



## Effects of the Disk Flexibility on the Flutter and Aeroelastic Response of Mistuned Bladed Disks

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Mahmoudkhani S.\*<sup>1</sup> PhD,  
Yazdani A.<sup>1</sup> MSc

#### How to cite this article

Mahmoudkhani S, Yazdani A.R. Effects of the Disk Flexibility on the Flutter and Aeroelastic Response of Mistuned Bladed Disks. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(8): 1907-1916.

<sup>1</sup>Aerospace Engineering Department, New Technologies & Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: Aerospace Engineering Department, New Technologies & Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Velenjak Square, Tehran, Iran  
Phone: +98 (21) 29903244  
Fax: +98 (21) 22431964  
s\_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

#### Article History

Received: May 27, 2018  
Accepted: January 26, 2019  
ePublished: August 12, 2019

### ABSTRACT

In the present study, the flutter and aeroelastic response of mistuned bladed disks to the engine order excitation are studied with the aim of determining the effects of disk structural properties and also establishing an efficient method of analysis. For modeling the solid-fluid interaction, the Whitehead's incompressible, two dimensional cascade theory is used. The structure is also modeled, using a 4 degrees of freedom lumped mass-spring system, which accounts for the bending and torsional deformation of the blade and the disk. This model would enable us to study the effect of structural coupling of adjacent sections as well as the disk flexibility. The solution is based on expansion of the mistuned-blade response in terms of the traveling-wave modes of a tuned bladed disk. The adopted method would be appropriate for determining the aeroelastic response, since the aerodynamic loads are available only for each individual traveling-wave mode. The obtained solution is used to study the effects of disk flexibility on the aeroelastic instability, variations of natural frequencies with different numbers of nodal diameters, and the sensitivity of the vibration amplitude response to the mistuning. Furthermore, the effects of mistuning in blades torsional frequencies and the mistuning in engine order excitation is considered. Parametric studies show that for disks with a lower bending stiffness, the mistuning can significantly influence the aeroelastic behavior such that the for a certain amount of the natural frequency, the disk response could be increased more than 8 times due to the presence of mistuning.

**Keywords** Flutter; Bladed Disk; Mistuning; Aeroelastic Response; Traveling Wave Modes

### CITATION LINKS

[1] The worst response of mistuned bladed disk system using genetic algorithm [2] Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part I: Free vibrations [3] Influence of mistuning on blade torsional flutter [4] Discrete frequency sound generation in axial flow turbomachines [5] Flutter and response of a mistuned cascade in incompressible flow [6] Flutter of turbofan rotors with mistuned blades [7] Vibration and flutter of mistuned bladed-disk assemblies [8] Suppression of bending-torsion flutter through displacement-dependent dry friction damping [9] Transonic aeroelasticity analysis using state-space unsteady aerodynamic modeling [10] A state-space model of unsteady aerodynamics in a compressible flow for flutter analyses [11] Aeroelastic modal characteristics of mistuned blade assemblies-mode localization and loss of eigenstructure [12] Localization of aeroelastic modes in mistuned high-energy turbines [13] Force and moment coefficients for vibrating airfoils in cascade [14] Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes [15] Coupled bending-torsion flutter in cascades [16] Unsteady flow in a supersonic cascade with subsonic leading-edge locus [17] Quasi-steady prediction of coupled bending-torsion flutter under rotating stall [18] Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: Current status and emerging directions [19] A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes [20] Circulant matrices and their application to vibration analysis

## بررسی اثر انعطاف‌پذیری دیسک بر فلاتر و پاسخ آیرولاستیک دیسک‌پره در حضور نامیزانی در فرکانس و نیروی تحریک

سعید محمودخانی \* PhD

گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

ابوالفضل یزدانی MSc

گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

### چکیده

در این مقاله فلاتر و پاسخ آیرولاستیک سازه دیسک‌پره در حضور نامیزانی و تحت تحریک مرتبه موتور، با هدف بررسی اثر خواص سازه‌ای دیسک و تدوین روش تحلیل کارآی مساله مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مدل‌سازی اندرکنش سازه و سیال از نظریه جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر وایتهد و برای مدل‌سازی سازه نیز از مدل چهاردرجه آزادی جرم و فنر شامل خمش و پیچش در مقطع فرضی پره و خمش و پیچش در دیسک استفاده شد که قادر به احتساب اثر وابستگی سازه‌ای حرکت قطاع‌های مجاور و همچنین انعطاف‌پذیری دیسک خواهد بود. برای حل از شکل مودهای موج متحرک سازه دیسک‌پره بدون نامیزانی برای بسط پاسخ سیستم نامیزان استفاده شد که به علت نیاز به محاسبه نیروهای آیرودینامیک به‌طور جداگانه برای هر مود موج متحرک، روش مناسبی برای تحلیل آیرولاستیک است. در نهایت از حل به‌دست‌آمده برای تعیین اثر انعطاف‌پذیری دیسک روی ناپایداری، تغییرات فرکانس‌های طبیعی مودهای پیچشی و خمشی با تعداد گره‌های قطری و همچنین میزان افزایش دامنه ارتعاش تحت اثر نامیزانی استفاده شد. همچنین اثر دو نوع نامیزانی شامل نامیزانی در فرکانس پیچشی پرها و نامیزانی در تحریک مرتبه موتور مورد توجه قرار گرفت. مطالعات پارامتریک، امکان وقوع تغییرات قابل توجه در رفتار ارتعاشی و رفتار آیرولاستیک سیستم را در حضور نامیزانی برای دیسک با سفتی خمشی پایین نشان می‌داد، به‌طوری که به‌ازای مقدار خاصی از فرکانس طبیعی دیسک پاسخ بیشینه سیستم در حالت نامیزان نسبت به حالت میزان تا حدود ۸ برابر افزایش می‌یافت.

**کلیدواژه‌ها:** فلاتر، دیسک‌پره، نامیزانی، پاسخ آیرولاستیک، مودهای موج متحرک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۰۶

\* نویسنده مسئول: s\_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

### ۱- مقدمه

خستگی دوربالا یکی از عوامل شایع در شکست پره توربین‌های گازی است که در نتیجه اعمال بارهای دینامیکی به سازه رخ می‌دهد. این بارها به‌طور عمده ناشی از جریان سیال حول سازه دیسک‌پره دوار هستند که به‌شکل تحریک هارمونیک خارجی موج متحرک و ایجاد تشدید یا از طریق اندرکنش سازه و سیال و ایجاد ناپایداری فلاتر موجب ایجاد ارتعاشات مداوم در سازه دیسک‌پره می‌شوند. روش معمول برای بررسی رفتار سازه تحت اثر هر یک از دو پدیده بالا، بهره‌گیری از خاصیت تقارن چرخه‌ای در هندسه سازه است که امکان مطالعه رفتار کل سازه را تنها با مدل‌سازی یک قطاع امکان‌پذیر می‌کند و از این راه، زمان محاسباتی لازم را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. اما باید توجه داشت که ویژگی تقارن چرخه‌ای در این سیستم‌ها به‌طور کامل منطبق با واقعیت نبوده و در عمل به‌دلیل وجود انحراف در خواص یا توزیع نیروی وارده بر پرها که ناشی از عواملی چون فرآیندهای ساخت قطعات و سائیدگی در اثر کارکرد زیاد است، همواره مقادیری از انحراف از شرایط تقارن چرخه‌ای وجود خواهد داشت که بدان نامیزانی گفته می‌شود [1, 2]. نکته قابل توجه اینکه نامیزانی حتی در صورت کوچک‌بودن، موجب تغییرات قابل توجه در دامنه پاسخ پرها به تحریک هارمونیک و همچنین تغییر سرعت فلاتر می‌شود. این

موضوع در پژوهش‌های متعدد مورد بررسی و تأیید قرار گرفته است. از جمله اولین پژوهش‌های انجام‌شده در این زمینه سیرینی‌واسان [3] در سال ۱۹۸۰ با استفاده از مدل تحلیلی جرم و فنر با یک درجه آزادی و مدل آیرودینامیک ناپایایی/اسمیت [4] به بررسی تأثیر نامیزانی بر مود پیچشی فلاتر در سیستم دیسک‌پره پرداخت. از دیگر مطالعات در این زمینه می‌توان به پژوهش‌های کازا و کیلب [5] اشاره نمود که با استفاده از مدل ایرفویل دودرجه آزادی به‌همراه فنر کششی و پیچشی و نظریه آیرودینامیک دوبعدی جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر، به بررسی ارتعاشات و فلاتر سیستم دیسک و پره نامیزان در جریان زیرصوت پرداختند. مدل‌های کامل‌تر سازه‌ای نیز در مطالعات دیگر کازا و کیلب [6, 7] مورد استفاده قرار گرفت که در پژوهشی [6] از مدل تیر یک‌سرگیر و فرض صلب‌بودن دیسک استفاده شده و در پژوهش دیگری [7] نیز دیسک به‌کمک مدل ورق دایره‌ای مدل‌سازی شد.

