



## Evaluation of Rarefied Shear Flow in Micro/Nano Geometries Using Fokker-Planck Technique

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Rezapour Jaghargh V.<sup>1</sup> MSc,  
Mahdavi A.M.<sup>1</sup> MSc,  
Roohi E.\*<sup>1</sup> PhD

#### How to cite this article

Rezapour Jaghargh V, Mahdavi A.M, Roohi E . Evaluation of Rarefied Shear Flow in Micro/Nano Geometries Using Fokker-Planck Technique. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(7):1721-1732.

### ABSTRACT

In this article, rarefied gas flow was investigated and analyzed by the Fokker-Planck approach in different Knudsen numbers and Mach numbers at subsonic and supersonic regimes. The presented Fokker-Planck approach is used to solve the rarefied gas flows in different shear-driven micro/nano geometries like one-dimensional Couette flow and the two-dimensional cavity problem. Boltzmann's equation, and especially statistical technique of the Direct Simulation Monte Carlo (DSMC), are precise tools for simulating non-equilibrium flows. However, as the Knudsen number becomes small, the computational costs of the DSMC are greatly increased. In order to cope with this challenge, the Fokker-Planck approximation of the Boltzmann equation is considered in this article. The developed code replaces the molecular collisions in DSMC with a set of continuous stochastic differential equations. In this study, the Fokker-Planck method was evaluated in the Couette flow in the subsonic Mach number of 0.16 (wall velocity was 50 m/s) and in the supersonic Mach number of 3.1 (wall velocity was 1000 m/s), where Knudsen numbers range from 0.005-0.3. Also, the cavity flow with a wall Mach number of 0.93 (wall velocity was 300 m/s) in Knudsen numbers ranging from 0.05-20 was investigated. The results show that by increasing speed and Knudsen numbers, the accuracy of Fokker-Planck increases. In addition, despite using larger number of simulator particles, the rapid convergence and lower computational costs relative to other methods are the features of this method.

**Keywords** Knudsen Number; Shear-driven flow; Micro/Nano Flow; Fokker Planck Approach

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

#### \*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran  
Phone: +98 (51) 38806055  
Fax: +98 (51) 38807185  
e.roohi@um.ac.ir

#### Article History

Received: March 31, 2018  
Accepted: January 8, 2019  
ePublished: July 01, 2019

### CITATION LINKS

[1] Flow of rarefied gases [2] Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas [3] The statistical mechanical theory of transport processes I [4] The Boltzmann equation [5] A solution algorithm for the fluid dynamic equations based on a stochastic model for molecular motion [6] Fokker-Planck model for computational studies of monatomic rarefied gas flows [7] Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation [8] On Fokker-Planck model for the Boltzmann collision integral at the moderate Knudsen numbers [9] The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications [10] A Fokker-Planck based kinetic model for diatomic rarefied gas flows [11] Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas [12] A thorough evaluation of the Fokker-Planck kinetic model in the couette flow [13] Investigation of rarefied gas flow in micro/nano cavity by Fokker Planck approach [14] Thermal and second-law analysis of a micro- or nanocavity using direct-simulation Monte Carlo

## تحلیل جریان رقیق‌شده برشی در هندسه‌های میکرو/نانو با روش فوکریلانک

وحید رضاپور جاغرق MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

امیرمهران مهدوی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

احسان روحی\* PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### چکیده

در مقاله حاضر به بررسی و تحلیل جریان رقیق‌شده با روش فوکریلانک در محدوده‌های مختلف عدد نودسن و بازه‌های مختلف اعداد ماخ در رژیم‌های مادون‌صوت و مافوق‌صوت پرداخته شد. از روش فوکریلانک برای حل جریان رقیق‌شده در هندسه‌های مختلف میکرو/نانو یک‌بعدی کوئت و مساله دوبعدی کاویتی که جریان‌های برشی هستند، استفاده شده است. معادله بولتزمن و به‌ویژه حل آماری شبیه‌سازی مستقیم مونت کارلو (DSMC) ابزاری دقیق برای شبیه‌سازی جریان‌های غیرتعادلی هستند. با این حال با کاهش عدد نودسن، هزینه‌های محاسباتی روش DSMC به شدت افزایش می‌یابد. به‌منظور مقابله با این چالش، تقریب فوکریلانک از معادله بولتزمن در این مقاله در نظر گرفته شد. در کدی که برای شبیه‌سازی روش فوکریلانک تدوین شده است این روش با استفاده از مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل تصادفی، جایگزین جملات برخورد بین-مولکولی در DSMC می‌شود. در این تحقیق، روش فوکریلانک در جریان کوئت در رژیم مادون‌صوت در اعداد ماخ ۰/۱۶ (سرعت دیواره ۵۰ متر بر ثانیه) و در رژیم مافوق‌صوت برای عدد ماخ ۳/۱ (سرعت دیواره ۱۰۰۰ متر بر ثانیه) در بازه اعداد نودسن از ۰/۰۵ تا ۰/۳ ارزیابی شده است. همچنین جریان کاویتی در عدد ماخ ۰/۹۳ (سرعت دیواره ۳۰۰ متر بر ثانیه) و در بازه اعداد نودسن ۰/۰۵ تا ۲۰ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش همزمان سرعت و عدد نودسن، دقت روش فوکریلانک افزایش می‌یابد. علاوه بر این با وجود استفاده از ذرات بیشتر، همگرایی سریع و هزینه محاسباتی کمتر این روش نسبت به روش DSMC از ویژگی‌های قابل توجه این روش است.

**کلیدواژه‌ها:** عدد نودسن، جریان برشی، جریان میکرو/نانو، روش فوکریلانک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۸

\* نویسنده مسئول: e.rooahi@um.ac.ir

روش تعدادی مولکول شبیه‌سازی شده (ذره) به نمایندگی از کلیه مولکول‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این روش هرچند در اعداد نودسن بالا راندمان مناسبی دارد، با این حال در اعداد نودسن پایین از نظر زمانی بسیار هزینه‌بر است.

روش فوکریلانک برای اولین بار توسط کرکود برای مایعات بررسی شد [3]. کاربرد این روش برای جریان‌های با غلظت بالا است. این روش بعدها توسط سرسیگناتی برای گازهای غلیظ نیز گسترش یافت [4]. جنی و همکاران [5] در سال ۲۰۱۰ این روش را برای گازهای رقیق توسعه دادند و یک الگوریتم آماری بر مبنای تقریب فوکریلانک برای مدل‌سازی گازهای رقیق ارائه کردند. تنش‌های مولکولی و سرعت متوسط در نتایج به‌دست‌آمده تطابق بسیار مناسبی با نتایج DSMC، معادله بولتزمن خطی شده و داده‌های آزمایشگاهی داشت. با این وجود، مقدار انتقال حرارت و دما توسط تقریب آنها اشتباه محاسبه می‌شد؛ چون عدد پراتل این روش اشتباه محاسبه شده بود. گرجی و همکاران [6] الگوریتم مذکور را توسعه دادند تا مشکل مربوط به عدد پراتل نادرست را برطرف نمایند. آنها این کار را با معرفی یک جمله راندگی غیرخطی مرتبه چهار بر مبنای سرعت‌ها انجام دادند. علاوه بر آن، نتایج آنها به لزجت و انتقال حرارت صحیح منجر شد.

در این تحقیق، یک کد عددی مبتنی بر روش فوکریلانک تدوین شده و صحت‌سنجی شده است. در مقایسه با مراجع دیگری که استفاده از روش فوکریلانک در تحلیل جریان‌های رقیق‌شده را گزارش کرده‌اند، در کار حاضر، برای اولین بار عملکرد روش فوکریلانک در تحلیل جریان‌های برشی یک‌بعدی کوئت و دوبعدی کاویتی در بازه گسترده‌ای از سرعت و عدد نودسن مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و برای اولین بار محدوده صحت این الگوریتم در حل جریان‌های برشی با دقت و ضریب اطمینان بالاتری گزارش شده است.

### ۲- تقریب فوکریلانک از معادله بولتزمن

معادله بولتزمن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

(۲)

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_{\text{coll}} = \frac{1}{m} \int \int_{R^3} (F(V^*)F(V_1^*) - F(V)F(V_1)) g \sigma(\Omega, g) d\Omega d^3V_1$$

که در آن  $F$  تابع توزیع جرمی سرعت ذرات، سرعت‌های  $(V^*, V_1^*)$  سرعت‌های جفت ذرات بعد برخورد، سرعت‌های  $(V, V_1)$  سرعت‌های جفت ذرات قبل برخورد،  $\sigma$  سطح مقطع برخورد،  $\Omega$  زاویه بین سرعت‌های قبل و بعد برخورد و  $g = V - V_1$  سرعت نسبی است. اگر عدد نودسن بیش از حد بزرگ نباشد، مشتق زمانی  $F$  با معادله فوکریلانک تقریب زده می‌شود [5, 7, 8]:

(۳)

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_{\text{coll}} \approx -\frac{\delta}{\delta V_i} (A_i F) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta V_i \delta V_j} (D^2 F) = S^{FP}$$

در اینجا  $A$  و  $D$  نشان‌دهنده ضریب راندگی و پخش هستند. با فرض مدل مولکولی ماکسول، گشتاورهای مرتبه‌های دو و سه که مربوط به تانسور تنش و بردار شار حرارتی است از معادله بولتزمن به دست می‌آیند:

(۴)

$$P_{ij} = \int_{R^3} v_i' v_j' S^{\text{Boltz}} d^3V$$

### ۱- مقدمه

میزان رقیق‌بودن جریان برحسب عدد نودسن بیان می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (1)$$

که در آن  $\lambda$  و  $L$  به‌ترتیب متوسط فاصله آزاد مولکولی و طول مشخصه جریان هستند.

