keywords Polynomial Nonlinear Systems; Sum of Squares; Input Tracking; Input to State Stability; Hardware in the Loop

¹Control Department, Electrical Engineering Faculty, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Iran University of Science and Technology, Narmak, Tehran, Iran. Postal Code: 1684613114
Phone: +98 (21) 73225719
Fax: +98 (21) 73225777
shamaghdari@iust.ac.ir

Article History

Received: May 13, 2018
Accepted: December 23, 2018
ePublished: June 01, 2019

CITATION LINKS

[1] Asymptotic tracking of a reference trajectory by output ... [2] Finite-time trajectory tracking control of a ... [3] Adaptive tracking control for a class of stochastic ... [4] Nonlinear control for tracking and obstacle avoidance ... [5] On the construction of Lyapunov functions ... [6] Nonlinear control synthesis by sum of ... [7] Robust static output feedback for a class ... [8] Local passivity analysis of nonlinear systems ... [9] Applied nonlinear ... [10] Nonlinear ... [11] Input to state stability and allied system ... [12] Nonlinear scaling of (i) ISS-Lyapunov ... [13] Input to state stability: Basic concepts ... [14] Introducing SOSTOOLS: A general ... [15] YALMIP: A toolbox for modeling and ... [16] Pre- and post-processing sum-of-squares ... [17] Nonlinear autopilot design for an ... [18] Developments in the field of automatic ... [19] Robust PID controller design for ... [20] Filter design for LPV systems using ... [21] Smooth second-order sliding ... [22] Adaptive integrated guidance ... [23] Missile guidance law based on robust ... [24] Backstepping design of missile ... [25] Test and evaluation of the tactical ... [26] Structured semidefinite programs ... [27] Linear matrix inequalities in system ... [28] Encyclopedia of systems and ... [29] New characterizations of input ... [30] Sum of squares based input-to ... [31] Gain scheduling for H-infinity ... [32] Design of an actuator fault ... [33] Hardware-in-the-loop simulation ...

طراحی کنترل‌کننده ردیاب برای سیستم‌های غیرخطی چندجمله‌ای با استفاده از بهینه‌سازی مجموع مربعات و پایداری ورودی به حالت

سجاد روشن‌روان MSC

گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

سعید شمقدری * PhD

گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، روشی جدید به منظور طراحی کنترل‌کننده پایدارساز و ردیاب برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی که نمایش فضای حالت آنها به فرم توابع چندجمله‌ای است، ارائه شد. در این روش، طراحی کنترل‌کننده براساس مدل غیرخطی بوده و بدون نیاز به هیچ‌گونه خطی‌سازی محلی انجام می‌گیرد. مساله طراحی بر تجزیه مجموع مربعات چندجمله‌ای متکی است و با تبدیل به یک مساله بهینه‌سازی محدب، به فرم برنامه‌ریزی مجموع مربعات ارائه شده است. این روش با کاهش محافظه‌کاری نسبت به سایر روش‌های مبتنی بر خطی‌سازی، پایداری نامایی فراگیر سیستم غیرخطی را تضمین می‌دهد. همچنین برای ارزیابی پایداری متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته نسبت به ورودی خارجی، رویکردی مبتنی بر روش مجموع مربعات مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش نیز قیود لازم برای تضمین پایداری ورودی به حالت، به فرم یک مساله امکان‌پذیری مجموع مربعات در آمده است. مدل دینامیکی غیرخطی اجسام پرنده را معمولاً می‌توان با معادلات چندجمله‌ای غیرخطی بیان نمود. لذا تئوری پیشنهادی می‌تواند برای طراحی خودخلبان یک پرنده هوایی به کار گرفته شود. کامل‌ترین روش ارزیابی بخش کنترل سامانه‌های هوافضایی قبل از آزمون پروازی، شبیه‌ساز سخت‌افزار در حلقه است. از این رو در انتها نتایج حاصل از به‌کارگیری کنترل‌کننده طراحی شده در آزمون سخت‌افزار در حلقه یک پرنده مافوق صوت ارائه شده است. نتایج حاصل با نتایج شبیه‌سازی مقایسه شد که هم‌خوانی مناسب نتایج، کارایی روش ارائه‌شده را در حلقه کنترل خودخلبان پرنده نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: سیستم‌های غیرخطی چندجمله‌ای، مجموع مربعات، ردیابی ورودی، پایداری ورودی به حالت، سخت‌افزار در حلقه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۰۲

* نویسنده مسئول: shamaghdari@iust.ac.ir

۱- مقدمه

پایداری و ردیابی همواره به صورت دو مساله مهم در کنترل سیستم‌های غیرخطی مورد توجه محققین بوده است. در سال‌های اخیر مطالعات گوناگونی در رابطه با طراحی کنترل ردیاب سیستم‌های غیرخطی انجام شده و رویکردهای مختلفی اعم از فیدبک حالت و فیدبک خروجی در طراحی قانون کنترل مورد توجه قرار گرفته است [1-4].

یک دسته از سیستم‌های غیرخطی که مطالعات زیادی روی آن انجام شده است، سیستم غیرخطی چندجمله‌ای است. در این سیستم‌ها نمایش فضای حالت به فرم توابع چندجمله‌ای است. در این دسته از سیستم‌ها، مساله بررسی پایداری با کمک تابع لیاپانوف با استفاده از روش مجموع مربعات (SOS) صورت می‌گیرد [5]. پژوهشگران بسیاری از تجزیه مجموع مربعات در طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های غیرخطی استفاده نموده‌اند؛ به طور مثال در پژوهشی [6] از تجزیه مجموع مربعات به منظور جست‌وجو تابع لیاپانوف برای سیستم حلقه بسته بهره می‌گیرد که به طراحی کنترل‌کننده غیرخطی پایدارساز استاتیک منجر شده است. قانون کنترل به دست آمده به صورت یک تابع چندجمله‌ای از حالات سیستم است. روش ارائه‌شده در مطالعه‌ای [7]، کنترل‌کننده

پایدارساز را به صورت یک تابع غیرخطی استاتیک از خروجی‌های سیستم نتیجه می‌دهد. درجه بالای تابع چندجمله‌ای به دست آمده در این روش، پیاده‌سازی و اجرای آن را در کاربردهای عملی مشکل و حتی در بعضی موارد غیرممکن می‌سازد. در پژوهشی [8] به حل این مشکل پرداخته شده و قانون کنترل به صورت فیدبک حالت خطی ارائه شده است. اما بایستی توجه کرد در این نیز مقاله معیارهای بهینگی در طراحی کنترل‌کننده در نظر گرفته نشده و کنترل‌کننده از حل یک مساله امکان‌پذیری به دست می‌آید.

در این مقاله، مساله طراحی کنترل‌کننده مطرح شده در پژوهشی [6]، با تعریف تابع هزینه مناسب از یک مساله امکان‌پذیری به یک مساله بهینه‌سازی مجموع مربعات محدب با قیود نامساوی ماتریسی چندجمله‌ای تبدیل شده است. به طوری که با اصلاح قیود مساله طراحی، کنترل‌کننده پایداری نامایی سیستم حلقه بسته را تضمین می‌دهد. نرخ همگرایی نامایی به عنوان شاخص کارایی کنترل‌کننده در مساله طراحی تعریف شده است که بیشینه‌سازی آن باعث افزایش سرعت پاسخ گذرا در پایدارسازی سیستم می‌شود. سپس با استفاده از رویکردی مشابه با رویکرد به‌کارگرفته شده در کنترل‌کننده‌های LQI، روشی برای طراحی کنترل‌کننده ردیاب به فرم یک مساله بهینه‌سازی مجموع مربعات ارائه شده است. نشان داده خواهد شد که سیستم تحت کنترل‌کننده ردیاب نیز پایدار نامایی خواهد بود و ورودی مرجع را به صورت مجانبی دنبال می‌نماید.

