



## Determination of Young's Modulus by Finite Element Model Updating

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Adel F.<sup>1</sup> *PhD*,  
Shokrollahi S.\*<sup>1</sup> *PhD*,  
Beygi E.<sup>1</sup> *MSc*

#### How to cite this article

Adel F, Shokrollahi S, Beygi E. Determination of Young's Modulus by Finite Element Model Updating. Modares Mechanical Engineering. 2019; 19(8):1837-1844.

<sup>1</sup>Aerospace Engineering Faculty, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: Aerospace Engineering Faculty, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.  
Phone: +98 (21) 22799095  
Fax: +98 (21) 22799095  
s\_shokrollahi@mut.ac.ir

#### Article History

Received: May 13, 2018  
Accepted: January 19, 2019  
ePublished: August 12, 2019

### ABSTRACT

In this paper, a new method for determining the Young's modulus of structural elements, using the finite element model updating approach, is presented. The model updating is the correction of the numerical model of a structure based on measured data from the real structure. Therefore, after introducing a case study of an aluminum alloy (7075-T651) beam, the frequency of bending vibrations of the case study was measured, using frequency response functions derived from the modal test. Then, Young's modulus for the case study was calculated, using the relationships in the ASTM E 1876-01 standard and also the analytical relations governing Euler–Bernoulli beam behavior. The results of the model updating method indicate that there is a very good adaptation with the results of the two recent approaches, the Standard and Euler–Bernoulli beam relations. As a result, this method can be developed with good precision to identify the Young's modulus in structural elements with more complex shapes, where the relations derived from the aforementioned standard and analytical relations are not efficient due to geometric constraints.

**Keywords** Young's Modulus; Modal Test; Model Updating; ASTM Standard; Euler-Bernoulli Beam

### CITATION LINKS

[1] Young modulus measurement by ultrasonic method [2] Young's modulus determination via simple, inexpensive static and dynamic measurements [3] Comparison of static and dynamic methods for measuring stiffness of high modulus steels and metal composites [4] An undergraduate experiment on the vibration of a cantilever and its application to the determination of Young's modulus [5] Method for determination of the dynamic elastic modulus for composite materials [6] Dynamic and Static Moduli [7] Experimental investigation of the dynamic elastic modulus and vibration damping in MoSi2-30%Si3N4 as a function of temperature [8] The modelling and determination of dynamic elastic modulus of magnesium based metal matrix composites [9] The elastic constants measurement of metal alloy by using ultrasonic nondestructive method at different temperature [10] Determination of Young's modulus by studying the flexural vibrations of a bar: Experimental and theoretical approaches [11] Model Updating In Structural Dynamics: A Survey [12] A model updating method for hybrid composite/aluminum bolted joints using modal test data [13] Structural sensitivity analysis and optimization 1: Linear systems [14] Design sensitivity analysis: Overview and review [15] Design sensitivity analysis of structural systems ... [16] The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial [17] Applied numerical linear algebra [18] Aluminum 7075-T6, 7075-T651 [19] Modal testing: Theory, practice and application [20] ISO 2954: 2012: Mechanical vibration of rotating and reciprocating machinery -- requirements for instruments for measuring vibration severity [21] ASTM E1876-01: Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by impulse excitation of vibration [22] Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories



## تعیین مدول یانگ با روش بهرورسانی مدل المان محدود

فرهاد عادل PhD

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

سعید شکراللهی\* PhD

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

عرفان بیگی MSc

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

### چکیده

در این مقاله، یک روش تجربی برای تعیین دقیق مدول یانگ در المان‌های سازه‌ای با استفاده از رویکرد بهرورسانی مدل المان محدود ارائه شده است. بهرورسانی مدل عبارت از تصحیح مدول عددی یک سازه با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده از سازه واقعی است. در این راستا پس از معرفی نمونه مورد تحقیق که یک تیر آلومینیومی با آلیاژ 7075-T651 بوده، فرکانس‌های ارتعاشات خمشی آن با آزمون مودال اندازه‌گیری شده و با استفاده از روابط بهرورسانی مدل، مدول یانگ استخراج شده است. در ادامه، مدول یانگ نمونه مورد مطالعه با استفاده از روابط موجود در استاندارد ASTM E1876-01 و همچنین با استفاده از روابط تحلیلی حاکم بر رفتار تیر اویلر-برنولی نیز محاسبه شده است. نتایج حاصل از روش بهرورسانی مدل حاکی از آن است که انطباق بسیار خوبی با نتایج حاصل از دو رویکرد اخیر یعنی استاندارد ASTM و روابط تیر اویلر-برنولی وجود دارد. در نتیجه این روش را می‌توان با دقت خوبی برای شناسایی مدول یانگ در المان‌های سازه‌ای با شکل‌های پیچیده‌تر توسعه داد که روابط حاصل از استاندارد فوق‌الذکر و روابط تحلیلی به دلیل محدودیت‌های هندسی در آنجا کارایی ندارند.

**کلیدواژه‌ها:** مدول یانگ، تست مودال، بهرورسانی مدل، استاندارد ASTM، تیر اویلر-برنولی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۲۹

\*نویسنده مسئول: s\_shokrollahi@mut.ac.ir

### ۱- مقدمه

رفتار یک قطعه در برابر نیروهای وارده بر آن به خواص مکانیکی ماده بستگی دارد. مدول یانگ یکی از خواص مکانیکی اصلی در اجسام جامد بوده و بیانگر مقاومت ماده در برابر کشش یا خمش است. شناسایی کامل این خاصیت پیش از کاربرد یک قطعه، دارای اهمیت حیاتی بوده و بنابراین روش‌های تجربی زیادی برای تعیین آن توسعه یافته است [1]. این روش‌ها را می‌توان به دو گروه روش‌های استاتیکی و دینامیک تقسیم کرد [2]. روش‌های استاتیکی براساس اندازه‌گیری تنش و کرنش در طی تست‌های مکانیکی نظیر تست استاندارد کشش، تست خمش چهار نقطه و غیره هستند. برای محاسبه مدول یانگ استاتیکی، نمونه باید تا حدود ۴۰٪ از مقاومت ماده بارگذاری شود تا تغییر شکل قابل اندازه‌گیری مطمئنی حاصل شود. سپس مدول یانگ از روی شیب ناحیه خطی منحنی تنش-کرنش محاسبه می‌شود [3]. تا مدت‌ها مقادیر مدول یانگ با استفاده از روش‌های استاتیکی استخراج می‌شدند [4]. در ادامه، این مقادیر با استفاده از روش‌های ویسکو-آکوستیک یا فراصوتی اندازه‌گیری می‌شدند [5-8].