احتساب اثر انعطاف‌پذیری دیسک در یک پژوهش [7]، امکان بررسی اثر درگیری سازه‌ای و همچنین اثر سفتی دیسک را بر پاسخ و سرعت فلاتر ایجاد می‌کرد. با این حال اما، مطالعه پارامتریک جامعی در این مطالعه برای بررسی اثر انعطاف‌پذیری دیسک انجام نشده است. همچنین در پژوهش دیگری [8] نیز با استفاده از مدل ایرفویل دودرجه آزادی و با استفاده از تئوری آیرودینامیک خطی جریان کروس و لیشمن [9] و همچنین گوردون و لیشمن [10] به بررسی اثر میرایی اصطکاکی بر کاهش فلاتر سیستم دیسک‌پره نامیزان پرداختند. مطالعه آیرولاستیک روی رفتار سیستم نامیزان بر مبنای مدل‌های آیرودینامیک دوبعدی جریان پتانسیل در مطالعات دیگری [11, 12] نیز انجام شده است. در این پژوهش‌ها از تئوری اغتشاشات کوچک برای بررسی تحلیلی اثر درگیری آیرودینامیک پرها بر افزایش دامنه سازه نامیزان استفاده شد.

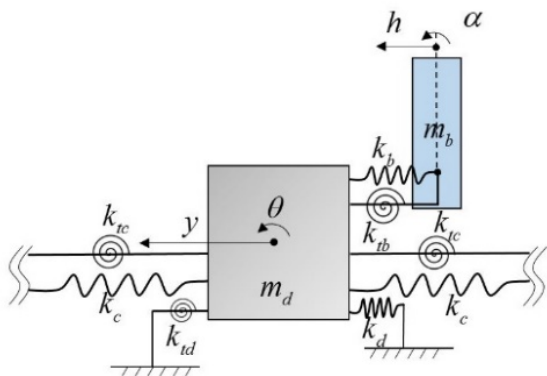
مدل آیرودینامیک مورد استفاده در مطالعه‌ای [5] با بسط نظریه آیرودینامیک تئودورسون برای ایرفویل مجزا و منفرد به مجموعه ایرفویل‌های مجاور هم، توسعه داده شده [13] و از کامل‌ترین نظریه‌های نیمه‌تحلیلی ارائه‌شده برای جریان زیرصوت تراکم‌ناپذیر به شمار می‌رود که در بسیاری دیگر از مطالعات اولیه انجام‌شده روی سازه دیسک‌پره مورد استفاده قرار گرفته است. از جمله پژوهشی [14] که به بررسی اثر نامیزانی بر ارتعاشات به وجود آمده در اثر جریان‌های گردابه‌ای در پره‌های توربوماشین پرداخت. همچنین بندیکسن و فریدمن [15] با استفاده از مدل ایرفویل دودرجه آزادی و نظریه آیرودینامیک جریان تراکم‌ناپذیر ناپایایی وایتهد، پدیده فلاتر ناشی از درگیری خمشی- پیچشی را در دیسک‌پره میزان بررسی نمودند. مدل‌های آیرودینامیک دوبعدی جریان پتانسیل با احتساب تراکم‌پذیری برای جریان زیرصوت و مافوق صوت نیز به‌ترتیب توسط اسمیت [4] و آدمزیک و گلدستین [16] توسعه داده شده که در برخی مطالعات [6, 7, 11] مورد استفاده قرار گرفته است. در پژوهشی [17] نیز با استفاده از نظریه آیرودینامیک خطی وایتهد، پدیده فلاتر را برای پدیده واماندگی چرخشی جریان شبه‌پایا بررسی نموده و مودهای فلاتر سیستم را در اثر این پدیده‌ها پیش‌بینی نمودند [17].

باید توجه داشت که مدل آیرودینامیک دوبعدی جریان پتانسیل و همچنین مدل‌های سازه‌ای جرم گسسته یا مدل‌های تیر و ورق، همگی تنها تا اندازه‌ای قادر به پیش‌بینی رفتار سازه دیسک و پره هستند و برای مدل‌سازی دقیق‌تر، نیاز به شبیه‌سازی اجزای محدود سازه با استفاده از المان جامد سه‌بعدی خواهد بود. با این حال مدل‌های ساده اشاره‌شده در بالا همچنان برای دستیابی به

نموارانه کار حاضر را می‌توان مربوط به اعمال نظریه آیرودینامیک وایتهد به مدل چهاردرجه آزادی دیسک پره با امکان احتساب هم‌زمان اثر انعطاف‌پذیری دیسک و نامیزانی و همچنین نتایج حاصل از مطالعات پارامتریک دانست. نوشتار ریاضیاتی استفاده‌شده در کار حاضر برای استفاده از مدهای موج متحرک سیستم با تقارن چرخه‌ای نیز اگرچه در مطالعات قبلی برای ارتعاشات دیسک پره ارائه شده، اما تعمیم آن به آیرودینامیک دیسک پره با معرفی ترم‌های آیرودینامیک به روابط موجود نیز برای اولین بار در این مطالعه صورت گرفته است. به‌علاوه در این مطالعه اثر نامیزانی در تحریک مرتبه موتور نیز بررسی شد که در مطالعات موجود به‌طور ویژه مورد توجه قرار نگرفته است.

## ۲- معادلات حرکت

در شکل ۱، مدل چهاردرجه آزادی در نظر گرفته‌شده برای مدل‌سازی هر قطاع از مجموعه دیسک پره نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص بوده جرم پره و دیسک به‌ترتیب با نمادهای  $m_d$  و  $m_b$  مشخص شده است. همچنین، برای مدل‌سازی سفتی خمشی پره و دیسک به‌ترتیب از فنرهای با سفتی  $k_b$  و  $k_d$  و برای سفتی پیچشی از فنرهای با سفتی  $k_{td}$  و  $k_{tb}$  استفاده شده است. فنرهای پیچشی و خمشی نماینده وابستگی حرکت قطاع به حرکت قطاع‌های مجاور نیز با نمادهای  $k_c$  و  $k_{tc}$  در شکل مشخص شده‌اند. برای مدل‌سازی کل مجموعه دیسک پره به تعداد پره‌ها ( $N$ ) از مدل نشان‌داده‌شده در شکل ۱ در کنار هم قرار می‌گیرند.



شکل ۱) شماتیک مدل چهاردرجه آزادی در نظر گرفته‌شده برای هر قطاع از دیسک پره

طبق این شکل، معادلات حرکت حاکم بر قطاع  $i$ ام با استفاده از روابط لاگرانژ قابل استخراج خواهد بود که مطابق رابطه زیر است:

$$m_b \frac{d^2 h_i}{dt^2} + m_b d \frac{d^2 \alpha_i}{dt^2} + k_b h_i + k_b y_i = L_i \quad (الف-۱)$$

$$(I_b + m_b d^2) \frac{d^2 \alpha_i}{dt^2} + m_b d \frac{d^2 h_i}{dt^2} + k_{tb} \alpha_i + k_{tb} \theta_i = M \quad (ب-۱)$$

$$m_d \frac{d^2 y_i}{dt^2} + k_d y_i + 2k_c y_i - k_c y_{i-1} - k_c y_{i+1} - k_b h_i + k_b \quad (ج-۱)$$

$$I_d \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} + 2k_{tc} \theta_i - k_{tc} \theta_{i-1} - k_{tc} \theta_{i+1} + k_{td} \theta_i - k_{tb} \alpha_i + \quad (د-۱)$$

که در معادلات بالا  $I_d$  و  $I_b$  به‌ترتیب نشان‌دهنده ممان اینرسی حول مرکز جرم مقطع فرضی پره و دیسک و  $d$  نشان‌دهنده فاصله

تخمین‌های سریع از رفتار و بهینه‌سازی در طراحی اولیه مفید هستند. همچنین از این مدل‌ها می‌توان برای انجام مطالعات پارامتریک و بررسی تحلیلی اثر عوامل سازه‌ای و آیرودینامیک مختلف بر رفتار آیرودینامیک استفاده کرد. اهمیت این موضوع به‌ویژه در صورت نیاز به انجام بررسی‌های آیرودینامیک به‌دلیل زمان قابل توجه مورد نیاز برای انجام محاسبات ناشی از اندرکنش سازه و سیال دوچندان خواهد بود. البته باید توجه داشت که تاکنون روش‌های متعددی برای افزایش سرعت محاسبات بر پایه مدل‌سازی اجزای محدود و دینامیک سیالات محاسباتی از طریق روش‌های کاهش مرتبه و اتخاذ برخی فرضیات ساده‌کننده برای احتساب اثر اندرکنش سازه و سیال ارائه شده است. تاکنون روش‌های متعددی برای کاهش مرتبه سیستم‌های دیسک پره ارائه شده که مرور کلی برخی از آنها در یک مطالعه<sup>[18]</sup> انجام شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های بر مبنای استفاده از مدهای سیستم اشاره کرد که توسط یانگ و گریفین<sup>[19]</sup> و با نام زیربخش مدهای نامی ارائه شده است که برای انجام تحلیل‌های آیرودینامیک مناسب هستند. اگرچه در مطالعه حاضر نیاز به کاهش مرتبه نبوده و از آن استفاده نشده است، اما روش تحلیل ارائه‌شده، امکان اعمال کاهش مرتبه شبیه به روش SNM را با اعمال تغییرات اندک فراهم می‌کند.

