



## Investigation of the Effect of Shroud on Natural Frequencies of a Rotating Multi Blade System

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Koohestani S.\* PhD

#### How to cite this article

Koohestani S. Investigation of the Effect of Shroud on Natural Frequencies of a Rotating Multi Blade System. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(8):1889-1896.

### ABSTRACT

In this study, effect of shroud on dynamic characteristics of a rotating multi blade system is investigated. The main aim of this study is to investigate the effect of shroud stiffness and shroud configuration on the system natural frequency. For this purpose, natural frequencies of various systems (in terms of the position, where the blade is connected to the shroud and number of blades, which are connected together with a shroud) via different degrees of shroud stiffness and different configurations of shroud have been compared to show how this parameters affect the natural frequencies of the system. In this study, the shrouds have been considered as the discrete springs with corresponding stiffness values. The vibration frequency characteristics have been analyzed, using assumed mode method along with Hamilton's law. Since in multi blade systems such as turbines it is crucial to keep the system working frequencies far away from natural frequencies (in order to prevent the resonance phenomenon), based on the results of this paper, it is shown how the parameters of shroud can remove the natural frequencies associated with some of the modes of the system from the work area.

**Keywords** Natural Frequency; Multi Blade System; Shroud; Assumed Mode Method

\*Department of Physics, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran

#### \*Correspondence

Address: Najafabad branch, Islamic Azad University, University Boulevard, Najafabad, Isfahan, Iran. Post code: 8514143131

Phone: -

Fax: +98 (31) 42291016  
koohestani@pmi.iaun.ac.ir

#### Article History

Received: March 17, 2018

Accepted: January 23, 2019

ePublished: August 12, 2019

### CITATION LINKS

[1] On the free transverse vibration of airscrew blades [2] Bending frequency of a radial rotating cantilever beam [3] Review of composite rotor blade modeling [4] Vibration analysis of rotating cantilever beams [5] Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM [6] Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity [7] A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades-part 1: Linear modal properties [8] Dynamic analysis and coupled vibration of variable pitch propeller [9] Free vibration analysis of cracked rotating multi-span Timoshenko beams using differential transform method [10] Frequency analysis of a rotating cantilever beam using assumed mode method with coupling effect [11] Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base [12] Dynamics of flexible beams undergoing overall motions [13] Modal analysis of a rotating multi-packet blade system [14] The coupled vibration in a rotating multi-disk rotor system [15] Dynamics, vibration and control of rotating composite beams and blades: A critical review

## بررسی اثر شroud در فرکانس‌های طبیعی سیستم چندپره‌ای چرخان

سعیده کوهستانی\* PhD

گروه فیزیک، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

### چکیده

در این مقاله اثر شroud در مشخصات دینامیکی یک سیستم چندپره‌ای چرخان بررسی می‌شود. هدف اصلی این مقاله، تشخیص اثر سفتی و موقعیت شroud روی فرکانس‌های طبیعی سیستم است. به همین منظور فرکانس‌های طبیعی چندین سیستم شامل شroud با موقعیت‌های مختلف (چه از نظر محل اتصال شroud به پره و چه از نظر تعداد پره‌هایی که یک شroud به هم متصل می‌کند) و همچنین با سفتی‌های متفاوت مقایسه شده‌اند تا مشخص شود که این پارامترها چگونه روی فرکانس‌های طبیعی سیستم اثر می‌گذارد. در این مطالعه اثر شroud به صورت فنر بین پره‌ها در نظر گرفته شده است. معادلات دینامیکی سیستم با استفاده از روش مدهای فرضی و با کمک قانون هامیلتون حل شده است. از آنجایی که در سیستم‌های چندپره‌ای همچون توربین‌ها، ترجیح بر این است که فرکانس‌های طبیعی خارج از محدوده کاری قرار گیرند (برای جلوگیری از پدیده تشدید) براساس نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله نشان داده می‌شود که چگونه پارامترهای مربوط به شroud می‌تواند فرکانس‌های طبیعی مربوط به بعضی از مدهای سیستم را از محدوده کاری خارج کند.

**کلیدواژه‌ها:** فرکانس طبیعی، سیستم چندپره‌ای، شroud، روش مد فرضی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۰۳

\*نویسنده مسئول: koohestani@pmi.iaun.ac.ir

### ۱- مقدمه

موارد زیادی از تجهیزات صنعتی و غیرصنعتی مانند توربین‌ها، کمپرسورها، روتورهای کپوترها، پروانه‌های کشتی‌ها یا هواپیماها، کنترل‌کننده روبات‌ها و ساختارهایی برای پیمایش فضایی از تیرهای چرخان تشکیل شده‌اند. برای ایجاد سازه‌هایی با عملکرد مناسب، تحلیل مشخصات ارتعاش آنها شامل فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها بسیار مهم هستند. تفاوت‌های عمده‌ای در ارتعاش سازه‌های چرخان با سازه‌های غیرچرخان وجود دارد.

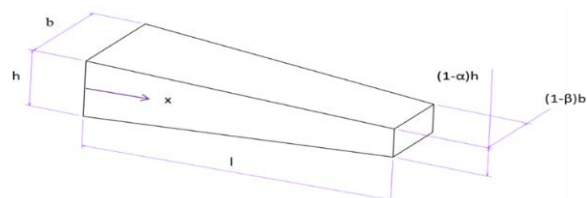
به‌منظور محاسبه فرکانس طبیعی یک تیر یک‌سرگردار چرخان، ساتول و گو مدلی ارائه کردند که در این مدل براساس تئوری انرژی ریلی، فرکانس‌های طبیعی می‌تواند توسط یک معادله ساده محاسبه شوند<sup>[1]</sup>. بعد از آن برای افزایش دقت فرکانس‌های طبیعی، شیلیهانسلی یک معادله خطی نسبتاً متفاوت معرفی کرد که در آن تنها حرکات خمشی تیر در نظر گرفته شده است<sup>[2]</sup>. از آن پس، در بسیاری از مطالعات برای تعیین فرکانس طبیعی تیر چرخان در شرایط مختلف، روش حل ذکرشده توسعه داده شده است<sup>[3-9]</sup>. در یکی از این تحقیقات، یک روش تحلیل دینامیکی با در نظر گرفتن تعداد زیادی از متغیرهای تغییر شکل هیبریدی برای دستیابی به معادله حرکت ارائه شد<sup>[10]</sup>. به علت خطی بودن معادلات موجود در این روش، هیچ جایگزینی برای تحلیل ارتعاش نیاز نیست و معادلات مستقیماً می‌توانند استفاده شوند. در مقایسه با روش‌های تحلیل قبلی، این روش پیچیدگی کمتری داشته و سازگارتر و دقیق‌تر است<sup>[11, 12]</sup>.

