



Investigating the Effect of Different Sensors on the Observer Performance in Vehicle Suspension System Based on the Observable Degree Analysis

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Falahati Nodeh T.¹ MSc,

Mirzaei M.*¹ PhD,

Babazadeh Mehrababni E.¹ MSc,

Khosrowjerdi M.J.² PhD

How to cite this article

Falahati Nodeh T, Mirzaei M, Babazadeh Mehrababni E, Khosrowjerdi M.J. Investigating the Effect of Different Sensors on the Observer Performance in Vehicle Suspension System Based on the Observable Degree Analysis. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(7):1675-1684.

¹Mechanical Engineering Department, Mechanical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

²Electrical Engineering Department, Electrical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Mechanical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

Phone: +98 (41) 33458480

Fax: +98 (41) 33444309

mirzaei@sut.ac.ir

Article History

Received: December 27, 2018

Accepted: February 04, 2019

ePublished: July 01, 2019

ABSTRACT

In this paper, the effect of different sensors on the observer performance of vehicle suspension system is investigated. For this purpose, the concept of observable degree analysis is used to quantitatively measure the observability for different sensor choices. A new method, for determining the observable degree of linear time invariant (LTI) systems has been developed on the basis of distance of system from set of similar unobservable systems. A long distance is equivalent to a strong observability and a short distance is equivalent to a weak observability. The zero distance means that the system is unobservable. Since the distance to different unobservable modes can be determined separately, a comprehensive investigation of system observability and the effect of different sensor choices on the observer performance can be provided. In the following, the observable analysis of the suspension system was performed based on the proposed method and the effect of different outputs on the observer performance has been investigated. The results show that when the observable degree is increased for a specific sensor, the observer gain is decreased and consequently the sensitivity of observer relative to the noise and measurement errors is decreased. The increased accuracy of observer demonstrates a good conformity between observable degree analysis and observer performance. Also, a comparative study showed that, contrary to previous criteria that only considered a certain aspect of observability, the proposed method is more comprehensive and realistic, and the results obtained from the previous criteria can easily be achieved through the proposed method.

Keywords Vehicle Suspension System; Sensor Selection; Observable Degree Analysis; Observer Performance; Sensor Measurement Error

CITATION LINKS

[1] Observable degree analysis to match estimation performance for wireless tracking networks [2] An ADMM algorithm for optimal sensor and actuator selection [3] A framework for optimal actuator/sensor selection in a control system [4] A quantitative measure of observability for a linear system [5] Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems [6] Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems [7] Observer design and sensor location in distributed parameter bioreactors [8] On modelling, monitoring and control of fixed bed bioreactors [9] On the use of observability measures for sensor location in tubular reactor [10] Selection of optimal sensor position in a tubular reactor using robust degree of observability criteria [11] Observability, eigenvalues, and Kalman filtering [12] Study on observability and its degree of strapdown inertial navigation system [13] The method of system observability analysis using pseudo-inverse of system observability matrix [14] Observable degree analysis method and its application in transfer alignment [15] Observable degree analysis using unscented information filter for nonlinear estimation systems [16] Observability degree criteria evaluation for temperature observability in a battery string towards optimal thermal sensors placement [17] Comparison on system observable degree analysis methods for target tracking [18] The distance between a system and the set of uncontrollable systems [19] Selection of sensors and actuators for an active suspension control problem [20] Selection of sensors for hydro-active suspension system of passenger car with input-output pairing considerations [21] Non-linear predictive control of multi-input multi-output vehicle suspension system [22] Designing a non-linear tracking controller for vehicle active suspension systems using an optimization process

بررسی تاثیر انتخاب سنسورهای مختلف بر عملکرد مشاهده‌گر در سیستم تعلیق خودرو براساس آنالیز درجه مشاهده‌پذیری

طه فلاحتی‌نوده MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

مهدی میرزایی* PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

ابراهیم بابازاده‌مهریانی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

محمدچواد خسروجردی PhD

گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

چکیده

در این مقاله به بررسی تاثیر انتخاب سنسورهای مختلف بر عملکرد مشاهده‌گر در سیستم تعلیق خودرو پرداخته شده است. برای این منظور از مفهوم درجه مشاهده‌پذیری برای توصیف کمی شدت و ضعف مشاهده‌پذیری استفاده شده و در این راستا روش جدیدی برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی ثابت با زمان، توسعه داده شده است. در روش پیشنهادی، درجه مشاهده‌پذیری بر مبنای فاصله سیستم از مجموعه سیستم‌های هم‌رتبه و مشاهده‌ناپذیر تعریف می‌شود. بزرگ‌بودن فاصله به معنی مشاهده‌پذیری قوی، کوچک‌بودن فاصله به معنی مشاهده‌پذیری ضعیف و صفربودن فاصله نشان‌دهنده مشاهده‌ناپذیری سیستم است. با توجه به اینکه فاصله سیستم از حالت‌های مختلف مشاهده‌ناپذیری به صورت جداگانه تعیین می‌شود، امکان بررسی همه جانبه مشاهده‌پذیری و تاثیر انتخاب خروجی بر عملکرد مشاهده‌گر فراهم می‌شود. در ادامه، تحلیل مشاهده‌پذیری سیستم تعلیق براساس روش پیشنهادی، انجام شده و تاثیر خروجی‌های مختلف بر عملکرد مشاهده‌گر مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش درجه مشاهده‌پذیری برای دستیابی به سرعت یکسان در مشاهده‌گر، بهره مشاهده‌گر کاهش می‌یابد و کاهش بهره مشاهده‌گر باعث کاهش حساسیت تخمین به نویز و خطای اندازه‌گیری سنسورها می‌شود که به تبع آن دقت تخمین در حضور خطای اندازه‌گیری سنسورها افزایش می‌یابد. همچنین با یک بررسی مقایسه‌ای نشان داده شد که برخلاف معیارهای قبلی که فقط جنبه خاصی از مشاهده‌پذیری را مد نظر قرار می‌دادند، روش پیشنهادی جامع‌تر و واقع‌بینانه‌تر است و نتایج به‌دست‌آمده از معیارهای قبلی به‌راحتی از روش پیشنهادی قابل دستیابی هستند.

کلیدواژه‌ها: سیستم تعلیق خودرو، انتخاب سنسور، آنالیز درجه مشاهده‌پذیری، عملکرد مشاهده‌گر، خطای اندازه‌گیری سنسور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۵

* نویسنده مسئول: mirzaei@sut.ac.ir

۱- مقدمه

مشاهده‌پذیری یکی از ویژگی‌های ساختاری مهم در سیستم‌های دینامیکی است که قابلیت سیستم در بازآفرینی یا تخمین متغیرهای حالت از اطلاعات خروجی را توصیف می‌نماید و عملکرد سیستم‌های کنترلی را تحت تاثیر قرار می‌دهد^[1]. همان‌طور که می‌دانیم، مشاهده‌پذیری مودهای ناپایدار یا آشکارپذیری سیستم، یکی از شرط‌های لازم برای پایدارسازی سیستم‌های دینامیکی از طریق پسخورد خروجی است و چنانچه برخی از مودهای ناپایدار سیستم مشاهده‌ناپذیر باشد، امکان پایدارسازی از طریق پسخورد خروجی وجود نخواهد داشت. همچنین در سیستم‌های کنترلی که بر مبنای پسخورد حالت طراحی می‌شوند و امکان اندازه‌گیری کلیه متغیرهای حالت وجود ندارد، برای اینکه بتوان از مشاهده‌گر برای

تخمین متغیرهای حالت و محاسبه ورودی کنترلی استفاده کرد، سیستم می‌بایست مشاهده‌پذیر باشد.

نوع، تعداد و مکان خروجی‌های انتخاب‌شده (متغیرهای اندازه‌گیری‌شده) بر مشاهده‌پذیری سیستم تاثیر می‌گذارد. همچنین اندازه‌گیری تمامی کمیت‌ها در سیستم به دلیل افزایش پیچیدگی و هزینه‌های اولیه و نگهداری، عملی نیست، لذا بررسی تاثیر خروجی‌های مختلف بر مشاهده‌پذیری و عملکرد سیستم در مراحل اولیه طراحی، برای انتخاب ترکیب بهینه‌ای از سنسورها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است^[2, 3]. از طرف دیگر حساسیت مشاهده‌گر نسبت به خطای اندازه‌گیری و متعاقب آن دقت تخمین به‌ازای ترکیب‌های مختلفی از سنسورها متفاوت است. با وجود این تفاوت، امکان مقایسه بین ترکیب‌های مختلفی از خروجی‌ها که سیستم به‌ازای آنها مشاهده‌پذیر است، با استفاده از روش‌های کلاسیک مانند تعیین مرتبه ماتریس مشاهده‌پذیری فراهم نمی‌شود؛ چرا که در این روش‌ها فقط پاسخ بله یا خیر به پرسش مشاهده‌پذیربودن سیستم داده می‌شود و سیستم‌ها به دو گروه مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم می‌شوند. بنابراین با استفاده از روش‌های کلاسیک نمی‌توان قبل از طراحی و پیاده‌سازی مشاهده‌گر، عملکرد مشاهده‌گر را مورد بررسی قرار داد و ترکیب مناسبی از سنسورها را انتخاب کرد. از این رو مفهومی تحت عنوان درجه مشاهده‌پذیری ارائه می‌شود که هدف آن توصیف کمی از شدت و ضعف مشاهده‌پذیری به‌جای پاسخ دوحالتی و ارزیابی میزان موثربودن سنسورهای انتخاب‌شده در عملکرد تخمین است. کم‌بودن درجه مشاهده‌پذیری یا ضعیف‌بودن مشاهده‌پذیری سیستم بدین معنی است که اطلاعات برخی از متغیرهای حالت سیستم یا زیرسیستم‌ها به‌اندازه کافی در تشکیل سیگنال خروجی سیستم وجود ندارد یا به عبارت دیگر، سیگنال خروجی حاوی اطلاعات بسیار ناچیزی از زیرسیستم مورد نظر است. در چنین شرایطی برای دستیابی به نرخ همگرایی مناسب در تخمین، مشاهده‌گر تلاش بیشتری باید انجام دهد و بهره مشاهده‌گر ناگزیر باید افزایش یابد که افزایش بهره نیز باعث افزایش حساسیت تخمین به خطای اندازه‌گیری می‌شود و در نتیجه خطای تخمین افزایش خواهد یافت.