در مطالعه حاضر، با توجه به اهمیت بررسی پارامتریک تغییرات خواص سیستم، از مدل جرم و فنر، برای بررسی اثر انعطاف‌پذیری دیسک روی سرعت فلاتر و پاسخ آیرودینامیک سیستم به تحریک مرتبه موتور استفاده شده است. مدل مورد نظر شامل چهاردرجه آزادی و شامل پیچش و خمش پره و دیسک است و لذا اثر خواص مودال دیسک و وابستگی سازه‌ای حرکت در یک قطاع به حرکت در قطاع‌های مجاور در نظر گرفته خواهد شد که از این مدل ساده در مطالعه پیش‌رو برای دستیابی به اهداف زیر استفاده خواهد شد:

- ۱- تبیین روش استفاده از مدهای موج متحرک سیستم متقارن چرخه‌ای (سیستم بدون نامیزانی) برای بسط پاسخ سیستم نامیزان و محاسبه سرعت فلاتر و پاسخ آیرودینامیک
- ۲- مطالعه پارامتریک برای بررسی اثر انعطاف‌پذیری دیسک در تغییرات سرعت فلاتر و دامنه پاسخ در حضور نامیزانی
- ۳- بررسی اثر نامیزانی در جای‌گیری یکنواخت پره‌ها روی محیط دیسک که موجب نامیزانی در تحریک مرتبه موتور می‌شود.

برای پیشبرد این اهداف نیز از نظریه جریان پتانسیل دوبعدی تراکم‌ناپذیر وایتهد برای محاسبات آیرودینامیک مورد استفاده قرار گرفته که در آن از لزجت و چرخشی‌بودن جریان صرف نظر شده است<sup>[13]</sup>. همچنین برای محاسبه ضرایب آیرودینامیک فرض بر نازک‌بودن ایرفویل بوده است و لذا نظریه وایتهد را همان‌طور که در بالا نیز گفته شد می‌توان به‌عنوان شکل بسط‌یافته نظریه تئودورسون برای مجموعه پره‌های مجاور هم دانست.

لازم به توجه است که استفاده از مدهای سیستم بدون نامیزانی برای بسط پاسخ سیستم نامیزان، استفاده مستقیم از نتایج تحلیل آیرودینامیک را ممکن می‌سازد. این امر بدین علت است که بارهای آیرودینامیک برای هر یک از مدهای موج متحرک مربوط به سیستم متقارن چرخه‌ای (مود با اختلاف فاز ویژه بین ارتعاش پره‌های مجاور) به‌طور جداگانه قابل محاسبه خواهد بود. علاوه بر این، بسط پاسخ سیستم نامیزان برحسب مدهای سیستم بدون نامیزانی پایه روش‌های کاهش مرتبه ارائه‌شده توسط یانگ و گریفین<sup>[19]</sup> یا همان روش زیربخش مدهای نامی (SNM) است. در نهایت و با توجه اهداف بیان‌شده، یکی از اصلی‌ترین موارد

$$K^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \omega_{tb}^2 & 0 & -r_\alpha^2 \omega_{tb}^2 \\ -1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & \omega_{tb}^2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (7-b)$$

که  $m_{rt} = I_d / m_b b^2 r_\alpha^2$  و  $m_{rf} = m_d / m_b$  که همچنین در روابط بالا ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  به صورت زیر هستند:

$$C_1 = -2 \cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{N}\right) \omega_{fd}^2 a_{fc} m_{rt} + \quad (8-f)$$

$$2 \omega_{fd}^2 a_{fc} m_{rt} + \omega_{fd}^2 m_{rt} + 1$$

$$C_2 = -r_\alpha^2 \cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{N}\right) \omega_{td}^2 a_{tc} m_{rt} - 2 m_{rt} a_{tc} \omega_{td}^2 + m_{rt} \omega^2 - \omega_{tb}^2 \quad (8-b)$$

حل معادله مقدار ویژه به دست آمده در رابطه ۶ تعداد چهار فرکانس طبیعی و شکل مود را به ازای مقادیر مختلف  $j$  خواهد داد. لازم به توجه است که هر یک از چهار مود به دست آمده از این طریق، مودهای با حرکت غالب پیچشی و خمشی در پره و دیسک را به ازای مود هارمونیک فضایی  $j$ ام نشان می‌دهند. ماتریس مودال مربوط به هر مود فضایی هارمونیک در ادامه با نماد  $\tilde{U}_j$  نشان داده خواهد شد که هر ستون آن مربوط به یکی از چهار مود به دست آمده برای  $j$  است. ماتریس مودال مربوط به تمام  $N$  مود هارمونیک فضایی نیز به شکل زیر تعریف خواهد شد:

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & & & \\ & \tilde{U}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{U}_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

همچنین فرکانس طبیعی مود  $j$ ام مربوط به هر مقدار از مود فضایی هارمونیک ( $j$ ) نیز با نماد  $\omega_{j,i}$  مشخص می‌شود.

## ۲-۲- محاسبه سرعت فلاتر و پاسخ آیرولاستیک سیستم حاوی نامیزانی با استفاده از شکل مودهای موج متحرک

در این بخش از مودهای موج متحرک به دست آمده در بخش پیشین برای بررسی سیستم آیرولاستیک نامیزان استفاده خواهد شد. بدین منظور معادلات ارائه شده در رابطه ۱ برای حالت نامیزان به شکل کلی زیر بازنویسی شده است:

$$(M + \Delta M) \ddot{q} + C \dot{q} + (K + \Delta K) q = F \quad (10)$$

که  $q = [\hat{h} \quad \alpha \quad \hat{y} \quad \theta]^T$  و  $F$  نیروهای آیرودینامیک را نشان می‌دهد. ماتریس‌های  $M$  و  $K$  نیز مربوط به ضرایب مولفه‌های  $\ddot{q}$  و  $q$  برای سازه بدون نامیزانی است که از رابطه ۱ و با در نظر گرفتن تمام قطعات در کنار هم قابل تعیین هستند و ماتریس میرایی سازه‌ای  $C$  نیز در ادامه تعیین خواهد شد. همچنین،  $\Delta M$  و  $\Delta K$  در این رابطه ماتریس جرم و سفتی ناشی از حضور نامیزانی در سیستم هستند که برخلاف سایر ماتریس‌های موجود در رابطه بالا، ماتریس چرخه‌ای نیستند. سپس  $q$  با استفاده از رابطه زیر برحسب مودهای هارمونیک فضایی بسط داده می‌شود [20]:

$$q = (E \otimes I) U a \quad (11)$$

که:

$$E_{ij} = e^{\frac{2\pi i}{N}(j-1)(i-1)} \quad (12)$$

بین مرکز جرم و محور الاستیک بوده و درجات آزادی پیچشی و خمشی مقطع فرضی پره  $i$ ام به ترتیب با  $h_i$  و  $\alpha_i$  درجات آزادی مربوط به دیسک با  $y_i$  و  $\theta_i$  مشخص شده است. همچنین  $M_i$  و  $L_i$  در این رابطه نماینده نیروی برآ و ممان آیرودینامیک اعمالی حول محور الاستیک مقطع فرضی پره هستند. برای بی‌بعدسازی روابط بالا، کمیت‌های بی‌بعد زیر تعریف شده‌اند:

$$\tau = \omega_{tb} t, \quad \hat{h} = \frac{h}{b}, \quad \hat{y} = \frac{y}{b}, \quad x_\alpha = \frac{d}{b} \quad (2)$$

$$r_\alpha^2 = \frac{I_b + m_b d^2}{m_b b^2}, \quad a_{fc} = \frac{k_c}{k_d}, \quad a_{tc} = \frac{k_{tc}}{k_{td}}$$

که  $\omega_{tb}$  فرکانس طبیعی خمشی پره و  $b$  طول مرجع ایروفیل را نشان می‌دهند. همچنین کمیت‌های سفتی موجود در روابط بالا، مطابق با رابطه زیر برحسب کمیت‌های مربوط به فرکانس‌های طبیعی قطاع و پره مجزا نوشته خواهد شد:

$$k_{tb} = m_b b^2 r_\alpha^2 \omega_{tb}^2 \omega_{fb}^2 \quad (3)$$

$$k_d = m_b \omega_{fd}^2 \omega_{fb}^2$$

$$k_{td} = I_d \omega_{td}^2 \omega_{fb}^2$$

که  $\omega_{td}$ ،  $\omega_{fd}$  و  $\omega_{tb}$  به ترتیب فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده مربوط به پیچش پره، پیچش در دیسک و خمش در دیسک هستند.