ورای بررسی ارتعاش یک تیر چرخان، مطالعات بسیاری برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های چندپره‌ای چرخان با گسترش استفاده از تجهیزات صنعتی حیاتی مانند توربین‌ها انجام شده است<sup>[13-15]</sup>. با نگاه به تحقیقات صورت‌گرفته در این زمینه، خلأ

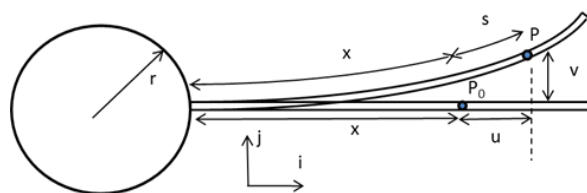
وجود بررسی نقش تجهیزات متصل به پره‌ها از جمله شroud در ارتعاشات سیستم به چشم می‌خورد. این در حالی بوده که ممکن است هر گونه تغییر در پارامترهایی از جمله موقعیت و سفتی شroud در رفتار دینامیکی سیستم و همچنین فرکانس‌های طبیعی، تغییر ایجاد کند. از آنجایی که در این سیستم‌ها ترجیح بر این است که فرکانس‌های طبیعی خارج از محدوده کاری باشند، اطلاع از چگونگی تغییر در فرکانس‌های طبیعی سیستم در اثر تغییر در پارامترهای مربوط به شroud لازم است. در این مقاله، با مقایسه فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های شامل شrouدهایی با موقعیت مختلف (تفاوت در تعداد پره‌هاییکه از طریق یک شroud به هم وصل شده‌اند) و همچنین خواص مکانیکی (سفتی) متفاوت، چگونگی تغییر در فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی خواهد شد.

### ۲- معادلات حرکت

به‌منظور بررسی ارتعاش آزاد یک پره چرخان، معادلات حرکت برای مدل نشان‌داده‌شده در شکل ۱ در نظر گرفته شده است. در این مدل فرض شده که پره دارای ماده همگن و ایزوتروپ است. همچنین مدل پره به صورت یک تیر یک‌سرگردار بلند و باریک با سطح مقطع مخروطی و مستطیلی شکل است. به دلیل اینکه تیر بلند و باریک بوده، از اثرات اینرسی برشی و چرخشی صرف نظر شده است. همان گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، نرخ تغییرات در ابعاد سطح مقطع توسط دو پارامتر  $\alpha$  و  $\beta$  بیان می‌شود. با فرض اینکه ضریب سفتی تیر در راستای خارج از صفحه پره بسیار زیاد بوده، از حرکت خارج از صفحه صرف نظر شده است و تنها حرکت درون صفحه‌ای در نظر قرار می‌گیرد. در شکل ۲ شماتیک تیر، قبل و بعد از تغییر شکل نشان داده شده است. طول تیر  $l$  در نظر گرفته شده که در نقطه‌ای به دیسک با شعاع  $r$  ثابت شده است. هنگامی که تیر تغییر شکل می‌یابد، نقطه  $P_0$  به نقطه  $P$  منتقل می‌شود. بنابراین، جابه‌جایی محوری  $u$  و جابه‌جایی عمودی  $v$  می‌تواند برای تغییر شکل تیر در نظر گرفته شود.



شکل ۱) متغیرهای مقطع تیر مخروطی



شکل ۲) تغییر شکل تیر یک‌سرگردار چرخان

در پژوهشی<sup>[5]</sup> نشان داده شده که ارتباط بین کشیدگی تیر  $(s)$ ،  $u$  و  $v$  به صورت زیر است:

$$s = u + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 ds \quad (1)$$

که در رابطه بالا  $\sigma$  متغیر ساختگی است که برای انتگرال مورد

$$\sum_{j=1}^{\mu} [m_{ij} \ddot{q}_j^k + (k_{ij}^B + \Omega^2(k_{ij}^G - m_{ij})) q_j^k] - k_{ij}^D (q_j^{k-1} - 2q_j^k + q_j^{k+1}) - k_{ij}^C (q_j^{k-1} - 2q_j^k + q_j^{k+1}) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (9)$$

$$k_{ij}^B = \int_0^l EI(x) \varphi_{i,xx}(x) \varphi_{j,xx}(x) dx \quad (10)$$

$$k_{ij}^C = \int_0^l g(x) \varphi_{i,x}(x) \varphi_{j,x}(x) dx \quad (11)$$

$$k_{ij}^D = K_D \varphi_i(a_D) \varphi_j(a_D) \quad (12)$$

$$k_{ij}^S = K_S \varphi_i(a_S) \varphi_j(a_S) \quad (13)$$

$$g(x) = \rho \left[ r(l-x) + \frac{1}{2l} (l - (\alpha + \beta)r)(l^2 - x^2) + \frac{1}{3l} (\alpha\beta r - \alpha l - \beta l)(l^3 - x^3) + \frac{1}{4l^2} \alpha\beta (l^4 - x^4) \right] \quad (14)$$

از آنجایی که بررسی معادلات به صورت بی بعد در موارد مختلف از جمله طراحی سیستم ترجیح داده می شود، تبدیل معادلات حرکت به شکل بی بعد مفید خواهد بود. بنابراین با به کارگیری متغیرهای معادله ۱۵، معادله حرکت به شکل بی بعد به صورت معادله ۱۶ نوشته می شود:

$$\tau = \frac{t}{T}, \xi = \frac{x}{l}, \theta = \frac{q}{l}, T = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI_0}} \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} [M_{ij} \ddot{\theta}_j^k + (K_{ij}^B + \gamma^2(K_{ij}^G - M_{ij})) \theta_j^k] - K_{ij}^D (\theta_j^{k-1} - 2\theta_j^k + \theta_j^{k+1}) - K_{ij}^C (\theta_j^{k-1} - 2\theta_j^k + \theta_j^{k+1}) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

که در این معادله:

$$M_{ij} = \int_0^1 (1 - \alpha\xi)(1 - \beta\xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \quad (17)$$

$$K_{ij}^B = \int_0^1 (1 - \alpha\xi)^3 (1 - \beta\xi) \varphi_{i,\xi\xi}(\xi) \varphi_{j,\xi\xi}(\xi) d\xi \quad (18)$$

$$K_{ij}^C = \int_0^1 G(\xi) \varphi_{i,\xi}(\xi) \varphi_{j,\xi}(\xi) d\xi \quad (19)$$

$$K_{ij}^D = \beta_D \varphi_i(\xi_D) \varphi_j(\xi_D) \quad (20)$$

استفاده قرار می گیرد. با استفاده از عبارت تغییر شکل تعریف شده و فرض اینکه سرعت دورانی  $\Omega$  ثابت است ( $\dot{\Omega}=0$ )، انرژی های جنبشی و کرنشی تیر می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \{ (u - \Omega v)^2 + (v + \Omega(r + x + u))^2 \} dx \quad (2)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3)$$

که در این رابطه  $E$  مدول یانگ است.  $I(x)$  ممان اینرسی دوم مساحت و  $A(x)$  مساحت سطح مقطع است که توابعی از  $x$  هستند. سفتی شرود و دیسک منجر به ایجاد ترم های انرژی اضافی می شوند. در این مطالعه، دیسک و شرود به صورت فنرهای گسسته با مقادیر سفتی مربوط به خود در نظر گرفته شده اند. بنابراین، براساس انعطاف پذیری دیسک و شرود، عبارت های انرژی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$U_D = \frac{1}{2} K_D (v^k(a_D) - v^{k-1}(a_D))^2 + \frac{1}{2} K_D (v^{k+1}(a_D) - v^k(a_D))^2 \quad (4)$$

و

$$U_S = \frac{1}{2} K_S (v^k(a_S) - v^{k-1}(a_S))^2 + \frac{1}{2} K_S (v^{k+1}(a_S) - v^k(a_S))^2 \quad (5)$$