براساس میزان درجه رقیق‌شدگی جریان، دسته‌بندی‌هایی برای جریان رقیق‌شده انجام شده است. برای مشخص کردن مرز این رژیم‌ها، اسکاف و چیمبر [1] عدد نودسن را در یک دسته‌بندی خاص، به‌عنوان معیار درجه رقیق‌شدگی جریان پیشنهاد دادند. در این دسته‌بندی رژیم پیوسته (عدم لغزش) در محدوده عدد نودسن  $0.01 < kn < 0.1$ ، رژیم لغزشی در محدوده عدد نودسن  $0.1 < kn < 10$  و رژیم آزاد مولکولی در محدوده عدد نودسن  $kn > 10$  قرار دارند.

روش شبیه‌سازی مستقیم مونت کارلو (DSMC) در اوایل دهه ۶۰ میلادی توسط برد [2] به‌منظور شبیه‌سازی جریان‌های گازی رقیق‌شده ارائه شد. در این روش، تحلیل جریان از طریق شبیه‌سازی حرکت مولکول‌های گاز ممکن می‌شود؛ اما از آنجایی که بررسی حرکت تک‌تک مولکول‌ها بسیار وقت‌گیر و پرهزینه است، در این

برای بستن دستگاه معادلات، باید یک ضریب پخش انتخاب شود. در اینجا مطابق معادله ساده لانگوین، ضریب پخش به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D = \sqrt{\frac{4e_s}{3\tau}} \quad (۱۲)$$

که در آن  $e_s$  انرژی درونی ذرات است. در نتیجه معادله تقریبی فوکریلانک براساس معادله بولتزمن برای گاز تک‌اتمی مطابق زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\delta F}{\delta t} + V_i \frac{\delta F}{\delta x_i} + G_i \frac{\delta F}{\delta V_i} + \frac{\delta}{\delta x_i} \left( \tilde{c}_{ij} v_j' + Y_i \left( v_j' v_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left( v_i' v_k' v_k' - \frac{2q_i}{\rho} \right) \right) F = \frac{\delta^2}{\delta V_i \delta V_j} \left( \frac{kT}{m\tau} F \right) \quad (۱۳)$$

در حالی که ضرایب  $C_{ij}$  و  $\gamma_i$  باید با حل سیستم معادلات خطی به دست آیند که با مقایسه معادله (۶) با معادله (۸) برای تنش مولکولی و معادله (۷) با معادله (۹) برای شار حرارتی دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$c_{ij} p_{jl} + c_{ji} p_{il} + 2Y_i q_j + 2Y_j q_i + 2\rho \Lambda \langle M_i' M_j' M_k' M_k' \rangle = 0 \quad (۱۴)$$

$$4\Lambda \left[ \langle M_i' M_j' M_j' M_i' \rangle - \frac{q_i p_{il}}{\rho^2} - \frac{3kT q_i}{m\rho} \right] + 2C_{jl} \langle M_i' M_j' M_i' \rangle + 2C_{il} \frac{q_i}{\rho} + 2Y_i \left[ \langle M_i' M_i' M_i' M_j' \rangle - \frac{3kT p_{ij}}{m\rho} \right] + Y_i \left[ \langle M_i' M_i' M_j' M_j' \rangle - 9 \left( \frac{kT}{m} \right)^2 \right] = -\frac{10q_i}{3\rho\tau} \quad (۱۵)$$

که در آن  $M' = M - U$  و  $M$  سرعت ذره است. هرچند برای استخراج معادلات فوکریلانک ساده‌سازی‌هایی انجام شده، هنوز چندبعدی بودن محدود حل موجب شده که حل مستقیم معادلات (۱۴) و (۱۵) پرهزینه باشد. به منظور حل مشکل، این معادلات به معادل فرآیند Ito تبدیل شده‌اند<sup>[4]</sup>:

$$dM_i = A_i dt + G_i dt + D dW_i \quad (۱۶)$$

$$dX_i = M_i dt \quad (۱۷)$$

که در آن  $dW_i$  تغییرات فرآیند وینر با امید ریاضی صفر و وردایی  $dt$  است. معادلات (۱۶) و (۱۷) دارای مزایای عددی زیادی در اعداد نودسن کوچک و متوسط هستند. از آنجایی که روند محاسبات مستمر است، تقسیم‌بندی‌های زمانی و مکانی می‌تواند مستقل از برخوردها باشد. همچنین در مقایسه با DSMC، در اینجا برخورد بین ذرات محاسبه نمی‌شود، فرآیندی که با هزینه محاسباتی بالا در اعداد نودسن کوچک همراه است.

از آنجایی که معادلات (۱۶) و (۱۷) یک دستگاه تصادفی غیرخطی را تشکیل می‌دهند، نمی‌توان یک راه حل تحلیلی مانند مدل خطی لانگوین پیدا کرد. برای سادگی، فرض می‌شود که نیروی خارجی وجود ندارد ( $G_i=0$ ). استراتژی حل این است که معادله غیرخطی

(۵)

$$P_i = \frac{1}{2} \int_{R^3} v_i' v_j' v_j' S^{\text{Boltz}} d^3V$$

که در آن  $v' = V - U$  سمت چپ معادله بولتزمن و  $S^{\text{Boltz}}$  سرعت میانگین سلولی است. با فرض مدل مولکولی ماکسول می‌توان نوشت<sup>[5,7,8]</sup>:

$$P_{ij} = \frac{\delta \pi_{ij}}{\delta t} = -\frac{P}{\mu} \pi_{ij} \quad (۶)$$

$$P_i = \frac{\delta q_i}{\delta t} = -\frac{2P}{3\mu} q_i \quad (۷)$$

در اینجا  $\mu$  ضریب لزجت دینامیکی،  $P$  فشار گاز،  $\pi_{ij}$  تانسور تنش و  $q_i$  شار حرارتی است. در نتیجه نسبت بین تنش و شار حرارتی که

بیانگر عدد پرانتل است به  $\frac{2}{3}$  می‌رسد، که مقدار صحیح عدد پرانتل برای گازهای تک‌اتمی است. با به‌کارگیری همین روش برای عملگر

$$S^{\text{FP}} \text{ و فرض ضریب نفوذ اسکالر و اینکه } \int_{R^3} (A_i v_j' + A_j v_i' + D^2 \delta_{ij}) F d^3V \text{ به صورت بدون رد است، می‌توان نوشت:} \quad (۸)$$

$$P_{ij} = \int_{R^3} (A_i v_j' + A_j v_i' + D^2 \delta_{ij}) F d^3V \quad (۹)$$

$$P_i = \int_{R^3} (A_i v_j' v_j' + 2A_j v_j' v_i') F d^3V$$

که در آن  $\delta_{ij}$  دلتای دیراک است.

## ۱-۲- ضرایب تقریب فوکریلانک

مساله مهم پیدا کردن یک فرمول مناسب برای ضرایب  $A$  و  $D$  است. برای ضریب پخش، یک تابع چندجمله‌ای از سرعت حرارتی مولکول‌ها ارایه شده است، که درجه آزادی کافی را برای مطابقت با لزجت و عدد پرانتل ارایه می‌دهد. ساده‌ترین شکل معادله یک معادله درجه دوم است، اما می‌تواند راه حل را واگرا کند<sup>[9]</sup>. بنابراین در این کار مدل درجه چهار که توسط گرجی و همکاران معرفی شده به کار گرفته می‌شود<sup>[10]</sup>:

$$A_i = \tilde{C}_{ij} v_j' + Y_i \left( v_j' v_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left( v_i' v_k' v_k' - \frac{2q_i}{\rho} \right) \quad (۱۰)$$

در اینجا تانسور متقارن  $\tilde{C}_{ij}$ ، بردار  $\gamma_i$  و مقدار عددی  $\Lambda$  بعداً مشخص خواهند شد. با فرض  $\Lambda=0$ ،  $\gamma_i=0$ ،  $\tilde{C}_{ij} = -\delta_{ij}/\tau$  یک معادله ساده خطی لانگوین به دست می‌آید که منجر به عدد پرانتل اشتباه  $Pr = \frac{3}{2}$  می‌شود. ابتدا مقدار عددی  $\Lambda$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Lambda = -\frac{1}{\alpha\rho^3} |\det(\pi_{ij})| \quad (۱۱)$$

که در آن  $\det(\pi_{ij})$  تعیین‌کننده تانسور تنش  $\pi_{ij}$ ،  $\alpha = \tau(3kT)/4m$  به عنوان ضریب مقیاسی و  $\tau = 2\mu/P$  ثابت زمانی هستند.

با انجام ساده‌سازی‌ها در معادله (۲۴) به معادله زیر می‌توان رسید [6]:  
(۲۶)

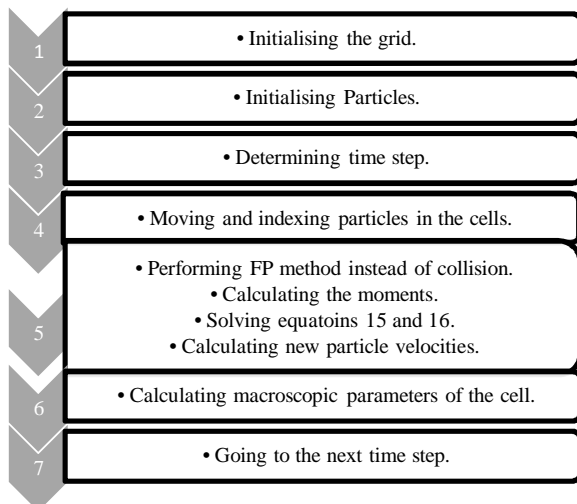
$$M_i^{n+1} = \frac{1}{\alpha} \left( M_i^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) \tau N_i^n + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} \right) \xi_i \right) + U_i^n + G_i \Delta t$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{m\tau}{3kT} (\tau(1-A)^2 \langle N_i^n M_i^n \rangle + 2(A-A^2) \langle N_i^n M_i^n \rangle) A = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$$

با استفاده از راه حل دقیق برای حل بخش خطی و تقریب‌های انجام شده برای بخش غیرخطی می‌توان برای موقعیت دقیق ذره هم مانند سرعت ذره، طرحی را توسعه داد و معادله‌ای برای آن نوشت [5]. با این حال، در اینجا برای به‌روزرسانی موقعیت، از روش به‌کاررفته در DSMC استفاده می‌شود. دلیل این تقریب، بازده محاسباتی بیشتر است.