روش‌ها و معیارهای مختلفی برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری توسط محققان ارائه شده است. هیلی و مکینان^[4] از ماتریس مودال مشاهده‌پذیری برای تعریف درجه مشاهده‌پذیری مودال سیستم استفاده کرده‌اند. در این روش درایه‌های ماتریس مودال مشاهده‌پذیری، درجه مشاهده‌پذیری هر مود از هر خروجی را نشان می‌دهد. حمدان و نایفه^[5] کسینوس زاویه بین بردارهای مربوط به هر خروجی و بردار ویژه سمت راست را به‌عنوان درجه مشاهده‌پذیری ارائه کرده‌اند. براساس این معیار، مود λ_m سیستم زمانی مشاهده‌ناپذیر می‌شود که بردار خروجی بر بردار ویژه مربوط به مود λ_m عمود باشد و زمانی که بردار خروجی در راستای بردار ویژه قرار می‌گیرد، مشاهده‌پذیری به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

مولر و وبر^[6] معیارهای درجه مشاهده‌پذیری را بر مبنای ماتریس مشاهده‌پذیری یا گرامیان مشاهده‌پذیری ارائه کرده‌اند که شامل کمترین مقدار ویژه، دترمینان و معکوس تریس ماتریس مشاهده‌پذیری است. دامک و همکاران^[7] و همچنین دوچاین و همکاران^[8] عدد حالت ماتریس مشاهده‌پذیری را به‌عنوان درجه مشاهده‌پذیری معرفی کرده‌اند. معیارهای مشابهی نیز توسط والدرف و همکاران^[9] به‌صورت کمترین مقدار تکین و عدد حالت ماتریس مشاهده‌پذیری ارائه شده است. واندن‌برگ و همکاران^[10]

پژوهش به آنالیز درجه مشاهده پذیری سیستم تعلیق به ازای خروجی‌های مختلف با روش پیشنهادی خواهیم پرداخت و تاثیر خروجی‌های مختلف را بر درجه مشاهده پذیری و عملکرد مشاهده گر در سیستم تعلیق نشان خواهیم داد. با توجه به گسترش روزافزون استفاده از تجهیزات مکترونیک و کنترلی در سیستم‌های تعلیق خودرو و همچنین تعدد و تنوع ترکیب‌های مختلفی از سنسورها که توسط پژوهشگران مختلف برای کنترل یا تخمین در سیستم تعلیق مورد استفاده قرار گرفته شده است، لزوم بررسی تاثیر سنسورها بر عملکرد سیستم تعلیق و انتخاب مناسب سنسورها را نشان می‌دهد.

پژوهش‌های انجام شده در زمینه تعیین ترکیب بهینه سنسورها برای سیستم تعلیق بسیار اندک است. *واندوال* و *دجاگر*[19] برای تعیین ترکیب بهینه سنسورها در سیستم‌های خطی از حذف ترکیب‌هایی از سنسورها استفاده کرده‌اند که امکان طراحی کنترل کننده برای دستیابی به سطح مطلوب عملکرد و پایداری مقاوم در برابر نامعنی‌ها وجود ندارد. آنها این روش را برای تعیین ترکیب مناسب عملگر و سنسور برای سیستم تعلیق چهاردرجه آزادی تریلر تراکتور استفاده کرده‌اند. *سرشاری* و *خاکی صدیق*[20] برای تعیین ترکیب مناسب سنسورها در سیستم‌های تعلیق هیدرواکتیو از روش ارائه شده در یک پژوهش[19] استفاده کرده‌اند.

در این مقاله به بررسی تاثیر انتخاب سنسورهای مختلف بر مشاهده پذیری سیستم تعلیق و ارتباط آن با عملکرد مشاهده گر براساس ایده جدید پیشنهادی پرداخته می‌شود. سنسورهایی که برای این منظور انتخاب شده‌اند، سنسورهای متداولی مانند شتاب سنج و فاصله سنج هستند که برای اندازه گیری خروجی‌های سیستم تعلیق خودرو مثل جابه جایی تعلیق، شتاب جرم معلق و شتاب جرم غیرمعلق به کار می‌روند. برای بررسی دقیق تر مشاهده پذیری، مدل خطی یک چهارم سیستم تعلیق خودرو به شکل قطری - بلوکی تبدیل شده و زیرسیستم‌های تشکیل دهنده آن مشخص شده است. سپس براساس روش پیشنهادی، درجه مشاهده پذیری برای هر زیرسیستم به ازای سنسورهای مختلف، به صورت جداگانه تعیین شده است. تعیین درجه مشاهده پذیری برای هر زیرسیستم به صورت جداگانه این امکان را فراهم می‌کند که تحلیل دقیق تری از وضعیت مشاهده پذیری در زیرسیستم‌های تشکیل دهنده سیستم به ازای سنسورهای مختلف داشته باشیم. پس از تعیین درجه مشاهده پذیری به بررسی ارتباط بین درجه مشاهده پذیری و عملکرد مشاهده گر در حضور خطای اندازه گیری پرداخته شده و نشان داده شده است که با کاهش مشاهده پذیری در هر یک از زیرسیستم‌های سیستم تعلیق، برای دستیابی به سرعت همگرایی یکسان، بهره مشاهده گر به ناچار باید افزایش یابد و افزایش بهره مشاهده گر، افزایش حساسیت خطای تخمین مشاهده گر نسبت به خطای اندازه گیری را در پی خواهد داشت. بنابراین خطای اندازه گیری در زیرسیستم‌هایی که دارای مشاهده پذیری کمتری هستند، باعث افزایش خطای تخمین خواهد شد. همچنین برای ارزیابی روش پیشنهادی برای تعیین درجه مشاهده پذیری، مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از این روش و نتایج حاصل از روش‌های قبلی انجام و نشان داده شده است که برخلاف سایر روش‌ها که فقط جنبه خاصی از مشاهده پذیری را مورد بررسی قرار می‌دادند، روش ارائه شده واقع بینانه تر و جامع تر است.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم به معرفی روش پیشنهادی برای تعیین درجه مشاهده پذیری خواهیم پرداخت. در

از تریس و نرم طیفی گرامیان مشاهده پذیری به عنوان درجه مشاهده پذیری سیستم استفاده کرده‌اند.

روش‌های دیگری نیز برای مقایسه مشاهده پذیری بین حالت‌های سیستم ارائه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به *حام* و *گرووریراون*[11] اشاره کرد. آنها درجه مشاهده پذیری را براساس مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس کواریانس خطای فیلتر کالمن تعریف کرده‌اند. در این روش، برای آنالیز مشاهده پذیری می‌بایست به ازای هر ترکیبی از خروجی‌ها، فیلتر کالمن طراحی و شبیه سازی شود، بنابراین به حجم بالایی از محاسبات نیاز خواهد داشت. *چنگ* و *همکاران*[12]، روش تجزیه به مقادیر تکین ماتریس مشاهده پذیری را برای محاسبه درجه مشاهده پذیری حالت‌های سیستم ارائه کرده‌اند که در این روش نیاز به پیاده سازی فیلتر کالمن وجود ندارد. *دونگ* و *مو*[13] از روش معکوس تعمیم یافته ماتریس مشاهده پذیری برای محاسبه درجه مشاهده پذیری استفاده کرده‌اند. *چن* و *همکاران*[14] نیز درجه مشاهده پذیری را براساس درجه میرایی خطای تخمین تعیین نموده‌اند.

در روش‌هایی که برای تعیین درجه مشاهده پذیری ارائه شده‌اند، فقط جنبه‌های خاصی از آن در نظر گرفته شده‌اند. از این رو مطابقت کاملی بین نتایج آنالیز درجه مشاهده پذیری و عملکرد مشاهده گر دیده نمی‌شود[15]. *لیستیانینگروم* و *همکاران*[16] به ارزیابی معیارهای مختلف درجه مشاهده پذیری براساس عملکرد تخمین گر برای انتخاب تعداد و مکان مناسب برای سنسورهای دما در یک مجموعه باتری متصل به هم استفاده کرده‌اند. نتایج این پژوهش عدم مطابقت کافی درجه مشاهده پذیری با عملکرد مشاهده گر را نشان می‌دهد. *ما* و *همکاران*[17] به ارزیابی و مقایسه بین معیارهای مختلف درجه مشاهده پذیری براساس حجم محاسبات و تطبیق نتایج پرداخته‌اند. *جی* و *همکاران*[1] روش جدیدی برای آنالیز درجه مشاهده پذیری ارائه کرده‌اند که تطبیق بیشتری با عملکرد تخمین گر در سیستم داشته باشد. این معیار براساس گرامیان مشاهده پذیری تصادفی و بررسی رابطه آن با عملکرد فیلتر کالمن به دست آمده است، ولی با این حال نتایج ارائه شده در مقاله برای قضاوت در مورد ادعای آن کافی نیست. *آیزینگ*[18] درجه کنترل پذیری سیستم را براساس فاصله سیستم تا سیستم‌های هم مرتبه و کنترل ناپذیر تعریف کرده است.

در پژوهش حاضر روش جدیدی برای تعیین درجه مشاهده پذیری سیستم‌های LTI توسعه داده شده که بر مبنای فاصله سیستم از مجموعه سیستم‌های هم مرتبه و مشاهده ناپذیر است. این روش در واقع دوگان تعریف ارائه شده در یک پژوهش[18] بوده که برای تعریف درجه کنترل پذیری ارائه شده است و برای اولین بار در مقاله حاضر از این مفهوم برای تعریف درجه مشاهده پذیری و آنالیز مشاهده پذیری سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بزرگ بودن فاصله به معنی مشاهده پذیری قوی، کوچک بودن فاصله به معنی مشاهده پذیری ضعیف و صفر بودن فاصله نشان دهنده مشاهده ناپذیری سیستم است. همچنین برای بررسی دقیق تر تاثیر انتخاب خروجی‌ها بر مشاهده پذیری، درجه مشاهده پذیری برای مودهای سیستم و براساس فاصله سیستم از سیستم‌های هم مرتبه تعریف می‌شود که مود مورد نظر در آن مشاهده ناپذیر است. با این تعریف می‌توان درجه مشاهده پذیری برای هر مود یا ترکیبی از مودها را به صورت جداگانه تعیین نمود. از این رو در روش پیشنهادی، امکان بررسی همه جانبه مشاهده پذیری و تاثیر انتخاب خروجی بر عملکرد کنترل کننده و مشاهده گر قبل از طراحی و پیاده سازی آنها فراهم می‌شود. به عنوان مثال کاربردی، در ادامه

یکی از روش‌های بررسی مشاهده‌ناپذیری مود λ_i ، استفاده از آزمون بردار ویژه PBH است. طبق این آزمون مود λ_i مشاهده‌ناپذیر است اگر و تنها اگر:

$$\begin{pmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{pmatrix} \vartheta_i = 0 \quad (4)$$

در این رابطه λ_i و ϑ_i مقدار ویژه و بردار ویژه سمت راست سیستم ۱ است [5]. طبق این رابطه در سیستم‌های تک‌خروجی، مود λ_i مشاهده‌ناپذیر است، اگر بردار خروجی C بر بردار ویژه سمت راست λ_i عمود باشد، یعنی رابطه ۵ برقرار باشد.

$$C \vartheta_i = 0 \quad (5)$$

تعریف ۲: درجه مشاهده‌پذیری مود λ_i براساس کمترین فاصله سیستم (A, C) از سیستم‌های هم‌مرتبه $(A, C + \delta C)$ که در مود λ_i مشاهده‌ناپذیر هستند، مطابق رابطه ۶ تعریف می‌شود.

$$\mu_i(A, C) = \min_{C \in \mathbb{R}^{p \times n}} \|\delta C\|_F \quad (6)$$

به شرطی که:

$$(C + \delta C) \vartheta_i = 0 \quad (7)$$

قضیه‌های ۱ و ۲ روش‌هایی را برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری مود λ_i در حالتی که مقادیر ویژه سیستم حقیقی یا مختلط باشند، ارائه می‌کند.