روش‌های دینامیک نسبت به روش‌های استاتیکی مزیت‌هایی نظیر دقت بهتر، قابلیت استفاده از نمونه‌هایی با ابعاد و اندازه‌های متغیر و قابلیت اندازه‌گیری در دماهای مختلف دارند. همچنین این روش‌ها غیرمخرب هستند و اندازه‌گیری می‌تواند برای همان نمونه تکرار شود. روش‌های دینامیک را می‌توان به دو گروه عمده فراصوتی و تشدید دسته‌بندی کرد. روش‌های فراصوتی بر پایه

اندازه‌گیری زمان گذر امواج از جامدات استوار هستند. با دانستن زمان گذر امواج، ابعاد و چگالی نمونه، می‌توان مدول آن را محاسبه کرد. این روش علاوه بر دقت، دارای مزایایی نظیر سرعت اندازه‌گیری و قابلیت اطمینان بالا است [9]. روش‌های تشدید بر پایه اندازه‌گیری فرکانس تشدید هستند. یعنی با دانستن فرکانس ارتعاشات آزاد یک جسم با هندسه معین، ابعاد و چگالی، می‌توان مدول آن را محاسبه کرد [10].

در این مقاله شناسایی مدول یانگ با استفاده از فرآیند بهرورسانی مدل المان محدود که یک روش معکوس بوده، مورد مطالعه قرار گرفته و نتیجه، با نتایج حاصل از استاندارد ASTM و روابط تیر اویلر-برنولی مقایسه شده است.

### ۲- معادلات بهرورسانی مدل بر پایه تحلیل حساسیت معکوس

"بهرورسانی مدل"، رویکردی موثر در توسعه یک مدل دینامیک سازه‌ای معتبر مبتنی بر روش اجزای محدود به شمار می‌رود. وجود عدم قطعیت‌های متعدد در فرآیند مدل‌سازی یک سیستم مکانیکی اعم از تقریب‌های مربوط به مدل‌سازی شرایط مرزی، خواص مکانیکی مواد، مدل‌سازی اتصالات و غیره موجب شده، محققان روش‌هایی را برای رفع این عوامل توسعه دهند که از آن جمله می‌توان به روش "بهرورسانی مدل اجزای محدود به کمک داده‌های تست مودال" اشاره نمود. بنابراین ساده‌ترین و عمومی‌ترین تعریف برای "بهرورسانی مدل" عبارت است از "تنظیم مدل تئوری براساس نتایج تست مودال به منظور کمینه‌کردن اختلافات بین رفتار تئوری و تجربی سازه" [11]. در واقع رویکرد مزبور رویه‌ای برای تعیین مقادیر صحیح پارامترهای مدل تحلیلی است، به طوری که مدل پس از آن بتواند با دقت قابل قبولی رفتار دینامیک مشاهده‌شده از سازه واقعی را شبیه‌سازی کند [12].

روش‌های بهرورسانی مدل در کلی‌ترین حالت به دو دسته روش‌های حوزه زمان و حوزه فرکانس تقسیم می‌شوند. در دسته اول، پاسخ سازه در حوزه زمان نظیر جابه‌جایی، سرعت و شتاب بازتولید می‌شود. این روش‌ها چندان عمومیت نیافته است. روش‌های حوزه فرکانس به دو دسته تقسیم می‌شوند. یک دسته مستقیماً از توابع پاسخ فرکانسی و دسته دیگر از داده‌های مودال نظیر فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌کنند. دسته اخیر را می‌توان به روش‌های کلاسیک و مدرن تقسیم نمود [12]. روش‌های کلاسیک نیز به دو دسته مستقیم و تکراری تقسیم می‌شوند.

تحلیل حساسیت در جنبه‌های مختلفی از طراحی سازه‌ها از جمله در بهینه‌سازی آنها کاربرد فراوانی دارد [13-15]. در طراحی سازه‌ها، تحلیل حساسیت به بررسی روابط بین متغیرهای طراحی - که در دسترس طراح قرار دارد- و پاسخ‌های استاتیکی یا دینامیک سازه - که با استفاده از قوانین مکانیک تعیین می‌شوند- اطلاق می‌شود [13]. یعنی وابستگی پاسخ‌های سازه نظیر جابه‌جایی، تنش، کرنش، فرکانس طبیعی، بار کماتش، پاسخ آکوستیک، پاسخ فرکانسی، پاسخ ترموالاستیک و عمر خستگی به پارامترهایی نظیر خواص مواد، ابعاد و اندازه‌ها، شکل قطعه و متغیرهای طراحی پیکره‌بندی از طریق معادلات حاکم بر مکانیک سازه تعیین می‌شوند.

الگوریتم حساسیت ویژه معکوس، احتمالاً موفق‌ترین روش در میان روش‌های تکراری برای بهرورسانی مدل‌های المان محدود بر مبنای داده‌های حاصل از آزمون‌های ارتعاشی است [14]. تکنیک حساسیت بر پایه خطی‌سازی یک رابطه معمولاً غیرخطی بین خروجی‌های قابل اندازه‌گیری از سازه و پارامترهایی از مدل است که

با توجه به معادله ۳ مشخص می‌شود که داده‌های تجربی، اغتشاشاتی از پارامترهای طراحی حول مدل اولیه هستند. بنابراین برای موثر بودن این تکنیک، داده‌های تجربی و مدل اولیه باید نزدیک به یکدیگر باشند و سودمندی این روش با در نظر گرفتن فقط ترم مرتبه اول، محدود به اصلاحات کوچک در سازه است. ماتریس حساسیت به عنوان شاخصی برای هدایت مسیر جست‌وجوی پارامترها عمل می‌کند. این کار با اعمال حق تقدم بیشتر به پارامترهای حساس‌تر نسبت به تابع هدف انجام می‌شود. ماتریس حساسیت در معادله ۵ را می‌توان برای تمام خواص فیزیکی المان (مواد، هندسه، شرایط مرزی و غیره) با مشتق‌گیری مستقیم یا با تکنیک‌های اغتشاش محاسبه نمود. این امر بستگی به این دارد که ماتریس‌های جرم و سفتی چگونه با پارامتر مورد نظر ارتباط دارند، صریح یا ضمنی. محاسبه حساسیت ویژه یکی از مراحل بسیار زمان‌گیر در فرآیند به‌روزرسانی است. با صرف نظر از ترم اغتشاش، معادله به‌روزرسانی ۴ را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \\ \dots \\ \Delta\lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda_1^{(a)}}{\partial p_1} & \frac{\partial\lambda_1^{(a)}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial\lambda_1^{(a)}}{\partial p_n} \\ \frac{\partial\lambda_2^{(a)}}{\partial p_1} & \frac{\partial\lambda_2^{(a)}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial\lambda_2^{(a)}}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\lambda_m^{(a)}}{\partial p_1} & \frac{\partial\lambda_m^{(a)}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial\lambda_m^{(a)}}{\partial p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \dots \\ \Delta p_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