### ۳- طرح کلی الگوریتم

برای شروع یک تعداد مشخص  $n_p$  ذره با وزن  $w_i$  براساس تابع توزیع در نظر گرفته شده  $F(V, x, t)$  تولید می‌شوند. باید توجه داشت که در اینجا، شبکه براساس میزان تغییرات متغیرهای میکروسکوپی جریان تعیین می‌شود و اندازه گام زمانی براساس معیار کورانت معین می‌شود. الگوریتم فوکریلانک در هر گام زمانی در شکل ۱ بیان شده است. این الگوریتم دقیقاً مشابه الگوریتم روش DSMC است، با این تفاوت که قسمت برخورد مولکولی که در روش DSMC به‌صورت صریح محاسبه می‌شود در اینجا با فرمول‌های (۱۶-۱۷) جایگزین شده است.



شکل ۱) الگوریتم روش فوکریلانک

### ۴- شرح مساله

در این قسمت به بررسی اولیه جریان‌های برشی یک‌بعدی کوئت و دوبعدی کاویتی پرداخته می‌شود.

(۱۶) به یک بخش لانگوین خطی  $L$  و یک بخش باقی‌مانده غیرخطی  $N$  تقسیم شود:  
(۱۸)

$$dM_i = -\frac{1}{T} M_i' dt + D dW_i + C_{ij} M_j' dt + Y_i (M_j' M_j' - \langle M_j' M_j' \rangle) dt + \Lambda (M_i' M_k' M_k' - \langle M_i' M_k' M_k' \rangle) dt$$

ابتدا بخش خطی، یعنی  $dM_i = dL_i$  در نظر گرفته می‌شود و برای بخش غیرخطی، یک طرح گسسته‌سازی زمانی اوپلر مرتبه اول رو به جلو استفاده شده است. ابتدا تغییرات سرعت با مدل خطی بررسی می‌شود:  
(۱۹)

$$dM_i = \frac{-1}{\tau} (M_i(t) - U_i(x(t), \tau)) dt + G_i(x(t)) dt + \sqrt{\frac{kT(x(t), \tau)}{m\tau(x(t), \tau)}} dW_i$$

برای سادگی، وابستگی‌های پارامترها نسبت به مکان ذرات  $x(t)$  در نظر گرفته نمی‌شود. برای محاسبه میانگین سرعت، رابطه زیر برقرار است:  
(۲۰)

$$U_i(t^{n+1}) = U_i(t^n) + G_i \Delta t$$

با معرفی سرعت‌های نوسانی  $M(t) = M(t) - U(x, t)$ ، می‌توان نوشت:  
(۲۱)

$$dM_i'(t) = -\frac{1}{T} M_i'(t) + \sqrt{\frac{2kT}{m\tau}} dW_i$$

یک جواب تحلیلی برای معادله دیفرانسیل فوق وجود دارد:  
(۲۲)

$$M_i'(t^{n+1}) = M_i'(t^n) e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} \right) \xi_i$$

که در آن  $\xi_i$ ها متغیرهای مستقل بی‌بعد شده‌اند. بنابراین، با ترکیب دو معادله (۲۲) و (۲۰) طرح نهایی برای مدل خطی شبیه به یک مطالعه [11] حاصل می‌شود:  
(۲۳)

$$M_i^{n+1} = M_i^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + U_i^n \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) G_i \Delta t + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} \right) \xi_i$$

عبارت راندگی مرتبه چهار به یک بخش خطی و باقی‌مانده آن تقسیم شده بود. با توجه به حل خطی و اضافه کردن بخش غیرخطی آن می‌توان نوشت:  
(۲۴)

$$M_i(t^{n+1}) = M_i(t^n) e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + U_i^n \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) G_i \Delta t + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} \right) \xi_i + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \int_0^{\Delta t} e^{\frac{t}{\tau}} N_i dt$$

(۲۵)

$$N_i = C_{ij} M_j' + Y_i \left( M_j' M_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left( M_i' M_j' M_i' - \frac{2q_i}{\rho} \right)$$

دیوار بالایی کاویتی با سرعت  $U_w$  در جهت مثبت محور افقی به حرکت درآمده و به وسیله تغییرات فشار و چگالی اولیه در میدان، جریان در کاویتی رژیم‌های رقیق‌شدگی را تجربه می‌کند. دمای دیواره‌های کاویتی ثابت و برابر  $T_w$  در نظر گرفته شده است. در ادامه، رفتار جریان در این مساله با استفاده از روش فوکریلانک در شرایط  $Kn$  و  $U_w$  متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد و با نتایج DSMC مقایسه می‌شود.

### ۵- نتایج تحقیق

#### ۵-۱- وابستگی دقت جواب‌ها به عدد نودسن در جریان کوئت با $U_w=50\text{m/s}$

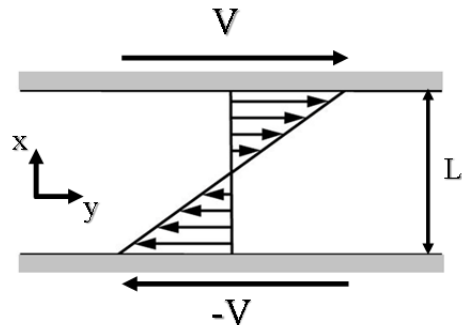
ابتدا جریان کوئت حاوی گاز آرگون مورد بررسی قرار گرفته است. مولکول‌های گاز به صورت مولکول‌های ماکسولین با شاخصه قدرت لزجت برابر یک در نظر گرفته می‌شوند. دیوارها با سرعت  $U_w=50\text{m/s}$  در جهت مخالف هم حرکت می‌کنند و هر دو دیواره به صورت هم‌دم و با  $T_w=2773/15\text{K}$  در نظر گرفته می‌شوند و دمای مرجع نیز  $T_{ref}=2773/15\text{K}$  است. در این مساله مقدار عدد نودسن متغیر و بین  $0.005$  تا  $0.3$  در نظر گرفته شده است. فاصله طولی دو صفحه  $L=0.01\text{m}$  در نظر گرفته شده است. جرم مولکولی گاز آرگون  $6.73 \times 10^{-26}$  کیلوگرم و قطر مولکولی آن  $4.17 \times 10^{-10}$  متر لحاظ شده است. تعداد  $500$ ،  $1000$  و  $1500$  ذره در هر سلول (PPC) برای استقلال از تعداد ذرات در سلول انتخاب شدند. همان‌طور که در نمودارهای ۱ و ۲ نشان داده شده است، نمودار سرعت (نمودار ۱) در تعداد ذرات مختلف در هر سلول بسیار خوب با نتایج حاصل از DSMC مطابقت دارد. با این حال بین DSMC و فوکریلانک در نمودار دما (نمودار ۲) اختلاف کمی وجود دارد. دلیل این تفاوت محاسبه دما از دو روش متفاوت در هر مدل است. البته این را هم باید متذکر شد که این اختلاف دما نسبت به کل بازه تغییرات دمایی (که در حدود  $0.2$  درجه کلین است)، بسیار کم است. در نهایت برای این شبیه‌سازی تعداد  $100$  سلول و  $1000$  ذره در هر سلول به کار گرفته شده است [12].

نمودارهای ۳ تا ۵ پروفیل سرعت، دما و تنش بی‌بعد شده در جریان کوئت را در بازه گسترده‌ای از اعداد نودسن از روش فوکریلانک با نتایج DSMC مقایسه می‌کند. قابل ذکر است پروفیل سرعت در مساله کوئت در اعداد نودسن بسیار کم خطی است، ولی همان‌طور که در نمودار ۳ دیده می‌شود، با افزایش عدد نودسن پروفیل سرعت در کنار دیواره‌ها به دلیل رشد لایه نودسن غیرخطی شده و مقدار سرعت به دلیل وقوع پدیده لغزش سرعت و گرادیان منفی در مجاورت دیواره، از مقدار سرعت دیواره کمتر می‌شود. روش فوکریلانک در بازه اعداد نودسن مورد بررسی، با دقت مناسبی نتایجی نزدیک به نتایج DSMC ارائه می‌دهد. با افزایش عدد نودسن، دقت نتایج فوکریلانک شروع به کاهش می‌کند، همان‌طور که در نمودار ۳ برای  $Kn=0.3$  دیده می‌شود، تفاوت کمی در نمودار سرعت در نزدیکی دیواره‌ها بین دو روش وجود دارد که دلیل آن عدم دقت کافی روش فوکریلانک در لایه نودسن در اعداد نودسن بزرگ در سرعت‌های کم است.