در معادله بالا،  $U_D$  و  $U_S$  عبارت های انرژی پره کام سیستم بوده که ناشی از انعطاف پذیری دیسک و شرود هستند.  $a_D$  و  $a_S$  مکان هایی هستند که دیسک و شرود به ترتیب به تیر متصل شده اند و  $K_D$  و  $K_S$  مقادیر سختی مربوط به آنها هستند. بالانویس های  $k$ ،  $k+1$  و  $k-1$  در بالای عبارت جابه جایی شماره پره ها هستند. هنگامی که عبارت های انرژی جنبشی و فشاری در معادله ۶ جای گذاری شود، معادله حرکت می تواند نتیجه شود:

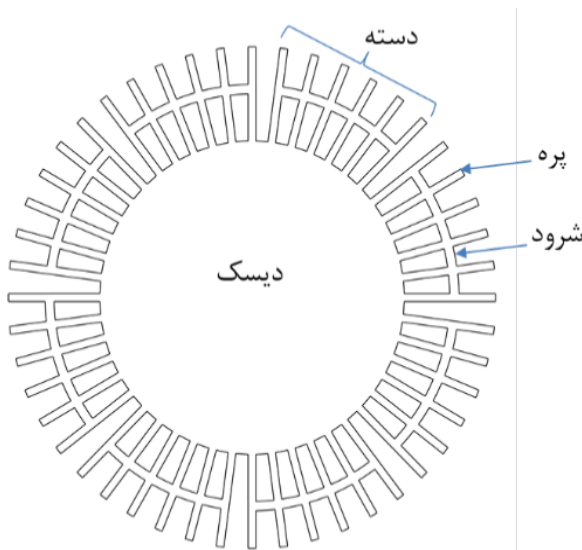
$$\int \delta(T - U) dt = 0 \quad (6)$$

با استفاده از مدهای فرضی و روش ریلی- ریتز می توان به گروهی از ترم های تغییر شکل دست یافت. جابه جایی خمشی توسط توابع مد فرضی به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i(x) q_i(t) \quad (7)$$

در رابطه بالا  $\varphi_i$  تابع مد خمشی تیر،  $q_i$  مختصات مربوطه و  $\mu$  تعداد مختصات های  $q_i$  است. پیش از این نشان داده شده است که اثر متقابل بین جابه جایی خمشی و محوری تاثیر ضعیفی روی ارتعاشات پره های چرخان دارد [13]. بنابراین، عبارت های مربوطه به اثر متقابل در این مقاله صرف نظر شده است. با استفاده از عبارت معادله ۷ برای جابه جایی خمشی، معادله حرکت خمشی پره کام به صورت زیر نتیجه می شود (عبارت مربوط به تقابل حذف شده است):

مختلف سفتی شروود ارائه می‌شود. سیستم‌های چندپره‌ای که دارای شروه‌های با سفتی متفاوت هستند، به‌صورت نشان‌داده‌شده در شکل ۳ در نظر گرفته شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این سیستم‌ها از ۴۸ پره تشکیل شده است که در ۸ دسته قرار گرفته‌اند. هر کدام از این دسته‌ها دارای ۶ پره است که با استفاده از شروود به هم متصل شده‌اند. مقادیر پارامترهای بی‌بعد که برای تحلیل دینامیکی این سیستم در نظر گرفته شده‌اند، در جدول ۲ ارائه شده است<sup>[13]</sup>. لازم به ذکر است که مقدار  $\beta_s=10$  که با \* در جدول ۲ مشخص شده است برای سیستم‌هایی که برای بررسی اثر سفتی شروود در نظر گرفته شدند، معتبر نیست، همچنین مقدار  $\xi_s=1$  که با \*\* در جدول ۲ نشان داده شده است، برای سیستم‌هایی که برای بررسی اثر محل اتصال شروود به پره در نظر گرفته شدند، معتبر نیست.



شکل ۳ سیستم چندپره‌ای در نظر گرفته شده برای بررسی تاثیر سفتی شروود بر فرکانس طبیعی سیستم

جدول ۲ مقادیر پارامترهای بی‌بعد استفاده شده برای تحلیل دینامیکی سیستم

$\xi_s^{**}$	$\xi_D$	$\beta_s^*$	$\beta_D$	$\delta$	$\beta$	$\alpha$
۱	۰/۱	۱۰	۶۴۲	۴	۰/۳	۰/۳

دقت شود که مقادیر  $\xi_D$  و  $\xi_s$  به ترتیب ترم‌های بی‌بعد مربوط به محل اتصال پره به دیسک و شروود هستند. همچنین پارامتر  $\beta_D$  بی‌بعد مربوط به مقدار سفتی دیسک و  $\delta$  نسبت شعاع دیسک به طول پره است (معادله ۲۲). شایان ذکر است که در مرحله کنار هم گذاشتن معادلات مربوط به پره‌های مختلف، باید دقت شود که ترم مربوط به سفتی شروود برای پره‌های انتهایی دسته‌ها نباید در نظر گرفته شود، چرا که بین آنها شروودی قرار نگرفته است. به‌منظور بررسی تاثیر پارامتر سفتی شروود ( $\beta_s$ ) بر فرکانس طبیعی سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۳، مقادیر مختلف برای سفتی شروود در نظر گرفته شده و فرکانس‌های طبیعی به دست آمده‌اند. فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر مختلف سرعت دورانی بدون بعد ۰، ۵ و ۱۰ محاسبه شده‌اند. نمودارهای ۱-۳ مربوط به فرکانس طبیعی سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۳ برای مقادیر مختلف سفتی شروود را در سه مقدار مختلف سرعت دورانی بی‌بعد ( $\gamma=0, 0.5, 1.0$ ) نشان می‌دهد.

$$K_{ij}^S = \beta_s \varphi_i(\xi_s) \varphi_j(\xi_s) \quad (21)$$

$$\gamma = \Omega T, \delta = \frac{r}{l}, \beta_D = \frac{K_D l^3}{EI_0}, \beta_s = \frac{K_s l^3}{EI_0}, \xi_D \quad (22)$$

$$= \frac{a_D}{l}, \xi_s = \frac{a_s}{l}$$

$$G(\xi) = \delta(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 - (\alpha + \beta)\delta)(1 - \xi^2) + \frac{1}{3}(\alpha\beta\delta - \alpha - \beta)(1 - \xi^3) + \frac{1}{4}\alpha\beta(1 - \xi^4) \quad (23)$$

با کنار هم گذاشتن  $n$  (تعداد کل پره‌ها) دسته معادلات حرکت (معادله ۱۶) مربوط به  $n$  پره، همه معادلات می‌توانند به‌صورت معادله ۲۴ نوشته شوند:

$$[M]\{\theta\} + ([K] + \gamma^2([K^G] - [M]))\{\theta\} = 0 \quad (24)$$

به‌منظور تحلیل مودال سیستم، ماتریس  $\{\theta\}$  می‌تواند به‌صورت زیر فرض شود:

$$\{\theta\} = e^{-j\omega\tau}\{\eta\} \quad (25)$$

در اینجا  $\omega$  فرکانس طبیعی بدون بعد سیستم است. با به‌کارگیری معادله ۲۵، معادله ۲۴ می‌تواند به‌صورت معادله ۲۶ نوشته شود که برای تحلیل مودال سیستم چندپره‌ای استفاده می‌شود.

$$\omega^2 [M]\{\eta\} = ([K] + \gamma^2([K^G] - [M]))\{\theta\} \quad (26)$$

### ۳- بحث و نتایج

به‌منظور تعیین فرکانس طبیعی سیستم، یک کد توسط نرم‌افزار MATLAB تهیه شد. در این کد برای مدهای فرضی پره‌ها، ۵ مد اول خمشی تیر یک‌سرگیردار در نظر گرفته شده است. برای اعتبارسنجی این کد، فرکانس طبیعی بی‌بعد یک تیر چرخان با مقطع یکنواخت ( $\alpha=\beta=0$ ) محاسبه شد و با مقادیر متناظر که توسط پژوهشی<sup>[10]</sup> ارائه شده است، مقایسه شد. فرکانس طبیعی برای  $\delta=1$  در مقادیر مختلف  $\gamma$  محاسبه شده است. مقادیر به‌دست‌آمده از کد و مقادیر متناظر مربوط به منبع همان‌طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، در تطابق خوبی قرار دارند.