که در آن  $\Delta\lambda_j = \lambda_j^{(e)} - \lambda_j^{(a)}$  است. مقادیر ویژه در این حالت به صورت مربع فرکانس‌های طبیعی تعریف می‌شوند، یعنی  $\lambda_j = \omega_j^2$  بوده که  $j = 1, 2, \dots, m$  است. ترم‌های  $\lambda_j^{(a)}$  و  $\lambda_j^{(e)}$  به ترتیب بیانگر مربع زامین فرکانس طبیعی حاصل از آزمون و مدل بوده که مقدار عبارت اخیر متأثر از پارامترهای نامعین فیزیکی  $\{p\}$  است. معادله ۶ می‌تواند کم‌معین، معین یا بیش‌معین باشد. بسته به اینکه تعداد مشاهدات ( $m$ ) کوچک‌تر از، برابر با، یا بزرگ‌تر از تعداد پارامترها ( $n$ ) باشد. در هر حال تصحیحات مورد نظر در پارامترها یعنی بردار  $\Delta p_i$  در معادله ۶ را می‌توان با تکنیک شبه‌معکوس به دست آورد [17]:

$$\{\Delta p\} = [S]^+ \{\Delta\lambda\} \quad (7)$$

که  $[S]^+$  شبه‌معکوس ماتریس حساسیت  $[S]$  است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[S]^+ = \begin{cases} ([S]^T [S])^{-1} [S]^T & \text{for } m < n \\ [S]^{-1} & \text{for } m = n \\ [S]^T ([S][S]^T)^{-1} & \text{for } m > n \end{cases} \quad (8)$$

معادله ۷، در هر مرحله از تکرار برای دستیابی مقدار  $\Delta p_i = p_u - p_i$  حل می‌شود.  $p_i$  و  $p_u$  به ترتیب بردار مقادیر به‌روز شده و مقادیر جاری پارامترها هستند. سپس مدل به روز می‌شود تا عبارت  $p_{i+1} = p_i + \Delta p_i$  به دست آید. این روند تکرار می‌شود تا مقادیر متوالی  $p_i$  و  $p_{i+1}$  به قدر کافی به یکدیگر همگرا شده باشند. چون عبارت‌های مرتبه ۲ و بالاتر در معادله ۶ حذف شده‌اند، همگرایی

نیاز به تصحیح دارند [16].

معادلات به‌روزرسانی را می‌توان برحسب حساسیت مقادیر ویژه یا حساسیت بردارهای ویژه استخراج نمود. حساسیت مقادیر ویژه غیرتکراری نسبت به پارامترهای طراحی را می‌توان با معلوم‌بودن ماتریس‌های جرم و سفتی و بردارهای ویژه محاسبه نمود. ولی حساسیت بردارهای ویژه نیازمند دانش قابل توجهی از تئوری ریاضی است. در این مقاله از معادلات به‌روزرسانی بر پایه حساسیت مقادیر ویژه نسبت به مدول یانگ استفاده شده است. حال یک دسته از توابع ریاضی خوش‌رفتار  $Z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) را با پارامترهای  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )، در نظر بگیرید. اگر  $P$  بردار پارامترهای  $p_i$  باشد، در این حالت در همسایگی نقطه  $P_0$  می‌توان توابع  $Z_j$  را با بسط تیلور نمایش داد [15]:

$$Z_j(P) = Z_j(P_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z_j}{\partial p_i} \Delta p_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 Z_j}{\partial p_i \partial p_k} \Delta p_i \Delta p_k + \dots, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

محاسبه ترم‌های مرتبه بالای این بسط زمان‌گیر است. با چشم‌پوشی از ترم‌های مرتبه دوم و بالاتر، معادله ۱ به صورت تقریبی زیر نوشته می‌شود:

$$Z_j(P) \approx Z_j(P_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z_j}{\partial p_i} \Delta p_i, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

اگر پاسخ‌های اندازه‌گیری شده شامل فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها یا توابع پاسخ فرکانسی و نتایج حاصل از مدل به ترتیب با  $Z^{(a)}$  و  $Z^{(e)}$  نشان داده شوند و با فرض اینکه پاسخ‌های اندازه‌گیری شده از سازه را بتوان با نتایج حاصل از مدل به‌روز شده ناشی از یک مدل اولیه نمایش داد، معادله ۲ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$Z_j^{(e)} \approx Z_j^{(a)} + [S_j] \Delta p_i, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

اگر مقادیر ویژه  $\lambda_j$ ، به عنوان کمیت دینامیک مطلوب در نظر گرفته شوند و از اغتشاشات صرف نظر نشود، فرم کلی معادلات در بسیاری از فرآیندهای به‌روزرسانی شبیه به معادله ۴ می‌شود:

$$[S]_{m \times n} \{\Delta p\}_{n \times 1} + \{\varepsilon\}_{m \times 1} = \{\Delta\lambda\}_{m \times 1} \quad (12)$$

که در حالت کلی،  $[S]_{m \times n}$  ماتریس حساسیت یا ماتریس پیشگوا،  $\{\varepsilon\}_{m \times 1}$  بردار اغتشاشات تصادفی نامعلوم،  $\{\Delta\lambda\}_{m \times 1}$  بردار مشاهدات تجربی و  $\{\Delta p\}_{n \times 1}$  بردار پارامترهای به‌روزرسانی است.  $m$  تعداد پاسخ‌های اندازه‌گیری شده و  $n$  تعداد پارامترهای به‌روزشونده است. ماتریس حساسیت  $[S_j]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[S_j]_{m \times n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda_j^{(a)}}{\partial p_i}, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (13)$$

که  $M$  و  $K$  به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی مدل المان محدود بوده و  $\phi_j$  در واقع زامین شکل مود است. مشاهده می‌شود که تنها زامین مقدار ویژه و بردار ویژه برای محاسبه تمامی حساسیت‌های مقدار ویژه زام کافی است.