قضیه ۱: چنانچه سیستم ۱ قطری‌پذیر باشد، درجه مشاهده‌ناپذیری مود λ_i براساس تعریف ۲، از رابطه ۸ به دست می‌آید.

$$\mu_i(A, C) = |C v_i| \quad (8)$$

اثبات: ماتریس مودال T برای سیستم ۱ را به صورت رابطه ۹ در نظر می‌گیریم:

$$T = [v_1 \ \dots \ v_n] \quad (9)$$

در این رابطه v_i بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه λ_i است. با استفاده از تبدیل همانندی مطابق رابطه ۱۰:

$$x = Tz \quad (10)$$

سیستم ۱ به شکل قطری (رابطه ۱۱) تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A'z + B'u \\ y &= C'z \end{aligned} \quad (11)$$

در این رابطه $A' = T^{-1}AT$ ، $B' = T^{-1}B$ و $C' = CT$ است. برای مشاهده‌ناپذیری مود λ_i باید درایه λ_i بردار $C' + \delta C'$ مساوی صفر باشد، یعنی:

$$CT + \delta C = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_i = 0 \ \dots \ \alpha_n]; \quad (12)$$

$$\alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$$

δC و نرم دوم آن به ترتیب از روابط ۱۳ و ۱۴ به دست خواهد آمد:

$$\|\delta C\|_F = \sqrt{[(Cv_1 - \alpha_1) \ \dots \ Cv_i \ \dots \ (Cv_n - \alpha_n)]^2} \quad (13)$$

$$\|\delta C\|_F^2 = \sum_{k=1, k \neq i}^n (Cv_k - \alpha_k)^2 + (Cv_i)^2 \quad (14)$$

رابطه ۱۴ وقتی کمینه خواهد شد که:

$$\alpha_k = Cv_k \quad (15)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۵ در ۱۴، درجه مشاهده‌پذیری مود λ_i از رابطه ۱۶ به دست خواهد آمد:

بخش سوم مدل دینامیکی سیستم تعلیق ارایه خواهد شد و از روش پیشنهادی برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری سیستم تعلیق به‌ازای خروجی‌های مختلف استفاده خواهد شد. همچنین برای ارزیابی نتایج حاصل از درجه مشاهده‌پذیری به طراحی مشاهده‌گر لیونبرگر برای تخمین متغیرهای حالت سیستم تعلیق خواهیم پرداخت و نتایج حاصل از شبیه‌سازی مشاهده‌گر در فصل چهارم ارایه خواهد شد.

۲- درجه مشاهده‌پذیری

در این بخش به تعریف درجه مشاهده‌پذیری برای سیستم‌های LTI خواهیم پرداخت که مبنای آن براساس فاصله سیستم از سیستم‌های مشاهده‌ناپذیر هم‌مرتبه با سیستم اصلی است. بدین منظور سیستم LTI با یک خروجی را مطابق رابطه ۱ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du + v \end{aligned} \quad (1)$$

در این رابطه $x \in \mathbb{R}^n$ متغیر حالت، $u \in \mathbb{R}^m$ ورودی سیستم، $y \in \mathbb{R}$ خروجی سیستم و A, B, C, D ماتریس‌هایی با ابعاد متناسب است. v نیز خطای اندازه‌گیری سنسور است که می‌تواند به دلیل وجود نویز، عدم کالیبراسیون مناسب سنسور یا خرابی آن ایجاد شود. همچنین نرم فرینوس ماتریس M است که مطابق رابطه ۲ تعریف می‌شود.

$$\|M\|_F = (\text{Tr}(M^T M))^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

در این رابطه $\text{Tr}(\cdot)$ تریس ماتریس است.

درجه مشاهده‌پذیری سیستم براساس کمترین فاصله سیستم از سیستم‌های هم‌مرتبه و مشاهده‌ناپذیر تعریف می‌شود که در واقع دوگان تعریف ارایه‌شده در یک مطالعه [18] است. در ادامه برای روشن شدن بیشتر موضوع به تعریف کمترین فاصله سیستم از سیستم‌های هم‌مرتبه و مشاهده‌ناپذیر خواهیم پرداخت.

تعریف ۱: سیستم LTI را مطابق رابطه ۱ در نظر بگیرید و فرض کنید δA و δC آشفتگی‌های مجاز باشند که روی میدان اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. آن گاه کمترین فاصله سیستم از سیستم‌های هم‌مرتبه و مشاهده‌ناپذیر به صورت رابطه ۳ تعریف خواهد شد:

$$\mu(A, C) = \min_{\substack{\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \delta C \in \mathbb{R}^{p \times n}}} \{ \|\delta A\|_F^2 + \|\delta C\|_F^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

به شرطی که $(A + \delta A, C + \delta C)$ مشاهده‌ناپذیر باشد.

در تعریف ۱، درجه مشاهده‌پذیری برای کل سیستم تعریف شده است و در مورد درجه مشاهده‌پذیری مودهای سیستم یا متغیرهای حالت آن بحث نمی‌کند، ولی با توجه به اینکه مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت یا مودهای سیستم به‌ازای خروجی یکسان متفاوت است، لذا تعریف فوق برای آنالیز دقیق‌تر مشاهده‌پذیری و بررسی تاثیر خروجی بر مشاهده‌پذیری کافی نیست از این رو در ادامه به تعریف درجه مشاهده‌پذیری مود λ_i براساس فاصله سیستم از سیستم‌های هم‌مرتبه که مود λ_i آن مشاهده‌ناپذیر است، خواهیم پرداخت. با توجه به اینکه هدف این مقاله، بررسی تاثیر خروجی سیستم بر مشاهده‌پذیری است، لذا ماتریس A ثابت در نظر گرفته می‌شود و فاصله سیستم فقط به‌ازای تغییر در ماتریس خروجی یعنی C تعیین خواهد شد. با این فرض مودهای سیستم ثابت باقی خواهد ماند و بررسی مشاهده‌پذیری مودهای سیستم با سهولت بیشتری انجام خواهد شد.

با توجه به اینکه در یک سیستم امکان دارد چندین مود به صورت همزمان مشاهده‌ناپذیر شود، لذا در قضیه ۳ به تعیین درجه مشاهده‌پذیری چندین مود به صورت همزمان خواهیم پرداخت. قضیه ۳: چنانچه مقادیر ویژه سیستم ۱ مجزا باشند، درجه مشاهده‌ناپذیری مربوط به مود λ_m و λ_n از رابطه ۲۶ به دست می‌آید.

$$\mu_{i,j}(A, C) = \sqrt{\mu_i(A, C)^2 + \mu_j(A, C)^2} \quad (26)$$

اثبات: مشابه اثبات قضیه‌های ۱ و ۲ فرض می‌شود سیستم دارای مقادیر ویژه مجزا باشد و با استفاده از ماتریس مودال (رابطه ۹)، تحقق قطری سیستم از رابطه ۱۱ به دست می‌آید. در این حالت برای مشاهده‌ناپذیری همزمان مود λ_m و مود λ_n می‌بایست درایه‌های λ_m و λ_n ماتریس خروجی تبدیل‌یافته صفر شود، یعنی رابطه ۲۷ برقرار باشد:

$$CT + \delta = [\alpha_1 \dots \alpha_i = 0 \dots \alpha_j = 0 \dots \alpha_n]; \alpha_k \in R, k = 1, \dots, n$$

بنابراین δC و نرم دوم آن به ترتیب از روابط ۲۸ و ۲۹ به دست خواهد آمد:

$$\delta C = [(Cv_1 - \alpha_1) \dots Cv_i \quad Cv_j \dots (Cv_n - \alpha_n)] \quad (28)$$

$$\|\delta C\|_F^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (Cv_k - \alpha_k)^2 + (Cv_i)^2 + (Cv_j)^2 \quad (29)$$

رابطه ۲۹ وقتی کمینه خواهد شد که:

$$\alpha_k = Cv_k \quad (30)$$

با جای‌گذاری رابطه ۳۰ در ۲۹، درجه مشاهده‌پذیری مود مختلط از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\mu_i(A, C) = \min_{C \in R^{1 \times n}} \|\delta C\|_F = \sqrt{(Cv_i)^2 + (Cv_j)^2} = \sqrt{\mu_i(A, C)^2 + \mu_j(A, C)^2} \quad (31)$$

بر اساس این معیار با افزایش فاصله از سیستم‌های مشاهده‌ناپذیر، درجه مشاهده‌پذیری سیستم افزایش می‌یابد و باعث کاهش بهره مشاهده‌گر در دستیابی به عملکرد مشخص از مشاهده‌گر می‌شود. به همین ترتیب، کاهش بهره مشاهده‌گر نیز باعث کاهش حساسیت نتایج تخمین به خطای اندازه‌گیری می‌شود و دقت تخمین متغیرهای حالت را در حضور خطای اندازه‌گیری افزایش می‌دهد. در حالت عکس نیز کاهش فاصله مشاهده‌پذیری، درجه مشاهده‌پذیری سیستم را کاهش می‌دهد که باعث افزایش خطای تخمین در حضور خطای اندازه‌گیری می‌شود. چنانچه فاصله صفر شود، سیستم مشاهده‌ناپذیر خواهد شد و قادر به تخمین مودهای مشاهده‌ناپذیر نخواهیم بود.

۳- آنالیز مشاهده‌پذیری سیستم تعلیق خودرو

سیستم تعلیق در خودروها با دو هدف اصلی حفظ راحتی سرنشین و حفظ تماس تایر با جاده طراحی شده است و با توجه به گسترش روزافزون تجهیزات مکاترونیک، انتخاب مناسب سنسورها تاثیر مهمی بر عملکرد سیستم تعلیق خواهد گذاشت [21]. به همین دلیل در این بخش بر اساس آنالیز درجه مشاهده‌پذیری با روش

$$\mu_i(A, C) = \min_{C \in R^{1 \times n}} \|\delta C\|_F = |Cv_i| \quad (16)$$

توجه: صفر شدن درجه مشاهده‌پذیری بدین معنی است که فاصله سیستم از سیستم‌های مشاهده‌ناپذیر محلی صفر بوده و در نتیجه سیستم مشاهده‌ناپذیر است. طبق این قضیه، درجه مشاهده‌پذیری مود λ_m سیستم برابر با قدر مطلق درایه λ_m ماتریس مشاهده‌پذیری مودال سیستم یعنی CT است که با نتیجه ارائه شده در [4] مطابقت دارد.