جدول ۱ مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ارتعاش خمشی یک تیر چرخان حاصل از کد و مقادیر متناظر گزارش شده در مرجع<sup>[10]</sup>

$\gamma$	چنگ و یان <sup>[10]</sup>	نتایج به‌دست‌آمده
۱	۳/۸۸۹	۳/۸۸۹
۲	۴/۸۳۴	۴/۸۳۴
۳	۶/۰۸۴	۶/۰۸۲
۴	۷/۴۸۱	۷/۴۷۶
۵	۸/۹۵۱	۸/۹۴۲

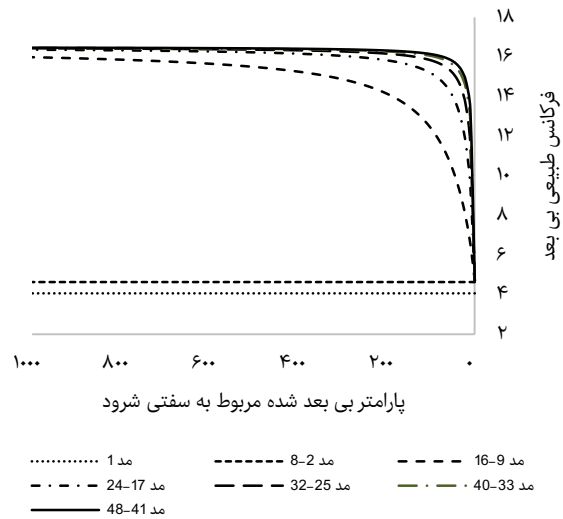
در این مقاله، فرکانس‌های طبیعی برای سیستم‌های چندپره‌ای مختلف با موقعیت‌های متفاوت شروود و همچنین برای سیستم‌هایی با خواص مکانیکی (سفتی) مختلف شروود محاسبه شده است. در ابتدا نتایج مربوط به سیستم‌های چندپره‌ای با مقادیر

در تمامی این نمودارها محور عمودی، فرکانس طبیعی بی‌بعد سیستم و محور افقی، پارامتر بی‌بعد سفتی شroud است. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانس طبیعی مربوط به ۸ مد اول، با تغییر سفتی شroud تغییر نکرده‌اند. این امر نشان می‌دهد که سفتی شroud در تعیین فرکانس طبیعی ۸ مد اول سیستمی که دوران نمی‌کند ( $\gamma=0$ )، نقشی نداشته است. در عوض، مقادیر مربوط به فرکانس‌های طبیعی مدهای بالاتر از مد ۸ با افزایش سفتی شroud افزایش داشته‌اند. نسبت افزایش فرکانس طبیعی به افزایش در سفتی شroud، به‌طور تقریبی رابطه نمایی داشته است. بدین معنی که در ابتدا نرخ افزایش فرکانس طبیعی بسیار زیاد است، ولی در ادامه نرخ افزایش ملایم‌تر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود مقادیر فرکانس طبیعی مربوط به تمامی مدها در مقادیر سفتی زیاد (نزدیک به ۱۰۰۰) به یک مقدار ثابت همگرا می‌شوند. این امر نشان می‌دهد که افزایش سفتی شroud تا یک میزان مشخص موجب افزایش در فرکانس طبیعی شده است و از آن به بعد با افزایش سفتی شroud، تغییر چندانی در فرکانس طبیعی سیستم صورت نمی‌گیرد.

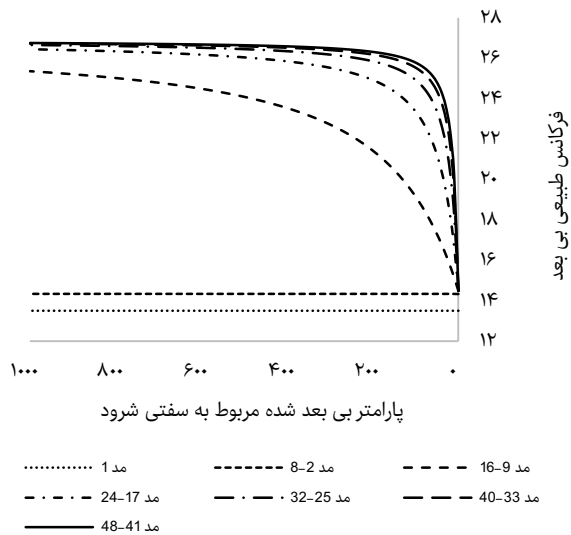
با توجه به نمودار ۱ مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ۹ تا ۱۶، ۱۷ تا ۲۴، ۲۵ تا ۳۲، ۳۳ تا ۴۰ و ۴۱ تا ۴۸ (در اینجا مقادیر مربوط به ۴۸ مد اول ارائه شده است) روی هم منطبق شده‌اند (مقادیر متناظر به هم بسیار نزدیک یا کاملاً برابر بوده‌اند). از آنجایی که سیستم چندپره‌ای شکل ۳ شامل ۸ دسته پره است که در هر دسته ۶ پره توسط شroud به هم متصل شده‌اند، در مجموع ۸ محور تقارن در شکل نشان‌داده شده وجود دارد. این تقارن هندسی در سیستم نشان‌داده شده منجر به تکرار فرکانس‌های طبیعی مربوط به پره‌های متناظر در هر دسته می‌شود. به‌عنوان مثال، درجات آزادی مربوط به پره‌های دوم از هر دسته (تعداد ۸ پره) به‌دلیل تقارن هندسی در شکل سیستم پره‌ها منجر به فرکانس طبیعی یکسان می‌شوند. لازم به ذکر بوده که ۴۸ فرکانس طبیعی ابتدایی سیستم که در نمودار ۱ رسم شده است، متناظر با درجه آزادی ۴۸ پره سیستم هستند. پس انتظار می‌رود که برای این ۴۸ فرکانس طبیعی، ۶ دسته فرکانس متفاوت وجود داشته باشد که در هر دسته، ۸ فرکانس طبیعی تکرار شونده دیده شود. البته از آنجایی که در هر سیستم، فرکانس طبیعی اول سیستم با فرکانس‌های دیگر اختلاف دارد، در این سیستم نیز فرکانس طبیعی اول اندکی نسبت به ۷ فرکانس دیگر در دسته فرکانس طبیعی پایین‌تر اختلاف دارد.