اگر پارامتر به‌روزرسانی تنها در ماتریس‌های سفتی (نظیر مدول یانگ) یا جرم (نظیر چگالی) باشد، در آن صورت معادله ۱۲ به ترتیب به شکل معادله‌های ۱۳ و ۱۴ تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_i} = \phi_j^T \left[ \frac{\partial K}{\partial p_i} \right] \phi_j \quad (13)$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_i} = -\lambda_j \phi_j^T \left[ \frac{\partial M}{\partial p_i} \right] \phi_j \quad (14)$$

قدم نهایی در مسیر استخراج معادلات به‌روزرسانی بر پایه تحلیل حساسیت، تعریف یک باقیمانده و تابع هدف است. تابع هدف باید نسبت به تغییرات کوچک در پارامترها حساس باشد. حالت کلی تابع هدف که فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را ترکیب می‌کند، به صورت زیر است:

$$J(p) = \sum_i W_{\lambda i}^2 [\lambda_i^{(a)}(p) - \lambda_i^{(e)}]^2 + \sum_i W_{\phi i}^2 \sum_j [\phi_{ji}^{(a)}(p) - \phi_{ji}^{(e)}]^2 \quad (15)$$

که  $\lambda_i^{(e)}$  و  $\phi_{ji}^{(e)}$  به ترتیب بیانگر زامین مقدار ویژه و شکل مود در نقطه زام حاصل از آزمون است. همچنین  $\lambda_i^{(a)}$  و  $\phi_{ji}^{(a)}$  به ترتیب بیانگر زامین مقدار ویژه و شکل مود در نقطه زام ناشی از مدل تحلیلی است که برحسب تابعی از پارامترهای فیزیکی  $\{p\}$  بیان می‌شوند.  $W_{\lambda i}$  و  $W_{\phi i}$  به ترتیب ضرایب وزنی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها هستند. چون فرکانس‌های طبیعی با دقت بهتری نسبت به شکل مودها اندازه‌گیری می‌شوند، ضرایب وزنی آنها مقادیر بزرگ‌تری را به خود اختصاص می‌دهند. همچنین ممکن است ضرایب وزنی فرکانس‌های طبیعی در مودهای مختلف متفاوت باشند. رابطه ۱۵ را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف نمود:

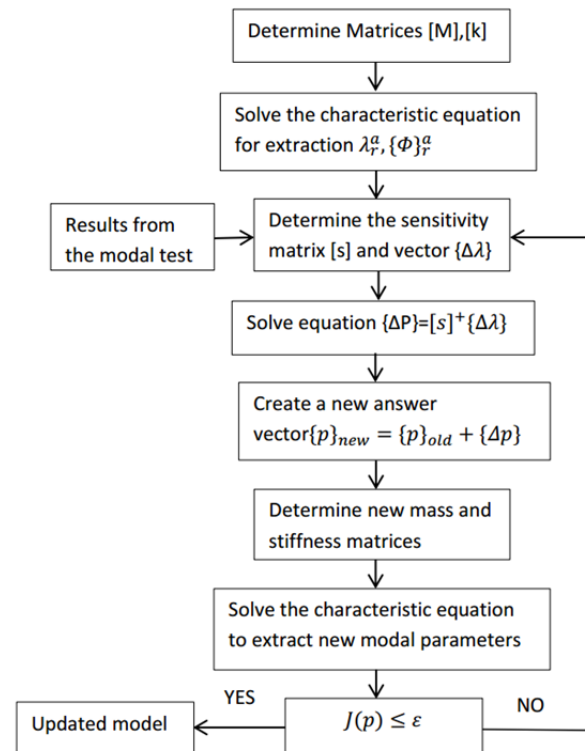
$$J(p) = \sum_i W_{\lambda i}^2 \left[ \frac{\lambda_i^{(a)}(p) - \lambda_i^{(e)}}{\lambda_i^{(e)}} \right]^2 + \sum_i W_{\phi i}^2 \sum_j \left[ \frac{\phi_{ji}^{(a)}(p) - \phi_{ji}^{(e)}}{\max\{\phi_i^{(e)}\}} \right]^2 \quad (16)$$

اگر فقط نرم اقلیدسی باقیمانده فرکانسی به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شود، معادله ۱۶ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$J(p) = \sqrt{\sum_{i=1}^m W_{\lambda i}^2 \left[ \frac{\lambda_i^{(a)}(p) - \lambda_i^{(e)}}{\lambda_i^{(e)}} \right]^2} \quad (17)$$

در معادله ۱۷،  $W_{\lambda i}$  ضرایب وزنی متناظر با مقادیر ویژه بوده و انتخاب مقادیر آنها متأثر از دو عامل دقت اندازه‌گیری در مودهای

جواب نیاز به تکرارهای زیادی دارد، به‌ویژه هنگامی که  $\{\Delta \lambda\}$  شامل مقادیر بزرگ باشد. در مواردی که اختلاف بین مدل‌های تحلیلی و تجربی زیاد باشد، صحت استفاده از بسط تیلور تا مرتبه اول، تضعیف شده و ممکن است فرآیند تکرار واگرا شود. الگوریتم تحلیل حساسیت ویژه در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱) فلوجارت به‌روزرسانی مدل به روش حساسیت معکوس<sup>[۱۲]</sup>

اگر شکل استاندارد معادله مقدار ویژه سیستم به صورت زیر نوشته شود:

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = \{0\} \quad (9)$$

$M$  و  $K$  به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی مدل المان محدود بوده و  $\phi$  شکل مود و  $\lambda$  مقدار ویژه است. در این صورت، عبارت‌های ماتریس حساسیت را می‌توان با مشتق‌گیری از معادله مشخصه فرکانسی ۹ به دست آورد:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} ([K - \lambda_j M] \phi_j) = [0] \quad (10)$$

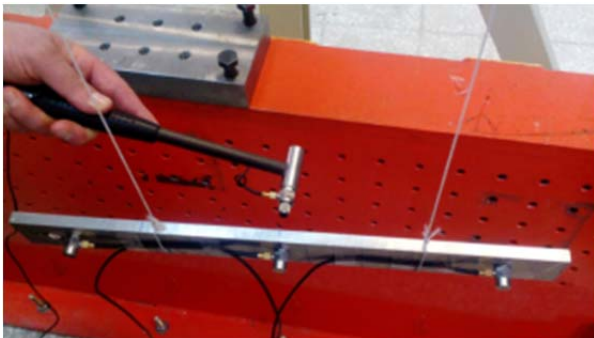
با انجام عملیات مشتق در معادله ۱۰ نسبت به  $p_i$ :

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial p_i} M - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial p_i} \right] \phi_j + [K - \lambda_j M] \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i} = [0]$$

با ضرب عبارت  $\phi_j^T$  از سمت چپ در طرفین معادله ۱۱ و توجه به اینکه  $\phi_j^T [K - \lambda_j M] = [0]$  است و با توجه به اینکه شکل مودها نسبت به ماتریس جرم نرمال شده‌اند؛  $\phi_j^T M \phi_j = 1$ ، می‌توان مشتق مقدار ویژه  $\lambda_j$  را نسبت به پارامتر  $p_i$  به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_i} = \phi_j^T \left[ \frac{\partial K}{\partial p_i} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial p_i} \right] \phi_j \quad (12)$$