قضیه ۲: چنانچه سیستم ۱ قطری پذیر باشد، درجه مشاهده‌پذیری مود λ_m که متناظر با مقدار ویژه مختلط است، بر اساس تعریف ۲، از رابطه ۱۷ به دست می‌آید.

$$\mu_i(A, C) = \sqrt{(Cv_{iR})^2 + (Cv_{iI})^2} \quad (17)$$

در این رابطه v_{iR} و v_{iI} به ترتیب بخش حقیقی و بخش موهومی بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه مختلط است. لازم به یادآوری است که مودهای متناظر با مقدار ویژه مختلط و مزدوج آن یک زیرسیستم مرتبه دوم ایجاد می‌کنند که درجه مشاهده‌پذیری آنها یکسان است.

اثبات: با توجه به اینکه مقادیر ویژه سیستم مجزا هستند، فرض کنید مقدار ویژه λ_m و λ_{m+1} ام سیستم مختلط و مزدوج هم باشند. در این حالت امکان قطری‌سازی سیستم به نحوی که درایه‌های ماتریس حقیقی باشد، وجود نخواهد داشت. لذا با استفاده از تبدیل T به صورت رابطه ۱۸ می‌توان سیستم را به شکل قطری بلوکی، مطابق روابط ۱۹ و ۲۰ تبدیل نمود.

$$T = [v_1 \dots v_{iR} \quad v_{iI} \dots v_n] \quad (18)$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ & \sigma_i & \omega_i \\ & -\omega_i & \sigma_i \\ & & \ddots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$CT = [Cv_1 \dots Cv_{iR} \quad Cv_{iI} \dots Cv_n] \quad (20)$$

برای مشاهده‌ناپذیری مود λ_m می‌بایست درایه λ_m و λ_{m+1} ام $CT + \delta C$ مساوی صفر باشد یعنی:

$$CT + \delta C = [\alpha_1 \dots \alpha_i = 0 \quad \alpha_{i+1} = 0 \dots \alpha_n]; \alpha_k \in R, k = 1, \dots, n \quad (21)$$

بنابراین δC و نرم دوم آن به ترتیب از روابط ۲۲ و ۲۳ به دست خواهد آمد:

$$\delta C = [(Cv_1 - \alpha_1) \dots Cv_{iR} \quad Cv_{iI} \dots (Cv_n - \alpha_n)] \quad (22)$$

$$\|\delta C\|_F^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (Cv_k - \alpha_k)^2 + (Cv_{iR})^2 + (Cv_{iI})^2 \quad (23)$$

رابطه ۲۳ وقتی کمینه خواهد شد که:

$$\alpha_k = Cv_k \quad (24)$$

با جای‌گذاری رابطه ۲۴ در ۲۳، درجه مشاهده‌پذیری مود مختلط از رابطه ۲۵ به دست خواهد آمد:

$$\mu_i(A, C) = \min_{C \in R^{1 \times n}} \|\delta C\|_F = \sqrt{(Cv_{iR})^2 + (Cv_{iI})^2} \quad (25)$$

در این رابطه، x_1 جابه‌جایی تعلیق است که جابه‌جایی نسبی بین جرم معلق و جرم غیرمعلق را نشان می‌دهد. x_3 خیز تابر نامیده می‌شود که جابه‌جایی جرم غیرمعلق نسبت به ناهمواری جاده را نشان می‌دهد. x_2 و x_4 نیز به ترتیب سرعت جرم معلق و سرعت جرم غیرمعلق هستند. با انتخاب پارامترهای سیستم تعلیق مطابق جدول ۱، مقادیر ویژه سیستم تعلیق مطابق جدول ۲ به دست خواهد آمد. همان‌طور که جدول ۲ نشان داده می‌شود، مقادیر ویژه سیستم تعلیق مختلط است، لذا امکان قطری‌سازی سیستم به نحوی که درایه‌های ماتریس تبدیل شده، اعداد حقیقی باشد، وجود ندارد. بنابراین سیستم به شکل قطری- بلوکی تبدیل خواهد شد. برای این منظور، ماتریس تبدیل با استفاده از بردارهای ویژه سیستم به صورت رابطه ۳۷ به دست خواهد آمد.

(۳۷)

$$T = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0176 & -0.0550 & -0.1354 \\ -0.0243 & -0.0792 & 0.9872 & 0 \\ -0.0038 & -0.0169 & 0.0033 & -0.0092 \\ 0.9963 & 0 & 0.0485 & 0.0402 \end{bmatrix}$$

جدول ۲) مقادیر ویژه سیستم تعلیق

مقدار ویژه	مقدار
λ_1	$-۱۲/۵۵۶۷+۵۶/۳۱۳۶i$
λ_2	$-۱۲/۵۵۶۷-۵۶/۳۱۳۶i$
λ_3	$-۲/۱۶۱۷+۶/۰۵۵۷i$
λ_4	$-۲/۱۶۱۷-۶/۰۵۵۷i$

تحقق قطری- بلوکی سیستم تعلیق (رابطه ۳۴) با استفاده از ماتریس تبدیل T (رابطه ۳۷) مطابق روابط ۳۸ تا ۴۰ خواهد بود.

$$\dot{z} = A_z z + B_z \dot{x}_r \quad (۳۸)$$

$$A_z = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -12.55 & 56.31 & 0 & 0 \\ -56.31 & -12.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.16 & 6.05 \\ 0 & 0 & -6.05 & -2.16 \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

$$B_z = T^{-1} B = \begin{bmatrix} -0.1606 \\ 0 \\ -0.0109 \\ 0.0477 \end{bmatrix} \quad (۴۰)$$

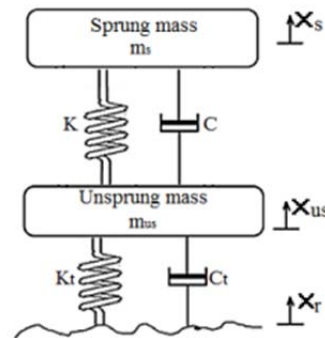
نمایش قطری- بلوکی سیستم تعلیق نشان می‌دهد که سیستم تعلیق از دو زیرسیستم مستقل از هم تشکیل شده که زیرسیستم اول شامل متغیرهای حالت (z_1, z_2) و زیرسیستم دوم شامل متغیرهای حالت (z_3, z_4) است و چنانچه خروجی سیستم فقط شامل اطلاعات یکی از زیرسیستم‌ها باشد، سیستم مشاهده‌ناپذیر خواهد بود و چنانچه تأثیر یکی از زیرسیستم‌ها در خروجی سیستم بسیار کم باشد، مشاهده‌پذیری آن زیرسیستم، ضعیف و تخمین متغیرهای حالت مربوط به آن با چالش مواجه خواهد شد. بنابراین بررسی تأثیر انتخاب خروجی بر مشاهده‌پذیری زیرسیستم‌ها و انتخاب مناسب آن در سیستم تعلیق بسیار حائز اهمیت خواهد بود.

لازم به ذکر است که هیچ لزومی به اینکه همواره مقادیر ویژه سیستم تعلیق مختلط باشد، وجود ندارد و امکان اینکه مقادیر ویژه حقیقی یا ترکیبی از مقادیر ویژه حقیقی و مختلط باشد، وجود دارد. در این شرایط نیز با تبدیل سیستم به شکل قطری یا قطری- بلوکی

پیشنهادی به بررسی تأثیر سنسورهای مختلف بر مشاهده‌پذیری و عملکرد مشاهده‌گر خواهیم پرداخت.

۳-۱- مدل‌سازی سیستم تعلیق

شکل ۱ مدل ساده‌شده‌ای از سیستم تعلیق فعال را نشان می‌دهد. این مدل شامل جرم معلق و جرم غیرمعلق است که توسط فنر و دمپر موازی به هم متصل شده‌اند. تأثیر در این مدل با توجه به رفتار ویسکوالاستیک آن به صورت فنر- دمپر معادل در نظر گرفته شده است.



شکل ۱) مدل یک‌چهارم سیستم تعلیق خودرو

دینامیک مدل ساده‌شده سیستم تعلیق مطابق روابط ۳۲ و ۳۳ است [22].

$$m_s \ddot{x}_s = -k(x_s - x_{us}) - C(\dot{x}_s - \dot{x}_{us}) \quad (۳۲)$$

$$m_{us} \ddot{x}_{us} = k(x_s - x_{us}) - k_t(x_{us} - x_r) + C(\dot{x}_s - \dot{x}_{us}) - C_t(\dot{x}_{us} - \dot{x}_r) \quad (۳۳)$$

در این روابط، x_s جابه‌جایی جرم معلق، x_{us} جابه‌جایی جرم غیرمعلق و x_r تحریک ناشی از ناهمواری جاده است. سایر پارامترهای سیستم تعلیق در جدول ۱ تعریف شده‌اند.

جدول ۱) پارامترهای سیستم تعلیق

پارامتر	توصیف	مقدار [22]	واحد
m_s	جرم معلق	۲۹۰	Kg
m_{us}	جرم غیرمعلق	۵۹	Kg
k	ضریب سفتی فنر	۱۳۳۹۴	N/m
C	ضریب میرایی دمپر	۱۳۸۵	Ns/m
k_t	ضریب سفتی تابر	۱۹۰۰۰۰	N/m
C_t	ضریب میرایی تابر	۷۰	Ns/m

چنانچه متغیرهای حالت سیستم به صورت $x_1 = x_s - x_{us}$ و $x_2 = \dot{x}_s$ و $x_3 = x_{us} - x_r$ و $x_4 = \dot{x}_3$ در نظر گرفته شوند، معادلات فضای حالت سیستم مطابق رابطه ۳۴ خواهد بود.

$$\dot{x} = Ax + B\dot{x}_r \quad (۳۴)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k}{m_s} & 0 & -\frac{C}{m_s} & \frac{C}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_{us}} & \frac{C}{m_{us}} & -\frac{k_t}{m_{us}} & -\frac{C+C_t}{m_{us}} \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{C_t}{m_{us}} \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

حالت (Z_1, Z_2) است که باعث افزایش تاثیر خطای اندازه‌گیری خروجی بر خطای تخمین (Z_1, Z_2) خواهد شد. این تاثیر به دلیل افزایش درایه‌های بهره مشاهدهگر مربوط به (Z_1, Z_2) است. کوچک بودن اندازه μ_2 نیز به معنی مشاهدهپذیری ضعیف متغیرهای حالت (Z_3, Z_4) است که باعث افزایش تاثیر خطای اندازه‌گیری خروجی بر خطای تخمین (Z_3, Z_4) خواهد شد. دلیل این تاثیر، افزایش درایه‌های بهره مشاهدهگر مربوط به (Z_3, Z_4) در مشاهدهپذیری ضعیف است.