مشابه با مشاهدات ذکر شده برای نمودار ۱، در نمودار ۲ که مربوط به سیستم با سرعت دورانی بی‌بعد ۵ ( $\gamma=5$ ) است، فرکانس طبیعی مربوط به ۸ مد اول با تغییر سفتی شroud تغییر نکرده و فرکانس طبیعی مدهای بالاتر با افزایش سفتی شroud، با نسبت تقریباً نمایی افزایش یافته‌اند. در این نمودار نیز مدهای ۹ تا ۱۶، ۱۷ تا ۲۴، ۲۵ تا ۳۲، ۳۳ تا ۴۰ و ۴۱ تا ۴۸ روی هم منطبق‌اند. تمام موارد ذکر شده در مورد نمودار ۳ که مربوط به سیستم با سرعت دورانی بی‌بعد ۱۰ ( $\gamma=10$ ) بوده، نیز صادق است. تنها تفاوت در نمودارهای مربوط به سرعت دورانی‌های مختلف، تفاوت در شیب نمودارهای متناظر و همچنین مقادیر فرکانس طبیعی است. مشاهده می‌شود که در سیستمی که سرعت دورانی صفر دارد (نمودار ۱)، در مقایسه با دو حالت دیگر (نمودارهای ۲ و ۳)، نرخ افزایش فرکانس طبیعی در مقادیر کمتر سفتی شroud ملایم شده و مقادیر فرکانس طبیعی زودتر همگرا شده‌اند.

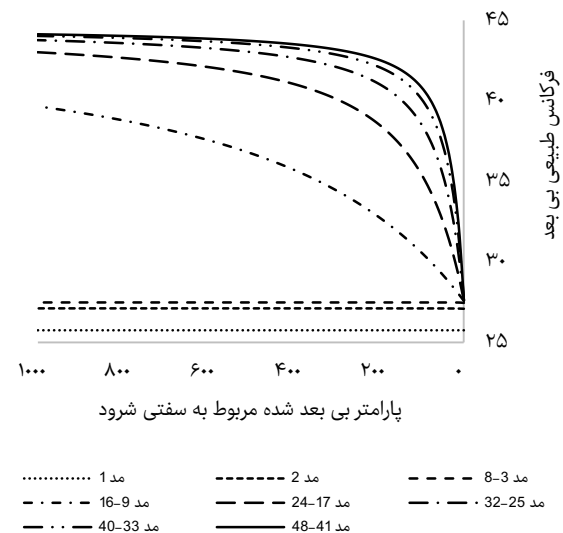
پس از بررسی نحوه تأثیرپذیری فرکانس طبیعی سیستم از سفتی شroud، تأثیر موقعیت شroud در فرکانس طبیعی سیستم بررسی



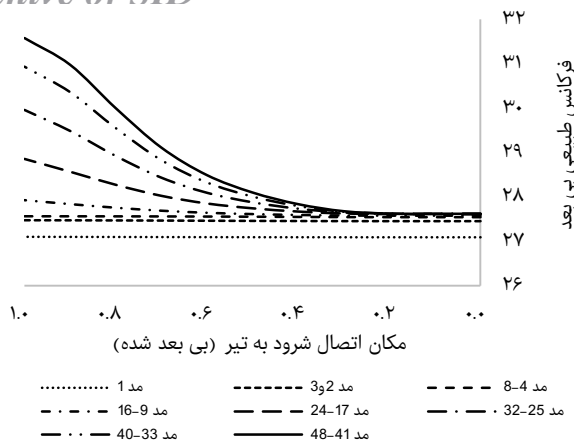
نمودار ۱) نمودار فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای نشان‌داده شده در شکل ۳ برحسب مقادیر مختلف سفتی شroud برای مقدار سرعت دورانی ۰ ( $\gamma=0$ )



نمودار ۲) نمودار فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای نشان‌داده شده در شکل ۳ برحسب مقادیر مختلف سفتی شroud برای مقدار سرعت دورانی بی‌بعد ۵ ( $\gamma=5$ )



نمودار ۳) نمودار فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای نشان‌داده شده در شکل ۳ برحسب مقادیر مختلف سفتی شroud برای مقدار سرعت دورانی بی‌بعد ۱۰ ( $\gamma=10$ )



**نمودار ۳** نمودار فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای نشان داده شده در شکل ۳ برای محل‌های مختلف اتصال ششرد به پره در سرعت دورانی  $\gamma=10$

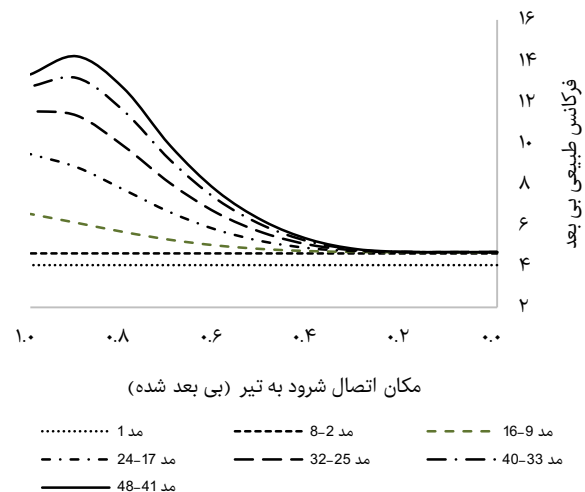
در تمامی نمودارهای ۴-۶ که به ترتیب مربوط به سرعت‌های دورانی  $\gamma=0, 5, 10$  هستند، باز هم مشاهده می‌شود که مقادیر مربوط به فرکانس‌های طبیعی ۸ مد اول سیستم با تغییر موقعیت اتصال ششرد به پره تغییری نمی‌کنند. در حالی که برای فرکانس‌های طبیعی مد ۸م به بالا، افزایش در مقدار  $\xi_s$  (نزدیک شدن محل اتصال ششرد به انتهای آزاد پره)، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش یافته‌اند. این افزایش تا مقدار  $\xi_s=0.4$  بسیار ملایم و بعد از آن افزایش در مقدار فرکانس طبیعی، چشمگیر می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، باز هم مدهای ۹ تا ۱۷، ۲۴ تا ۳۲، ۳۳ تا ۴۰ و ۴۱ تا ۴۸ بر هم منطبق‌اند. نرخ افزایش فرکانس طبیعی برای مدهای بالاتر بیشتر به نظر می‌رسد. البته در نحوه تغییر فرکانس طبیعی برای مقادیر  $\xi_s$  بیشتر از ۰/۹ در نمودار ۴، یک استثنا رخ داده است. همان‌طور که در این نمودار مشاهده می‌شود، برای مدهای ۳۳ تا ۴۸، فرکانس طبیعی در  $\xi_s=1$  نسبت به  $\xi_s=0.9$  کاهش یافته است. به غیر از این، در بقیه موارد، فرکانس طبیعی سیستم با افزایش  $\xi_s$  افزایش یافته است. بین نمودارهای ۴-۶، از نظر نحوه تاثیر محل اتصال ششرد به پره، تفاوتی مشاهده نمی‌شود، جز اینکه شیب نمودارها (نرخ تغییر فرکانس طبیعی) برای این سه نمودار (سرعت دورانی‌های مختلف)، متفاوت است. علاوه بر این به نظر می‌رسد که میزان تاثیر محل اتصال ششرد در فرکانس‌های طبیعی سیستم با سرعت دورانی بالاتر (نمودار ۶)، کمتر از سیستم‌های با سرعت دورانی کمتر (نمودار ۵) یا بدون سرعت دورانی (نمودار ۴) است.