همان‌طور که قبلاً هم بیان شد، در نمودار ۴، توزیع دمایی جریان کوئت، مقدار دما در مرکز میدان افزایش را نشان داده است. برای بی‌بعد کردن تنش از فشار اولیه‌ای که بر مبنای پارامترهای ورودی در نظر گرفته شده، استفاده شد. همان‌طور که در نمودار ۵ نیز دیده می‌شود، روش فوکریلانک در مقایسه با روش DSMC نتایج خوبی را برای تنش برشی در اعداد نودسن کم نشان می‌دهد ولی در اعداد

#### ۴-۱- جریان کوئت

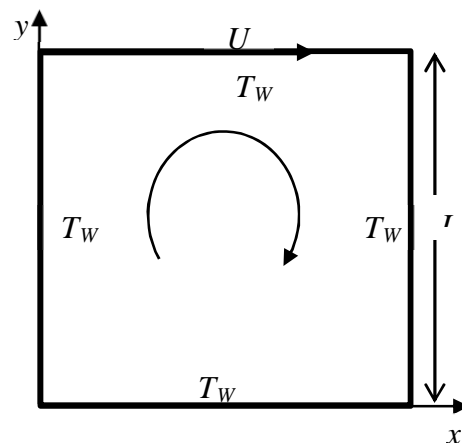
جریان کوئت به دلیل سادگی شبیه‌سازی و خاصیت یک‌بعدی آن برای آزمون الگوریتم‌های جدید روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. جریان کوئت رقیق‌شده حالت ساده‌ای برای مطالعه رفتار گاز در شرایط غیرتعادلی است. در این مساله، دیواره‌ها هم‌دم هستند ( $T_1=T_2$ )، اما سرعت مماسی متفاوت دارند ( $V_1 \neq V_2 \neq 0$ )؛ شکل ۲). بعد از رسیدن به شرایط پایا، مولفه عمودی سرعت صفر می‌شود و یک تنش برشی ثابت و متناظر با آن یک گرادیان سرعت مماسی در طول دامنه وجود خواهد داشت. زمانی که تنش برشی کوچک و جریان تعادلی باشد، طبق قانون نیوتن تنش برشی متناسب با گرادیان سرعت مماسی در گاز توده است. در جریان رقیق‌شده، این شرایط برقرار نیست. جریان کوئت از جریان فوریه پیچیده‌تر است، زیرا تولید حرارت لزجی در طول دامنه غیر صفر است و بنابراین دما توزیعی غیرخطی خواهد داشت. اگر در جریان کوئت  $T_1 = T_2$  باشد، توزیع دما در مرکز میدان به بیشترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۲) نمایی از جریان کوئت

#### ۴-۲- جریان کاویتی

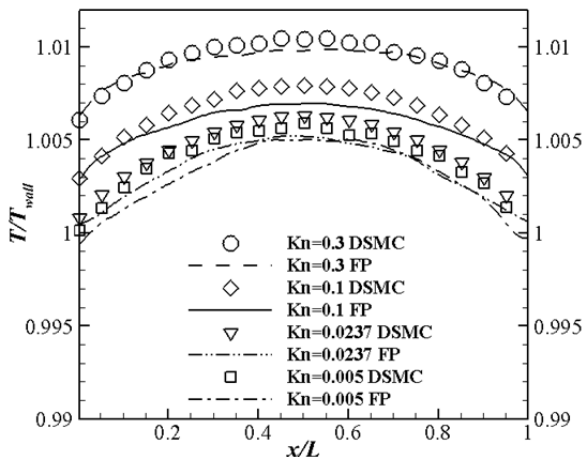
مهم‌ترین کاربرد کد فوکریلانک در حل مسایل دوبعدی است. زیرا از ترکیب کد فوکریلانک با الگوریتم DSMC نتایج دقیق با هزینه محاسباتی بسیار کمتر قابل حصول است. مساله کاویتی با اینکه شکل ساده‌ای دارد ولی با این حال دارای رفتار غیرتعادلی شدیدی است. هندسه کاویتی به عنوان یک هندسه رایج که در کاربردهای صنعتی به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد شناخته می‌شود. جریان رقیق‌شده در کاویتی تحت تاثیر اثرات شدید غیرتعادلی و دوبعدی قرار می‌گیرد. نمایی از مساله میکرو/نانو کاویتی مورد بررسی در شکل ۳ نمایش داده شده است.



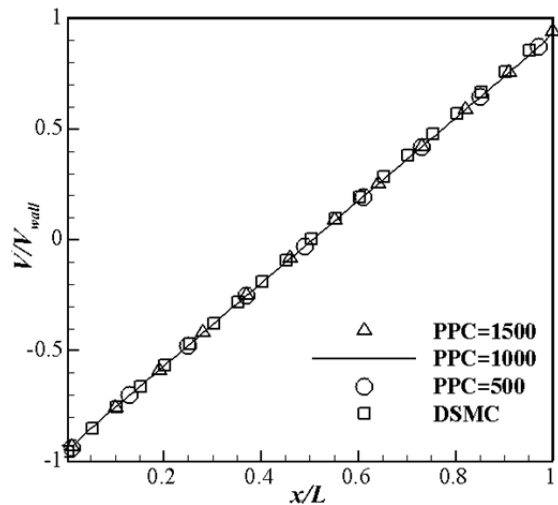
شکل ۳) نمایی از جریان در کاویتی



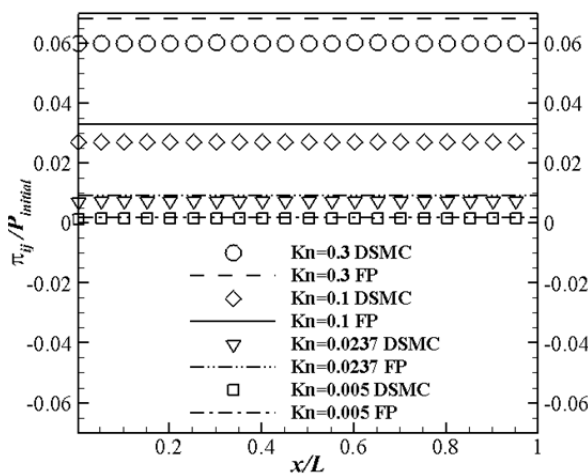
نودسن بالا نتایج اختلاف بیشتری را با DSMC نشان می‌دهند. بیشینه مقدار خطای نسبی نسبت به نتایج DSMC در نمونه‌های مقایسه شده در نمودار ۳ که مربوط به سرعت است، در حدود ۶٪، در نمودار ۴ که مربوط به دما است، در حدود ۱٪ و در نمودار ۵ که مربوط به تنش است، در حدود ۱۲٪ است.



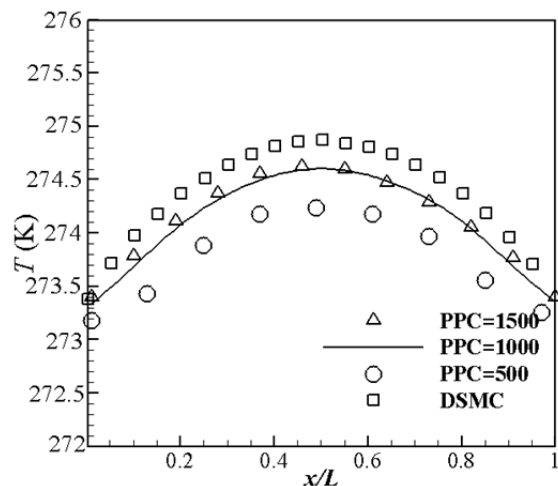
نمودار (۴) مقایسه پروفیل دمای بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت  $U_w=50\text{m/s}$



نمودار (۱) بررسی وابستگی سرعت به تعداد ذرات در جریان کوئت  $U_w=50\text{ m/s}$



نمودار (۵) مقایسه پروفیل تنش بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت  $U_w=50\text{m/s}$

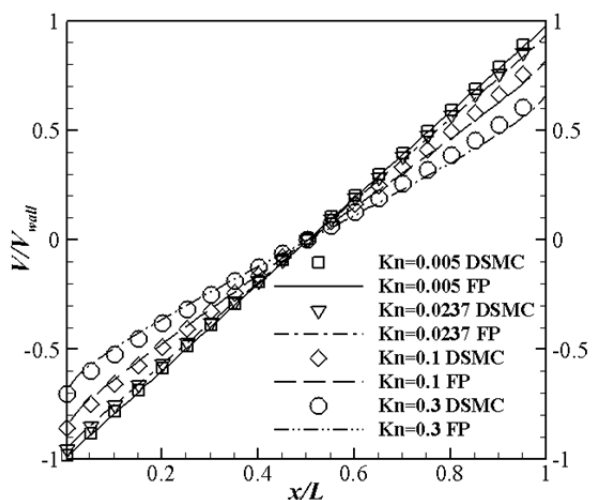


نمودار (۲) بررسی وابستگی دما به تعداد ذرات در جریان کوئت  $U_w=50\text{m/s}$

### ۵-۲- وابستگی دقت جواب‌ها با عدد نودسن در شرایط $U_w=1000\text{m/s}$

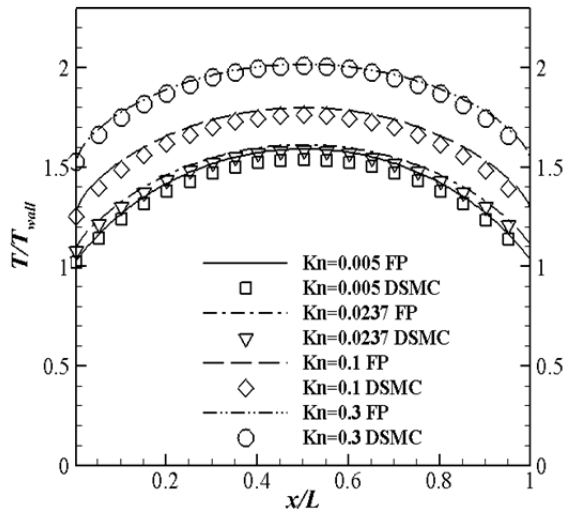
به‌عنوان آزمون دوم، جریان کوئت با سرعت  $U_w=1000\text{m/s}$  با دو دیواره به‌صورت هم‌دما در شرایط با  $T_w=300\text{K}$  و دمای مرجع  $T_{ref}=300\text{K}$  در نظر گرفته می‌شود. تعداد ۴۰، ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ ذره در هر سلول (PPC) برای استقلال از تعداد ذرات در سلول انتخاب شدند. همان‌طور که در نمودار ۶ مشاهده می‌شود، پروفیل سرعت در تعداد ذرات مختلف مطابقت خوبی با هم دارند. با این حال با توجه به نمودار نمودار ۷، مقدار PPC‌های مختلف می‌توان به‌خوبی دید که تعداد ۲۰۰ ذره در هر سلول نتایج منطبق‌تری داشته و با توجه به نمودار دما در نمودار ۷ مقدار تعداد ذره در هر سلول مناسب ۲۰۰ در نظر گرفته می‌شود. در نهایت در این شبیه‌سازی از تعداد ۲۰۰ سلول و ۲۰۰ ذره در هر سلول استفاده شده است [13].