جدول ۳) نتایج تحلیل مشاهدهپذیری سیستم تعلیق به‌ازای خروجی‌های مختلف

درجه مشاهدهپذیری	خروجی انتخاب شده		
	شتاب جرم غیرمعلق	شتاب جرم معلق	جابه‌جایی تعلیق
μ_1	۴۶/۰۲۶۲	۳/۳۸۰۸	۰/۰۱۲۵
μ_2	۰/۲۸۶۴	۴/۴۸۸۵	۰/۱۰۳۴
$\min(\mu_1, \mu_2)$	۰/۲۸۶۴	۳/۳۸۰۸	۰/۰۱۲۵
$\max(\mu_1, \mu_2)$	۴۶/۰۲۶۲	۴/۴۸۸۵	۰/۱۰۳۴

نتایج آنالیز فوق نشان می‌دهد که چنانچه جابه‌جایی تعلیق به‌عنوان خروجی سیستم انتخاب شود، سیستم نسبت به دو حالت دیگر کمترین فاصله را تا سیستم‌های هم‌مرتب‌ه دارد که در آن زیرسیستم اول یا زیرسیستم دوم مشاهده‌ناپذیر است. بنابراین تاثیر خطای خروجی بر خطای تخمین در این حالت بیشتر از دو حالت دیگر خواهد بود. در این حالت μ_1 کوچک‌تر از μ_2 است، یعنی مشاهدهپذیری زیرسیستم اول ضعیف‌تر از مشاهدهپذیری زیرسیستم دوم است و تاثیر خطای خروجی بر زیرسیستم اول یعنی (Z_1, Z_2) ، بیشتر از زیرسیستم دوم یعنی (Z_3, Z_4) خواهد بود.

چنانچه شتاب جرم معلق به‌عنوان خروجی انتخاب شود، مشاهدهپذیری سیستم نسبت به جابه‌جایی تعلیق به‌صورت کلی افزایش خواهد یافت. بنابراین تاثیر خطای اندازه‌گیری خروجی بر دقت تخمین در این حالت نسبت به قبل افزایش خواهد یافت. در این حالت μ_1 اندکی کوچک‌تر از μ_2 بوده، ولی اختلاف آنها کوچک است. نزدیک بودن مقادیر μ_1 و μ_2 نشان می‌دهد که هر دو زیرسیستم تقریباً به‌اندازه مساوی در تشکیل سیگنال خروجی مشارکت داشته‌اند، لذا تاثیر خطای خروجی بر هر دو زیرسیستم یکسان است.

در نهایت، چنانچه شتاب جرم غیرمعلق به‌عنوان خروجی انتخاب شود، مشاهدهپذیری سیستم نسبت به جابه‌جایی تعلیق به‌صورت کلی افزایش می‌یابد، ولی باید توجه کرد که در این حالت نسبت به شتاب جرم معلق، مشاهدهپذیری زیرسیستم اول، افزایش، ولی مشاهدهپذیری زیرسیستم دوم کاهش یافته است. در این حالت μ_2 خیلی کوچک‌تر از μ_1 است. بنابراین خطای اندازه‌گیری خروجی بیشترین تاثیر خود را در خطای تخمین زیرسیستم دوم (Z_3, Z_4) خواهد گذاشت و تاثیر آن بر زیرسیستم اول کمتر خواهد بود.

ضعیف‌ترین و قوی‌ترین میزان مشاهدهپذیری در سیستم تعلیق به‌ترتیب توسط $\min(\mu_1, \mu_2)$ و $\max(\mu_1, \mu_2)$ تعیین می‌شود که در بخش‌های بعد در مقایسه روش پیشنهادی با معیارهای ارایه شده در پژوهش‌های قبلی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۳-۳- طراحی مشاهدهگر

در این بخش برای مقایسه نتایج حاصل از آنالیز درجه مشاهدهپذیری و دقت تخمین مشاهدهگر، به طراحی مشاهدهگر

می‌توان زیرسیستم‌های آن را شناسایی نمود و درجه مشاهدهپذیری را برای هر زیرسیستم یا ترکیبی از آنها براساس قضیه‌های مطرح شده در بخش دوم تعیین نمود.

در سیستم تعلیق با توجه به محدودیت در تکنولوژی سنسورها فقط سه کمیت جابه‌جایی تعلیق (x_1) ، شتاب جرم معلق (\dot{x}_2) و شتاب جرم غیرمعلق (\dot{x}_4) قابل اندازه‌گیری است و سایر متغیرهای حالت مانند خیز تایلر، سرعت جرم معلق و غیرمعلق قابل اندازه‌گیری مستقیم نیستند و می‌بایست تخمین زده شوند. با انتخاب جابه‌جایی تعلیق (x_1) به‌عنوان خروجی، معادله خروجی سیستم براساس معادله فضای حالت (رابطه ۳۴) از رابطه ۴۱ به دست خواهد آمد:

$$y = (1 \ 0 \ 0 \ 0)x \quad (41)$$

و چنانچه خروجی سیستم شتاب جرم معلق (\dot{x}_2) انتخاب شود، معادله خروجی سیستم، براساس معادله فضای حالت سیستم (رابطه ۳۴) به‌صورت رابطه ۴۲ تعیین خواهد شد:

$$y = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_s} & 0 & \frac{C}{m_s} & \frac{C}{m_s} \end{pmatrix} x \quad (42)$$

و چنانچه خروجی سیستم شتاب جرم غیرمعلق \dot{x}_4 انتخاب شود، معادله خروجی سیستم، براساس معادله فضای حالت سیستم (رابطه ۳۴) به‌صورت رابطه ۴۳ تعیین خواهد شد:

$$y = \left(\frac{k}{m_{us}} \quad \frac{C}{m_{us}} \quad -\frac{k_t}{m_{us}} \quad -\frac{C+C_t}{m_{us}} \right) x + \frac{C_t}{m_{us}} \dot{x}_r \quad (43)$$

در ادامه مقاله به بررسی درجه مشاهدهپذیری به‌ازای هر سنسور و تاثیر آن بر عملکرد مشاهدهگر خواهیم پرداخت.

۳-۲- آنالیز مشاهدهپذیری سیستم تعلیق

با توجه به شکل قطری- بلوکی سیستم تعلیق (رابطه ۳۸) مشخص می‌شود که برای مشاهده‌ناپذیری سیستم، ماتریس خروجی تبدیل یافته سیستم می‌بایست، مطابق یکی از حالت‌های روابط ۴۴ تا ۴۶ باشد. یعنی:

$$CT = (0 \ 0 \ \alpha_3 \ \alpha_4) ; \alpha_3, \alpha_4 \in R \quad (44)$$

$$CT = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ 0 \ 0) ; \alpha_1, \alpha_2 \in R \quad (45)$$

$$CT = (0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (46)$$

رابطه ۴۴ مربوط به حالتی است که متغیرهای حالت زیرسیستم اول یعنی (Z_1, Z_2) در سیگنال خروجی هیچ تاثیری ندارند و این زیرسیستم مشاهده‌ناپذیر است. به همین ترتیب، رابطه ۴۵ نیز مربوط به حالتی بوده که زیرسیستم دوم مشاهده‌ناپذیر است و متغیرهای حالت آن یعنی (Z_3, Z_4) در سیگنال خروجی هیچ تاثیری ندارند. رابطه ۴۶ نیز مربوط به حالتی است که سیستم دارای خروجی نیست و هر دو زیرسیستم مشاهده‌ناپذیر هستند.

با توجه به اینکه مقادیر ویژه سیستم تعلیق مختلط هستند، درجه مشاهدهپذیری سیستم تعلیق براساس قضیه ۲ قابل تعیین است. نتایج تحلیل مشاهدهپذیری برای خروجی‌های مختلف در جدول ۳ خلاصه شده است. در این جدول μ_1 فاصله سیستم از مجموعه سیستم‌های هم‌مرتب‌ه بوده که زیرسیستم اول یا متغیرهای حالت (Z_1, Z_2) مشاهده‌ناپذیر است. μ_2 نیز فاصله سیستم از مجموعه سیستم‌های هم‌مرتب‌ه بوده که زیرسیستم دوم یا متغیرهای حالت (Z_3, Z_4) مشاهده‌ناپذیر است.

کوچک بودن اندازه μ_1 به معنی مشاهدهپذیری ضعیف متغیرهای

درایه‌های بهره مشاهده‌گر دارای بیشترین مقدار هستند. به همین ترتیب ملاحظه می‌شود وقتی شتاب جرم معلق یا جرم غیرمعلق به‌عنوان خروجی انتخاب می‌شود، مقادیر بهره مشاهده‌گر با توجه به افزایش مشاهده‌پذیری نسبت به حالت اول به شدت کاهش می‌یابد.

جدول ۴) بهره مشاهده‌گر به‌ازای انتخاب خروجی‌های مختلف

درایه‌های بهره مشاهده‌گر	خروجی انتخاب‌شده	
	شتاب جرم غیرمعلق	شتاب جرم معلق
l_1	۰/۸۸	۱/۲۷
l_2	۰/۳۸	-۱۱/۴۹
l_3	-۰/۰۱۶	۰/۰۵
l_4	۱/۲۱	۰/۰۵
Norm(L)	۱/۵۵	۱۱/۵۶

با فرض اینکه خطای اندازه‌گیری به‌صورت پله واحد باشد، خطای حالت ماندگار مشاهده‌گر براساس رابطه ۵۰ مطابق رابطه ۵۱ به دست می‌آید.

$$e_{ss} = -(A - LC)^{-1}L \quad (51)$$

با توجه به رابطه ۵۱ مشخص می‌شود که با کاهش مشاهده‌پذیری، چون اندازه بهره مشاهده‌گر افزایش می‌یابد، خطای تخمین در حضور خطای اندازه‌گیری زیاد می‌شود. به عبارت دیگر، حساسیت مشاهده‌گر نسبت به خطای اندازه‌گیری افزایش می‌یابد. جدول ۵ مقادیر خطای ماندگار تخمین متغیرهای حالت تبدیل‌یافته را به‌ازای خطای واحد در اندازه‌گیری خروجی نشان می‌دهد.