در ادامه، نحوه تاثیر تفاوت در تعداد پره‌هایی که ششرد به هم متصل می‌کند، بررسی می‌شود. برای این منظور، فرض می‌شود که تعداد کل پره‌های سیستم مطابق با آنچه در شکل ۳ نشان داده شده، ۴۸ عدد است که ثابت در نظر گرفته می‌شود. با تغییر در تعداد پره‌هایی که توسط ششرد در یک دسته به هم متصل می‌شوند ( $n$ )، تعداد دسته‌ها نیز تغییر می‌کنند. به منظور بررسی تاثیر تعداد پره‌هایی که توسط ششرد به هم متصل می‌شوند در فرکانس طبیعی، ۴ سیستم چندپره‌ای مختلف مطابق با آنچه در شکل ۴ نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود.

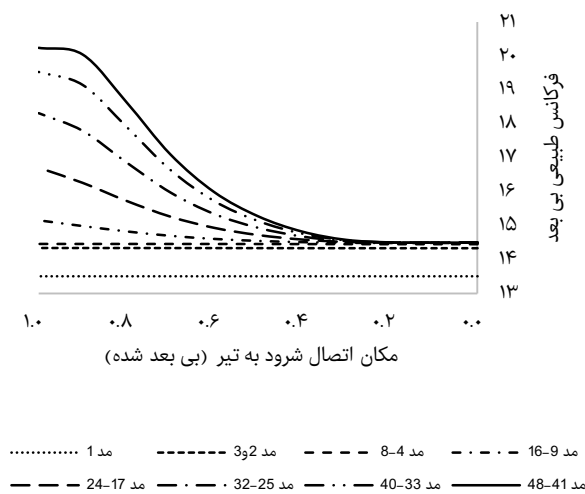
نتایج مربوط به فرکانس طبیعی سیستم‌های نشان داده شده در شکل ۴ برای سه مقدار مختلف سرعت دورانی  $\gamma=0, 5, 10$  در جداول ۳ ارائه شده است.

همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی اولی برای تمام سیستم‌ها تغییر نکرده و ثابت مانده است. ولی

می‌شود. تغییر موقعیت ششرد از دو منظر می‌تواند بررسی شود. یکی، تغییر در محل اتصال ششرد به پره‌ها ( $\xi_s$ ) و دیگری تعداد دسته‌های سیستم و به تبع آن تعداد پره‌های هر دسته که با ششرد به هم متصل شده‌اند. در این مقاله تاثیر تغییر در هر دو بررسی شده است. ابتدا به بررسی تاثیر تغییر در محل اتصال ششرد به پره‌ها پرداخته می‌شود. برای این منظور، باز هم فرکانس طبیعی برای سیستم نشان داده شده در شکل ۳ که دارای ۴۸ پره در ۸ دسته ۶ تایی هستند، محاسبه شده است. با این تفاوت که این بار پارامتر بی‌بعد مربوط به محل اتصال ششرد به پره ( $\xi_s$ )، متغیر در نظر گرفته شده و مقدار پارامتر بی‌بعد سفتی ششرد، ۱۰ در نظر گرفته شده است ( $\beta_s=10$ ). در نمودارهای ۴-۶، مقادیر بی‌بعد فرکانس طبیعی سیستم برای محل اتصال مختلف ششرد به پره در سه مقدار مختلف سرعت دورانی بی‌بعد ۰، ۵ و ۱۰ ارائه شده است. در این نمودارها محور عمودی، مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد سیستم و محور افقی، شماره فرکانس طبیعی (شماره مد) است. دقت شود که پارامتر بی‌بعد مربوط به محل اتصال ششرد به پره ( $\xi_s$ ) نسبت فاصله محل اتصال ششرد به طول پره است که می‌تواند بین صفر تا یک باشد. در صورتی که  $\xi_s=1$  باشد، محل اتصال ششرد به پره در انتهای پره (سر آزاد پره) است.



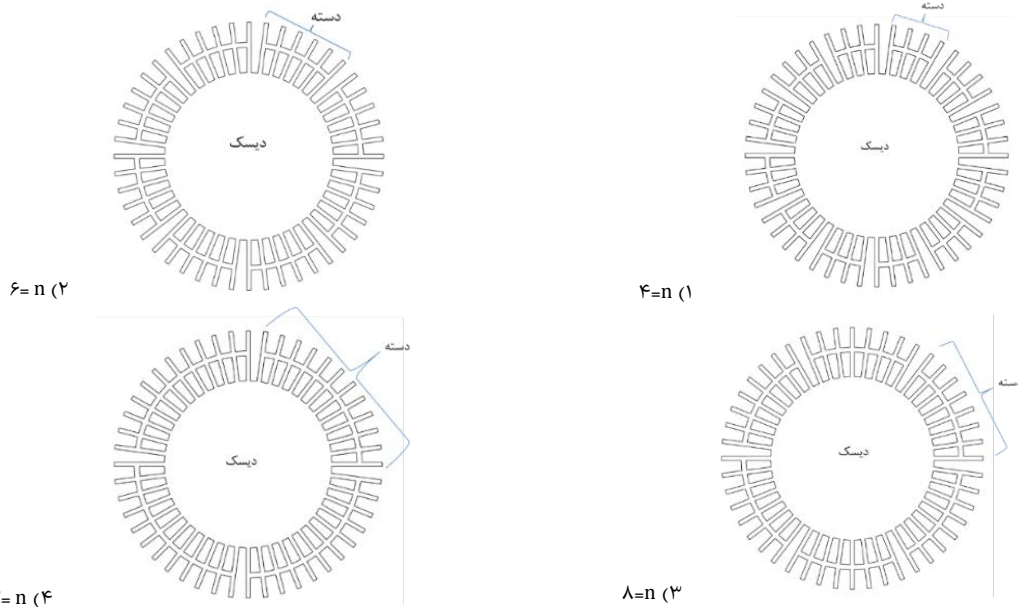
**نمودار ۴** نمودار فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای نشان داده شده در شکل ۳ برای محل‌های مختلف اتصال ششرد به پره در سرعت دورانی  $\gamma=0$



**نمودار ۵** نمودار فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای نشان داده شده در شکل ۳ برای محل‌های مختلف اتصال ششرد به پره در سرعت دورانی بی‌بعد  $\gamma=5$

دسته، بیشتر یا مساوی است. این افزایش برای فرکانس‌های طبیعی بالاتر مشهودتر است. در مجموع، رفتار خاصی در تغییر فرکانس‌های طبیعی با تغییر در تعداد پره موجود در یک دسته مشاهده نمی‌شود. ولی، برخلاف اثر تغییر در سفتی شroud و محل اتصال شroud به پرها، با تغییر در تعداد پره‌های یک دسته می‌توان فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ۲ تا ۸ را نیز تغییر داد.