در یک سیستم خطی، پایداری تنها به مقادیر ویژه آن وابسته بوده و هیچ‌گونه ارتباطی به مقدار ورودی و شرایط اولیه سیستم ندارد. به طوری که اگر تمامی مقادیر ویژه سیستم در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند، آنگاه سیستم پایدار خواهد بود و هر چه ورودی سیستم افزایش یا کاهش پیدا کند، لطمه‌ای به پایداری سیستم وارد نمی‌شود. در مقابل، پایداری سیستم‌های غیرخطی تابع ورودی و حالت‌های سیستم است. به طوری که با افزایش مقدار ورودی، ممکن است سیستم به سمت ناپایداری میل کند [9]. بنابراین لازم است پایداری سیستم حلقه بسته نسبت به ورودی مرجع محدود تضمین داده شود. این ویژگی با عنوان پایداری ورودی به حالت (ISS) بیان می‌شود و محدودبودن متغیرهای حالت سیستم غیرخطی را نسبت به ورودی خارجی محدود نتیجه می‌دهد [11-13]. در این مقاله پایداری ورودی به حالت در سیستم‌های غیرخطی با به‌کارگیری یک مساله امکان‌پذیری با قیود مجموع مربعات مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مسایل امکان‌پذیری و بهینه‌سازی مجموع مربعات ارائه شده در این مقاله را می‌توان به راحتی با استفاده از تولاکس SOSTOOLS [14] یا YALMIP [15, 16] در نرم‌افزار متلب حل نمود.

طراحی سیستم خودخلبان برای جسم پرنده به علت دینامیک غیرخطی و تنوع پارامترهای آن، همواره به عنوان یکی از موضوعات جذاب برای مهندسان کنترل به شمار می‌آید [17]. سیستم خودخلبان از دو بخش هدایت و کنترل پرواز تشکیل شده است. سیستم کنترل پرواز ابزاری کلیدی است که ضمن تضمین پایداری به وسیله پرنده اجازه می‌دهد الزامات عملکردی را برآورده سازد. هدف سیستم کنترل پرواز اجرای مناسب فرمان‌های کنترلی است که سیستم هدایت فرمان می‌دهد [18]. سیستم خودخلبان معمولاً به دو دسته خودخلبان زاویه حمله و شتاب دسته‌بندی می‌شوند. سیستم‌های خودخلبان معمولاً با استفاده از روش خطی‌سازی و مدل خطی شده سیستم طراحی می‌شوند. کنترل‌کننده PID رایج‌ترین روش مورد استفاده برای کنترل سیستم خطی شده است [19].

مجموع مربعات است.

تعریف ۱ [26]: یک چندجمله‌ای چندمتغیره $f(x)$ ، که $x \in R^n$ است را مجموع مربعات گوئیم در صورتی که چندجمله‌های $f_1(x), \dots, f_m(x)$ وجود داشته باشد به طوری که بتوان $f(x)$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (1)$$

مجموعه چندجمله‌ای‌های مجموع مربعات تعریف شده روی بردار x به صورت $\Sigma[x]$ نمایش داده می‌شود.

در این مقاله، طراحی کنترل کننده مبتنی بر تجزیه مجموع مربعات چندجمله‌ای چندمتغیره است که در لم ۱ ذکر شده است.

لم ۱ [26]: تابع $f(x)$ را به فرم چندجمله‌ای روی $x(t) \in R^n$ از درجه $2d$ و $Z(x)$ را به صورت یک بردار ستونی شامل تمامی تک‌جمله‌ای‌های $x(t)$ با درجه کمتر از d در نظر بگیرید. سپس تابع $f(x)$ ، SOS است اگر و تنها اگر یک ماتریس متقارن مثبت نیمه معین Q وجود داشته باشد به طوری که:

$$f(x) = Z^T(x)QZ(x) \quad (2)$$

که Q ماتریس گرام نامیده می‌شود و منحصربه‌فرد نخواهد بود.

لم ۲ [6]: برای یک ماتریس چندجمله‌ای متقارن $P(x)$ که روی کل مقادیر x غیرمنفرد است؛ داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) = -P(x) \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(x) P(x) \quad (3)$$

۳- طراحی کنترل کننده

در این مقاله با استفاده از روش مجموع مربعات در ابتدا روشی برای طراحی کنترل کننده پایدارساز با بهبود پاسخ حالت گذرا ارائه می‌شود به طوری که کنترل کننده طراحی شده پایداری نامی سیستم را تضمین دهد. سپس با استفاده رویکردی مشابه LQI، روش جهت طراحی کنترل کننده ردیاب ارائه شده است، که پایداری سیستم را به‌ازای ورودی ثابت تضمین می‌دهد.

۳-۱- طراحی کنترل کننده پایدارساز با بهبود سرعت حالت گذرا

سیستم غیرخطی افاین $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ را در نظر بگیرید که به صورت شبه خطی زیر نمایش داده شود:

$$\dot{x} = A(x)Z(x) + B(x)u \quad (4)$$

که در آن $A(x)$ و $B(x)$ ماتریس‌های چندجمله‌ای از x و $Z(x)$ یک بردار با بعد $1 \times N$ از تک‌جمله‌ای‌های x باشد که شرط زیر را برآورده کند:

$$Z(x) = 0 \iff x = 0$$

همچنین، ماتریس چندجمله‌ای $M(x)$ را با ابعاد $N \times N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{ij}(x) = \frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x) \quad (5)$$

و همچنین $A_j(x)$ سطر j ام ماتریس $A(x)$ را برای $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ نشان می‌دهد، که به سطرهایی اشاره دارد که سطر متناظرشان در ماتریس $B(x)$ برابر صفر باشد و \tilde{x} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{x} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}) \quad (6)$$

قضیه ۱: برای سیستم ۴، فرض کنید ماتریس‌های چندجمله‌ای $P(\tilde{x}) \in R^{N \times N}$ ، $K(\tilde{x}) \in R^{N \times N}$ و اعداد مثبت γ و ϵ به‌گونه‌ای وجود داشته باشند که مساله بهینه‌سازی مجموع مربعات زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned} & \underset{\gamma, P, K}{\text{minimize}} \gamma \\ & \text{s.t.} \end{aligned}$$

بسیاری از وسایل پرنده دارای دینامیک سریع هستند که رفتارهای غیرخطی از خود به نمایش می‌گذارند. بنابراین استفاده از مدل غیرخطی سیستم در طراحی خودخلبان امری اجتناب‌ناپذیر به حساب می‌آید. از این رو لازم است از کمترین ساده‌سازی در تقریب مدل غیرخطی استفاده شود. البته بسیاری از روش‌ها هنوز براساس خطی‌سازی دینامیک حول نقطه کار عمل می‌کنند. از معایب آن می‌توان به مشکل سازمان‌دهی و شناختن پارامترهای مختلف اشاره کرد که نیازمند یک فیلتر اضافی برای تخمین پارامترها است [20]. از جمله روش‌های جدید که در دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته می‌توان به روش‌های کنترل مد لغزشی، مد لغزشی تطبیقی، کنترل گام به عقب و نیز روش‌های هوشمند مبتنی بر سیستم‌های عصبی، فازی یا ترکیبی از این روش‌ها اشاره کرد [21-24]. در این مقاله با تخمین مدل غیرخطی پرنده به صورت چندجمله‌ای، از روش طراحی مبتنی بر تئوری مجموع مربعات، برای طراحی کنترل کننده استفاده شده است.

یکی از متداول‌ترین روش‌های توسعه و ارزیابی سامانه‌های هوافضایی، آزمون سخت‌افزار در حلقه است. این آزمون یک شبیه‌سازی حلقه بسته و زمان-واقعی است که به منظور بررسی صحت عملکرد یا پیاده‌سازی تمام یا بخشی از سخت‌افزار یک سامانه مورد استفاده قرار می‌گیرد [25]. در این مقاله به منظور ارزیابی کنترل کننده طراحی شده، یک آزمون گر سخت‌افزار در حلقه، طراحی و پیاده‌سازی شده است. این آزمون گر شامل دو بخش نرم‌افزاری و سخت‌افزاری است که هدف آن، ایجاد شرایطی نزدیک به واقعیت برای ارزیابی عملکرد اتوپیلوت طراحی شده است. نتایج حاصل از آزمون سخت‌افزار در حلقه با نتایج حاصل از شبیه‌سازی نرم‌افزاری مقایسه شده است، که هم‌خوانی مناسب نتایج، درستی طراحی صورت گرفته را نشان می‌دهد.