جدول ۵) مقادیر خطای حالت ماندگار تخمین به‌ازای خطای واحد در اندازه‌گیری خروجی

خطای تخمین ماندگار	خروجی انتخاب‌شده	
	شتاب جرم غیرمعلق	شتاب جرم معلق
e_{z_1}	۰/۱۳	-۲/۶۱
e_{z_2}	-۰/۱۹	-۷۱۷/۰۵
e_{z_3}	۲/۴۳	-۳/۴۸
e_{z_4}	۰/۹۰	۶/۲۷
Norm(error)	۲/۶۰	۲/۷۶

مقادیر این جدول نشان می‌دهد، چنانچه جابه‌جایی تعلیق به‌عنوان خروجی انتخاب شود، با توجه به اینکه مشاهده‌پذیری بسیار ضعیف بوده و اندازه بهره مشاهده‌گر بالا است، لذا تاثیر خطای اندازه‌گیری بر خطای خروجی بیشتر خواهد بود و خطای تخمین نیز در این حالت نسبت به حالت‌های دیگر بیشتر خواهد بود. در این حالت، خطای تخمین زیرسیستم اول به‌دلیل مشاهده‌پذیری ضعیف‌تر نسبت به زیرسیستم دوم بیشتر است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با انتخاب شتاب جرم معلق یا شتاب جرم غیرمعلق به‌عنوان خروجی، به‌دلیل افزایش مشاهده‌پذیری سیستم، بهره مشاهده‌گر کاهش یافته و تاثیر خطای اندازه‌گیری خروجی بر خطای تخمین نیز کاهش یافته و در نتیجه باعث کاهش شدید خطای تخمین نسبت به حالت اول شده است.

نمودارهای ۱ و ۲، پاسخ فرکانسی دینامیک خطای تخمین متغیرهای حالت تبدیل‌یافته مشاهده‌گر را به‌ازای خروجی‌های مختلف، براساس رابطه ۵۰ نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودار ۱- a ملاحظه می‌شود، وقتی خروجی جابه‌جایی تعلیق انتخاب شود، با توجه به اینکه درجه مشاهده‌پذیری μ_1 خیلی کم است، لذا مشاهده‌پذیری Z_1, Z_2 نسبت به Z_3, Z_4 کم خواهد بود و به همین

لیونبرگر پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه درجه مشاهده‌پذیری سیستم تعلیق براساس سیستم تبدیل‌یافته (رابطه ۳۸) و برای زیرسیستم‌های آن به‌صورت جداگانه محاسبه شد، لذا برای بررسی ارتباط بین درجه مشاهده‌پذیری و دقت تخمین در حضور خطای اندازه‌گیری، مشاهده‌گر لیونبرگر برای تخمین حالت‌های تبدیل‌یافته سیستم تعلیق طراحی خواهد شد. واضح است که تخمین حالت‌های سیستم تعلیق به‌راحتی و با استفاده از ماتریس تبدیل T (رابطه ۳۷) قابل تعیین است.

معادله مشاهده‌گر لیونبرگر، برای تخمین متغیرهای حالت سیستم تبدیل‌یافته (رابطه ۳۸) مطابق رابطه ۴۷ است.

$$\dot{\hat{z}} = A_z \hat{z} + B_z \dot{x}_r + L(y - \hat{y}) \quad (47)$$

$$\hat{y} = C_z \hat{z} + D \dot{x}_r$$

در این رابطه C_z ماتریس خروجی تبدیل یافته است.

$$C_z = CT \quad (48)$$

در رابطه ۴۷، y خروجی اندازه‌گیری شده از سیستم است که مطابق رابطه ۴۹ تعریف می‌شود. در این رابطه v خطای اندازه‌گیری سنسور است که می‌تواند به‌دلیل وجود نویز، عدم کالیبراسیون مناسب سنسور یا خرابی آن ایجاد شود.

$$y = C_z z + D \dot{x}_r + v \quad (49)$$

$L = [l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4]^T$ نیز بهره مشاهده‌گر است و به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که دینامیک خطای تخمین پایدار شود یا به عبارت دیگر، تمامی مقادیر ویژه $A - LC$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند. لازم به ذکر است که درایه λ_m بهره مشاهده‌گر یعنی l_i با استفاده از خطای بین خروجی سیستم و خروجی تخمین زده‌شده برای جبران خطای تخمین متغیر حالت λ_m یعنی \hat{z}_i استفاده می‌شود.

با تعریف خطای تخمین به‌صورت $e_z = z - \hat{z}$ و با استفاده از روابط ۳۸ و ۴۷، دینامیک خطای تخمین به‌صورت رابطه ۵۰ به دست خواهد آمد:

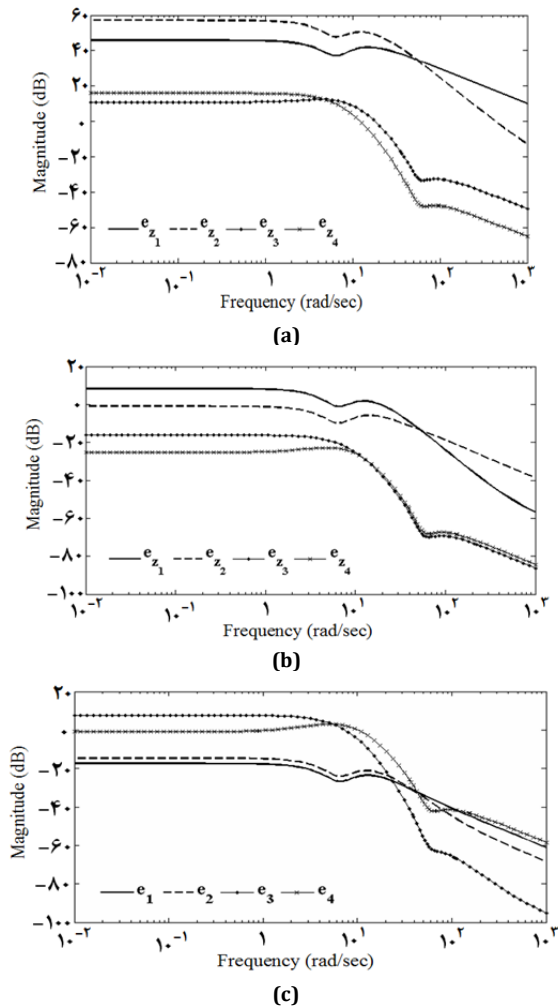
$$\dot{e}_z = (A - LC)e_z + Lv \quad (50)$$

۴- شبیه‌سازی

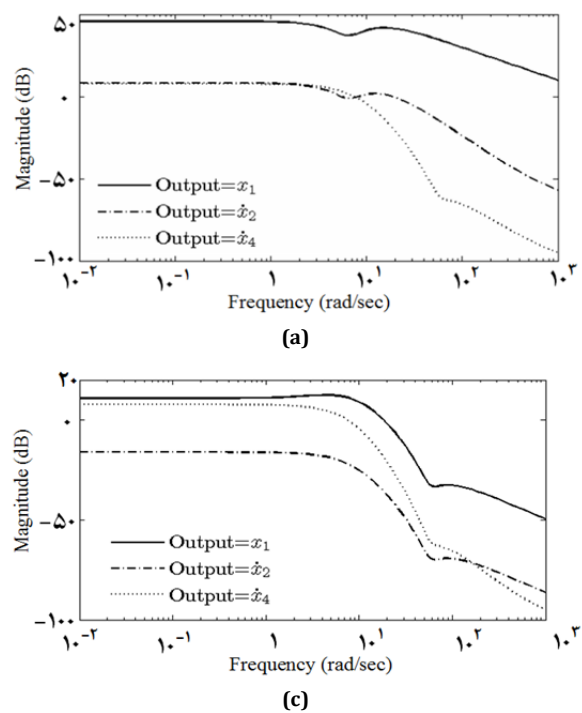
در این بخش برای اینکه امکان مقایسه بین عملکرد مشاهده‌گر به‌ازای سنسورهای مختلف و آنالیز درجه مشاهده‌پذیری فراهم شود، مکان قطب‌های دینامیک خطای مشاهده‌گر به‌ازای تمامی حالت‌های خروجی، ثابت در نظر گرفته می‌شود. در این شرایط، سرعت همگرایی نتایج تخمین به‌ازای تمامی سنسورها و برای تمامی حالت‌ها یکسان خواهد بود. بدین ترتیب می‌توان تاثیر خطای اندازه‌گیری سنسورها بر دقت تخمین و رابطه آن با درجه مشاهده‌پذیری سیستم به‌ازای سنسورهای مختلف را بررسی و مقایسه کرد.

بدین منظور مشاهده‌گر لیونبرگر برای تخمین متغیرهای حالت تبدیل‌یافته سیستم تعلیق (رابطه ۳۸)، به‌ازای هر حالت خروجی (روابط ۴۱ تا ۴۳) به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که قطب‌های مشاهده‌گر در $(-10, -10, -10, -10)$ واقع شود. جدول ۴ مقادیر بهره مشاهده‌گر را به‌ازای خروجی‌های مختلف نشان می‌دهد.

همان‌طور که از مقایسه جدول ۴ با جدول ۳ مشخص می‌شود، وقتی جابه‌جایی تعلیق به‌عنوان خروجی انتخاب می‌شود، با توجه به اینکه مشاهده‌پذیری نسبت دو حالت دیگر ضعیف‌تر است،



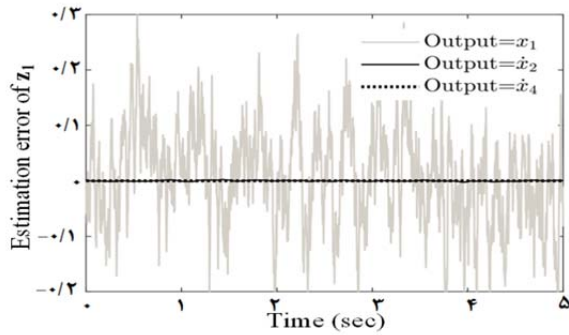
نمودار ۱) پاسخ فرکانسی خطای تخمین متغیرهای حالت: (a) وقتی خروجی جابه جایی تعلیق باشد، (b) خروجی شتاب جرم معلق باشد، (c) خروجی شتاب جرم غیرمعلق باشد.