فرکانس‌های طبیعی بالاتر برای سیستم‌های مختلف تغییر کرده است. همچنین مشاهده می‌شود که در اکثر موارد، فرکانس‌های طبیعی سیستم با ۱۲ پره در یک دسته ( $n=12$ ) بیشتر یا مساوی با فرکانس‌های طبیعی متناظر در سیستم‌های دیگر است. به طور کلی، فرکانس‌های طبیعی سیستم با تعداد پره بیشتر در یک دسته ( $n$ ) بیشتر از فرکانس‌های طبیعی سیستم با تعداد پره کمتر در یک



شکل ۴ سیستم‌های چندپره‌ای در نظر گرفته شده برای بررسی تاثیر تعداد پره‌هایی که شroud به هم متصل می‌کند؛ در فرکانس طبیعی سیستم: ۱- سیستم شامل ۱۲ دسته ۴ پره‌ای، ۲- سیستم شامل ۸ دسته ۶ پره‌ای، ۳- سیستم شامل ۶ دسته ۸ پره‌ای، ۴- سیستم شامل ۴ دسته ۱۲ پره‌ای

جدول ۳ مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای سیستم‌های چندپره‌ای نشان داده شده در شکل ۴ در سرعت دورانی  $\gamma = 0, 0.5, 1.0$

شماره مد	$\gamma=0$				$\gamma=0.5$				$\gamma=1.0$			
	$n=12$	$n=8$	$n=6$	$n=4$	$n=12$	$n=8$	$n=6$	$n=4$	$n=12$	$n=8$	$n=6$	$n=4$
۱	۴/۰۶۷	۴/۰۶۷	۴/۰۶۷	۴/۰۶۷	۱۳/۰۰۵	۱۳/۰۰۵	۱۳/۰۰۵	۱۳/۰۰۵	۴/۰۶۷	۴/۰۶۷	۴/۰۶۷	۴/۰۶۷
۲ و ۳	۴/۶۳۵	۴/۶۳۷	۴/۶۳۷	۴/۶۳۵	۱۴/۳۴۹	۱۴/۳۴۳	۱۴/۳۳۹	۱۴/۳۳۶	۴/۶۴۵	۴/۶۳۹	۴/۶۳۷	۴/۶۳۵
۴	۴/۶۸۴	۴/۶۸۵	۴/۶۸۵	۴/۶۸۴	۱۴/۴۵۹	۱۴/۴۶۳	۱۴/۴۵۹	۱۴/۴۵۵	۴/۶۸۵	۴/۶۸۷	۴/۶۸۵	۴/۶۸۴
۵	۴/۶۸۴	۴/۶۸۵	۴/۶۸۵	۴/۶۸۴	۱۴/۶۳۸	۱۴/۶۶۳	۱۴/۶۵۹	۱۴/۶۵۵	۵/۲۳۸	۴/۶۸۷	۴/۶۸۵	۴/۶۸۴
۶	۴/۶۹۳	۴/۶۹۴	۴/۶۹۴	۴/۶۹۳	۱۴/۶۴۳	۱۴/۴۸۱	۱۴/۴۸۳	۱۴/۴۸۱	۵/۲۴۰	۴/۶۹۳	۴/۶۹۴	۴/۶۹۳
۷	۴/۶۹۳	۴/۶۹۴	۴/۶۹۴	۴/۶۹۳	۱۴/۶۴۳	۱۴/۸۶۵	۱۴/۴۸۳	۱۴/۴۸۱	۵/۲۴۰	۵/۸۴۴	۴/۶۹۴	۴/۶۹۳
۸	۴/۶۹۷	۴/۶۹۶	۴/۶۹۶	۴/۶۹۷	۱۴/۶۶۶	۱۴/۸۶۶	۱۴/۴۸۸	۱۴/۴۸۹	۵/۲۵۲	۵/۸۴۴	۴/۶۹۶	۴/۶۹۷
۹	۴/۶۹۷	۴/۶۹۷	۴/۶۹۷	۴/۶۹۷	۱۵/۱۵۶	۱۴/۸۶۶	۱۵/۱۵۶	۱۴/۴۸۹	۶/۵۵۳	۵/۸۴۴	۶/۵۵۳	۴/۶۹۷
۱۰ و ۱۱	۴/۶۹۸	۴/۶۹۸	۴/۶۹۸	۴/۶۹۸	۱۵/۱۵۶	۱۴/۸۷۲	۱۵/۱۵۶	۱۴/۴۹۳	۶/۵۵۳	۵/۸۴۵	۶/۵۵۳	۴/۶۹۸
۱۲	۴/۶۹۸	۴/۶۹۸	۴/۶۹۸	۴/۶۹۸	۱۵/۱۵۷	۱۴/۸۸۳	۱۵/۱۵۷	۱۴/۴۹۴	۶/۵۵۳	۵/۸۵۰	۶/۵۵۳	۴/۶۹۸
۱۳	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۱۵/۸۷۹	۱۵/۸۷۹	۱۵/۱۵۷	۱۵/۸۷۹	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۶/۵۵۳	۸/۰۶۰
۱۴ و ۱۵	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۱۵/۸۷۹	۱۵/۸۷۹	۱۵/۱۵۹	۱۵/۸۷۹	۸/۰۶۰	۸/۰۶۰	۶/۵۵۳	۸/۰۶۰
۱۶	۸/۰۶۰	۸/۰۶۱	۸/۰۶۱	۸/۰۶۰	۱۵/۸۷۹	۱۵/۸۷۹	۱۵/۱۶۶	۱۵/۸۷۹	۸/۰۶۰	۸/۰۶۱	۶/۵۵۶	۸/۰۶۰
۱۷	۸/۰۶۰	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۰	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۸/۰۶۰
۱۸	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱
۱۹	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۱۶/۷۰۶	۱۷/۱۲۸	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۹/۴۶۴	۱۰/۰۸۳	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱
۲۰	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۱۶/۷۰۶	۱۷/۱۲۸	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۹/۴۶۴	۱۰/۰۸۳	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱
۲۱	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۱۷/۵۴۲	۱۷/۱۲۸	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۷۹	۱۰/۶۳۹	۱۰/۰۸۳	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱
۲۲ و ۲۳	۸/۰۶۱	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱	۱۷/۵۴۲	۱۷/۱۲۸	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۸۰	۱۰/۶۳۹	۱۰/۰۸۳	۹/۴۶۴	۸/۰۶۱
۲۴	۸/۰۶۲	۹/۴۶۴	۹/۴۶۴	۸/۰۶۲	۱۷/۵۴۲	۱۷/۱۲۸	۱۶/۷۰۶	۱۵/۸۸۳	۱۰/۶۳۹	۱۰/۰۸۳	۹/۴۶۴	۸/۰۶۲
۲۵ تا ۲۸	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۸/۳۱۶	۱۸/۳۱۶	۱۸/۳۱۶	۱۸/۳۱۶	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱
۲۹ و ۳۰	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۸/۹۸۵	۱۸/۳۱۶	۱۸/۳۱۶	۱۸/۳۱۶	۱۲/۲۵۴	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱
۳۱ و ۳۲	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱	۱۸/۹۸۵	۱۹/۲۷۴	۱۸/۳۱۶	۱۸/۳۱۶	۱۲/۲۵۴	۱۲/۵۲۷	۱۱/۵۶۱	۱۱/۵۶۱
۳۳ تا ۳۶	۱۱/۵۶۱	۱۲/۷۵۷	۱۲/۷۵۷	۱۱/۵۶۱	۱۹/۵۳۱	۱۹/۲۷۴	۱۹/۵۳۱	۱۸/۳۱۶	۱۲/۷۵۷	۱۲/۵۲۷	۱۲/۷۵۷	۱۱/۵۶۱
۳۷ تا ۴۰	۱۳/۱۱۰	۱۳/۱۱۰	۱۳/۱۱۰	۱۳/۱۱۰	۱۹/۹۵۰	۱۹/۹۵۰	۱۹/۵۳۱	۱۹/۹۵۰	۱۳/۱۱۰	۱۳/۱۱۰	۱۲/۷۵۷	۱۳/۱۱۰
۴۱ و ۴۲	۱۳/۱۱۰	۱۳/۳۴۱	۱۳/۳۴۱	۱۳/۱۱۰	۲۰/۲۴۳	۱۹/۹۵۰	۲۰/۲۴۳	۱۹/۹۵۰	۱۳/۳۴۱	۱۳/۱۱۰	۱۳/۳۴۱	۱۳/۱۱۰
۴۳ و ۴۴	۱۳/۱۱۰	۱۳/۴۱۸	۱۳/۴۱۸	۱۳/۱۱۰	۲۰/۲۴۳	۲۰/۳۴۵	۲۰/۲۴۳	۱۹/۹۵۰	۱۳/۴۱۸	۱۳/۴۱۸	۱۳/۴۱۸	۱۳/۱۱۰
۴۵ تا ۴۸	۱۳/۱۱۰	۱۳/۴۱۸	۱۳/۴۱۸	۱۳/۱۱۰	۲۰/۴۱۷	۲۰/۳۴۵	۲۰/۲۴۳	۱۹/۹۵۰	۱۳/۴۱۸	۱۳/۴۱۸	۱۳/۴۱۸	۱۳/۱۱۰