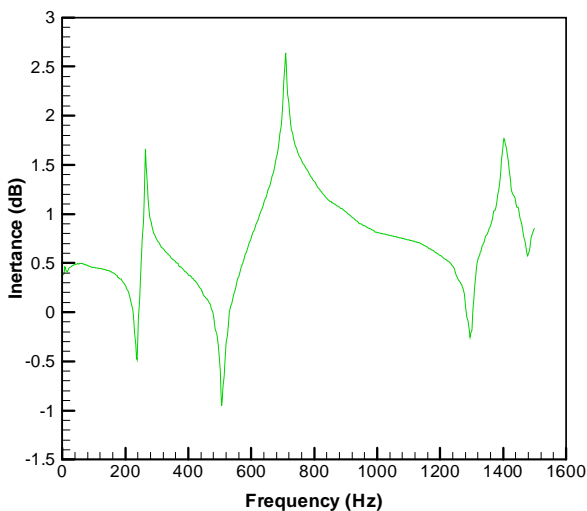
باشد. در انتخاب طول ریسمان باید به این نکته توجه نمود که فرکانس بزرگ‌ترین مود جسم صلب که در این حالت حرکت پاندولی تیر حول نقطه‌آویز ریسمان است، باید کمتر از ۲۰٪ فرکانس اولین مود الاستیک تیر باشد [19]. چون طول ریسمان‌ها بیش از یک‌متر است، این الزام به‌راحتی ارضا می‌شود.



شکل ۴) وضعیت نمونه اول آلومینیومی در تست مودال

تحریک سازه با چکش مودال بوده که مجهز به ترانسدیوسر نیرو است. برای قابلیت اطمینان بیشتر در ثبت داده‌ها از سه عدد شتاب‌سنج و سه ضربه در نقطه تحریک استفاده شده است. وزن هر شتاب‌سنج ۹ گرم بوده و وزن سازه حدود ۵۲۲ گرم است. چون نسبت جرم شتاب‌سنج‌ها به جرم سازه حدود ۵/۲٪ است، تاثیر چندانی در دینامیک سازه نمی‌گذارد. زیرا از نسبت توصیه‌شده (که حداکثر ۱۰٪ است) فاصله دارد [20].

برای پردازش سیگنال ابتدا مراحل اصلاح سیگنال شامل فیلترکردن، تقویت و عبور از پنجره طی می‌شود تا سیگنال مناسبی برای گسسته‌سازی و انتقال به حوزه فرکانس فراهم شود. پس از انتقال داده‌ها از حوزه زمان به حوزه فرکانس با استفاده از تبدیل فوریه سریع (FFT) می‌توان از نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی (FRF)، برای تعیین فرکانس‌های طبیعی استفاده نمود. تابع پاسخ مورد استفاده در اینجا از نوع اکسلرانس بوده که نسبت دامنه شتاب به دامنه نیرو است. در نمودار ۱، تابع پاسخ فرکانسی مربوط به سازه آلومینیومی نشان داده شده است که نقاط قله در آن معرف فرکانس‌های طبیعی هستند. فرکانس‌های طبیعی حاصل در جدول ۳ آورده شده است.



نمودار ۱) تابع پاسخ فرکانسی تیر نمونه اول آلومینیومی

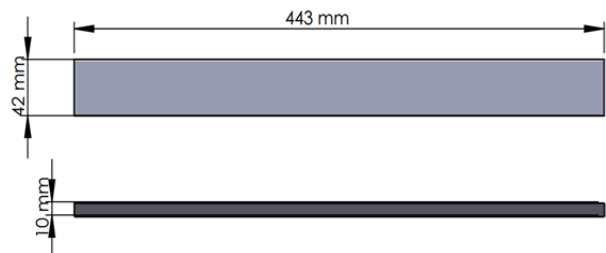
مختلف و میزان اهمیت مودها برای مشارکت در به‌روزرسانی است. تابع هدف به‌طور پیوسته‌ای با تنظیم پارامترهای  $\{p\}$  کمینه می‌شود. فرآیند زمانی متوقف می‌شود که مقدار معادله ۱۷ به یک تکرانس از پیش‌تعریف‌شده‌ای برسد یا اینکه بیشینه تکرارهای تعریف‌شده را پیموده باشد.

### ۳- نمونه‌های مورد مطالعه

در این تحقیق دو نمونه از تیرهای آلومینیومی با آلیاژ AL 7075-T651 مورد مطالعه قرار گرفته است. مقادیر نامی برخی از خواص فیزیکی و مکانیکی این آلیاژ در جدول ۱ [18] آورده شده است. ابعاد هندسی نمونه اول  $10 \times 42 \times 443$  میلی‌متر است (شکل ۲).

جدول ۱) مقادیر نامی برخی خواص فیزیکی و مکانیکی آلیاژ AL 7075-T651 [18]

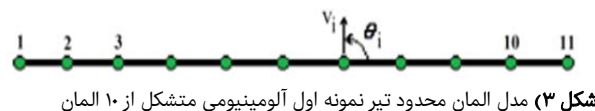
خواص	مقدار	واحد
مدول یانگ	۷۱/۷	گیگاپاسکال
نسبت پواسون	۰/۳۳	-
مدول برشی	۲۶/۹	گیگاپاسکال
چگالی	۲/۸۱	g/cm <sup>3</sup>
استحکام کششی	۵۷۲	مگاپاسکال
استحکام تسلیم	۵۰۳	مگاپاسکال



شکل ۲) هندسه اولین نمونه مورد مطالعه

### ۳-۱- مدل المان محدود

مدل‌سازی با المان‌های تیر برنولی- اویلر انجام شده است. کل تیر به ۱۰ المان مساوی تقسیم شده که شماتیک آن در شکل ۳ نشان داده شده است. کلیه مراحل شبیه‌سازی و تحلیل حساسیت معکوس با کدنویسی در نرم‌افزار MATLAB انجام شده است. فرکانس‌های طبیعی حاصل از تحلیل مودال مدل اولیه المان محدود در جدول ۲ آورده شده است.