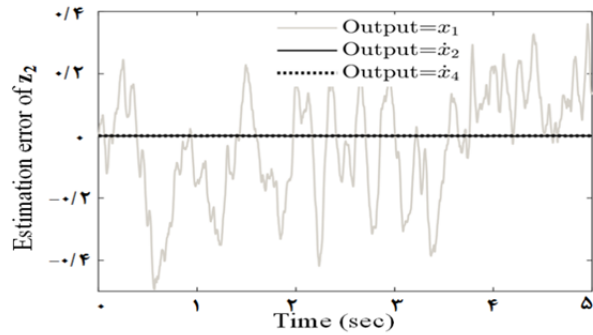
نمودار ۲) پاسخ فرکانسی خطای تخمین متغیرهای حالت: (a) z_1 ، (b) z_2 ، (c) z_3 ، (d) z_4 به ازای انتخاب های مختلف خروجی

دلیل خطای خروجی به شدت موجب تقویت خطای تخمین Z_1, Z_2 خواهد شد. همان طور که از نمودار ۲ نیز بر می آید، در این حالت به دلیل اینکه درجه مشاهده پذیری نسبت به دو حالت دیگر کمتر بوده، خطای اندازه گیری بیشترین تاثیر را بر خطای تخمین داشته است یا به عبارت دیگر، حساسیت مشاهده گر در این حالت نسبت به خطای اندازه گیری، نسبت به دو حالت دیگر بیشتر است. در نمودار ۱- b، وقتی خروجی شتاب جرم معلق انتخاب می شود، با توجه به اینکه مانند حالت قبل، درجه مشاهده پذیری μ_1 کمتر از μ_2 است، رفتاری مشابه حالت قبل خواهیم داشت. ولی به دلیل اینکه اختلاف درجه مشاهده پذیری در این حالت زیاد نیست، میزان اختلاف اندازه خطای تخمین دو زیرسیستم نسبت به هم کمتر از حالت قبل است. این نکته با توجه به نمودار ۲ نیز مشخص است. در ضمن با توجه به افزایش کلی درجه مشاهده پذیری نسبت به حالت قبل و کاهش بهره مشاهده گر، خطای اندازه گیری، تاثیر کمتری بر خطای تخمین داشته است. در نمودار ۱- c، وقتی شتاب جرم غیرمعلق به عنوان خروجی انتخاب می شود، با توجه به اینکه درجه مشاهده پذیری μ_2 کمتر از μ_1 است و مشاهده پذیری زیرسیستم دوم مربوط به Z_3, Z_4 کاهش می یابد، لذا خطای تخمین در Z_3, Z_4 نسبت به Z_1, Z_2 بزرگتر خواهد بود. در این حالت با توجه به اینکه اندازه μ_2 نسبت به حالت دوم بسیار بزرگتر است، لذا به دلیل کاهش بهره مشاهده گر، خطای تخمین Z_1, Z_2 نسبت به حالت دوم کاهش یافته است.

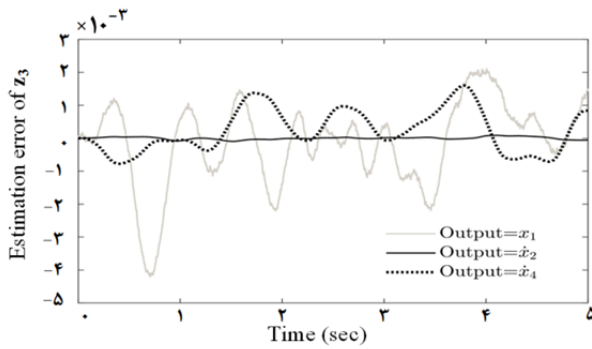
نمودار ۳، نتایج تخمین سیستم تعلیق را به ازای خروجی های مختلف و ورودی جاده تصادفی از کلاس D (مطابق نمودار ۴) نشان می دهد. انتخاب جاده تصادفی از کلاس D به دلیل افزایش دامنه خروجی و متغیرهای حالت و ملموس تر شدن خطای تخمین است. در این حالت برای اینکه خروجی اندازه گیری شده حاوی خطا باشد، سیگنال تصادفی با توزیع نرمال و واریانس معادل ۱۰٪ متوسط سیگنال های خروجی، به خروجی اندازه گیری شده اضافه شده است.



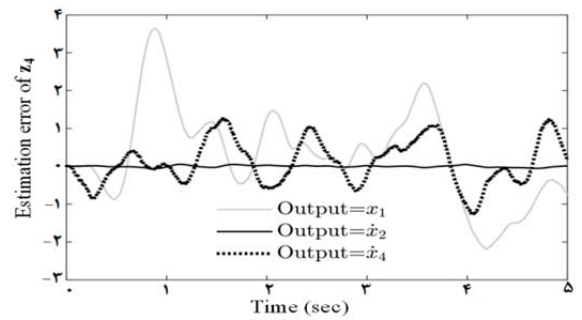
(a)



(b)



(c)



(d)

نمودار (۳) تاثیر نویز اندازه‌گیری بر خطای تخمین متغیرهای حالت تبدیل‌یافته سیستم تعلیق به‌ازای خروجی‌های مختلف: (a) z_1 , (b) z_2 , (c) z_3 , (d) z_4

جدول (۶) تاثیر نویز اندازه‌گیری بر جذر میانگین مربعات خطای تخمین

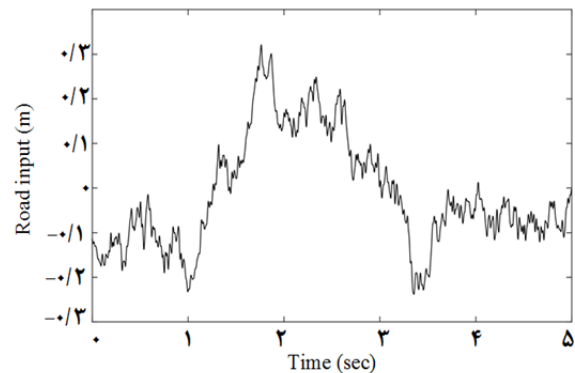
خروجی انتخاب شده			مقدار RMS خطای تخمین
جابه‌جایی	شتاب جرم	شتاب جرم غیرمعلق	
تعلیق	معلق	غیرمعلق	e_{z_1}
۰/۱۰۰۶	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۰۵	e_{z_2}
۰/۲۴۶۶	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۰۷	e_{z_3}
۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۷۷	e_{z_4}
۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۶۰	

در ادامه، معیارهای متداولی که برای تعریف و تعیین درجه مشاهده‌پذیری از گرامیان مشاهده‌پذیری استفاده کرده‌اند، برای مقایسه با روش پیشنهادی معرفی شده‌اند. گرامیان مشاهده‌پذیری برای سیستم‌های پایدار با معادله فضای حالت، مطابق رابطه ۱ به‌صورت رابطه ۵۲ تعریف می‌شود:

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (52)$$

معیارهای درجه مشاهده‌پذیری که براساس گرامیان مشاهده‌پذیری تعریف می‌شوند عبارت از موارد زیر هستند:

- ۱- کمترین مقدار ویژه گرامیان مشاهده‌پذیری $\lambda_{\min}(W_o)$
 - ۲- بیشترین مقدار ویژه گرامیان مشاهده‌پذیری $\lambda_{\max}(W_o)$
 - ۳- دترمینان گرامیان مشاهده‌پذیری $\det(W_o)$
 - ۴- عدد حالت گرامیان مشاهده‌پذیری $CN(W_o)$
- در معیارهای فوق با توجه به اینکه صفرشدن $\lambda_{\min}(W_o)$ و $\det(W_o)$ به‌معنی نقص مرتبه گرامیان مشاهده‌پذیری و مشاهده‌ناپذیری است. چنانچه $\lambda_{\min}(W_o)$ و $\det(W_o)$ اعداد کوچک و نزدیک به صفر باشند، نشان‌دهنده این بوده که مشاهده‌پذیری یک یا چند مود از سیستم ضعیف است و نزدیک مرزهای مشاهده‌ناپذیری قرار دارد. ولی در مورد اینکه کدام مود ضعیف است، هیچ اطلاعاتی در اختیار ما قرار نمی‌دهد. از این رو این دو معیار، تنها ضعیف‌ترین مود از لحاظ مشاهده‌پذیری را



نمودار (۴) ورودی جاده تصادفی در کلاس D

همان‌طور که از نمودار ۳ می‌توان فهمید، وقتی جابه‌جایی تعلیق یا شتاب جرم معلق به‌عنوان خروجی انتخاب می‌شود، با توجه به اینکه درجه مشاهده‌پذیری زیرسیستم اول خیلی کوچک‌تر از زیرسیستم دوم است، عملکرد تخمین‌گر روی زیرسیستم اول ضعیف‌تر است و خطای تخمین نسبت به زیرسیستم دوم بزرگ‌تر است. با توجه به اینکه با انتخاب شتاب جرم معلق به‌عنوان خروجی درجه مشاهده‌پذیری نسبت به حالتی که جابه‌جایی تعلیق به‌عنوان خروجی انتخاب شده است، برای هر دو زیرسیستم افزایش می‌یابد، لذا عملکرد تخمین‌گر در این حالت بهتر و خطای تخمین کوچک‌تر است. وقتی شتاب جرم غیرمعلق به‌عنوان خروجی انتخاب می‌شود، درجه مشاهده‌پذیری زیرسیستم اول بیشتر است. به همین دلیل، عملکرد تخمین‌گر در زیرسیستم اول بهتر است و خطای تخمین z_1, z_2 کوچک‌تر است. جدول ۶ مقادیر جذر میانگین مربعات (RMS) خطای تخمین را نشان می‌دهد. مقایسه جدول ۶ با جدول ۲ نشان می‌دهد که تطبیق کاملی بین عملکرد مشاهده‌گر و نتایج آنالیز درجه مشاهده‌پذیری وجود دارد.

روش بر مبنای فاصله سیستم از مجموعه سیستم‌های هم‌مرتب و مشاهده‌ناپذیر است. کوچک بودن این فاصله به معنی مشاهده‌پذیری ضعیف سیستم است و چنانچه فاصله صفر شود، سیستم مشاهده‌ناپذیر خواهد بود. در ضمن با افزایش فاصله، مشاهده‌پذیری سیستم نیز افزایش می‌یابد. در این روش، فاصله سیستم از حالت‌های مختلف که در آن مودهای مختلف سیستم مشاهده‌ناپذیر است، به صورت جداگانه تعیین می‌شود. بنابراین برخلاف سایر روش‌های قبلی که فقط جنبه خاصی از مشاهده‌پذیری پرداخته می‌شود، روش پیشنهادی، جامع‌تر است و امکان بررسی همه‌جانبه مشاهده‌پذیری و تاثیر انتخاب خروجی بر عملکرد مشاهدهگر را فراهم می‌کند. روش پیشنهادی این قابلیت را دارا است که میزان تاثیر سنسورها در عملکرد کنترل‌کننده و مشاهدهگر را قبل از طراحی و پیاده‌سازی نشان دهد و در انتخاب ترکیب مناسبی از خروجی‌ها یا سنسورها در سیستم مورد استفاده قرار گیرد.