## ۱-۲- محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای موج متحرک

برای تعیین مودهای موج متحرک سیستم مورد نظر، پاسخ رابطه ۱ با حذف عبارات مربوط به تحریک خارجی مطابق زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{h}_i = \bar{h}_i e^{j\omega\tau}, \quad \hat{y}_i = \bar{y}_i e^{j\omega\tau} \quad (4)$$

$$\theta_i = \bar{\theta}_i e^{j\omega\tau}, \quad \alpha_i = \bar{\alpha}_i e^{j\omega\tau} \quad (I = \sqrt{-1})$$

همچنین برای مود هارمونیک فضایی  $j$ ام که در آن اختلاف فاز بین حرکت هر قطاع با قطاع مجاور برابر با  $2\pi(j-1)/N$  است، درجات آزادی اعضای مجاور برابر خواهند بود با:

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i e^{\frac{2\pi(j-1)}{N}}, \quad \bar{y}_{i-1} = \bar{y}_i e^{-\frac{2\pi(j-1)}{N}} \quad (5)$$

$$\bar{\theta}_{i+1} = \bar{\theta}_i e^{\frac{2\pi(j-1)}{N}}, \quad \bar{\theta}_{i-1} = \bar{\theta}_i e^{-\frac{2\pi(j-1)}{N}}$$

در نهایت با جای‌گذاری روابط ۲ تا ۵ در معادلات حرکت ۱، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(-\omega^2 M^{(j)} + K^{(j)}) z = 0 \quad (6)$$

که  $z = [\bar{h}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{y}_i, \bar{\theta}_i]^T$  و ماتریس جرم و سختی به صورت زیر خواهند بود:

$$M^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha & r_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{rf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{rt} r_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (7-f)$$



در روابط بالا، اختلاف فاز بین پرها  $\frac{2\pi}{N}$  در نظر گرفته شده که ناشی از پراکندگی یکنواخت پرها حول دیسک است. نکته دیگری که باید توجه داشت اینکه در رابطه ۱۸، اختلاف فاز نیروی اعمالی به پرها ضریبی از  $\frac{\gamma\pi}{N}$  در نظر گرفته شده که این مقدار ناشی از پراکندگی یکنواخت پرها روی محیط دیسک است. در صورتی که مقداری نامیزانی در جایگیری پرها روی دیسک وجود داشته باشد، اختلاف زاویه بین پره‌های مختلف به  $\frac{\gamma\pi}{N} + \delta_i$  تغییر خواهد کرد که  $\delta_i$ ‌ها دارای میانگین صفر هستند. در این حالت سرعت القایی به پره  $i$ ام به شکل رابطه زیر در خواهد آمد:

$$W_i = f_0 e^{i\omega t} e^{i(m) \frac{2\pi(i-1)}{N} + \delta_i} \quad (19)$$

با استفاده از رابطه ۱۹ می‌توان نشان داد که در اثر وجود نامیزانی در جایگیری پرها، تنها یک مود مشخص شده به ازای مرتبه موتور خاص تحریک نشده است و مجموعی از مودهای سیستم تحریک خواهند شد.

با توجه به نامتقارن بودن ماتریس‌های  $\Delta\hat{R}$ ،  $\Delta\hat{M}$  و  $A$  در رابطه ۱۳، برای حل این معادله با استفاده از روش بسط مودال، ابتدا معادلات به فضای حالت منتقل می‌شوند که منتج به رابطه زیر خواهد شد:

$$((\omega I) - B)v = F_B \quad (20)$$

که  $v = [a, \omega/a]^T$  و:

$$(21)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{4N \times 4N} & I_{4N \times 4N} \\ -(I + A + \Delta\hat{M})^{-1} (\text{diag}[\omega_{i,j}^2] + \Delta\hat{R}) & -(I + A + \Delta\hat{M})^{-1} \hat{C} \end{bmatrix}$$

که ماتریس  $\hat{C}$  با فرض ضرایب میرایی مودال  $\xi_{fd}$ ،  $\xi_{td}$  و  $\xi_{fb}$ ،  $\xi_{tb}$ ،  $\xi_{fb}$ ،  $\xi_{fb}$  برای مودهای خمش و پیچش پره و دیسک، به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\hat{C} = \text{diag}(2\xi_{fb}, 2\omega_{tb}\xi_{tb}, 2\omega_{fd}\xi_{fd}, 2\omega_{td}\xi_{td}) \quad (22)$$

همچنین در رابطه ۲۰،  $F_B$  به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A + \Delta\hat{M})^{-1} F_e \end{bmatrix} \quad (23)$$

در نهایت می‌توان بردار پاسخ  $v$  را با حل رابطه ۲۰ به کمک روش بسط مودال به دست آورد. برای این منظور پاسخ به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v = Pd \quad (24)$$

که در رابطه بالا بردارهای ویژه مربوط به ماتریس  $B$ ، ستون‌های ماتریس  $P$  را تشکیل می‌دهند. با جای‌گذاری رابطه ۲۴ در رابطه ۲۰ و پیش‌ضرب طرفین تساوی در  $P^{-1}$  رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\text{diag}[\omega I - s_j] d = P^{-1} F_B \quad (25)$$

و از رابطه بالا می‌توان مقدار  $d$  را به شکل زیر به دست آورد:

$$d = \text{diag}\left[\frac{1}{\omega I - s_j}\right] P^{-1} F_B \quad (26)$$

که  $s_j$  مقادیر ویژه ماتریس  $B$  است. با محاسبه بردار  $d$ ، پاسخ ارتعاشی سیستم  $(q)$  با استفاده از روابط ۲۴ و سپس ۱۱ به دست خواهد آمد.

### ۳- نتایج عددی

در این بخش، بر مبنای روش ارائه شده در بخش‌های قبلی، تغییرات سرعت فلاتر و پاسخ آیروالاستیک سازه با خواص دیسک مورد

و  $\otimes$  نماد ضرب کرونگر است. با جای‌گذاری رابطه ۱۱ در رابطه ۱۰، پیش‌ضرب  $U^T(E^* \otimes I)$  در طرفین تساوی و فرض ارتعاش هارمونیک، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$(13)$$

$$-\omega^2 (I_{4N} + \Delta\hat{M})\bar{a} + I\omega\hat{C}\bar{a} + (\text{diag}[\omega_{i,j}^2] + \Delta\hat{R})\bar{a} = \omega^2 A\bar{a} + F_e$$

که  $A$  ماتریس قطری بلوکی است که قطرهای بلوکی  $i$ ام آن طبق زیر تعیین می‌شود:

$$\bar{A}_i = \bar{U}_i^T \begin{bmatrix} \frac{\bar{L}_i}{\omega_{fb}^2 m_b b} \\ \frac{\bar{M}_i}{\omega_{fb}^2 m_b b^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{i\omega\tau} \bar{U}_i^T \frac{1}{\mu_s} \begin{bmatrix} \frac{2I}{k} C_{Fq}^i & \frac{2}{k^2} C_{Fa}^i & 0 & 0 \\ \frac{4I}{k} C_{Mq}^i & \frac{4}{k^2} C_{Ma}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{U}_i \quad (14)$$

و

$$F_e = \begin{bmatrix} \bar{U}_1^T \bar{F}_1 \\ \bar{U}_2^T \bar{F}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_N^T \bar{F}_N \end{bmatrix}, \bar{F}_i = \frac{-2\omega^2 W_i}{U_\infty k^2 \mu_s} \begin{bmatrix} C_{Fw}^i \\ 2C_{Mw}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

که  $C_{Mw}^i$ ،  $C_{Fw}^i$ ،  $C_{Ma}^i$ ،  $C_{Mq}^i$ ،  $C_{Fa}^i$ ،  $C_{Fq}^i$  مقادیر ضرایب آیرودینامیک را برای مود هارمونیک فضایی  $i$ ام نشان می‌دهند که با استفاده از نظریه آیرودینامیک و ایتهد محاسبه خواهند شد. دیگر کمیت‌های حاضر در رابطه ۱۵ نیز طبق زیر تعریف می‌شوند:

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} \omega_{fb} \mu_s = \frac{m_b}{\pi \rho_\infty b^2} \quad (16)$$

همچنین  $W_i$  در رابطه ۱۵ مربوط به سرعت القاشده توسط موانع بالادست جریان است که نشان‌دهنده سهم هر مود موج متحرک از سرعت القاشده است. برای توضیح بیشتر درباره سرعت القاشده می‌توان آن را به شکل سرعت القایی روی هر پره در نظر گرفت که در این حالت، سرعت القایی وارد بر پره  $i$ ام برابر با  $W_i$  است که طبق رابطه زیر با  $W_i$  مرتبط است:

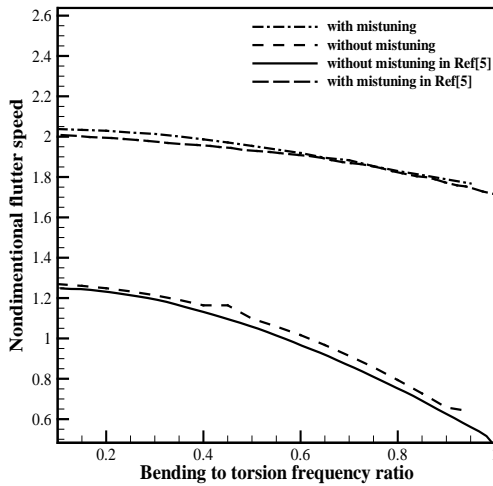
$$W_i = E \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix} \quad (17)$$