شکل ۳) مدل المان محدود تیر نمونه اول آلومینیومی متشکل از ۱۰ المان

جدول ۲) فرکانس‌های طبیعی نمونه اول آلومینیومی حاصل از تحلیل مودال

شماره مود	فرکانس (هرتز)
اول	۲۴۶/۶
دوم	۶۹۰/۲
سوم	۱۳۳۵/۸

### ۳-۲- تست مودال

شکل ۴ وضعیت تیر آلومینیومی را در تست مودال نشان می‌دهد. با کمک دو عدد ریسمان، شرط مرزی رها- رها شبیه‌سازی شده است. نقاط آویز تیر در نقاط گره مود اول است (در حدود 0.24L از طرفین تیر) تا کمترین تاثیر را بر ارتعاش تیر در این مود داشته

## ۳-۴- استخراج مدول دینامیک با روابط ASTM

در استاندارد ASTM E1876-01 [21] برای محاسبه مدول یانگ با استفاده از فرکانس خمشی اصلی برای یک میله با مقطع مستطیلی، رابطه ۱۹ ارائه شده است:

$$E = 0.9465(mf_f^2/b)(L^3/t^3)T_1 \quad (19)$$

در رابطه ۱۹،  $E$  مدول یانگ به پاسکال،  $m$  جرم تیر به گرم،  $b$ ،  $L$  و  $t$  به ترتیب عرض، طول و ضخامت تیر به میلی‌متر،  $f_f$  فرکانس اصلی خمشی تیر به هرتز و  $T_1$  ضریب تصحیح بی‌بعد است که از رابطه ۲۰ محاسبه می‌شود:

$$T_1 = 1 + 6.585(1 + 0.0752\nu + 0.8109\nu^2)\left(\frac{t}{L}\right)^2 - 0.868\left(\frac{t}{L}\right)^4 - \left[ \frac{8.340(1 + 0.2023\nu + 2.173\nu^2)\left(\frac{t}{L}\right)^4}{1.000 + 6.338(1 + 0.1408\nu + 1.536\nu^2)\left(\frac{t}{L}\right)^2} \right] \quad (20)$$

که  $\nu$  ضریب پواسون است. اگر طول تیر از ۲۰ برابر ضخامت آن بزرگ‌تر باشد ( $\frac{L}{t} \geq 20$ )، برای محاسبه  $T_1$  می‌توان از رابطه ۲۱ استفاده نمود:

$$T_1 = 1.000 + 6.585\left(\frac{t}{L}\right)^2 \quad (21)$$

مقدار حاصل از رابطه ۱۹ برای مدول یانگ برابر با ۷۲/۸۸۰ گیگاپاسکال محاسبه شده است.

## ۳-۵- استخراج مدول یانگ براساس تئوری اویلر-برنولی

با توجه به اینکه از مدل تیر اویلر-برنولی در مدل‌سازی المان محدود تیر آلومینیومی استفاده شده است، می‌توان از رابطه ۲۲ که برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی یک تیر دوسر رها با مدل برنولی- اویلر مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای محاسبه مدول یانگ استفاده نمود [22]. پارامترهای موثر در تعیین فرکانس عبارت از ابعاد هندسی تیر (ضخامت، عرض و طول) و خواص مواد سازنده تیر بوده که مهم‌ترین آنها عبارت از مدول یانگ و چگالی هستند.

$$\omega_n = \frac{\alpha_n}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \rightarrow E = \left(\frac{\omega_n l^2}{\alpha_n}\right)^2 \frac{\rho A}{I} \quad (22)$$

مقادیر ضرایب  $\alpha$  برای شرط مرزی رها و برای ۵ مود اول در جدول ۴ آورده شده است. نتیجه حاصل برای مدول یانگ با استفاده از فرکانس مود اول برابر با ۷۲/۴۵۶ گیگاپاسکال و مدول یانگ میانگین با استفاده از فرکانس ۳ مود اول برابر با ۶۹/۸۸۱ گیگاپاسکال است.

جدول ۴) مقادیر  $\alpha$  برای شرط مرزی رها [22]

شماره مود	۱	۲	۳	۴	۵
مقدار $\alpha$	۲۲/۴	۶۱/۷	۱۲۱	۱۹۹/۹	۲۹۸/۶

## ۴- مقایسه نتایج و بحث

جدول ۵ نتایج حاصل از سه روش مختلف برای شناسایی مدول

جدول ۳) فرکانس‌های طبیعی نمونه اول آلومینیومی حاصل از آزمون مودال

شماره مود	فرکانس (هرتز)
اول	۲۶۶/۲۹
دوم	۷۱۰/۳۸
سوم	۱۴۰۵/۹۸

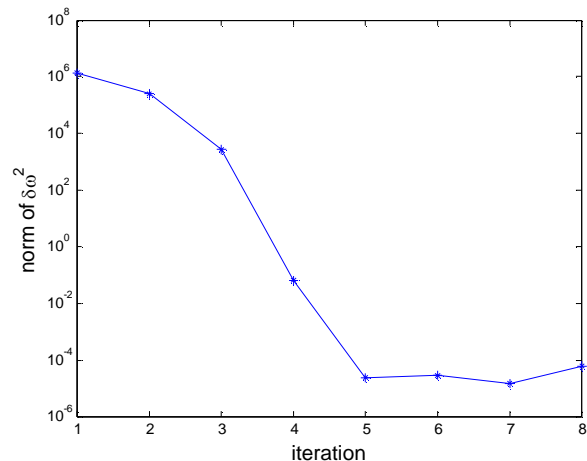
## ۳-۳- شناسایی مدول دینامیک با به‌روزرسانی مدل

با انتخاب مدول یانگ به‌عنوان پارامتر، به‌روزرسانی با روش حساسیت مقادیر ویژه انجام شده است. تابع هدف در این مساله به‌صورت کمینه‌سازی نرم اقلیدسی مقادیر ویژه تحلیلی و تجربی به‌شکل معادله ۱۸ تعریف شده است:

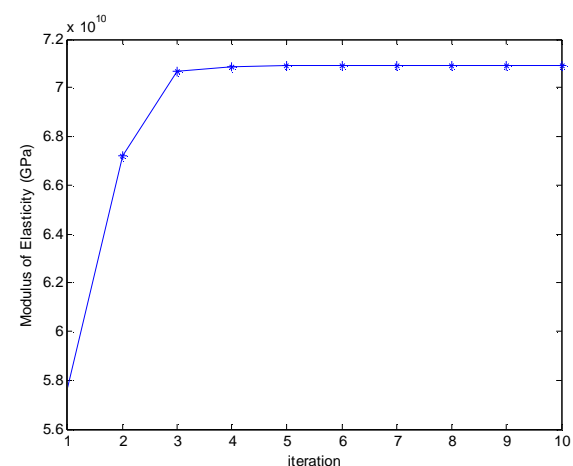
$$R = \|\{\lambda\}^a - \{\lambda\}^e\|_2 \quad (18)$$

که  $\{\lambda\}^e$  و  $\{\lambda\}^a$  به ترتیب مقادیر ویژه حاصل از مدل و آزمون است. باقیمانده  $R$  شاخصی برای میزان انطباق مدل به‌روزرشده با داده‌های تجربی است. نمودار ۲، فرآیند کمینه‌شدن تابع هدف را در فرآیند به‌روزرسانی نشان می‌دهد. همگرایی و کاهش نرم خطاها پس از ۵ تکرار اتفاق افتاده که بیانگر موثر بودن الگوریتم حساسیت در به‌روزرسانی مدل سازه‌ها است.