در ادامه، ابتدا پیش‌زمینه‌ای از روش مجموع مربعات و روابط مربوط به آن در بخش ۲ ارائه شده است. بخش ۳ به مساله طراحی کنترل کننده پایدارساز و ردیاب برای سیستم‌های غیرخطی چندجمله‌ای می‌پردازد و قوانین کنترل را در قالب مسایل بهینه‌سازی مجموع مربعات ارائه می‌دهد. بخش ۴ پایداری ورودی به حالت سیستم حلقه بسته را با رویکردی مبتنی بر روش مجموع مربعات بررسی می‌نماید. در بخش ۵ نتایج شبیه‌سازی و آزمون سخت‌افزار در حلقه پرنده هوایی تحت کنترل کننده طراحی شده، مورد مقایسه و بررسی قرار گرفته است. در پایان، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی در بخش ۶ ذکر شده است.

۲- مقدمات ریاضی

این بخش به ارائه تعاریف مورد استفاده در این مقاله و سپس چند لم می‌پردازد. تک‌جمله‌ای $m_\alpha(x)$ ، تابعی از $x \in R^n$ به صورت $m_\alpha(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ است که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اعداد صحیح غیرمنفی هستند. درجه این تک‌جمله‌ای به صورت $\deg m_\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ تعریف می‌شود. چندجمله‌ای چندمتغیره $f(x)$ به صورت حاصل جمع خطی تک‌جمله‌ای‌هایی از x با ضرایب ثابت است. درجه چندجمله‌ای $f(x)$ برابر بزرگ‌ترین درجه تک‌جمله‌ای‌های سازنده آن تعریف می‌شود.

با وجود خواص جالب توابع چندجمله‌ای که منجر به کاربردهای فراوانی در زمینه نظریه کنترل شده است، تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها در حالت کلی کار مشکلی است. از طرف دیگر خیلی از خواص کنترلی با تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها گره خورده است. یکی از راهکارهایی که برای غلبه بر این مشکل ارائه شده، مفهوم

با ضرب ماتریس $P(\tilde{x})$ در دو طرف ماتریس فوق و استفاده از لم ۲ می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس زیر بایستی منفی معین باشد:

$$-\sum_{j \in J} \frac{\partial P}{\partial x_j}(\tilde{x}) (A_j(x)Z(x)) + P(\tilde{x})A^T(x)M^T(x) + M(x)A(x)P(\tilde{x}) + K^T(x)B^T(x)M^T(x) + M(x)B(x)K(x) + 2\lambda P(\tilde{x}) + \lambda P(\tilde{x}) \leq 0$$

که با توجه به هدف بهبود حالت گذار، مساله بهینه‌سازی سعی در بیشینه‌کردن مقدار λ خواهد داشت. در نامساوی فوق جمله $\lambda P^{-1}(\tilde{x})$ نامساوی ماتریسی را به یک مساله BMI تبدیل می‌کند که محدب نیست. به‌منظور تبدیل مساله فوق یک مساله LMI با استفاده از مکمل شور^[27] می‌توان نامساوی ماتریسی فوق را به‌صورت رابطه ۱۷ نوشت:

$$\begin{bmatrix} \psi(x) & I \\ I & -\frac{P^{-1}(\tilde{x})}{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(x) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I \end{bmatrix} P^{-1}(\tilde{x}) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\psi(x) = P(\tilde{x})A^T(x)M^T(x) + M(x)A(x)P(\tilde{x}) + K^T(x)B^T(x)M^T(x) + M(x)B(x)K(x) - \sum_{j \in J} \frac{\partial P}{\partial x_j}(\tilde{x}) (A_j(x)Z(x))$$

حال با استفاده مجدد از مکمل شور و تغییر متغیر به‌صورت $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} \psi(x) & I & 0 \\ I & 0 & \gamma I \\ 0 & \gamma I & P(\tilde{x}) \end{bmatrix} \leq 0$$

همان‌طور که مشخص است این نامساوی ماتریسی خطی است و به‌ازای تمامی مقادیر $x(t)$ بایستی منفی معین باشد. لذا به‌منظور تضمین پایداری نمایی بایستی رابطه ۷ و ۸، SOS باشند. از طرفی بایستی توجه کرد که کمینه‌سازی متغیر γ معادل با بیشینه‌سازی متغیر λ است.

توجه ۱: واضح است که $\frac{dV}{dt}(x(t))$ منفی معین بوده و نقطه تعادل صفر به‌صورت مجانبی پایدار می‌شود و همچنین اگر $P(\tilde{x})$ ماتریس ثابت باشد، تابع لیاپانوف شعاعی نامحدود بوده و پایداری فراگیر خواهد بود.

۲-۳- طراحی کنترل‌کننده ردیاب

در این بخش از روشی مشابه با روش LQI برای طراحی کنترل‌کننده ردیاب سیستم غیرخطی استفاده شده است. با بهره‌گیری از روش‌های بیان‌شده در قسمت قبل به‌منظور طراحی کنترل‌کننده فیدبک پایداری و کنترل انتگرالی، رویکردی برای طراحی کنترل‌کننده ردیاب ارائه می‌شود. این کنترل‌کننده علاوه بر ردیابی اثر اغتشاشات ثابت را در سیستم حذف می‌کند.

$$\dot{x}(t) = A(x)Z(x) + B(x)u \quad (۱۹)$$

$$y(t) = C(x)Z(x) + D(x)u$$

که در آن $u \in R^m, y(t) \in R^p, x(t) \in R^n$ به‌ترتیب بردار حالت، خروجی و سیگنال کنترلی ورودی سیستم را نمایش

$$v_1^T (P(\tilde{x}) - \epsilon I) v_1 \in \Sigma[\tilde{x}, v_1] \quad (۸)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \psi(x) & I & 0 \\ I & 0 & \gamma I \\ 0 & \gamma I & P(\tilde{x}) \end{bmatrix} v_2 \in \Sigma[x, v_2]$$

$$\psi(x) = P(\tilde{x})A^T(x)M^T(x) + M(x)A(x)P(\tilde{x}) + K^T(x)B^T(x)M^T(x) + M(x)B(x)K(x) - \sum_{j \in J} \frac{\partial P}{\partial x_j}(\tilde{x}) (A_j(x)Z(x))$$

که در آن $v_1 \in R^n, v_2 \in R^{3 \times n}$ است. سپس سیستم تحت کنترل‌کننده فیدبک حالت به فرم رابطه ۹ پایدار نمایی خواهد بود:

$$u(x) = K(x)P^{-1}(x)Z(x) \quad (۹)$$

اثبات: در مطالعه‌ای^[10] نشان داده شده است که به‌منظور تضمین پایداری نمایی، بایستی مشتق تابع لیاپانوف نسبت به زمان شرط زیر را برآورده سازد:

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) \leq -\lambda V(x) \quad (۱۰)$$

که $\lambda > 0$ است. می‌توان نشان داد در صورت برقراری شرط فوق، می‌توان عدد $L > 0$ را به‌گونه‌ای یافت که رفتار سیستم نسبت به شرایط اولیه $x(0)$ نامساوی زیر را برآورده سازد:

$$\|x(t)\| \leq L \|x(0)\| \times e^{-\lambda t} \quad (۱۱)$$

فرض کنید ماتریس‌های $K(x), P(\tilde{x})$ وجود داشته باشد. تابع لیاپانوف $V(x)$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$V(x) = Z(x)^T P^{-1}(\tilde{x}) Z(x) \quad (۱۲)$$

نشان داده خواهد شد که این یک تابع لیاپانوف برای سیستم حلقه بسته زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = [A(x) + B(x)K(x)P^{-1}(\tilde{x})]Z(x) \quad (۱۳)$$