با توجه به اینکه سرعت القایی مرتبط به مرتبه موتور بوده و ناشی از تعداد  $n$  مانع در جریان بالادست است، بردار سرعت القایی بر پره  $i$ ام طبق رابطه زیر قابل بیان خواهد بود:

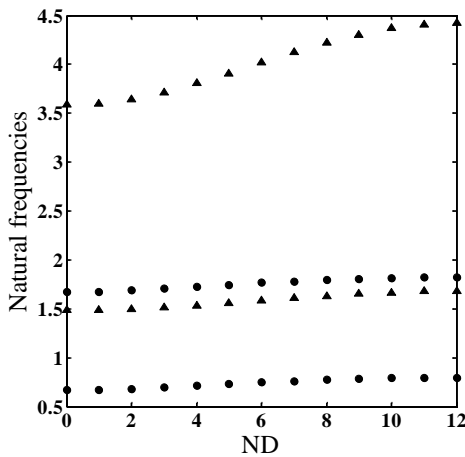
$$W_i = f_0 e^{i\omega t} e^{i \ln \frac{2\pi(i-1)}{N}} \quad (18)$$

با توجه به روابط ۱۷ و ۱۸ می‌توان نتیجه گرفت که برای تحریک مرتبه موتور  $n$ ، تنها  $W_{n+1}$  غیرصفر خواهد بود. این بدین معنی است که تحت تحریک مرتبه  $n$  تنها مود موج متحرک با شماره هارمونیک  $n+1$  تحت تحریک مستقیم جریان آیرودینامیک خواهد بود [20].

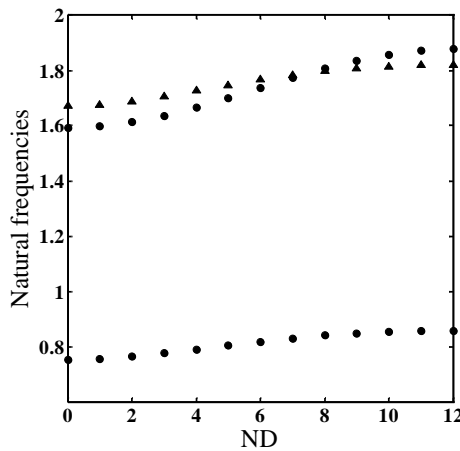
فرکانس خمشی دیسک، مربوط به مود خمشی دیسک است و با افزایش فرکانس خمشی دیسک، مود فلاتر به مود پیچشی پره تغییر می‌یابد. در رابطه با مود فضایی هارمونیک، مود فلاتر در بیشتر نقاط برابر با ۶ است و تغییرات چندانی با تغییر فرکانس دیسک در آن مشاهده نمی‌شود.



نمودار (۱) مقایسه تغییرات سرعت فلاتر با نسبت فرکانس مود پیچشی به خمشی با مرجع [5] برای نامیزانی متناوب ۱٪ و با فرض  $a=0.5$



(الف)



(ب)

نمودار (۲) تغییرات فرکانس‌های طبیعی مدهای محلی به‌زای تعداد خطوط گرهی مختلف برای  $\omega_{df}=1$  و  $\omega_{df}=1.2$  (الف) و  $\omega_{df}=1$  و  $\omega_{df}=1.2$  (ب)  $\omega_{df}=1.2$ : نمادهای دایره‌شکل: مدهای خمشی، نمادهای مثلثی: مدهای پیچشی، شاخه‌های با فرکانس کمتر مربوط به پره و با مقدار فرکانس بیشتر مربوط به دیسک هستند.

مطالعه قرار گرفته است. قیل از ارائه نتایج اصلی، کد توسعه داده شده با مقایسه با نتایج مرجع [5] برای سرعت فلاتر پره با احتساب نامیزانی متناوب یک درصد مورد ارزیابی قرار گرفته است. مدل سازه استفاده شده در این مرجع به شکل مدل ایرفویل دودرجه آزادی به همراه فنر کششی و پیچشی بوده و دیسک به شکل صلب و بدون حرکت در نظر گرفته شده است. همچنین در این مرجع برای مدل‌سازی آیرودینامیک از نظریه دوبعدی جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر ویتهد استفاده شده است.

نتایج در نمودار ۱ ارائه شده که طبق آن مقادیر به دست آمده برای سرعت فلاتر تا حد قابل قبولی نزدیک به هم هستند و همین امر درستی کد توسعه داده شده در مطالعه حاضر را تأیید می‌کند. لازم به ذکر است که به دلیل صلب فرض نمودن دیسک در مرجع [5]، مقادیر فرکانس طبیعی دیسک برای مقایسه در کار حاضر برابر با ۲۰۰ در نظر گرفته شده‌اند که مقداری بزرگ است و اثر ارتعاش دیسک را در پاسخ محو می‌کند. همچنین باید توجه داشت که مدل چهاردرجه آزادی استفاده شده در مطالعه حاضر در مطالعات منتشر شده موجود استفاده نشده است و لذا امکان مقایسه برای ارزیابی کد در حالت دیسک انعطاف‌پذیر وجود ندارد. با این حال، نمودارهای تغییرات فرکانس با تعداد قطره‌های گرهی که در نمودارهای ۲ و ۳ ارائه خواهد شد، مشابه با تغییراتی است که در دیسک‌پره‌های مدل شده با اجزای محدود مشاهده می‌شود.

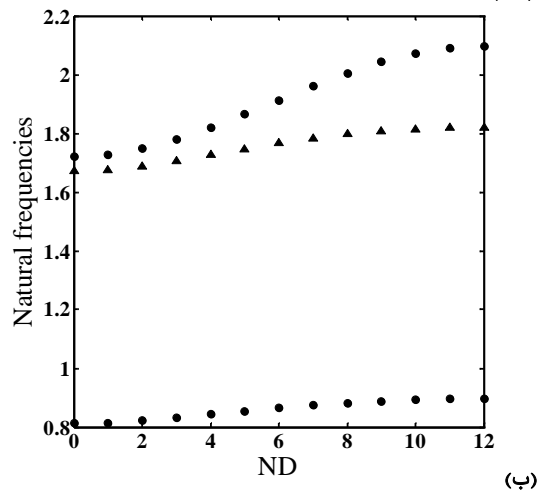
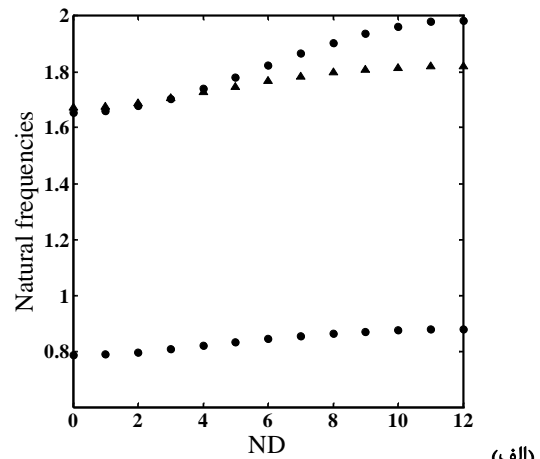
در ادامه نیز به بررسی تأثیر مقادیر فرکانس‌های طبیعی دیسک (به عنوان نماینده انعطاف‌پذیری دیسک) بر ناپایداری دینامیکی و پاسخ تحریک موتور سیستم در حالات بدون نامیزانی و همراه با نامیزانی پرداخته شده است. در نمودار ۴ با ثابت در نظر گرفتن فرکانس طبیعی پیچشی دیسک، تأثیر تغییرات مقدار فرکانس طبیعی خمشی بی‌بعد دیسک ( $\omega_{df}$ ) بر مرز فلاتر مورد بررسی قرار گرفته است. مقادیر پارامترهای در نظر گرفته شده برای رسم این نمودار عبارت از  $\omega_{td}=1.5\omega_{tb}$ ،  $\omega_{tb}=2$ ،  $a_{fc}=a_{tc}=0.2$  و  $m_{rt}=m_{rt}=1.5$  هستند. همچنین برای پرها و جریان سیال خواص مرتبط عبارت از  $x_{\alpha}=0.5$ ،  $N=24$ ،  $\mu_s=150 \text{ kg/m}$  و  $r_{\alpha}=0.5$  و همچنین عدد ماخ،  $M=0.1$  بوده و  $s/c=0.8$  که در آن  $s$  فاصله پره‌ها از یکدیگر و  $c$  طول وتر مقطع ایرفویل مجازی است و  $a=0$  که حاصل ضرب آن در  $b$  فاصله محور الاستیک تا مرکز وتر مقطع فرضی ایرفویل را نشان می‌دهد و زاویه نصب پره برابر با  $60^\circ$  درجه است. همچنین برای سایر نتایج نیز مقادیر بالا صادق هستند، مگر آنکه مجدداً تعریف شده باشند. برای احتساب نامیزانی نیز تنها فرکانس پیچشی پره‌های مختلف با ضرب مقدار نامی  $\omega_{tb}=2$  در توزیع تصادفی نرمال با میانگین یک و انحراف معیار  $0.1$  تعیین شده‌اند. مقادیر میرایی مودال مربوط به مدهای مختلف ( $\xi_{td}, \xi_{tb}, \xi_{fb}, \xi_{fd}$ ) نیز برابر با  $0.02$  در نظر گرفته شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت بی‌بعد فلاتر در هر دو حالت حضور و عدم حضور نامیزانی با افزایش  $\omega_{df}$  از یک به  $1/2$  تغییر جزئی می‌کند. اما با عبور از مرز  $1/2$ ، افزایش ناگهانی و قابل توجهی در سرعت فلاتر حاصل می‌شود. نمودار ۴- b، فرکانس رتبه کاسته روند تغییرات عکس را نسبت به سرعت فلاتر نشان می‌دهد. همچنین در نمودار ۴- c، شماره مدهای فضایی هارمونیک و همچنین شماره مود محلی قطاع در نقطه فلاتر برای سازه بدون نامیزانی نشان داده شده است. در این نمودار، شماره مود ۱ متناظر با مود خمشی پره، شماره ۲ متناظر با مود پیچشی پره و شماره‌های ۳ و ۴ به ترتیب متناظر با مود خمشی و پیچشی دیسک هستند. نکته جالب اینکه طبق این نمودار، مود فلاتر برای مقادیر پایین‌تر