نمودار ۳، همگرایی مقدار پارامتر به‌روزرسانی (مدول یانگ) را نشان می‌دهد. در نهایت مقدار مدول یانگ نمونه اول آلومینیومی با استفاده از این روش و با مشارکت سه مود اول به میزان ۷۱/۱۰۰ گیگاپاسکال شناسایی می‌شود.



نمودار ۲) روند کاهش نرم خطا بین فرکانس‌های تجربی و عددی



نمودار ۳) همگرایی پارامتر در فرآیند به‌روزرسانی مدل

جدول ۶) فرکانس‌های طبیعی نمونه دوم آلومینیومی حاصل از آزمون مودال

شماره مود	فرکانس (هرتز)
اول	۷۰/۵۳
دوم	۱۹۵/۸۰
سوم	۶۴۱/۲۲
چهارم	۹۶۴/۷۷
پنجم	۱۳۳۵/۴۲

جدول ۷) مقایسه نتایج حاصل برای مدول یانگ نمونه دوم با روش‌های مختلف

روش شناسایی	مدول یانگ (گیگاپاسکال)
بهرورزسانی مدل با استفاده از ۵ مود اول تیر	۷۱/۶۳۰
استاندارد ASTM E1876-01	۶۹/۱۲۷
تئوری تیر اویلر-برنولی (فقط مود اول)	۶۸/۸۹۳
تئوری تیر اویلر-برنولی (میانگین ۵ مود اول)	۷۰/۹۲۶

### ۵- نتیجه‌گیری

مقایسه نتایج حاصل از بهرورزسانی مدل‌های المان محدود با نتایج حاصل از روش‌های استاندارد ASTM و تئوری تیر اویلر-برنولی مبین آن است که روش بهرورزسانی از دقت خوبی برای شناسایی مدول یانگ فلزات برخوردار است. در روش ASTM، تنها از فرکانس اول سازه استفاده می‌شود و اگر اندازه‌گیری‌ها اندکی دارای خطا باشند، در نتایج آن تاثیر دارند. ولی در روش تئوری اویلر-برنولی و بهرورزسانی می‌توان چندین مود را در نظر گرفت و مقادیر حاصل از این دو روش دقت بهتری داشته و همگرایی بیشتری نسبت به روش ASTM دارند. بنابراین رویکرد معرفی‌شده در این مقاله پتانسیل خوبی برای شناسایی مدول یانگ در فلزات دارد و با توسعه این روش می‌توان از آن برای بهرورزسانی مدل المان محدود سازه‌های پیچیده‌تر با دقت قابل قبولی استفاده نمود. از آنجایی که روش ASTM و همچنین تئوری تیر اویلر-برنولی، تنها در مورد سازه‌هایی با هندسه خاص قابل کاربرد هستند، ولی رویکرد بهرورزسانی مدل، فاقد این محدودیت است. می‌توان این روش را در شناسایی مدول یانگ المان‌های سازه‌ای با هندسه‌های پیچیده‌تر بدون نیاز به تهیه نمونه‌های استاندارد از آنها- مورد استفاده قرار داد.

**تشکر و قدردانی:** موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

**تاییدیه اخلاقی:** موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

**تعارض منافع:** موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

**سهم نویسندگان:** فرهاد عادل (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۳۴٪)؛ سعید شکراللهی (نویسنده دوم)، روش‌شناس پژوهشگر اصلی (۳۳٪)؛ عرفان بیگی (نویسنده سوم)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر کمکی (۳۳٪)

**منابع مالی:** موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

### ۶- فهرست علائم

A	سطح مقطع تیر (m <sup>2</sup> )
b	عرض تیر (میلی‌متر)
E	مدول یانگ (گیگاپاسکال)
f	فرکانس طبیعی (هرتز)
G	مدول برشی (گیگاپاسکال)
I	ممان اینرسی مقطع (m <sup>4</sup> )
J	تابع هدف
K	ماتریس سختی
L	طول تیر (میلی‌متر)
M	ماتریس جرم
m	جرم تیر (گرم)

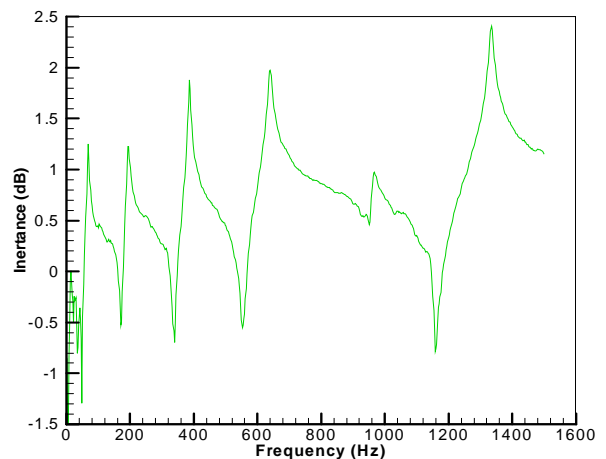
یانگ نمونه اول آلومینیومی به ابعاد ۴۴۳ در ۴۲ در ۱۰ میلی‌متر را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که همگرایی بسیار خوبی بین نتایج سه روش وجود دارد و نتیجه حاصل از شناسایی مدول یانگ با استفاده از رویکرد بهرورزسانی مدل المان محدود، کاملاً قابل اعتماد است.

برای بررسی بیشتر این رویکرد، نمونه دیگری از آلومینیوم با جنس مشابه ولی با طولی متفاوت و به ابعاد ۸۵۰ در ۴۲ در ۱۰ میلی‌متر مورد بررسی قرار گرفت. جرم این تیر حدود یک کیلوگرم (۱۰۰۳ گرم) بوده و چیدمان مورد استفاده برای آزمون مودال آن در شکل ۵ نشان داده شده است. از ۵ عدد شتاب‌سنج با چیدمان متقارن برای ثبت داده‌های آزمون استفاده شده است. در نمودار ۴، تابع پاسخ فرکانسی مربوط به سازه آلومینیومی نشان داده شده است که نقاط قله در آن معرف فرکانس‌های طبیعی هستند. فرکانس‌های طبیعی این تیر در جدول ۶ آورده شده است.