می‌دانیم که ماتریس‌های $P^{-1}(\tilde{x}), P(\tilde{x})$ به‌ازای تمامی مقادیر x مثبت معین است از این تابع لیاپانوف $V(x)$ به‌ازای تمامی مقادیر x مقداری مثبت خواهد داشت. با توجه به رابطه سیستم حلقه بسته مشتق تابع لیاپانوف نسبت به زمان به‌صورت زیر است:

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = Z^T(x) \left[\sum_{j \in J} \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_j}(\tilde{x}) (A_j(x)Z(x)) + [A(x) + B(x)K(x)P^{-1}(\tilde{x})]^T M^T(x) P^{-1}(\tilde{x}) + P^{-1}(\tilde{x}) M(x) [A(x) + B(x)K(x)P^{-1}(\tilde{x})] \right] Z(x)$$

به‌منظور تضمین پایداری نمایی با استفاده از رابطه ۱۰ و ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس زیر بایستی به‌ازای تمامی مقادیر $x(t)$ منفی معین باشد:

$$\sum_{j \in J} \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_j}(\tilde{x}) (A_j(x)Z(x)) + [A(x) + B(x)K(x)P^{-1}(\tilde{x})]^T M^T(x) P^{-1}(\tilde{x}) + P^{-1}(\tilde{x}) M(x) [A(x) + B(x)K(x)P^{-1}(\tilde{x})] + \lambda P^{-1}(\tilde{x}) \leq 0 \quad (۱۵)$$

که در آن $v_1 \in \mathbb{R}^{(N+p)}$ و $v_2 \in \mathbb{R}^{3 \times (N+p)}$ است. سپس سیستم تحت کنترل کننده فیدبک حالت به فرم رابطه ۲۶ پایدار نمایی خواهد بود و به صورت مجانبی ورودی مرجع $r(t)$ را دنبال می‌کند:

$$u(x) = K(x)P^{-1}(x)\bar{Z}(x) \quad (26)$$

اثبات: به طور مشابه با قضیه ۱ می‌توان نشان داد که رابطه ۲۴ و ۲۵ بایستی SOS باشد. از طرفی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده ۲۶ پایدار است بنابراین $\|e(x)\|$ محدود خواهد بود و این معنای محدود بودن انتگرال خطای ردیابی است. بنابراین $\gamma(t) \rightarrow 0$ زمانی که $t \rightarrow \infty$ که r اثبات شد که سیستم تحت کنترل کننده ۲۶ پایدار بوده و سیگنال مرجع $r(t)$ را دنبال می‌کند.

۴- بررسی ISS بودن سیستم

برای بررسی پایداری متغیرهای حالت نسبت به ورودی روش مختلفی ارایه شده است که وجود تابع ISS-لیاپانوف کامل‌ترین رویکرد بدین منظور است [28]. لذا در این مقاله نیز برای بررسی وضعیت پایداری متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته نسبت به ورودی، راهکاری منطقی با استفاده تئوری مجموع مربعات جهت وجود تابع ISS-لیاپانوف برای سیستم غیرخطی چندجمله‌ای به کار گرفته می‌شود.

تعریف ۲ [29]: سیستم غیرخطی به فرم کلی $\dot{x} = f(t, x, w)$ پایدار ورودی به حالت است؛ در صورتی که برای هر ورودی محدود w و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ توابع $\varphi \in \mathcal{KL}$ و $\beta \in \mathcal{K}$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\|x(t, x_0, w)\| \leq \varphi(\|x_0\|, t) + \beta(\|w\|_{[0,t]}) \quad \forall t \geq 0$$

که تابع β بهره مجانبی غیرخطی نامیده می‌شود.

تعریف ۳ [10]: تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $V: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع ISS-لیاپانوف برای سیستم غیرخطی به فرم کلی $\dot{x} = f(t, x, w)$ نامیده می‌شود؛ در صورتی که توابع

$$\underline{\kappa}, \underline{\kappa} \in \mathcal{K}_\infty \text{ و } \rho, \mu \in \mathcal{K} \text{ وجود داشته باشد به طوری که:} \quad (27)$$

$$\underline{\kappa}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\kappa}(\|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (28)$$

$$\|x\| \geq \rho(\|w\|) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) \leq -\mu(\|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

طبق تعریف فوق، واضح است که

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \beta \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t)\| \right)$$

و تابع بهره به صورت غیرخطی بوده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\beta = \underline{\kappa}^{-1} \circ \bar{\kappa} \circ \rho \quad (29)$$

لم ۳ [10]: یک سیستم ISS است اگر و تنها اگر یک تابع ISS-لیاپانوف برای آن وجود داشته باشد.

لم ۴ [29]: تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $V: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع ISS-لیاپانوف برای سیستم غیرخطی به فرم کلی $\dot{x} = f(t, x, w)$ است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد توابع $\underline{\kappa}, \bar{\kappa}, \underline{\kappa}, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ که:

$$\underline{\kappa}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\kappa}(\|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) \leq \sigma(\|w\|) - \underline{\kappa}(\|x\|) \quad (31)$$

$$\forall (x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

می‌دهند و $Z(x) \in \mathbb{R}^N$ بردار تک جمله‌ای‌های متغیرهای حالت سیستم است. به طور متناظر ابعاد ماتریس‌های چندجمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$A(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}, B(x) \in \mathbb{R}^{N \times m}, C(x) \in \mathbb{R}^{p \times N}$$

انتگرال خطای ردیابی را با فرمان مرجع $r(t) = r(t \geq 0)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(x) = \int_0^t (r - y(\tau)) d(\tau) \quad (32)$$

با ترکیب معادله ۱۹ و ۲۰ معادله حالت سیستم جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

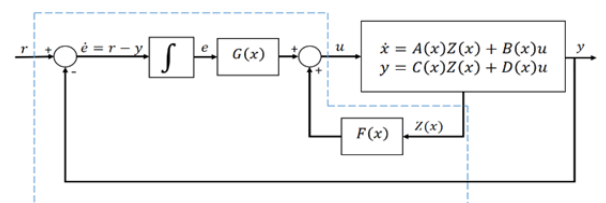
$$\dot{e}(x) = -C(x)Z(x) - D(x)u + r \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ -C(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(x) \\ e(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(x) \\ -D(x) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

با داشتن این سیستم جدید می‌توانیم قانون کنترلی را به صورت زیر در نظر بگیریم و کنترل کننده فیدبک حالت مناسب را به دست آوریم:

$$u = [F(x) \quad G(x)] \begin{bmatrix} Z(x) \\ e(x) \end{bmatrix} \quad (34)$$

بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته، تحت کنترل کننده ردیاب در شکل ۱ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، سیگنال کنترل یک تابع چندجمله‌ای از متغیرهای حالت و خطای ردیابی خواهد بود که علاوه بر پایداری سیستم، ردیابی سیگنال مرجع را نیز نتیجه خواهد داد.



شکل ۱) بلوک دیاگرام سیستم کنترل کننده ردیاب

قضیه ۲: برای سیستم ۲۱، فرض کنید ماتریس‌های چندجمله‌ای $P(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{(N+p) \times (N+p)}$ و $K(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (N+p)}$ اعداد

مثبت γ و ϵ به گونه‌ای وجود داشته باشند که مساله بهینه‌سازی مجموع مربعات زیر دارای جواب باشد:

$$\text{minimize}_{\gamma, P, K} \gamma \quad (35)$$

$$\text{s.t.} \quad v_1^T (P(\tilde{x}) - \epsilon I) v_1 \in \Sigma[\tilde{x}, v_1] \quad (36)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \bar{\psi}(x) & I & 0 \\ I & 0 & \gamma I \\ 0 & \gamma I & P(\tilde{x}) \end{bmatrix} v_2 \in \Sigma[x, v_1] \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) = & P(\tilde{x})\bar{A}^T(x)M^T(x) + M(x)\bar{A}(x)P(\tilde{x}) \\ & + K^T(x)\bar{B}^T(x)M^T(x) \\ & + M(x)\bar{B}(x)K(x) \\ & - \sum_{j \in J} \frac{\partial P}{\partial x_j}(\tilde{x}) (\bar{A}_j(x)\bar{Z}(x)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) - \sigma(\|w\|) + \kappa(\|x\|) = -s_3(x, w) \quad (39)$$