مختلف دیسک بدون نامیزانی با تغییرات تعداد قطره‌های گرهی در نمودارهای ۲ و ۳ برای  $\omega_{df}=1, 1.2, 1.3, 1.4$  رسم شده است. همان‌طور که مشخص است فرکانس دو مود پیچشی پره و خمشی دیسک به‌ازای مقادیر کوچک‌تر از  $1/3$  بسیار به هم نزدیک بوده و در  $\omega_{df}=1.3$  به‌ازای تعداد قطره‌های گرهی پایین‌تر از ۵ (هارمونیک فضایی ششم) تقریباً بر هم منطبق می‌شوند. با گذر از این نقطه، طبق نمودار ۳- ب برای  $\omega_{df}=1.4$ ، افزایش قابل توجه فرکانس خمشی دیسک در مقایسه با فرکانس پیچشی پره مشاهده می‌شود که در واقع علت اصلی افزایش ناگهانی سرعت فلاتر است.

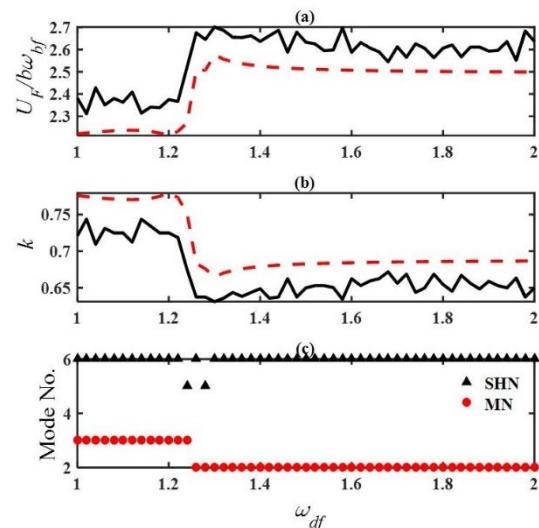
در مطالعه عددی دیگر، افزایش پاسخ نقطه جلوی پره با بیشترین جابه‌جایی به تحریک مرتبه موتور ناشی از موانع بالادست جریان در حضور نامیزانی نسبت به مقدار بیشینه پاسخ سیستم بدون نامیزانی ارائه شده است. این نتایج با احتساب میرایی ناشی از اندرکنش سازه و سیال و برای مقادیر مختلف  $\omega_{df}$  به دست آمده و برای احتساب نامیزانی فرکانس پیچشی پره‌های مختلف نیز انحراف معیار  $0.005$  تعیین شده که در نمودار ۵ نشان داده شده‌اند. همچنین شماره پره‌ای که دچار تشدید می‌شود نیز با BN در نمودارهای مربوطه مشخص شده است. با توجه به نمودار ۵، نتایج نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه نامیزانی در پاسخ سیستم دیسک پره بوده، به‌طوری‌که در محدوده فرکانسی مورد بررسی برخلاف سازه بدون نامیزانی، دو نقطه تشدید برای حالتی که مقادیر  $\omega_{df}=1$ ،  $\omega_{df}=1.2$  و  $\omega_{df}=1.4$  در نظر گرفته شده است، مشاهده می‌شود که دامنه نقطه تشدید دوم نیز به مقدار قابل توجهی بزرگ‌تر از دامنه مربوط نقطه تشدید سیستم بدون نامیزانی است. به‌علاوه مقایسه نتایج به‌دست‌آمده در نمودار ۵ نشان‌دهنده اثر بیشتر نامیزانی برای  $\omega_{df}=1.2$  بوده که علت این امر نزدیکی فرکانس‌های پیچشی پره و فرکانس خمشی تیر در این شرایط است. در رابطه با علت افزایش نقاط تشدید در اثر نامیزانی باید توجه داشت که در واقع، تحریک مرتبه موتور با مرتبه  $n$  که در کار حاضر در نظر گرفته شده، به‌طور کامل شبیه به شکل مود موج متحرک سازه بدون نامیزانی با شماره هارمونیک  $n+1$  است که در مورد آن زیر رابطه ۱۸ توضیحاتی ارائه شده است. بر این اساس، این تحریک تنها قادر به تحریک یکی از مودهای سازه است و لذا تنها یک نقطه تشدید در حالت نبود نامیزانی ایجاد می‌شود. در مقابل، وجود نامیزانی موجب عوض شدن شکل مودهای سازه شده است که در نتیجه آن، شکل تحریک مرتبه موتور دیگر به‌طور کامل منطبق بر هیچ یک از شکل مودهای سازه نخواهد بود. همین امر موجب می‌شود که در این حالت بیش از یک مود سازه تحریک شوند و لذا بیش از یک نقطه تشدید ظاهر می‌شود.

همچنین در  $\omega_{df}=1.4$  کاهش چشمگیر نقطه تشدید دوم نسبت به نقطه تشدید اول در نمودار مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده کاهش اثر نامیزانی در فرکانس‌های مورد نظر بوده و علت این امر نیز ایجاد فاصله بین مودهای خمشی دیسک و پیچشی پره است که در بخش قبل مورد بررسی قرار گرفت.

برای بررسی بیشتر درباره تأثیر پارامترهای مؤثر بر پاسخ سیستم، اثر تغییرات مرتبه موتور بر پاسخ سیستم در حالت میزان و نامیزان مورد بررسی قرار گرفته است. در این مورد با تغییر مرتبه تحریک موتور به ۵، نمودار مربوط به پاسخ میزان و نامیزان برای  $\omega_{df}=1.2$  در نمودار ۶ رسم و با مقدار مرتبه تحریک موتور ۲ مقایسه شده است که خطوط کم‌رنگ مربوط به مرتبه تحریک موتور ۲ و خطوط پررنگ مربوط به مرتبه تحریک موتور ۵ هستند و به‌ازای مقدار مرتبه تحریک موتور ۵، افزایش دامنه پاسخ سیستم



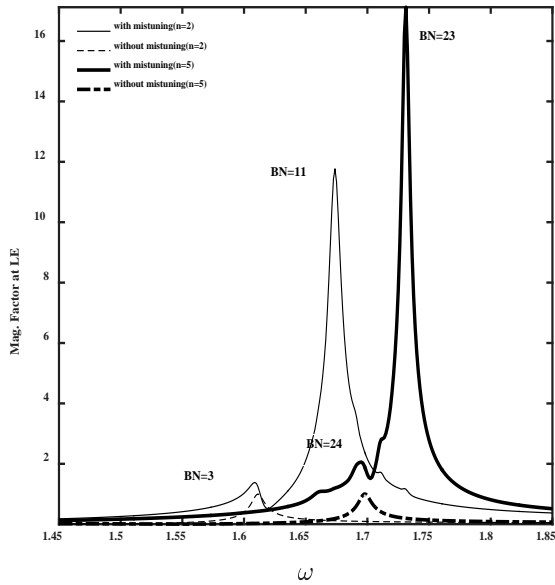
نمودار ۳ تغییرات فرکانس‌های طبیعی مودهای محلی به‌ازای تعداد خطوط گرهی مختلف برای  $\omega_{df}=1.3$  و  $\omega_{df}=1.4$  (الف)؛  $\omega_{df}=1.4$  (ب)؛  $\omega_{df}=1.4$ ؛ توضیحات اضافی مربوط به شکل مطابق با نمودار ۲ است.