نمودارهای ۸، ۹ و ۱۰ توزیع سرعت، دما و تنش بی‌بعد را در سرعت  $U_w=1000\text{m/s}$  نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که فوکریلانک برای محدوده گسترده‌ای از اعداد نودسن در جریان مافوق‌صوت نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد. همان‌طور که در نمودار ۸ برای نمودارهای سرعت دیده می‌شود، مقادیر سرعت تطابق بسیار خوبی با DSMC دارند. با بررسی عدد نودسن در اعداد ماخ مادون‌صوت (نمودار ۳) و ماخ مافوق‌صوت (نمودار ۸) مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت، دقت روش فوکریلانک در اعداد نودسن بالا افزایش می‌یابد. علاوه

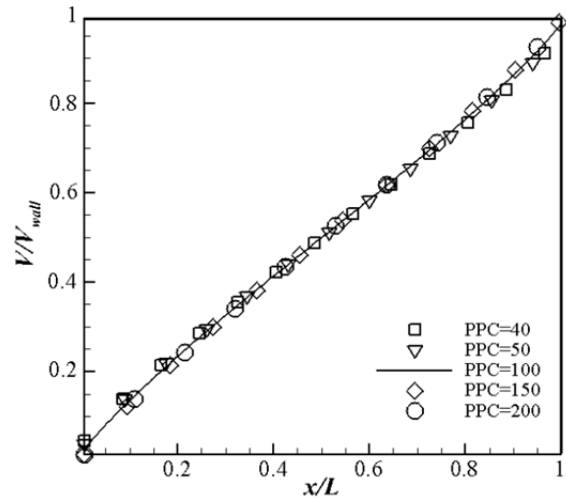


نمودار (۳) مقایسه پروفیل سرعت بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت  $U_w=50\text{m/s}$

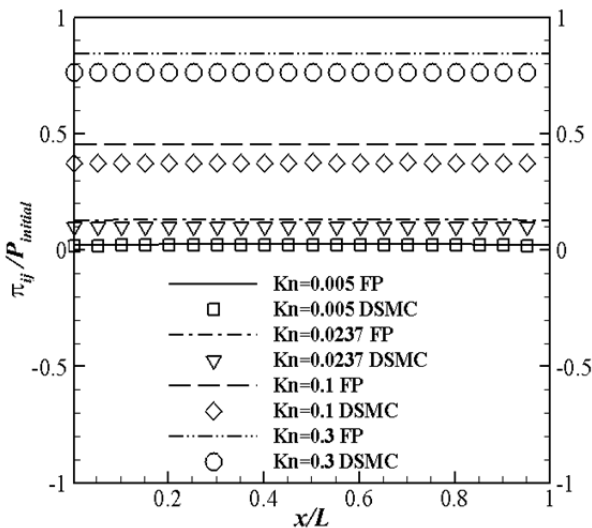
بر این در نمودارهای ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود که نمودار دما و تنش نیز دقت بسیار خوبی داشته و با افزایش عدد نودسن دقت روش فوکریلانک نیز افزایش می‌یابد.



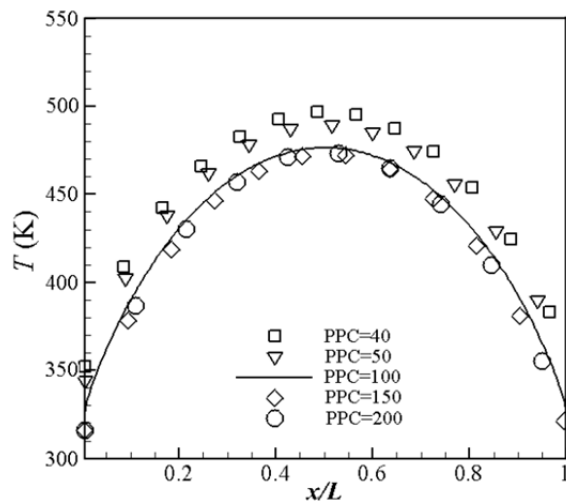
نمودار ۹) مقایسه پروفیل دمای بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت  $U_w=1000\text{m/s}$



نمودار ۶) بررسی وابستگی سرعت به تعداد ذرات در جریان کوئت  $U_w=1000\text{m/s}$



نمودار ۱۰) مقایسه پروفیل تنش بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت  $U_w=1000\text{m/s}$

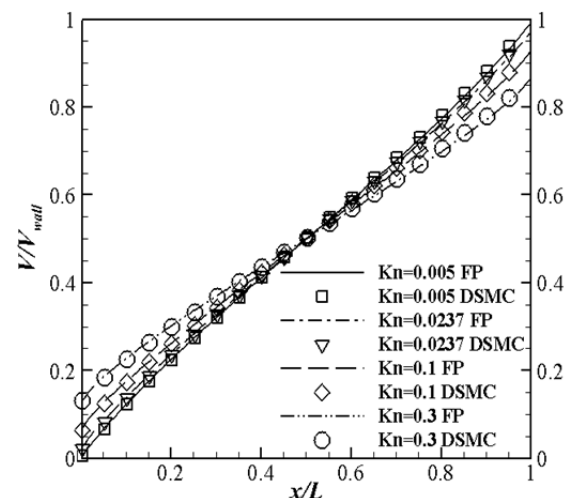


نمودار ۷) بررسی وابستگی دما به تعداد ذرات در جریان کوئت  $U_w=1000\text{m/s}$

بیشینه مقدار خطای نسبی نتایج روش فوکریلانک نسبت به نتایج DSMC در نمونه‌های مقایسه‌شده در نمودار ۸ که مربوط به سرعت است، در حدود ۶٪، در نمودار ۹ که مربوط به دما است، در حدود ۳٪ و در نمودار ۱۰ که مربوط به تنش است، در حدود ۱۰٪ می‌باشد. در ادامه به بررسی همگرایی و خطا در روند اجرای کد جریان کوئت پرداخته می‌شود. معیار همگرایی به صورت زیر (فرمول ۲۸) در نظر گرفته شده است:

$$E(a) = \frac{\sum |a^{n+1} - a^n|}{a_{ref}} \quad (28)$$

که در آن  $a$  یک پارامتر مستقل جریان که می‌تواند سرعت، دما، تنش یا شار حرارتی باشد و  $a_{ref}$  پارامتر مرجع از پارامترهای ورودی جریان است. در این فرمول، پارامتر در زمان جدید و زمان قبلی با هم مقایسه می‌شوند و خطای مجموع تک تک سلول‌ها با هم جمع می‌شود. روند همگرایی خطا برای شار حرارتی که یک ممان مرتبه سوم سرعت است و دیرتر از پارامترهای دیگر جریان به همگرایی می‌رسد، در نمودار ۱۱ برای اعداد نودسن مختلف نمایش داده شده



نمودار ۸) مقایسه پروفیل سرعت بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت  $U_w=1000\text{m/s}$

حال، زمان مورد استفاده برای مدلسازی برخورد در روش فوکریلانک کمتر از روش DSMC است. زیرا در روش فوکریلانک برخورد محاسبه نمی‌شود و به جای آن دستگاه معادلاتی که ممان‌های مختلف در آن محاسبه شده‌اند حل می‌شود که زمان حل آن بسیار کوتاه است. در حالی که در روش DSMC برخوردهای زیادی محاسبه شده و این باعث می‌شود که زمان زیادی برای یک سلول محاسباتی هزینه شود.

در جدول ۲ هزینه محاسباتی دو روش فوکریلانک و روش DSMC به صورت نسبی در اعداد نودسن مختلف آورده شده است. مشاهده می‌شود که روش فوکریلانک نسبت به روش DSMC سریع‌تر عمل می‌کند و با افزایش عدد نودسن مقدار زمان محاسباتی در روش DSMC کاهش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً ذکر شده است، با افزایش عدد نودسن تعداد برخوردها کمتر شده و در نتیجه زمان برخوردها در روش DSMC نیز زمان کمتری برده و بهتر عمل می‌کند. علاوه بر این در جدول ۲ مشاهده می‌شود که در روش فوکریلانک هزینه محاسباتی (CPU time) به عدد نودسن وابسته نیست و مقدار آن در تمامی اعداد نودسن مختلف تقریباً ثابت است. دلیل آن هم این است که در محاسبات ممائی در روش فوکریلانک تعداد ذرات نقشی در افزایش زمان اجرای کد ندارند.