برای همه $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ و
(40)

$$s. \frac{d\xi(s)}{ds} = s_\xi(s), \quad \xi \in \{\underline{\kappa}, \bar{\kappa}, \sigma, \kappa\} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

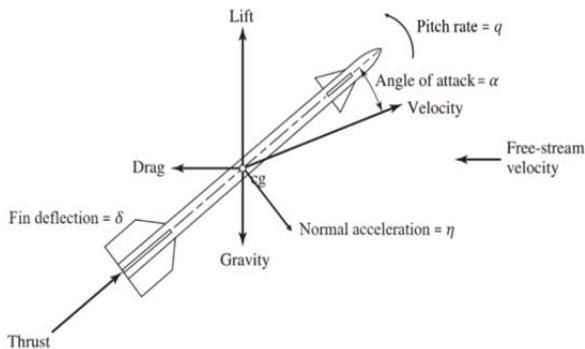
سیس تابع بهره غیرخطی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta = \underline{\kappa}^{-1} \circ \bar{\kappa} \circ \kappa^{-1} \circ l \sigma(s) \quad \exists l > 1 \quad (41)$$

۵- شبیه‌سازی، آزمون سخت‌افزار در حلقه و تحلیل نتایج

در این قسمت ابتدا با استفاده از روش ارایه‌شده برای طراحی کنترل‌کننده ردیاب، به طراحی حلقه کنترل سیستم خودخلبان یک پرندۀ مافوق صوت با مدل غیرخطی پرداخته می‌شود. سپس با هدف ایجاد شرایطی نزدیک به واقعیت برای ارزیابی عملکرد سیستم خودخلبان، یک آزمون‌گر سخت‌افزار در حلقه، طراحی و پیاده‌سازی شده است. در انتها، با مقایسه نتایج شبیه‌سازی و آزمون سخت‌افزار در حلقه، عملکرد روش مذکور در طراحی حلقه کنترل سیستم خودخلبان نشان داده شده و کارایی آن مورد ارزیابی قرار گرفته است.

متغیرهای حالت و نیروهای آیرودینامیک جسم پرنده در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. در این شکل $\alpha(t)$ زاویه حمله، $q(t)$ نرخ تغییرات زاویه فراز و $\delta(t)$ زاویه سطح کنترلی کانال پیچ است که بر حسب درجه بیان می‌شوند. پارامتر $\eta(t)$ نیز نشان‌دهنده شتاب نرمال پرنده بر حسب ثابت گرانش است. در این مقاله شتاب نرمال به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته شده و هدف طراحی کنترل‌کننده ردیاب برای این پارامتر است.



شکل ۲) نیروهای آیرودینامیک و متغیرهای حالت یک پرنده مافوق صوت

در سیستم کنترل پرواز برای کنترل حرکت در هر یک از کانال‌های غلت، پیچ و سمت با فرض پایدارسازی سایر کانال‌ها، از کنترل‌کننده‌های مستقل استفاده می‌شود که تحلیل سیستم را به عنوان یک سیستم تک‌ورودی-تک‌خروجی نتیجه می‌دهد. در این مقاله، مدل دینامیکی غیرخطی جسم پرنده حول محور پیچ مورد مطالعه قرار گرفته که از مرجع [31] برگرفته شده است. معادلات فضای حالت غیرخطی به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{\alpha} = K_\alpha M C_n [\alpha, \delta, M] \cos(\alpha) + q \dot{q} = K_q M^2 C_m [\alpha, \delta, M] \quad (42)$$

که پارامتر M عدد ماخ است و در اینجا ثابت و برابر ۲ در نظر گرفته شده است همچنین ضرایب آیرودینامیک مدل به صورت توابعی غیرخطی از α, δ, M به صورت زیر تعریف شده است:

سیس تابع بهره به صورت غیرخطی بوده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta = \underline{\kappa}^{-1} \circ \bar{\kappa} \circ \kappa^{-1} \circ l \sigma \quad \exists l > 1 \quad (33)$$

توجه ۲: وجود تابع ISS-لیپانوف به معنی پایداری متغیرهای حالت نسبت ورودی محدود است. اگر سیستم $\dot{x} = f(t, x, w)$ ISS باشد، این سیستم 0-GAS نیز خواهد بود. در واقع مبدا سیستم $\dot{x} = f(t, x, w)$ با $w = 0$ پایدار مجانبی فراگیر است.

۴-۱- تحلیل ISS مبتنی بر SOS

در این مقاله به منظور بررسی ISS بودن سیستم غیرخطی با مدل فضای حالت چندجمله‌ای با استفاده از SOS، لازم است وجود توابع کلاس \mathcal{K}_∞ را به فرم قیود SOS در آوریم. می‌دانیم یک توابع کلاس \mathcal{K}_∞ به صورت $\kappa: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ و نرم دو یک بردار به صورت $\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$ است. به منظور ایجاد قیود SOS بایستی $\kappa(\|x\|)$ یا $\kappa(\|w\|)$ نیز به ترتیب نسبت x و w چندجمله‌ای باشد یا به عبارت دیگر $\kappa(s)$ بایستی نسبت به s چندجمله‌ای باشد. بنابراین لازم است یک ساختار چندجمله‌ای نامتغیر افزایشی را به صورت زیر برای $\kappa(s)$ به دست آوریم:

$s \rightarrow \infty$ که $\kappa(s) \rightarrow \infty$ زمانی که $\kappa(0) = 0$ تابع $\kappa(s)$ نسبت به s اکیداً افزایشی است؛ یعنی برای $0 \leq s_1 < s_2$ داریم $\kappa(s_1) < \kappa(s_2)$ ، اگر و تنها اگر $\frac{d\kappa(s)}{ds} > 0$ جز برای تعداد نقاط محدودی همواره برقرار باشد. در واقع این به معنای شعاعی نامحدود بودن تابع $\kappa(s)$ است. لم زیر شرط لازم برای اینکه تابع چندجمله‌ای از کلاس \mathcal{K}_∞ باشد را ارایه می‌دهد.

لم ۵ [30]: یک تابع چندجمله نامتغیر با ترم‌های از درجه زوج بدون ترم ثابت را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\kappa(s) = \sum_{i=1}^N c_i s^{2i} \quad (34)$$

سیس تابع κ متعلق به کلاس \mathcal{K}_∞ خواهد بود در صورتی که وجود داشته باشد اعداد c_1, c_2, \dots, c_N به طوری که:

$$s. \frac{d\kappa(s)}{ds} \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (35)$$

توجه ۳: یک روش ساده برای ایجاد یک چندجمله‌ای از کلاس \mathcal{K}_∞ به فرم فوق انتخاب ضرایب c_k برای همه $0 \leq k \leq N$ و حداقل یکی از ضرایب $c_k > 0$ باشد. با استفاده از نتیجه به دست آمده در لم ۶ و تئوری SOS می‌توان رابطه ۳۵ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$s. \frac{d\kappa(s)}{ds} = s_\kappa(s) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (36)$$

که s_κ یک چندجمله‌ای SOS نسبت به s است. واضح است که رابطه ۳۵ معادل رابطه ۳۶ است، زیرا چندجمله‌ای نامتغیر با جملات از درجه زوج همواره SOS است. اگر ضرایب c_1, \dots, c_N نامشخص باشد، مشخص کردن ضرایب به صورتی که تابع κ متعلق به کلاس \mathcal{K}_∞ باشد با استفاده از حل یک مساله SDP امکان‌پذیر است.