در ادامه، تحلیل مشاهده‌پذیری سیستم تعلیق براساس روش پیشنهادی برای بررسی تاثیر خروجی‌های مختلف بر مشاهده‌پذیری سیستم مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بررسی درجه مشاهده‌پذیری نشان داد که در سیستم تعلیق خودرو، جابه‌جایی تعلیق ضعیف‌ترین میزان مشاهده‌پذیری را در سیستم ایجاد خواهد کرد. همچنین برای ارزیابی نتایج به‌دست‌آمده از درجه مشاهده‌پذیری، مشاهدهگر لیونبرگر برای هر حالت از خروجی طراحی و پیاده‌سازی شد. نتایج این بخش نشان می‌دهد که برخلاف روش‌های قبلی، مطابقت خوبی بین درجه مشاهده‌پذیری و عملکرد مشاهدهگر وجود دارد. در این قسمت نشان داده شد که کاهش درجه مشاهده‌پذیری با افزایش اندازه بهره در مشاهدهگر جبران می‌شود، اما افزایش بهره حساسیت مشاهدهگر در برابر خطای اندازه‌گیری را به شدت افزایش می‌دهد و باعث افزایش تاثیر خطای اندازه‌گیری بر خطای تخمین می‌شود. همچنین نشان داده شد که نتایج به‌دست‌آمده از معیارهای ارایه‌شده در پژوهش‌های قبلی به راحتی از روش پیشنهادی قابل دستیابی است.

تشکر و قدردانی: از دانشگاه صنعتی سهند به خاطر حمایت‌های انجام‌گرفته تشکر و قدردانی می‌گردد.

تاییدیه اخلاقی: نویسندگان مقاله تعهد می‌نمایند که محتوای مقاله مربوط به تحقیقات آنها می‌باشد و به کارهای دیگران در محل مناسب ارجاع داده شده است. ضمن اینکه حق چاپ مطالب برای نشریه مکانیک مدرس محفوظ است و در کارهای آتی به این مقاله ارجاع داده خواهد شد.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

سهم نویسندگان: طه فلاحی‌نوده (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۳۵٪)؛ مهدی میرزایی (نویسنده دوم)، روش‌شناس (۲۵٪)؛

ابراهیم بابازاده‌مهربانی (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی (۲۵٪)؛

محمدجواد خسروجردی (نویسنده چهارم)، تحلیلگر آماری (۱۵٪)

منابع مالی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

منابع

- 1- Ge Q, Ma J, Chen Sh, Wang Y, Bai L. Observable degree analysis to match estimation performance for wireless tracking networks. Asian Journal of Control. 2017;19(4):1259-1270.
- 2- Dhingra NK, Jovanović MR, Luo ZQ. An ADMM algorithm for optimal sensor and actuator selection. 53rd

به‌عنوان معیاری برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری در نظر می‌گیرد و مودهای سیستم با مشاهده‌پذیری قوی را لحاظ نمی‌کند. بنابراین تاثیر سنسور انتخاب‌شده بر تک‌تک مودها نشان داده نمی‌شود. برعکس در $\lambda_{MAX}(W_o)$ ، قوی‌ترین مود از لحاظ مشاهده‌پذیری به‌عنوان معیاری برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری قرار می‌گیرد. در این حالت نیز در مورد اینکه کدام مود دارای بیشترین مشاهده‌پذیری بوده، هیچ اطلاعاتی وجود ندارد. همچنین ممکن است سیستم دارای مودهای مشاهده‌ناپذیر یا مودهایی با مشاهده‌پذیری ضعیف باشد، در حالی که این معیار قوی بودن مشاهده‌پذیری سیستم را نشان دهد. عدد حالت گرامیان مشاهده‌پذیری نیز که به صورت $CN(W_o) = \lambda_{max}(W_o) / \lambda_{min}(W_o)$ تعریف می‌شود، در واقع فاصله بین قوی‌ترین مود و ضعیف‌ترین مود از لحاظ مشاهده‌پذیری را نشان می‌دهد. چنانچه مقدار این معیار نزدیک یک باشد، بدین معنی است که تمامی مودها دارای مشاهده‌پذیری یکسانی هستند و هر چه این معیار بزرگ‌تر باشد، بدین معنی است که سیستم دارای مودهایی با مشاهده‌پذیری قوی و مودهای با مشاهده‌پذیری ضعیف است. به دلیل اینکه درجه مشاهده‌پذیری در این معیار به صورت نسبی تعریف می‌شود، در مورد وضعیت کلی سیستم از لحاظ مشاهده‌پذیری هیچ اطلاعاتی را نمی‌دهد. با توجه به اینکه معیارهای فوق به جنبه‌های خاصی از مشاهده‌پذیری سیستم مربوط می‌شوند، هر معیار جواب‌های متفاوتی به درجه مشاهده‌پذیری سیستم ارایه می‌کند که در اغلب موارد با عملکرد مشاهدهگر همخوانی ندارد. در یک پژوهش [16] به عدم تطابق نتایج حاصل از آنالیز درجه مشاهده‌پذیری و عملکرد مشاهدهگر اشاره شده است.

در روش پیشنهادی، به دلیل اینکه درجه مشاهده‌پذیری برای هر مود سیستم به صورت جداگانه تعریف می‌شود، به راحتی می‌توان ضعیف‌ترین مود و قوی‌ترین مود از لحاظ مشاهده‌پذیری را شناسایی و شدت و ضعف آنها را تعیین و در مورد تاثیر سنسورهای انتخاب‌شده بر مشاهده‌پذیری مودهای مختلف قضاوت نمود. به همین دلیل روش پیشنهادی در آنالیز مشاهده‌پذیری از جامعیت بیشتری نسبت به معیارهای مذکور برخوردار است. نتایج تحلیل مشاهده‌پذیری با معیارهای ارایه‌شده در تحقیقات قبلی در جدول ۷ خلاصه شده است. از مقایسه جدول ۷ و جدول ۳ می‌توان دریافت که درجه مشاهده‌پذیری براساس کمترین مقدار ویژه و دترمینان ماتریس گرامیان مشاهده‌پذیری نتایج مشابه $min(\mu_1, \mu_2)$ به دست می‌دهد و درجه مشاهده‌پذیری براساس بیشترین مقدار ویژه با $max(\mu_1, \mu_2)$ مطابقت دارد. بنابراین نتایج به‌دست‌آمده از روش ارایه‌شده در پژوهش‌های قبلی به راحتی با روش ارایه‌شده در مقاله قابل دستیابی است.

جدول ۷) تحلیل مشاهده‌پذیری براساس معیارهای ارایه‌شده در تحقیقات قبلی

معیار درجه مشاهده‌پذیری	معیار درجه مشاهده‌پذیری	خروجی انتخاب‌شده	معیار درجه مشاهده‌پذیری
$\lambda_{min}(W_o)$	۰/۰۱۱۸	شتاب جرم غیرمعلق	۰/۳۷۸۵
$\lambda_{MAX}(W_o)$	۸۰/۴۱	شتاب جرم معلق	۱۲/۰۸
$det(W_o)$	۱/۱۴۸۷	جابه‌جایی تعلیق	۲/۰۷×۱۰ ^{-۱۵}
$CN(W_o)$	۶۸۳۰		۱۶۴/۶۴

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش جدیدی برای تعیین درجه مشاهده‌پذیری سیستم‌های LTI که دارای مقادیر ویژه مجزا هستند، ارایه شد. این

- method and its application in transfer alignment. *Journal of Chinese Inertial Technology*. 2013;(4):467-471.
- 15- Zhuo P, Ge Q, Shao T, Wang Y, Bai L. Observable degree analysis using unscented information filter for nonlinear estimation systems. 10th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICSP), 2-4 Dec 2015, Singapore, Singapore. Piscataway: IEEE; 2015.
- 16- Lystianingrum V, Hredzak B, Agelidis VG, Djanali VS. Observability degree criteria evaluation for temperature observability in a battery string towards optimal thermal sensors placement. *IEEE Ninth International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing (ISSNIP)*, 21-24 April 2014, Singapore, Singapore. Piscataway: IEEE; 2014.
- 17- Ma J, Ge Q, Wang Y, Bai L. Comparison on system observable degree analysis methods for target tracking. *IEEE International Conference on Information and Automation*, 8-10 Aug 2015, Lijiang, China. Piscataway: IEEE; 2015.
- 18- Eising R. The distance between a system and the set of uncontrollable systems. In: Fuhrmann PA, editor. *Mathematical theory of networks and systems, lecture notes in control and information sciences*. 58th Volume. Berlin/Heidelberg: Springer; 1984. pp. 303-314.
- 19- Van De Wal M, De Jager B. Selection of sensors and actuators for an active suspension control problem. *Proceeding of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications IEEE International Conference on Control Applications held together with IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 15 Sept-18 Nov 1996, Dearborn, MI, USA. Piscataway: IEEE; 1996.
- 20- Sarshari E, Khaki Sedigh A. Selection of sensors for hydro-active suspension system of passenger car with input-output pairing considerations. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*. 2013;135(1):011004.
- 21- Malekshahi A, Mirzaei M, Aghasizade S. Non-linear predictive control of multi-input multi-output vehicle suspension system. *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*. 2015;34(1):87-105.
- 22- Malekshahi A, Mirzaei M. Designing a non-linear tracking controller for vehicle active suspension systems using an optimization process. *International Journal of Automotive Technology*. 2012;13(2):263-271.
- IEEE Conference on Decision and Control*, 15-17 Dec 2014, Los Angeles CA, USA. Piscataway: IEEE; 2014.
- 3- Argha AR, Su SW, Savkin A, Celler B. A framework for optimal actuator/sensor selection in a control system. *International Journal of Control*. 2019;92(2):242-260.
- 4- Healey M, Mackinnon DJ. A quantitative measure of observability for a linear system. *International Journal of Control*. 1975;22(3):421-426.
- 5- Hamdan AMA, Nayfeh AH. Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 1989;12(3):421-428.
- 6- Müller PC, Weber HI. Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems. *Automatica*. 1972;8(3):237-246.
- 7- Damak T, Babary JP, Nihtilä MT. Observer design and sensor location in distributed parameter bioreactors. *Dynamics and Control of Chemical Reactors Distillation Columns and Batch Processes*. 1993;87-92.
- 8- Dochain D, Tali-Maamar N, Babary JP. On modelling, monitoring and control of fixed bed bioreactors. *Computers & Chemical Engineering*. 1997;21(11):1255-1266.
- 9- Waldruff W, Dochain D, Bourrel S, Magnus A. On the use of observability measures for sensor location in tubular reactor. *Journal of Process Control*. 1998;8(5-6):497-505.
- 10- Van Den Berg FWJ, Hoefsloot HCJ, Boelens HFM, Smilde AK. Selection of optimal sensor position in a tubular reactor using robust degree of observability criteria. *Chemical Engineering Science*. 2000;55(4):827-837.
- 11- Ham FM, Grover Brown R. Observability, eigenvalues, and Kalman filtering. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1983;AES-19(2):269-273.
- 12- Cheng XH, Wan DJ, Zhong X. Study on observability and its degree of strapdown inertial navigation system. *Journal of Southeast University*. 1997;(6):6-11.
- 13- Dong JL, Mo B. The method of system observability analysis using pseudo-inverse of system observability matrix. *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*, 26-28 July 2013, Xi'an, China. Piscataway: IEEE; 2013.
- 14- Chen Y, Zhao Y, Li QS. Observable degree analysis