جدول ۲) مقایسه هزینه محاسباتی در روش‌های DSMC و فوکریلانک در جریان کوئت

نسبت هزینه محاسباتی در روش مونت کارلو به روش فوکریلانک	هزینه محاسباتی روش فوکریلانک	هزینه محاسباتی روش مونت کارلو	عدد نودسن
۲۵/۲۳	۰/۰۰۵۴۹	۰/۰۱۳۸۵۸	۰/۳
۲۶/۲۰	۰/۰۰۵۴۴	۰/۰۱۴۲۶۸	۰/۱
۳۱/۵۴	۰/۰۰۵۴۸	۰/۰۱۷۲۸۴	۰/۰۲۳۷
۵۹/۲۴	۰/۰۰۵۴۴	۰/۰۳۲۲۲۹	۰/۰۰۵

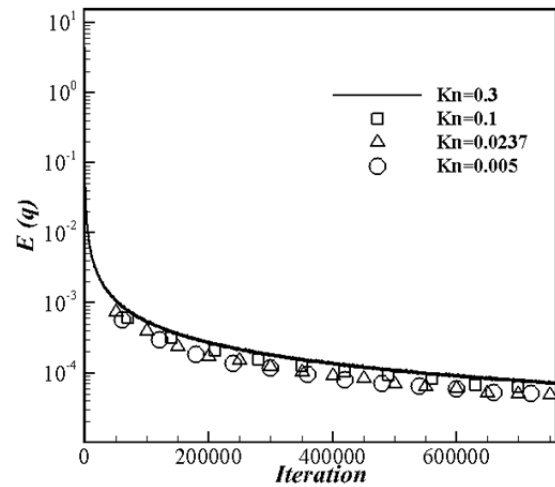
#### ۴-۵- جمع‌بندی جریان کوئت

با توجه به نتایج در جریان کوئت، می‌توان گفت که روش فوکریلانک در جریان‌های با سرعت بالا توانایی عملکردی بهتری را داشته و می‌تواند با سرعت همگرایی بیشتر به نتایج دقیقی دست یابد. با این حال این روش در جریان‌های با عدد ماخ پایین و نودسن بالا در ناحیه لایه نودسن دارای خطا می‌شود و نتایج مطلوبی ندارد. لازم به ذکر است که در روش فوکریلانک هزینه محاسباتی وابسته به عدد نودسن نیست. در حالی که در روش DSMC هزینه محاسباتی تابعی از تعداد برخوردهای بین مولکولی است که با کاهش عدد نودسن تعداد برخوردها افزایش می‌یابد و در نتیجه همگرایی کندتر و هزینه محاسباتی بیشتری را دارد.

#### ۵-۵- بررسی عدد نودسن و سرعت در کاویتی

در این قسمت مساله کاویتی با دو سرعت مختلف دیواره  $U_w=100\text{m/s}$  و  $U_w=300\text{m/s}$  و اعداد نودسن مختلف از  $0.05$  تا  $0.20$  مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی هم‌دمای فرض شده است و تمام دمای دیواره‌ها در  $T_w=300\text{K}$  ثابت نگه داشته شده است. پارامترهای عددی که در مساله کاویتی مورد بررسی قرار می‌گیرند، اندازه کاویتی است که اندازه طول و عرض آن  $(m^2) L \times L = 10^{-6} \times 10^{-6}$  در نظر گرفته شده که براساس تحقیقات انجام‌شده توسط گرجی و همکاران [6] شبکه‌ای با ابعاد  $10 \times 10$  سلول محاسباتی و تعداد  $200$  ذره در هر سلول (PPC) در نظر گرفته شده است. برای روش DSMC نیز با توجه به نتایجی که توسط محمدزاده و همکاران [14] گزارش کردند شبکه‌ای با ابعاد

است. با توجه به تغییر عدد نودسن در بازه  $0.005$  تا  $0.3$ ، این نمودار نشان می‌دهد که همگرایی خطای شار حرارتی به عدد نودسن وابستگی اندکی دارد و با افزایش عدد نودسن مقدار خطا به میزان بسیار ناچیزی افزایش می‌یابد.



نمودار ۱۱) مقایسه همگرایی خطای انتقال حرارت در اعداد نودسن مختلف در سرعت  $U_w=1000\text{m/s}$

#### ۳-۵- مقایسه هزینه محاسباتی روش FP و DSMC در جریان کوئت

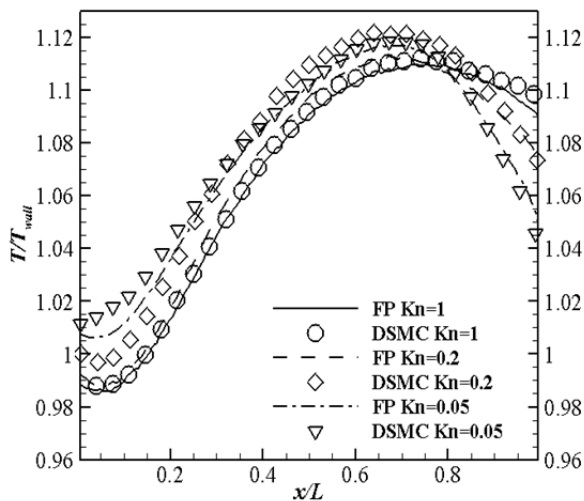
در این قسمت هزینه محاسباتی در کد فوکریلانک بررسی می‌شود. زمان هر زیرروال در کد تهیه شده برای DSMC و فوکریلانک به صورت جداگانه برای  $3000$  تکرار محاسبه شده است و در نهایت سهم قسمت برخورد در DSMC و سهم قسمت محاسبه ممان فوکریلانک (که جایگزین برخورد شد و در نهایت مقدار سرعت ذرات را محاسبه می‌کند) به صورت درصدی آمده است. شرایطی که در آن این اندازه‌گیری انجام شده است مربوط به جریان مافوق صوت با شرایط  $U_w=1000\text{m/s}$  و  $Kn=0.1$  برای هر دو کد DSMC و فوکریلانک، شبکه‌ای با  $200$  سلول و تعداد  $200$  ذره در هر سلول در نظر گرفته شده است [13]. هر دو کد روی کامپیوتری با سی‌پی‌یو  $3.4\text{GHz}$  Intel(R) Core i7 اجرا شد. نتایج این مقایسه در جدول ۱ ذکر شده است. این جدول مزیت زمانی روش فوکریلانک را به خوبی نشان می‌دهد.

جدول ۱) میانگین زمان هر زیرروال در روش‌های DSMC و فوکریلانک

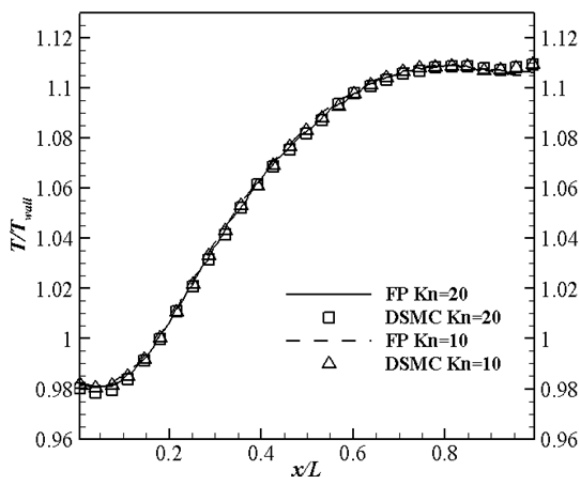
زیرمجموعه	زمان در DSMC (میلی ثانیه)	زمان در فوکریلانک (میلی ثانیه)
مقداردهی اولیه	۶۲	۳۲
میانگین‌گیری	۷/۷۴	۸/۱۵
چاپ خروجی	۶/۲۹	۷۲.۶
حرکت‌دادن ذرات	۲/۰۶	۲/۰۵
شماره‌گذاری ذرات	۱/۵	۱/۵۱
مدلسازی برخورد	۱۳۱/۹۸	۳۴/۶۶
زمان کامل یک گام زمانی	۱۵۱/۷۹	۵۵/۰۹
درصد مدلسازی برخورد به کل زمان یک تکرار	۸۶/۹۴%	۶۲/۹۱%

همان‌طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، قسمت عمده ای از زمان پردازش مربوط به مدلسازی برخورد در DSMC و روش ممائی برای محاسبه سرعت جدید ذرات در روش فوکریلانک است. با این

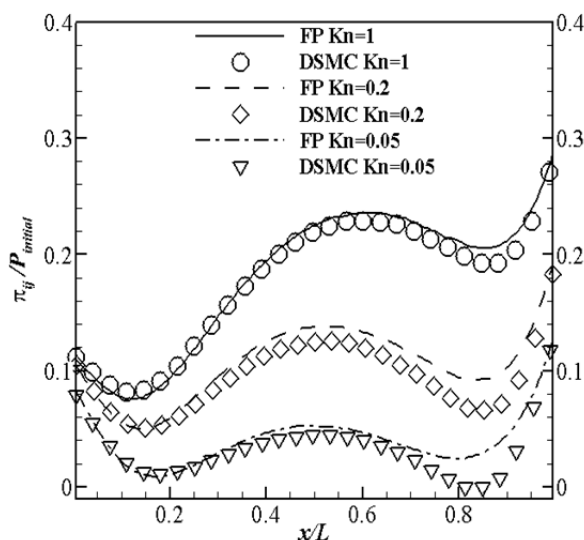




نمودار ۱۴) مقایسه دمای بی‌بعد شده برای اعداد نودسن کوچک مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویته با سرعت  $U_w=300\text{m/s}$



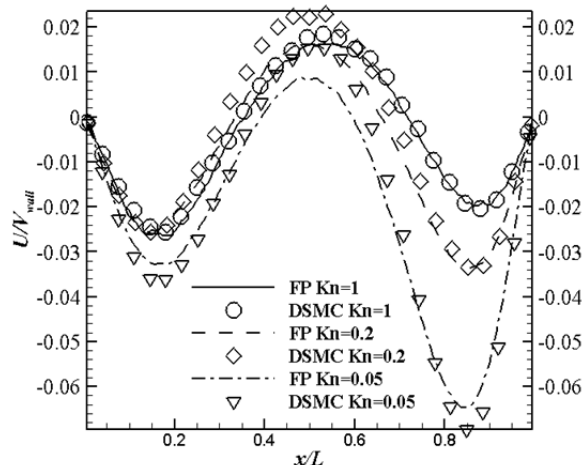
نمودار ۱۵) مقایسه دمای بی‌بعد شده برای اعداد نودسن بزرگ مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویته با سرعت  $U_w=300\text{m/s}$



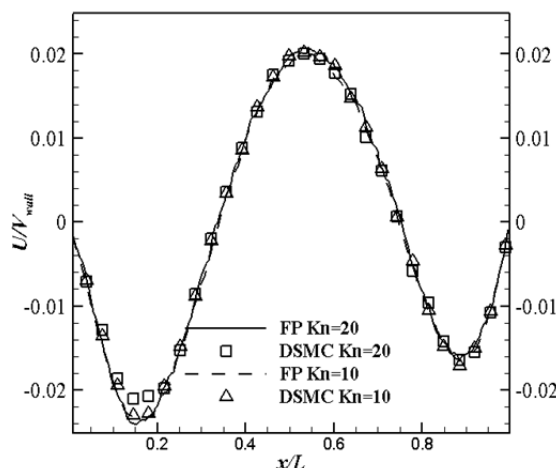
نمودار ۱۶) مقایسه تنش برشی برای اعداد نودسن کوچک مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویته با سرعت  $U_w=300\text{m/s}$

۱۵۰×۱۰۰ محاسباتی و با تعداد ذرات ۲۰ ذره در هر سلول محاسباتی انتخاب شده‌اند. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه در شبکه‌های مورد بررسی، روش DSMC با تعداد ۲۰ ذره و روش فوکریلانک با تعداد ۲۰۰ ذره جواب مناسب را به دست می‌دهد، بنابراین مقایسه این دو روش با تعداد ذرات متفاوتی انجام شده است.