قضیه ۳ [30]: سیستم غیرخطی به فرم کلی $\dot{x} = f(t, x, w)$ ، ISS است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای‌های نامتغیر از درجه زوج $\kappa, \bar{\kappa}, \sigma, \kappa$ ، یک چندجمله‌ای $V(x)$ ، چندجمله‌ای‌های SOS s_1, s_2, s_3, s_ξ که $\xi \in \{\underline{\kappa}, \bar{\kappa}, \sigma, \kappa\}$ وجود داشته باشد به نحوی که:

$$V(x) - \underline{\kappa}(\|x\|) = s_1(x) \quad (37)$$

$$\bar{\kappa}(\|x\|) - V(x) = s_2(x) \quad (38)$$

با توجه به رابطه ۴۶، مشخص است که مساله بهینه‌سازی مجموع مربعات قضیه ۲ به‌ازای ماتریس‌های چندجمله‌ای $P(x)$ و $K(x)$ از درجه صفر دارای جواب بوده و از این رو کنترل‌کننده به‌صورت برداری ثابت به دست آمده است. مقدار λ که نشان‌دهنده نرخ همگرایی نمایی است در این مساله بهینه‌سازی برابر ۲/۱۷ به دست آمده است. همان‌طور که بیان شد لازم است که ISS بودن سیستم حلقه بسته با استفاده از قضیه ۳ مورد ارزیابی قرار گیرد. با حل قضیه ۳ برای سیستم حلقه بسته به کمک ابزار SOSTOOLS نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \kappa &= 2.638(\alpha^2 + q^2 + \delta^2 + \eta^2) \\ \underline{\kappa} &= 1.292(\alpha^2 + q^2 + \delta^2 + \eta^2) \\ \bar{\kappa} &= 9.316(\alpha^2 + q^2 + \delta^2 + \eta^2) \\ &\quad + 6.812(\alpha^2 + q^2 + \delta^2 + \eta^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 1.292w^2 + 5.198w^4 \\ V(x) &= 5.855\alpha^2 + 0.366\alpha q + 5.175\alpha\delta + 1.235\alpha \\ &\quad + 2.367q^2 + 0.471q\delta + 0.004q\eta \\ &\quad + 0.620\delta^2 + 4.015\delta\eta + 2.068\eta^2 \\ &\quad + 0.019\alpha^4 + 1.248\alpha^2 q^2 \\ &\quad + 0.873\alpha^2 \delta^2 + 0.625\alpha^2 \eta^2 \\ &\quad + 1.142q^4 + 0.011q^2 \delta^2 \\ &\quad + 0.978q^2 \eta^2 + 1.004\delta^4 \\ &\quad + 0.138\delta^2 \eta^2 + 0.261\eta^4 \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به وجود جواب برای قضیه ۳ می‌توان نتیجه گرفت که کنترل‌کننده طراحی‌شده پایداری متغیرهای حالت را نسبت به ورودی محدود تضمین می‌دهد.

روش‌های مختلفی برای اجرای زمان-واقعی یک شبیه‌سازی وجود دارد. از مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به طراحی تحت سیستم عامل DOS، طراحی تحت سیستم عامل ویندوز، طراحی با استفاده از ابزار RTWT و طراحی با استفاده از روش xPC-Target اشاره کرد. هر یک از این روش‌ها یک سری مزایا و معایب دارند که در پژوهشی^[33] به‌طور کامل به آنها اشاره شده است.

در این مقاله برای زمان-واقعی‌کردن شبیه‌سازی مدل پرنده و ایجاد فرمان کنترلی از روش RTWT استفاده شده است. از مهم‌ترین مزایای این روش می‌توان به سهولت استفاده از آن، پشتیبانی از کارت‌های استاندارد جمع‌آوری داده، سهولت برقراری ارتباط با شبیه‌سازی، کاهش زمان و هزینه شبیه‌سازی، سهولت تغییر در مدل شبیه‌سازی و غیره اشاره کرد.

آزمون‌گر سخت‌افزار در حلقه طراحی‌شده متشکل از رابط، سخت‌افزار عملگر پرنده، درایور عملگر و رایانه جهت شبیه‌سازی مدل پرنده و ایجاد سیگنال کنترل است. رابط نیز خود از دو بخش نرم‌افزاری و سخت‌افزاری تشکیل شده است. بخش نرم‌افزاری رابط، وظیفه آماده‌سازی سیگنال کنترل ارسالی از قسمت شبیه‌سازی به درایور عملگر و دریافت سیگنال موقعیت بالک را به عهده دارد. بخش سخت‌افزاری رابط شامل کارت DAQ مدل PCI-1710 به همراه کابل ارتباطی آن است.

معماری شبیه‌سازی زمان-واقعی حلقه کنترل پرنده با روش RTWT در شکل ۳ ذکر شده است. همان‌طور که از دیاگرام بلوکی شکل ۳ مشهود است، در این روش مدل دینامیک پرنده در نرم‌افزار SIMULINK ایجاد می‌شود. یکی از مسایل مهم در شبیه‌سازی زمان-واقعی، بحث گام زمانی اجرای شبیه‌سازی است. ملاک تعیین گام زمانی در نرم‌افزار شبیه‌سازی، گام زمانی اجرای شبیه‌سازی هر یک از بلوک‌های آن به‌صورت مجزا و سرعت اجرای کدها توسط رایانه شبیه‌سازی است. در این مقاله، گام زمانی

(۴۳)

$$C_n[\alpha, \delta, M] = \text{sgn}(\alpha) \left[a_n |\alpha|^3 + b_n |\alpha|^2 + c_n \left(2 - \frac{M}{3} \right) |\alpha| \right] + d_n \delta$$

$$C_m[\alpha, \delta, M] = \text{sgn}(\alpha) \left[a_m |\alpha|^3 + b_m |\alpha|^2 + c_m \left(-7 + \frac{8M}{3} \right) |\alpha| \right] + d_m \delta$$

در اینجا دینامیک عملگر نیز به‌صورت مدل خطی مرتبه اول به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\delta(t) = K\delta_c(t) - \omega_a \delta(t) \quad (44)$$

پارامتر K در این رابطه نشان‌دهنده بهره عملگر است که در حالت بدون عیب برابر ۱۰ در نظر گرفته شده است. همچنین محدوده تغییرات زاویه بالک برابر ۳۰ درجه تعریف شده است. شتاب نرمال به‌عنوان خروجی سیستم به‌صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\eta = K_z M^2(t) C_n[\alpha(t), \delta(t), M(t)] \quad (45)$$

با توجه به روشی که برای طراحی کنترل‌کننده ردیاب ارایه شد از زاویه حمله، زاویه سطح کنترلی الویتور و نرخ زاویه فراز که متغیرهای حالت سیستم هستند برای پایداری داخلی و از شتاب نرمال که خروجی سیستم است برای ردیابی فیدبک گرفته می‌شود. سیگنال کنترل تولیدی به سیستم سروی الویتور اعمال شود. پارامترهای مدل پرنده مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$K_\alpha = \left(\frac{\pi}{180} \right) (0.7) P_0 S / (m v_s) \quad K_z = (0.7) P_0 S / (32.2m)$$

$$K_q = \left(\frac{\pi}{180} \right) (0.7) P_0 S d / I_y$$

$$P_0 = 973.3$$

$$m = 13.98$$

$$\omega_b = 300$$

$$C_a = -0.3$$

$$\omega_a = 10$$

$$a_n = 0.000103 [deg^{-3}]$$

$$b_n = -0.00945 [deg^{-2}]$$

$$c_n = -0.1696 [deg^{-1}]$$

$$d_n = -0.034 [deg^{-1}]$$

$$s = 0.44$$

$$v_s = 1036.4$$

$$I_y = 182.5$$

$$\zeta_a = 0.7$$

$$\zeta_b = 0.7$$

$$a_m = 0.000215 [deg^{-3}]$$

$$b_m = -0.0195 [deg^{-2}]$$

$$c_m = -0.051 [deg^{-1}]$$

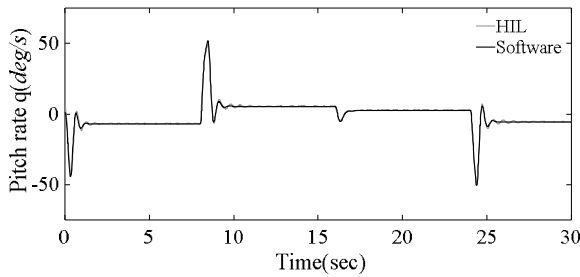
$$d_m = -0.206 [deg^{-1}]$$

به‌منظور به‌کارگیری رویکرد ارایه‌شده در طراحی حلقه کنترل سیستم خودخلبان، لازم است مدل غیرخطی پرنده به فرم توابع چندجمله‌ای از درجه مناسب تقریب زده شود. در این مقاله مشابه با مطالعه‌ای^[32] از بسط تیلور بدین‌منظور استفاده شده است. در این تقریب $Z(x)$ به‌صورت برداری از تک‌جمله‌ای‌های با درجه ۱ در نظر گرفته شده است؛ لذا بردار $Z(x)$ همان بردار متغیرهای حالت سیستم خواهد بود. هدف سیستم کنترل، ردیابی فرمان شتاب نرمال است. از این رو سیگنال خطای ردیابی به‌صورت اختلاف شتاب نرمال خروجی از سیگنال فرمان تعریف می‌شود. با استفاده از رویکرد ارایه‌شده در بخش ۳-۲ به‌منظور طراحی کنترل‌کننده ردیاب و حل مساله بهینه‌سازی مجموع مربعات قضیه ۲ به کمک ابزار SOSTOOLS، کنترل‌کننده ردیاب به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