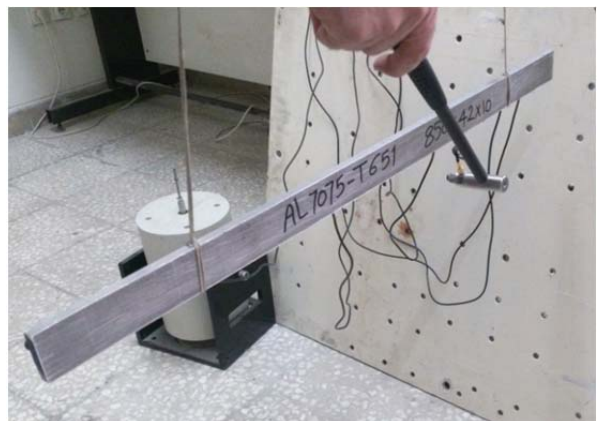
روند مورد استفاده در شناسایی مدول یانگ در مورد این تیر نیز تکرار شده و نتایج حاصل از سه روش مذکور برای شناسایی مدول یانگ در جدول ۷ آورده شده است. مشاهده می‌شود که کماکان همگرایی خوبی بین نتایج مذکور وجود دارد.

جدول ۵) مقایسه نتایج حاصل برای مدول یانگ نمونه اول با روش‌های مختلف

روش شناسایی	مدول یانگ (گیگاپاسکال)
بهرورزسانی مدل با استفاده از ۳ مود اول تیر	۷۱/۱۰۰
استاندارد ASTM E1876-01	۷۲/۸۸۰
تئوری تیر اویلر-برنولی (فقط مود اول)	۷۲/۴۵۶
تئوری تیر اویلر-برنولی (میانگین ۳ مود اول)	۶۹/۸۸۱



نمودار ۴) تابع پاسخ فرکانسی تیر دوم آلومینیومی



شکل ۵) وضعیت نمونه دوم آلومینیومی در تست مودال



- 10- Pradhan R, Dhara AK, Panchadhyayee P, Syam D. Determination of Young's modulus by studying the flexural vibrations of a bar: Experimental and theoretical approaches. *European Journal of Physics*. 2016;37(1):015001.
- 11- Mottershead JE, Friswell MI. Model Updating In Structural Dynamics: A Survey. *Journal of Sound and Vibration*. 1993;167(2):347-375.
- 12- Adel F, Shokrollahi S, Jamal-Omidi M, Ahmadian H. A model updating method for hybrid composite/aluminum bolted joints using modal test data. *Journal of Sound and Vibration*. 2017;396:172-185.
- 13- Choi KK, Kim NH. Structural sensitivity analysis and optimization 1: Linear systems. New York: Springer Science & Business Media; 2005.
- 14- Tortorelli DA, Michaleris P. Design sensitivity analysis: Overview and review. *Inverse Problems in Engineering*. 1994;1(1):71-105.
- 15- Haug AJ, Choi KK, Komkov V. Design sensitivity analysis of structural systems. Orlando FL: Academic Press; 1986.
- 16- Mottershead JE, Link M, Friswell MI. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2011;25(7):2275-2296.
- 17- Demmel JW. Applied numerical linear algebra. Philadelphia: SIAM; 1997.
- 18- ASM Aerospace Specification Metals Inc. Aluminum 7075-T6, 7075-T651 [Internet]. Pompano Beach FL: ASM Aerospace Specification Metals Inc; 2018 [cited 2018 Dec 30]. Available from: [asm.matweb.com/search/GetReference.asp?bassnum=M A7075T6](http://asm.matweb.com/search/GetReference.asp?bassnum=M A7075T6)
- 19- Ewins DJ. Modal testing: Theory, practice and application. 2<sup>nd</sup> Edition. Baldock: Research Studies Press; 2000.
- 20- International Organization for Standardization. ISO 2954: 2012: Mechanical vibration of rotating and reciprocating machinery -- requirements for instruments for measuring vibration severity [Internet]. Geneva: ISO; 2012 [cited 2018 Feb 21]. Available from: <https://www.iso.org/standard/21835.html>
- 21- ASTM. ASTM E1876-01: Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by impulse excitation of vibration [Internet]. West Conshohocken PA: ASTM International; 2001 [cited 2018 Feb 21]. Available from: <https://www.astm.org/DATABASE.CART/HISTORICAL/E1876-01.htm>
- 22- Han SM, Benaroya H, Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*. 1999;225(5):935-988.

پارامتر به روزرسانی	$p$
ماتریس حساسیت	$S$
ضخامت تیر (میلی متر)	$t$
ضریب تصحیح بی بعد	$T_1$
ضریب وزنی	$W$
تابع ریاضی خوش رفتار	$Z$
<b>علامه یونانی</b>	
ضرایب شرط مرزی رها- رها	$\alpha$
بردار اغتشاش	$\varepsilon$
مقدار ویژه	$\lambda$
چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )	$\rho$
ضریب پواسون	$\nu$
بردار ویژه	$\phi$
فرکانس طبیعی زاویه ای (هرتز)	$\omega$

### منابع

- 1- Shabani R, Honarvar F. Young modulus measurement by ultrasonic method. *Journal of Vibration and Sound*. 2016;5(10):59-66. [Persian]
- 2- Wilson F, Lord Jr AE. Young's modulus determination via simple, inexpensive static and dynamic measurements. *American Journal of Physics*. 1973;41(5):653.
- 3- Lord JD, Morrell R. Comparison of static and dynamic methods for measuring stiffness of high modulus steels and metal composites. *Canadian Metallurgical Quarterly*. 2014;53(3):292-299.
- 4- Turvey K. An undergraduate experiment on the vibration of a cantilever and its application to the determination of Young's modulus. *American Journal of Physics*. 1990;58(5):483.
- 5- Massa A, Rusinek A, Klószak M. Method for determination of the dynamic elastic modulus for composite materials. *Engineering Transactions*. 2013;61(4):301-315.
- 6- Cheng CH, Johnston DH. Dynamic and Static Moduli. *Geophysical Research Letters*. 1981;8(1):39-42.
- 7- Olsen GT, Wolfenden A, Hebsur MG. Experimental investigation of the dynamic elastic modulus and vibration damping in  $\text{MoSi}_2$ -30% $\text{Si}_3\text{N}_4$  as a function of temperature. *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2000;9(1):116-119.
- 8- Srikanth N, Lim CV, Gupta M. The modelling and determination of dynamic elastic modulus of magnesium based metal matrix composites. *Journal of Materials Science*. 2000;35(18):4661-4666.
- 9- Hu E, Wang W. The elastic constants measurement of metal alloy by using ultrasonic nondestructive method at different temperature. *Mathematical Problems in Engineering*. 2016;2016:6762076.