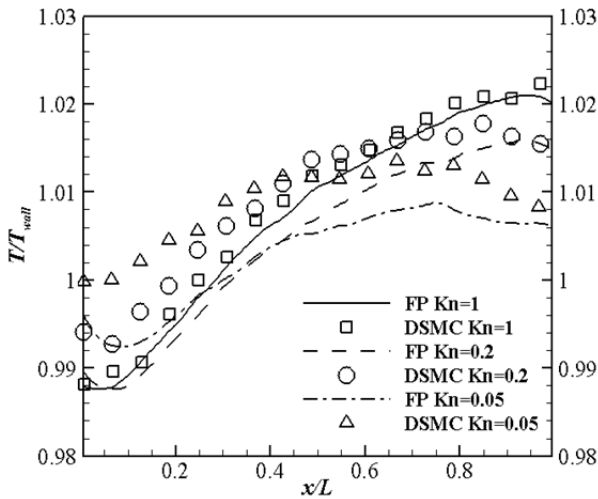
به‌منظور بررسی دقیق نتایج روش فوکریلانک، سرعت به‌عنوان ممان مرتبه یک، دما و تنش به‌عنوان ممان مرتبه دوم در  $y=3L/4$  با نتایج DSMC مقایسه شده است و در نمودارهای ۱۲ تا ۱۷ برای اعداد نودسن مختلف ترسیم شده است. در نمودارهای ۱۲ و ۱۳ توزیع سرعت بی‌بعد برای سرعت دیواره  $300\text{m/s}$  در موقعیت  $y=3L/4$  در اعداد نودسن مختلف ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت دو روش در بازه‌های مختلف عدد نودسن تطابق خوبی دارد که با افزایش عدد نودسن (نمودار ۱۳) اختلاف کمتر شده است، به همین دلیل می‌توان گفت در مساله کاویته با افزایش عدد نودسن دقت روش فوکریلانک نیز افزایش می‌یابد. این افزایش دقت با افزایش عدد نودسن برای توزیع دما و تنش که در نمودارهای ۱۴ تا ۱۷ نشان داده شده‌اند نیز به وضوح قابل مشاهده است. بیشینه مقدار خطای نسبی در نمونه‌های مقایسه‌شده بین دو روش در حدود ۶٪ است.



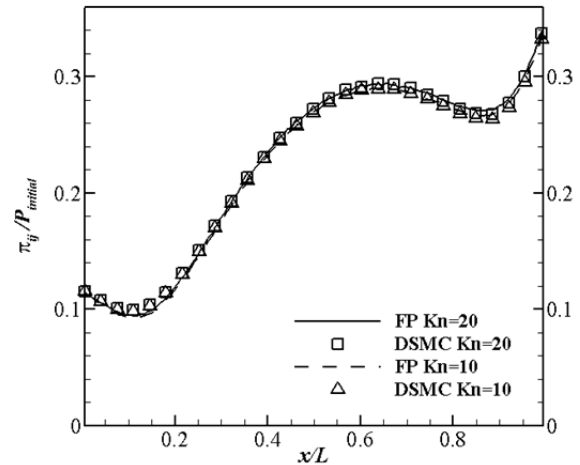
نمودار ۱۷) مقایسه مولفه x سرعت بی‌بعد شده برای اعداد نودسن کوچک مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویته با سرعت  $U_w=300\text{m/s}$



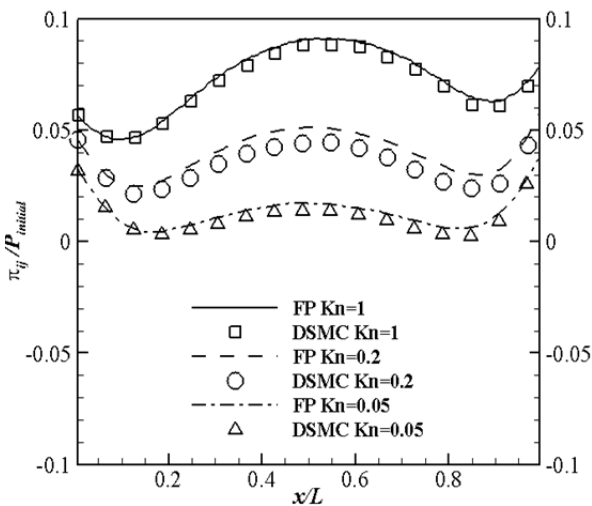
نمودار ۱۸) مقایسه مولفه x سرعت بی‌بعد شده برای اعداد نودسن بزرگ مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویته با سرعت  $U_w=300\text{m/s}$



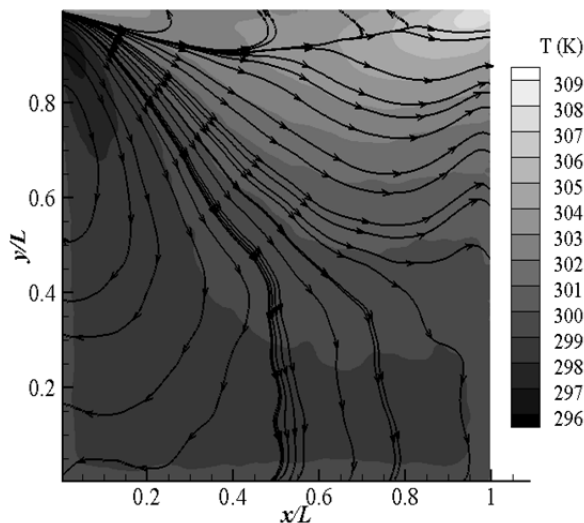
نمودار ۱۹) مقایسه دمای بی‌بعد شده برای اعداد نودسن مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویتی با سرعت  $U_w=100m/s$



نمودار ۱۷) مقایسه تنش برشی برای اعداد نودسن بزرگ مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویتی با سرعت  $U_w=300m/s$



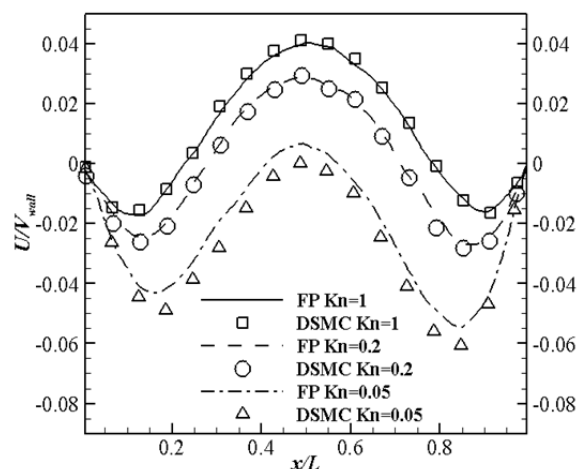
نمودار ۲۰) مقایسه تنش برشی برای اعداد نودسن مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویتی با سرعت  $U_w=100m/s$



نمودار ۲۱) نمودار دمایی روش فوکریلانک به همراه خطوط شار انتقال حرارت برای کاویتی با سرعت  $U_w=100m/s$  در  $Kn=0.01$

علاوه بر سرعت  $U_w=300m/s$ ، سرعت  $100m/s$  نیز برای کاویتی انجام شده است و نتایج آن در نمودارهای ۱۸ تا ۲۰ برای سرعت، دما و تنش بی‌بعد نیز در  $y=3L/4$  ترسیم شده است. در این سرعت نیز در بازه اعداد نودسن ۰/۰۵ تا ۱ مقایسه انجام شده است. در این سرعت نیز با افزایش عدد نودسن دقت روش فوکریلانک افزایش می‌یابد. با این حال می‌توان دید که مقدار اختلاف در این سرعت بیشتر است. بنابراین می‌توان گفت روش فوکریلانک در سرعت‌های پایین و نودسن پایین خطای کمی دارد. بیشینه مقدار خطای نسبی در نمونه‌های مقایسه‌شده در نمودارهای زیر در حدود ۱۲٪ است. همان‌طور که می‌توان دید، با مقایسه خطاهای نسبی، دقت روش فوکریلانک در سرعت‌های بالاتر بیشتر است.

یکی از ویژگی‌های روش فوکریلانک، پیش‌بینی درست انتقال حرارت سرد به گرم در اعداد نودسن کم است. در مساله کاویتی در سرعت دیواره  $Kn$  برابر با ۰/۰۱ و ۱۰۰ متر بر ثانیه این پدیده اتفاق می‌افتد. هرچند این پدیده توسط روش‌های ناویر استوکس درست پیش‌بینی نشده است، با این حال در روش DSMC این پدیده مشاهده می‌شود<sup>[14]</sup>. در روش فوکریلانک نیز این پدیده در لبه بالا و راست کاویتی دیده می‌شود (نمودارهای ۲۱ و ۲۲) که بیانگر عملکرد مناسب روش فوکریلانک در این بازه اعداد نودسن و سرعت پایین است.