در این مقاله تاثیر پارامترهای شroud بر مشخصات دینامیکی سیستم‌های چندپره‌ای چرخان بررسی شد. پارامترهای مورد بررسی، سفتی شroud، محل اتصال شroud و پره و تعداد پره‌هایی بوده است که در یک دسته توسط شroud به هم متصل می‌شوند. برای این منظور، فرکانس طبیعی سیستم‌های مختلف که پارامترهای مذکور در آنها متفاوت بوده‌اند، در سه مقدار سرعت دورانی بی‌بعد ۰.۵ و ۱۰ محاسبه شده و با هم مقایسه شدند. براساس نتایج مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی مشاهده شد که فرکانس‌های طبیعی ۸ مد اول با تغییر در سفتی شroud یا تغییر در محل اتصال شroud به پره، تغییر نکردند. این در حالی است که با تغییر در تعداد پره‌هایی که در یک دسته توسط شroud به هم متصل می‌شوند، فرکانس‌های طبیعی دوم تا هشتم نیز تغییر کردند. ولی در تمامی موارد، فرکانس طبیعی اول ثابت باقی ماند. برای مدهای ۸ به بالا، افزایش در سفتی شroud و همچنین نزدیک کردن محل اتصال شroud به انتهای آزاد پره موجب افزایش مقدار فرکانس طبیعی شد. با استفاده از نتایج این مطالعه در مورد تاثیر تغییر در پارامترهای شroud بر فرکانس طبیعی سیستم چندپره‌ای چرخان، می‌توان مانع از آن شد که فرکانس‌های طبیعی سیستم، درون محدوده کاری قرار گیرند که یکی از مهم‌ترین عوامل آسیب دیدن این سیستم‌ها است.

**تشکر و قدردانی:** موردی توسط نویسنده بیان نشد.

**تأییدیه اخلاقی:** موردی توسط نویسنده بیان نشد.

**تعارض منافع:** موردی توسط نویسنده بیان نشد.

**منابع مالی:** موردی توسط نویسنده بیان نشد.

#### ۵- پی‌نوشت

##### علامت

$h$	ارتفاع سطح مقطع
$b$	پهنای سطح مقطع
$l$	طول پره
$\alpha$	نسبت تغییرات در ارتفاع سطح مقطع
$B$	نسبت تغییرات در پهنای سطح مقطع
$r$	شعاع دیسک
$s$	کشیدگی در پره
$u$	جاب‌جایی محوری پره
$v$	جاب‌جایی عمودی پره
$\Omega$	سرعت دورانی
$T$	انرژی جنبشی
$\rho$	چگالی
$A$	مساحت سطح مقطع
$U$	انرژی کشش
$E$	مدول یانگ
$I$	ممان اینرسی دوم مساحت
$U_D$	ترم انرژی سیستم ناشی از انعطاف‌پذیری دیسک
$U_S$	ترم انرژی ناشی از انعطاف‌پذیری شroud
$a_D$	مکان اتصال دیسک به پره
$a_S$	مکان اتصال شroud به پره
$k_D$	متغیرسفتی دیسک

$k_S$  مقدار سفتی شroud

$\varphi$  تابع مد خمشی تیر

$q$  مختصات ویژه

$\mu$  تعداد مختصات‌ها

$I_0$  ممان اینرسی دوم مساحت سطح مقطع در انتهای ثابت پره

$n$  تعداد پره‌هایی که توسط شroud در یک دسته متصل می‌شوند.

#### منابع

- Southwell RV, Gough BS. On the free transverse vibration of airscrew blades. 766th Volume. Richmond: H.M. Stationery Office; 1921.
- Schilhansl M. Bending frequency of a radial rotating cantilever beam. ASME Journal of Applied Mechanics. 1958;25:28-30.
- Hodges DH. Review of composite rotor blade modeling. AIAA Journal. 1990;28(3):561-565.
- Yoo HH, Shin SH. Vibration analysis of rotating cantilever beams. Journal of Sound and Vibration. 1998;212(5):807-828.
- Ozdemir Ozgumus O, Kaya MO. Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM. Meccanica. 2010;45(1):33-42.
- Huang CL, Lin WY, Hsiao KM. Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity. Computers & Structures. 2010;88(17-18):991-1001.
- Lacarbonara W, Arvin H, Bakhtiari Nejad F. A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades-part 1: Linear modal properties. Nonlinear Dynamics. 2012;70(1):659-675.
- Mousavi SA, Elhami MR. Dynamic analysis and coupled vibration of variable pitch propeller. Modares Mechanical Engineering. 2015;15(9):170-178. [Persian]
- Raeisi M, Ariaei AR. Free vibration analysis of cracked rotating multi-span Timoshenko beams using differential transform method. Modares Mechanical Engineering. 2015;15(10):173-182. [Persian]
- Cheng J, Xu H, Yan A. Frequency analysis of a rotating cantilever beam using assumed mode method with coupling effect. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2006;34(1):25-47.
- Kane TR, Ryan RR, Banerjee AK. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. Journal of Guidance Control and Dynamics. 1987;10(2):139-151.
- Yoo HH, Ryan RR, Scott RA. Dynamics of flexible beams undergoing overall motions. Journal of Sound and Vibration. 1995;181(2):261-278.
- Lim HS, Chung J, Yoo HH. Modal analysis of a rotating multi-packet blade system. Journal of Sound and Vibration. 2009;325(3):513-531.
- Chiu YJ, Chen DZ. The coupled vibration in a rotating multi-disk rotor system. International Journal of Mechanical Sciences. 2011;53(1):1-10.
- Rafiee M, Nitzsche F, Labrosse M. Dynamics, vibration and control of rotating composite beams and blades: A critical review. Thin Walled Structures. 2017;119:795-819.