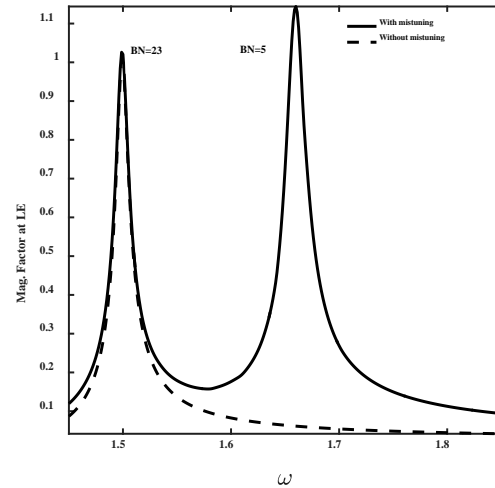
نمودار ۴ تأثیر مقادیر فرکانس طبیعی خمشی دیسک بر سرعت فلاتر بی‌بعد شده، فرکانس رتبه کاسته و شماره مود فلاتر برای حالت بدون نامیزانی سرعت فلاتر بی‌بعد شده، (a) فرکانس رتبه کاسته، (b) شماره مود فلاتر برای حالت بدون نامیزانی؛ خطوط مشکی ممتد: در حضور نامیزانی، خطوط خط‌چین قرمز: بدون نامیزانی

برای بررسی بیشتر علت تغییر ناگهانی مرز فلاتر با افزایش فرکانس خمشی دیسک در نزدیکی  $\omega_{df}=1.3$ ، نمودار تغییرات فرکانس‌های

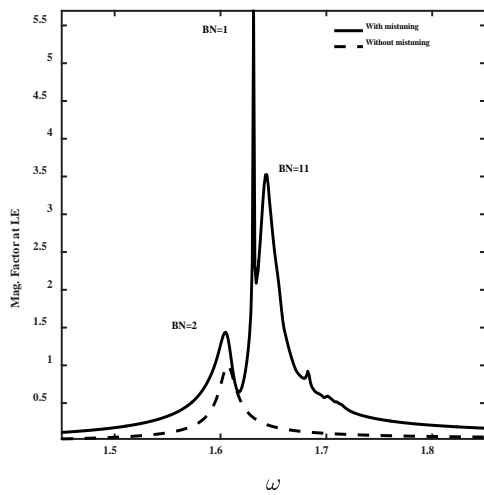
در حالت نامیزان نسبت به مرتبه تحریک موتور ۲ آشکار است. به نظر می‌رسد علت این امر نزدیکی مود هارمونیک فلاتر که در نمودار ۴ نشان داده شد، به مرتبه تحریک موتور مورد نظر باشد که باعث تحریک بیشتر مود هارمونیک فلاتر ۶ به ازای مرتبه تحریک موتور ۵ می‌شود. در نتیجه در این مرتبه تحریک خاص، افزایش چشمگیر نقطه تشدید در سیستم نامیزان مشاهده می‌شود.



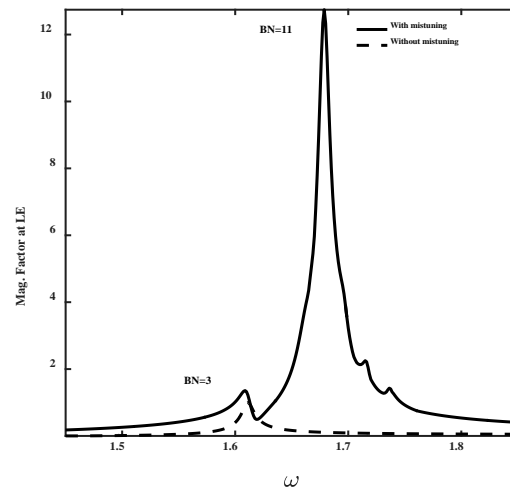
نمودار ۶ اثر تغییرات مرتبه تحریک موتور بر پاسخ آیروالاستیک برای  $k=1$  و  $\omega_{df}=1.2$



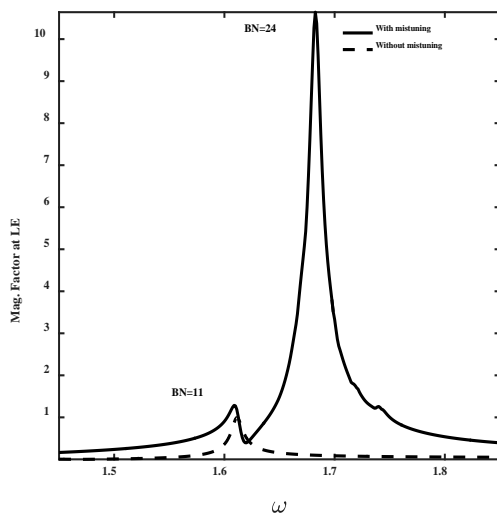
(الف)



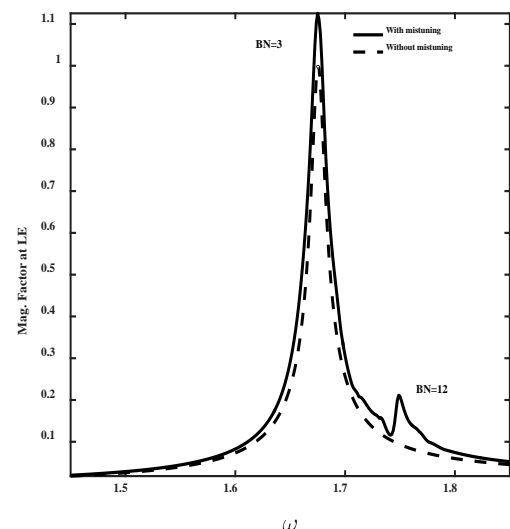
(الف)



(ب)



(ب)



(ج)

نمودار ۷ اثر تغییرات فرکانس فروکاسته شده بر پاسخ آیروالاستیک تحت تحریک مرتبه موتور ۲ (n=2) برای  $\omega_{df}=1.2$ : الف)  $k=0.5$ ، ب)  $k=1.5$

نمودار ۵ اثر نامیزانی در پاسخ آیروالاستیک تحت تحریک مرتبه موتور ۲ (n=2) برای  $k=1$ : الف)  $\omega_{df}=1$ ، ب)  $\omega_{df}=1.2$ ، ج)  $\omega_{df}=1.4$



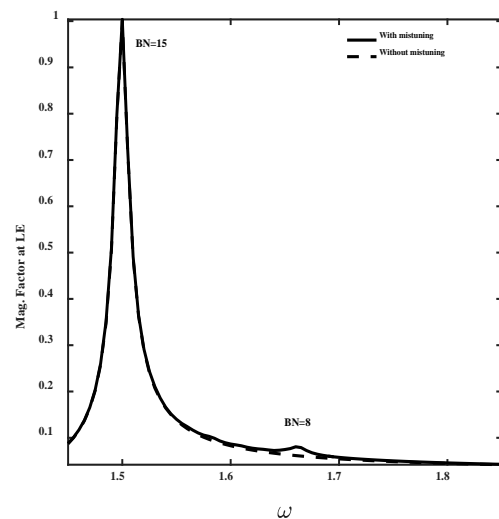
شده است. از طرفی با افزایش مقدار آن به ۱/۵ مطابق نمودار ۷- ب مجدداً کاهش پاسخ حالت نامیزان در نقطه تشدید مشاهده می‌شود.

در نهایت نیز به بررسی اثر نامیزانی در نیرو که ناشی از جای‌گیری پره‌ها بوده، پرداخته شده است که این پدیده باعث ایجاد تغییر در اختلاف فاز بین نیروهای آیرودینامیک اعمالی به پره‌های مختلف نسبت به اختلاف فاز بین حرکت پره‌ها خواهد شد. در نتیجه در یک مرتبه موتور خاص، نیروی ناشی از فشار آیرودینامیک ایستای جریان بالادست دیگر، یک مود مشخص را تحریک نمی‌کند و بر همه مودهای سیستم اثر می‌گذارد. در مطالعه عددی مربوط به این بخش، با در نظر گرفتن نامیزانی اتفاقی در زاویه بین پره‌های مختلف با انحراف معیار ۰/۰۰۵ و میانگین صفر، نتایج مورد نظر برای مقادیر مختلف  $\omega_{df}$  در نمودار ۸ نشان داده شده‌اند.