نمودار ۱۸) مقایسه مولفه x سرعت بی‌بعد شده برای اعداد نودسن مختلف روی خط  $y=3L/4$  برای کاویتی با سرعت  $U_w=100m/s$

۱) پیاده‌سازی الگوریتم فوکریلانک در کد DSMC یک‌بعدی و دوبعدی به‌جای الگوریتم برخوردی DSMC انجام شده است. بدین‌ترتیب یک کد DSMC پایه وجود دارد که در آن می‌توان به‌جای زیرروال برخوردی پر هزینه از الگوریتم فوکریلانک با هزینه بسیار کمتر استفاده کرد.

۲) نتایج گزارش شده در مقاله حاضر نشان می‌دهد با افزایش همزمان سرعت و عدد نودسن، دقت روش فوکریلانک در حل مسایل کوئت و کاویتی افزایش می‌یابد.

۳) همگرایی در روش فوکریلانک نسبتاً سریع است و هزینه محاسباتی آن در مسایل انتخاب‌شده نسبت به DSMC بسیار کمتر است. مزیت محاسباتی فوکریلانک با کاهش عدد نودسن افزایش می‌یابد.

۴) در مساله کاویتی، روش فوکریلانک می‌تواند در اعداد نودسن کم پدیده انتقال حرارت از سرد به گرم را پیش‌بینی کند.

**تشکر و قدردانی:** موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

**تاییدیه اخلاقی:** موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

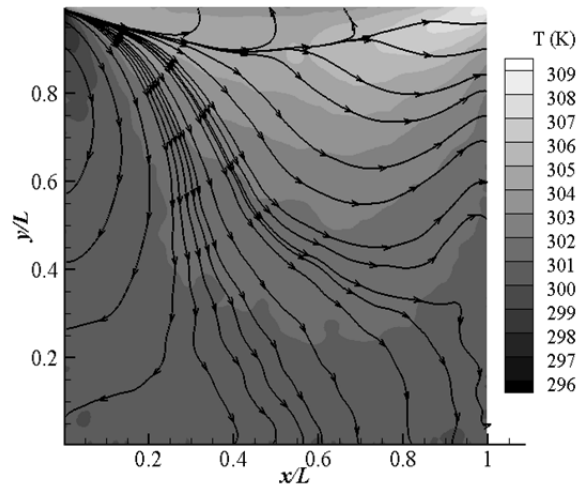
**تعارض منافع:** هیچ‌گونه تعارض منافی وجود ندارد.

**سهم نویسندگان:** وحید رضایورجارق (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ امیرمهران مهدوی (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری (۲۵٪)؛ احسان روحی (نویسنده سوم)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۲۵٪).

**منابع مالی:** منابع مالی خاصی استفاده نشده است.

**۷- پی‌نوشت**

- A ضریب راندگی
- D ضریب پخش
- e انرژی داخلی (کیلوژول بر کیلوگرم)
- E خطای نسبی
- F تابع توزیع جرمی
- G نیروی خارجی
- k ثابت بولتزمن ( $K^{-1}$ )
- kn عدد نودسن
- L طول مشخصه جریان (متر)
- m جرم مولکولی ذره (کیلوگرم)
- M سرعت معادل ذره (متر بر ثانیه)
- Ma عدد ماخ
- N تعداد مولکول‌ها
- P فشار (نیوتن بر متر مربع)
- PPC تعداد ذرات در هر سلول
- Pr عدد پراتل
- q شار حرارتی (وات بر متر مربع)
- Re عدد رینولدز
- t زمان (ثانیه)
- T دما (کلوین)
- uj سرعت در راستای X (متر بر ثانیه)
- U سرعت سلولی (متر بر ثانیه)
- vj سرعت در راستای Y (متر بر ثانیه)
- x(t) موقعیت مکانی ذره (متر)
- علامه یونانی**
- $\delta$  فاصله متوسط مولکول‌ها (متر)
- $\Delta t$  گام زمانی (ثانیه)
- $\Delta x$  گام مکانی (متر)
- $\lambda$  متوسط فاصله‌ی آزاد مولکولی (متر)
- $\Lambda$  ضریب پایداری
- $\mu$  لزجت دینامیکی (کیلوگرم بر متر بر ثانیه)
- $\xi$  متغیرهای مستقل بی‌بعد شده
- $\pi$  تانسور تنش



**نمودار ۲۲)** نمودار دمایی روش DSMC به همراه خطوط شار انتقال حرارت برای کاویتی با سرعت  $U_w=100m/s$  در  $Kn=0.01$

**۵-۶- بررسی هزینه محاسباتی در مساله کاویتی**

همان‌طور که جدول ۳ نشان می‌دهد، فوکریلانک با گام زمانی بسیار بزرگ‌تری کار می‌کند که منجر به همگرایی سریع‌تر و هزینه‌های محاسباتی پایین‌تر می‌شود. علاوه بر این مقایسه زمانی دیگری نیز بین دو عدد نودسن مختلف نیز انجام شده که در جدول ۴ گزارش شده است.

همان‌طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، هزینه محاسباتی روش DSMC برای هر دو حالت بیشتر از هزینه محاسباتی روش فوکریلانک است. این تفاوت در حدی است که می‌توان گفت سرعت حل در روش فوکریلانک در شرایط فیزیکی مشخص شده در بالا بسیار بیشتر از روش DSMC است.

**جدول ۳)** مقایسه گام زمانی در روش‌های DSMC و فوکریلانک در جریان کاویتی

پارامتر گام زمانی	مقدار
گام زمانی روش فوکریلانک (ثانیه)	$1/33 \times 10^{-11}$
گام زمانی روش مستقیم مونت کارلو (ثانیه)	$1/0 \times 10^{-11}$
نسبت گام زمانی روش فوکریلانک به روش مستقیم مونت کارلو	۱۳/۳

**جدول ۴)** مقایسه گام زمانی در روش‌های DSMC و فوکریلانک در جریان کاویتی برای  $U_w=300m/s$

عدد نودسن	هزینه محاسباتی روش مونت کارلو	هزینه محاسباتی روش فوکریلانک	نسبت هزینه محاسباتی در روش مونت کارلو به روش فوکریلانک
۱	۲/۷۵۳۹۱۴	۰/۰۸۴۹۰۹	۳۲/۴۳
۰/۰۵	۲/۸۳۷۸۶۴	۰/۰۸۱۶۳۰	۳۴/۷۶

**۶- نتیجه‌گیری**

با توجه به اینکه الگوریتم فوکریلانک یک روش جدیدی برای استفاده در کدهای ذره مینا است و استفاده از آن می‌تواند باعث بهبود و افزایش هزینه‌های محاسباتی در هندسه‌های پیچیده شود، بنابراین به‌منظور استفاده از آن باید محدوده عملکردی آن از نظر دقت بررسی شود. به همین دلیل در این پژوهش به بررسی محدوده‌های مختلف عدد نودسن در محدوده پیوسته، گذار و جریان آزاد مولکولی در رژیم مادون‌صوت و مافوق‌صوت پرداخته شده است. دستاوردهای نهایی تحقیق حاضر به‌صورت زیر قابل جمع‌بندی هستند:

for computational studies of monatomic rarefied gas flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011;680:574-601.

7- Pawula RF. Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation. *Physical Review*. 1967;162(1):186.

8- Bogomolov SV. On Fokker-Planck model for the Boltzmann collision integral at the moderate Knudsen numbers. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2009;1:739.

9- Risken H. *The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications*. Berlin: Springer-Verlag; 1989.

10- Gorji MH, Jenny P. A Fokker-Planck based kinetic model for diatomic rarefied gas flows. *Physics of Fluids*. 2013;25(6):062002.

11- Truesdell C, Muncaster R. *Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas*. New York: Academic Press; 1980.

12- Rezapour Jaghargh V, Mahdavi AM, Roohi E. A thorough evaluation of the Fokker-Planck kinetic model in the couette flow. 17th Conference on Fluid Dynamics, Shahrood University of Technology. Shahrood: Physics Society of Iran; 2017.

13- Rezapour V, Mahdavi AM, Roohi E. Investigation of rarefied gas flow in micro/nano cavity by Fokker Planck approach. 26th Annual Conference of Mechanical Engineering. Semnan: Semnan University; 2018.

14- Mohammadzadeh AR, Roohi E, Niazmand H, Stefanov S, Myong RS. Thermal and second-law analysis of a micro- or nanocavity using direct-simulation Monte Carlo. *Physical Review E*; 2012;85:056305.

$\rho$	چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)
$\tau$	ثابت زمانی
<b>بالانویس‌ها</b>	
Boltz	بولتزمن
FP	فوکریلانک
<b>زیرنویس‌ها</b>	
coll	برخورد
initial	اولیه
ref	مربوط به شرایط مرجع
w	کمیت روی دیواره

### منابع

1- Chambre PA, Schaaf SA. *Flow of rarefied gases*. Princeton: Princeton University Press; 2017.

2- Bird GA. Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas. *The Physics of Fluids*. 1963;6(10):1518.

3- Kirkwood JG. The statistical mechanical theory of transport processes I. general theory. *The Journal of Chemical Physics*. 1946;14(3):180.

4- Cercignani C. The Boltzmann equation. In: Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications, applied mathematical sciences*. 67th Volume. New York: Springer; 1988. pp. 40-103.

5- Jenny P, Torrilhon M, Heinz S. A solution algorithm for the fluid dynamic equations based on a stochastic model for molecular motion. *Journal of Computational Physics*. 2010;229(4):1077-1098.

6- Gorji MH, Torrilhon M, Jenny P. Fokker-Planck model