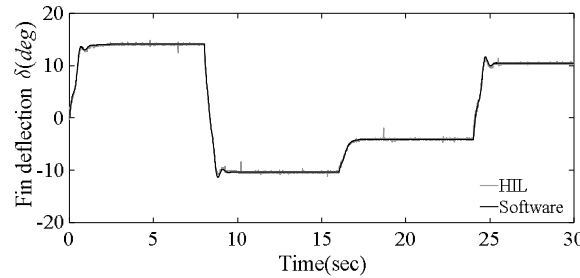
$$u = [0.05 \quad 0.6 \quad -3.1 \quad 0.012] \begin{bmatrix} Z(x) \\ e(x) \end{bmatrix} \quad (46)$$

شبیه‌سازی زمان- واقعی، ثابت و برابر با یک‌میلی‌ثانیه در نظر گرفته شده است (شکل ۳).

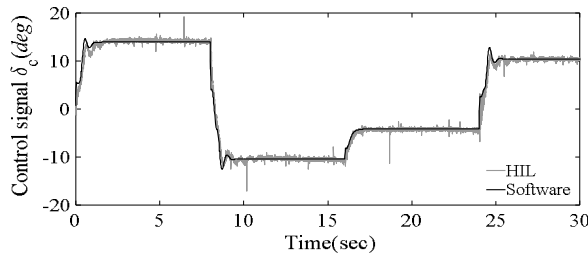
نمودار ۱ تا ۶ رفتار خروجی و متغیرهای حالت سیستم را تحت کنترل‌کننده طراحی‌شده نشان می‌دهد. نمودار ۷ نیز سیگنال کنترل اعمالی به سیستم سرو را نشان می‌دهد.



نمودار (۵) نرخ زاویه فراز پرنده



نمودار (۶) زاویه انحراف سطح کنترلی



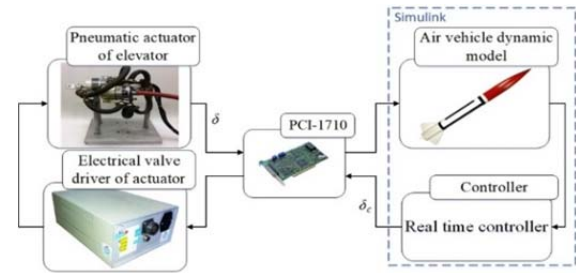
نمودار (۷) سیگنال کنترلی اعمالی به سیستم سرو

همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌شود با تغییر فرمان ورودی، سیستم در زمانی کمتر از ۱/۸ ثانیه به مقدار جدید همگرا می‌شود که این صحت مقدار به‌دست‌آمده برای نرخ همگرایی نمایی را نشان می‌دهد. همچنین با بررسی رفتار پاسخ گذرا پرنده می‌توان متوجه شد که سیستم در ردیابی فرمان‌های شتاب با دامنه بزرگ‌تر از ۱۰g، دچار بالا‌زدگی می‌شود، که دلیل این رفتار را می‌توان نیاز سیستم به زاویه حمله بالا دانست. رابطه ۴۳ نشان می‌دهد که ضرایب آپرودینامیک پرنده، شامل جملاتی از زاویه حمله با توان ۳ است که باعث تغییر زیاد مقدار آنها در زاویه حمله بالا می‌شود.

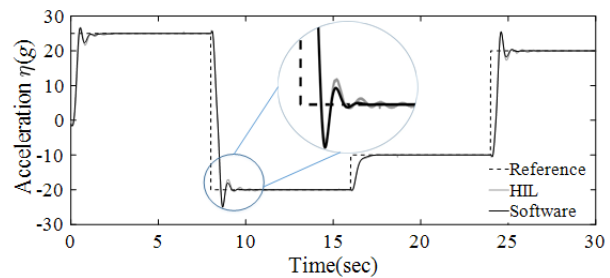
همان‌طور که در نمودار ۲ نشان داده شده است، خطای ردیابی در برخی از لحظات دچار بالا‌زدگی و پایین‌زدگی زیادی می‌شود. دلیل این رفتار به خاطر پرش پله‌ای فرمان مرجع است که به‌صورت لحظه‌ای ظاهر می‌شود. به‌عنوان مثال در زمان $t = 8s$ با تغییر فرمان مرجع از ۲۵g به ۲۰g، نمودار خطای ردیابی دچار بالا‌زدگی به مقدار ۴۵/۴g شده است.

نمودار ۳ قدر مطلق اختلاف شتاب نرمال سیستم در آزمون سخت‌افزار در حلقه و محیط شبیه‌سازی نرم‌افزاری را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این نمودار مشاهده می‌شود بیشترین مقدار اختلاف هنگام تغییر فرمان مرجع اتفاق می‌افتد و پس از گذشت زمان نشست، این مقدار به صفر همگرا می‌شود.

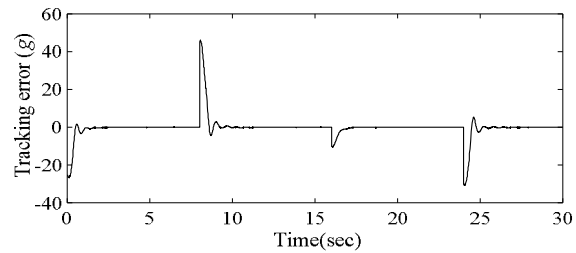
همان‌طور که بیان شد، روش ارایه‌شده برای طراحی کنترل‌کننده ردیاب، ردیابی نمایی سیگنال مرجع ثابت را توسط سیستم حلقه بسته تضمین می‌دهند. اگرچه لازم است پایداری سیستم حلقه بسته در هنگام ردیابی سیگنال‌های مرجع متغیر با زمان با استفاده



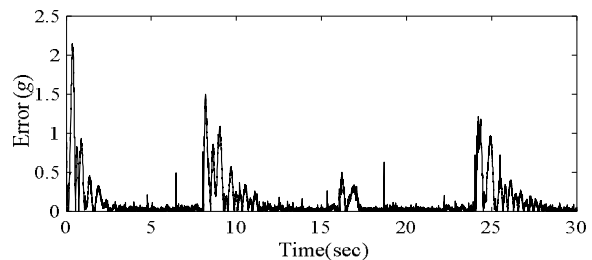
شکل (۳) دیاگرام بلوکی آزمون سخت‌افزار در حلقه



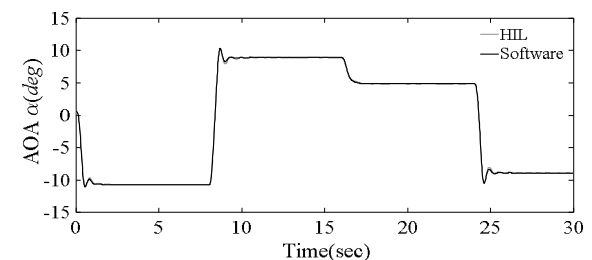
نمودار (۱) پاسخ شتاب نرمال پرنده به یک توالی از فرمان‌های پله



نمودار (۲) خطای ردیابی شتاب نرمال آزمون سخت‌افزار در حلقه نسبت سیگنال مرجع



نمودار (۳) قدر مطلق خطای شتاب نرمال بین نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزاری و آزمون سخت‌افزار در حلقه



نمودار (۴) زاویه حمله پرنده

Vegas, Nevada, USA. Piscataway: IEEE; 2002.