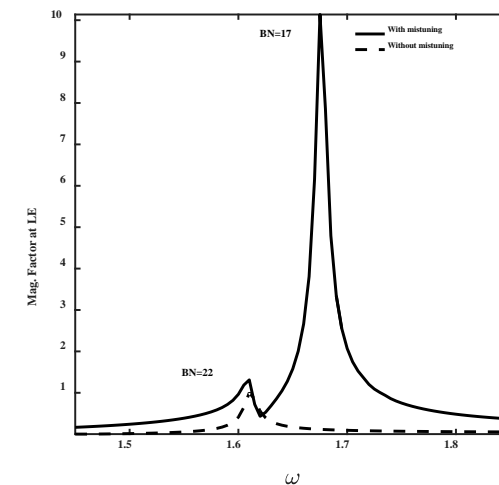
نتایج نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه نامیزانی در پاسخ سیستم دیسک پره در  $\omega_{df}=1.2$  بوده که ناشی از نزدیکی فرکانس‌های پیچشی پره و فرکانس خمشی تیر در این شرایط است و در سایر مقادیر  $\omega_{df}$  تأثیر نامیزانی در پاسخ سیستم دیسک پره کاهش یافته است، به طوری که در  $\omega_{df}=1$  و  $\omega_{df}=1.4$  پاسخ حالت میزان و نامیزان تقریباً بر یکدیگر منطبق هستند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

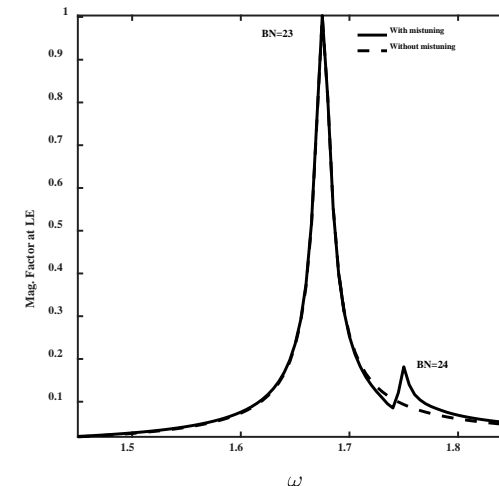
سرعت فلاتر و پاسخ پره به تحریک مرتبه موتور در حضور میرایی ناشی از رفتار آیرودالاستیک و همچنین نامیزانی پره با استفاده از مدل چهاردرجه آزادی و احتساب اثر وابستگی سازه‌ای حرکت هر قطاع به حرکت قطاع‌های مجاور مورد مطالعه قرار گرفت. به دلیل نیاز به محاسبه جداگانه بارهای آیرودینامیک برای هر مود موج متحرک دیسک پره، حل معادلات با بسط پاسخ برحسب مودهای موج متحرک مربوط به سیستم بدون نامیزانی انجام گرفت. همچنین این روش حل با اندکی تغییر، قابل استفاده برای اعمال کاهش مرتبه سیستم بر پایه روش زیربخش مودهای نامی (SNM) است. برای مدل‌سازی اثر جریان سیال از نظریه وایتهد برای جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر دوبعدی حول پره‌های مجاور هم استفاده شد. از حل به‌دست‌آمده برای بررسی اثر انعطاف‌پذیری دیسک روی سرعت ناپایداری و همچنین پاسخ آیرودالاستیک استفاده شد. نتایج نشان‌دهنده افزایش ناگهانی سرعت فلاتر به‌ازای مقداری خاص از فرکانس طبیعی دیسک است. به‌علاوه اینکه به‌ازای مقادیر پایین فرکانس‌های طبیعی دیسک، مود فلاتر به‌جای مود پیچشی روی مود خمشی دیسک اتفاق می‌افتد. طبق نتایج به‌دست‌آمده برای تغییرات فرکانس مربوط به مودهای محلی مختلف با تعداد قطرهای گرهی، این رفتار مربوط به نزدیکی زیاد مود خمشی دیسک و مود پیچشی پره برای دیسک با انعطاف‌پذیری بالاست که با کاهش آن (افزایش فرکانس طبیعی دیسک)، فاصله فرکانس مربوط به این دو مود به مقدار قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند و در نتیجه سرعت فلاتر نیز افزایش می‌یابد. همچنین همین ویژگی منجر به افزایش قابل توجه اثر نامیزانی در فرکانس پیچشی پره‌ها و نامیزانی در تحریک مرتبه موتور، بر بالابردن دامنه پاسخ نسبت به سیستم بدون نامیزانی می‌شود، به طوری که برای مقادیر پایین فرکانس سفتی دیسک، نقطه تشدید دیگری علاوه بر نقطه تشدید حاصل برای سیستم بدون نامیزانی ایجاد می‌شود که دارای دامنه پاسخ به‌مراتب بزرگ‌تر است. همچنین این رفتار، در حالتی که مرتبه تحریک موتور سیستم با مود هارمونیک فلاتر متناظر برابر باشد نیز باعث افزایش بیشتر



(الف)



(ب)



(ج)

نمودار ۸) اثر نامیزانی در نیرو بر پاسخ آیرودالاستیک تحت تحریک مرتبه موتور ۲ ( $n=2$ ) برای  $k=1$ : (الف)  $\omega_{df}=1$ ، (ب)  $\omega_{df}=1.2$ ، (ج)  $\omega_{df}=1.4$

در ادامه نیز به تأثیر فرکانس فروکاسته‌شده بر پاسخ سیستم پرداخته شده است که در این قسمت نمودارهای پاسخ سیستم در حالات میزان و نامیزان به‌ازای مقادیر فرکانس فروکاسته‌شده ۰/۵ و ۱/۵ در نمودار ۷ رسم شده‌اند.

همان‌طور که در نمودار ۷ مشاهده می‌شود، به‌ازای فرکانس فروکاسته‌شده ۰/۵، پاسخ سیستم در حالت نامیزان و نقطه تشدید کمتر از زمانی است که فرکانس فروکاسته‌شده ۱/۵ در نظر گرفته

- 8- Whiteman WE, Ferri AA. Suppression of bending-torsion flutter through displacement-dependent dry friction damping. *AIAA Journal*. 1999;37(1):79-83.
- 9- Crouse GL, Leishman JG. Transonic aeroelasticity analysis using state-space unsteady aerodynamic modeling. *Journal of Aircraft*. 1992;29(1):153-160.
- 10- Gordon Leishman J, Crouse Jr GL. A state-space model of unsteady aerodynamics in a compressible flow for flutter analyses. 27<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, 9-12 January 1989, Reno, NV, USA. Reston VA: AIAA; 1989.
- 11- Pierre C, Murthy DV. Aeroelastic modal characteristics of mistuned blade assemblies-mode localization and loss of eigenstructure. *AIAA Journal*. 1992;30(10):2483-2496.
- 12- Pierre C, Smith TE, Murthy DV. Localization of aeroelastic modes in mistuned high-energy turbines. *Journal of Propulsion and Power*. 1994;10(3):318-328.
- 13- Whitehead D. Force and moment coefficients for vibrating airfoils in cascade [Internet]. London: Her Majesty's Stationery Office; 1962 [cited 2018 April 14]. Available from: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.226.7404&rep=rep1&type=pdf>
- 14- Whitehead DS. Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 1966;8(1):15-21.
- 15- Bendiksen O, Friedmann P. Coupled bending-torsion flutter in cascades. *AIAA Journal*. 1980;18(2):194-201.
- 16- Adamczyk JJ, Goldstein ME. Unsteady flow in a supersonic cascade with subsonic leading-edge locus. *AIAA Journal*. 1978;16(12):1248-1254.
- 17- Ananth SM, Kushari A, Venkatesan C. Quasi-steady prediction of coupled bending-torsion flutter under rotating stall. *Journal of Fluids and Structures*. 2013;43:402-427.
- 18- Castanier MP, Pierre C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: Current status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power*. 2006;22(2):384-396.
- 19- Yang MT, Griffin JH. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2001;123(4):893-900.
- 20- Olson BJ, Shaw SW, Shi C, Pierre C, Parker RG. Circulant matrices and their application to vibration analysis. *Applied Mechanics Reviews*. 2014;66(4):040803.

پاسخ در اثر نامیزانی در فرکانس پیچشی پره‌ها در سیستم می‌شود.

**تشکر و قدردانی:** نویسندگان این مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را از دانشگاه شهید بهشتی به‌خاطر حمایت از این پژوهش اعلام می‌دارند.

**تأییدیه اخلاقی:** این مقاله تاکنون در نشریه دیگری به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.

**تعارض منافع:** مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: سعید محمودخانی (نویسنده اول)، روش‌شناس/پژوهشگر کمکی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ ابوالفضل یزدانی (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)

**منابع مالی:** این تحقیق هیچ گونه منابع مالی دریافت نکرده است.

### منابع

- 1- Raeesi Estabregh E, Ziaee Rad S. The worst response of mistuned bladed disk system using genetic algorithm. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*. 2013;44(2):41-51. [Persian]
- 2- Wei ST, Pierre C. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part I: Free vibrations. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*. 1988;110(4):429-438.
- 3- Srinivasan AV. Influence of mistuning on blade torsional flutter [Internet]. Washington DC: NASA Technical Reports Server; 1980 [cited 2018 April 14]. Available from: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19800022846>
- 4- Smith SN. Discrete frequency sound generation in axial flow turbomachines [Dissertation]. London: University of Cambridge; 1971.
- 5- Kaza KRV, Kielb RE. Flutter and response of a mistuned cascade in incompressible flow. *AIAA Journal*. 1982;20(8):1120-1127.
- 6- Kaza KRV, Kielb RE. Flutter of turbofan rotors with mistuned blades. *AIAA Journal*. 1984;22(11):1618-1625.
- 7- Kaza KRV, Kielb RE. Vibration and flutter of mistuned bladed-disk assemblies. *Journal of Propulsion and Power*. 1985;1(5):336-344.