6- Prajna S, Papachristodoulou A, Wu F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. 5th Asian Control Conference, 20-23 July, 2004, Melbourne, Victoria, Australia. Piscataway: IEEE; 2004.

7- Zhi Y, Zhao G, Yu J. Robust static output feedback for a class of nonlinear uncertain systems. International Conference on Computational and Information Sciences, 21-23 October, 2011, Chengdu, China. Piscataway: IEEE; 2011.

8- Zakeri H, Antsaklis PJ. Local passivity analysis of nonlinear systems: A sum-of-squares optimization approach. American Control Conference (ACC), 6-8 July, 2016, Boston, Massachusetts, USA. Piscataway: IEEE; 2016.

9- Slotine JJE, Li W. Applied nonlinear control. Upper Saddle River: Prentice Hall; 1991.

10- Khalil HK. Nonlinear systems. 3rd Edition. Upper Saddle River: Prentice Hall; 2002.

11- Dashkovskiy SN, Efimov DV, Sontag ED. Input to state stability and allied system properties. Automation and Remote Control. 2011;72(8):1579-1614.

12- Kellett CM, Wirth FR. Nonlinear scaling of (i) ISS-Lyapunov functions. IEEE Transactions on Automatic Control. 2016;61(4):1087-1092.

13- Sontag ED. Input to state stability: Basic concepts and results. In: Agrachev AA, Stephen Morse A, Sontag ED, Sussmann HJ, Utkin VI. Nonlinear and optimal control theory. Nistri P, Stefani G, editors. Berlin: Springer; 2008.

14- Prajna S, Papachristodoulou A, Parrilo PA. Introducing SOSTOOLS: A general purpose sum of squares programming solver. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 10-13 December, 2002, Las Vegas, Nevada, USA. Piscataway: IEEE; 2002.

15- Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. International Conference on Robotics and Automation, 2-4 September, 2004, New Orleans, Louisiana, USA. Piscataway: IEEE; 2004.

16- Lofberg J. Pre-and post-processing sum-of-squares programs in practice. IEEE Transactions on Automatic Control. 2009;54(5):1007-1011.

17- Mattei G, Monaco S. Nonlinear autopilot design for an asymmetric missile using robust backstepping control. Journal of Guidance Control and Dynamics. 2014;37(5):1462-1476.

18- Haeussermann W. Developments in the field of automatic guidance and control of rockets. Journal of Guidance Control and Dynamics. 1981;4(3):225-239.

19- Kada B, Ghazzawi Y. Robust PID controller design for an UAV flight control system. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science, Vol II, 19-21 October, 2011, San Francisco, USA. Hong Kong: Lecture Notes in Engineering and Computer Science; 2011.

20- Sato M. Filter design for LPV systems using quadratically parameter-dependent Lyapunov functions. Automatica. 2006;42(11):2017-2023.

21- Shtessel YB, Shkolnikov IA, Levant A. Smooth second-order sliding modes: Missile guidance application. Automatica. 2007;43(8):1470-1476.

22- Yan H, Wang X, Yu B, Ji H. Adaptive integrated guidance and control based on backstepping and input-to-state stability. Asian Journal of Control.

از روش پایداری ورودی به حالت مورد ارزیابی قرار گیرد. ارزیابی جداگانه پایداری سیستم حلقه بسته نسبت سیگنال‌های مرجع متغیر با زمان، یک محدودیت برای روش ارائه شده محسوب می‌شود. از این رو پیشنهاد می‌شود، حل این مساله به‌عنوان یک کار پژوهشی در آینده مورد توجه قرار گیرد. لذا لازم است روشی بدین منظور ارائه شود که با بهره‌گیری از روش پایداری ورودی به حالت در هنگام طراحی کنترل کننده، پایداری سیستم حلقه بسته را به‌طور همزمان تضمین دهد.

۶- جمع‌بندی

در این مقاله روشی جدید برای طراحی کنترل ردیاب در سیستم‌های غیرخطی چندجمله‌ای ارائه شد که قانون کنترل را به فرم یک تابع چندجمله‌ای از متغیرهای حالت و انتگرال خطای ردیابی نتیجه می‌دهد. پایداری سیستم غیرخطی تحت این کنترل کننده نسبت به ورودی ثابت تضمین و نشان داده شد که سیستم حلقه بسته پایدار نمایی بوده و به‌صورت مجانبی ورودی مرجع را دنبال می‌کند. سپس به‌منظور ارزیابی روش طراحی ارائه شده، به طراحی و پیاده‌سازی آزمون‌گر سخت‌افزار در حلقه برای یک پرنده مافوق صوت پرداخته شد. با استفاده از این آزمون‌گر، عملکرد بخش کنترل خودخلبان پرنده، که با استفاده از روش ارائه شده طراحی شده بود مورد بررسی و راستی‌آزمایی قرار گرفت. نتایج حاصل با نتایج شبیه‌سازی مقایسه شد که هم‌خوانی مناسب نتایج، کارایی روش ارائه شده را در حلقه کنترل خودخلبان پرنده نشان می‌دهد.

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان ذکر نشده است.

تأییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان ذکر نشده است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: سجاد روشن‌روان (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ سعید شمس‌قدری (نویسنده دوم)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری (۵۰٪)

منابع مالی: کلیه هزینه‌های انجام آزمایشات به‌صورت شخصی توسط پژوهشگران انجام شده است.

منابع

1- Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Asymptotic tracking of a reference trajectory by output-feedback for a class of non linear systems. Systems and Control Letters. 2009;58(9):652-663.

2- Wang Z, Lu R, Wang H. Finite-time trajectory tracking control of a class of nonlinear discrete-time systems. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems. 2017;47(7):1679-1687.

3- Gao YF, Sun XM, Wen Ch, Wang W. Adaptive tracking control for a class of stochastic uncertain nonlinear systems with input saturation. IEEE Transactions on Automatic Control. 2017;62(5):2498-2504.

4- Yang H, Fan X, Shi P, Hua Ch. Nonlinear control for tracking and obstacle avoidance of a wheeled mobile robot with nonholonomic constraint. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2016;24(2):741-746.

5- Papachristodoulou A, Prajna S. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 10-13 December, 2002, Las

- control. New York: Springer Publishing Company; 2015.
- 29- Sontag ED, Wang Y. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1996;41(9):1283-1294.
- 30- Ichihara H. Sum of squares based input-to-state stability analysis of polynomial nonlinear systems. *SICE Journal of Control Measurement and System Integration*. 2012;5(4):218-225.
- 31- Nichols RA, Reichert RT, Rugh WJ. Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 1993;1(2):69-79.
- 32- Roshanravan S, Sobhani Gendeshmin B, Shamaghdari S. Design of an actuator fault-tolerant controller for an air vehicle with nonlinear dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G Journal of Aerospace Engineering*. 2018 Sep.
- 33- Isermann R, Schaffnit J, Sinsel S. Hardware-in-the-loop simulation for the design and testing of engine-control systems. *Control Engineering Practice*. 1999;7(5):643-653.
- 2014;16(2):602-608.
- 23- Li Z, Xia Y, Su CY, Deng J, Fu J, He W. Missile guidance law based on robust model predictive control using neural-network optimization. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2015;26(8):1803-1809.
- 24- Ran M, Wang Q, Hou D, Dong Ch. Backstepping design of missile guidance and control based on adaptive fuzzy sliding mode control. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2014;27(3):634-642.
- 25- Eichblatt EJ. Test and evaluation of the tactical missile. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 1989.
- 26- Parrilo PA. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization [Dissertation]. Pasadena: California Institute of Technology; 2000.
- 27- Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM; 1994.
- 28- Baillieul J, Samad T. Encyclopedia of systems and