



## Homogenization of Porous Shape Memory Alloys Using Monte Carlo Technique

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Heidary M.<sup>1</sup> MSc,  
Hoseini S.H.\*<sup>1</sup> PhD,  
Faroughi Sh.<sup>1</sup> PhD

#### How to cite this article

Heidary M, Hoseini S.H, Faroughi Sh. Homogenization of Porous Shape Memory Alloys Using Monte Carlo Technique. Mod-ares Mechanical Engineering. 2019;19(8):2013-2022.

### ABSTRACT

In this paper, the superelastic response of porous shape memory alloys (SMAs) containing spherical pore shape with pore volume fraction between 5% and 40% has been considered. Using digital images processing, the distribution of pores in 2D images of porous NiTi SMA has been extracted. In this method, the 3D distribution of pores has been appraised with the Monte Carlo method and 3D porous SMA models have been established. To investigate the superelastic behavior of shape memory alloys, the Lagoudas's phenomenological model was used, in which a phase transformation function was used. To homogenize the porous SMAs, the Young's modulus and the phase transformation function have been assumed to be a function of the pore volume fraction. Based on the proposed constitutive model a numerical procedure was proposed and executed by the commercial finite element code ABAQUS with developing a user material subroutine. The numerical results show that the Young's modulus and the phase transformation function are the approximately linear function of the pore volume fraction; furthermore, these results demonstrate the accuracy of the proposed homogenization method to predict the superelastic behavior of porous SMAs.

**Keywords** Porous Material; Shape Memory Alloys; Homogenization; Monte Carlo Method

<sup>1</sup>Faculty of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

#### \*Correspondence

Address: Urmia University of Technology, 2Kilometers or Band Road, Urmia, Iran. Postal Code: 57166171-65

Phone: +98 (44) 32247536

Fax: +98 (44) 31980251

s.hamedhoseini@uut.ac.ir

#### Article History

Received: April 13, 2018

Accepted: January 29, 2019

ePublished: August 12, 2019

### CITATION LINKS

[1] Shape memory and superelasticity behavior of porous Ti-Ni material [2] Porous NiTi alloy prepared from elemental powder sintering [3] Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media [4] On localization in ductile materials containing spherical voids [5] A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I-Theory [6] Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a nonuniform distribution of voids [7] Computational homogenization of elasto-plastic porous metals [8] A computational homogenization of random porous media: Effect of void shape and void content on the overall yield surface [9] Microstructure and superelasticity of porous NiTi alloy. Science in China Series E Technological Sciences [10] Transformation behavior of sintered porous NiTi alloys [11] A computational mesoscale evaluation of material characteristics of porous shape memory alloys [12] Modeling porous shape memory alloys using micromechanical averaging techniques [13] Homogenization techniques for the analysis of porous SMA [14] 3D hierarchical multiscale analysis of heterogeneous SMA based materials [15] A numerical model based on Voronoi tessellation for the simulation of the mechanical response of porous shape memory alloys [16] A thermodynamical constitutive model for shape memory materials, part I [17] A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys [18] Shape memory alloys: Modeling and engineering applications [19] A thermomechanical sketch of shape memory effect: One-dimensional tensile behavior [20] Monte Carlo and quasi-Monte Carlo sampling [21] Cellular solids: Structure and properties [22] Computational modeling of porous shape memory alloys [23] The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: Results from two microscopic measurement techniques

## همگن‌سازی آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل با استفاده از روش مونت‌کارلو

مستوره حیدری MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

سیدحامد حسینی PhD\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

شیرکو فاروقی PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

### چکیده

در این مقاله پاسخ سوپرلاستیک آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل شامل تخلخل‌های کروی شکل و درصد تخلخل مابین ۴۰-۵۰٪ مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع تخلخل‌ها با استفاده از برآورد توزیع آنها در عکس‌های نمونه‌های آلیاژ نیکل-تیتانیوم به دست آمده است. در این روش، توزیع تخلخل‌ها در عکس‌های دوبعدی با استفاده از پردازش تصویر به دست آورده شده و سپس توزیع تصادفی تخلخل‌ها در مدل‌های سه‌بعدی با روش مونت‌کارلو تخمین زده و براساس آنها مدل‌های سه‌بعدی تخلخل ایجاد شده است. برای بررسی رفتار سوپرلاستیک آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل، از مدل لاگوداس استفاده شده است که در آن یک تابع سختی بهبود داده شده مورد استفاده قرار گرفت. در روش همگن‌سازی پیشنهادی، مدول الاستیسیته و تابع سختی به‌صورت توابعی از درصد تخلخل در نظر گرفته می‌شوند. برای شبیه‌سازی رفتار ماده، یک الگوریتم عددی پیشنهاد شده و در نرم‌افزار اباکوس با نوشتن یک برنامه یومت عملیاتی شده است. نتایج حاصل بیانگر تغییرات تقریباً خطی مدول الاستیسیته و تابع سختی نسبت به درصد تخلخل است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان‌دهنده آن بوده که این روش همگن‌سازی به‌خوبی توانسته است رفتار سوپرلاستیک آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل را پیش‌بینی نماید.

کلیدواژه‌ها: مواد متخلخل، آلیاژهای حافظه‌دار، همگن‌سازی، روش مونت‌کارلو

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۰۹

\*نویسنده مسئول: s.hamedhoseini@uut.ac.ir

### ۱- مقدمه

رفتار مکانیکی آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل در دهه اخیر به‌طور گسترده مورد توجه قرار گرفته است. یکی از مشخصه‌های مهم آلیاژهای حافظه‌دار، داشتن رفتار سوپرلاستیک است. رفتار سوپرلاستیک زمانی روی می‌دهد که آلیاژ در فاز آستنیت قرار دارد و با اعمال بارگذاری قابل ملاحظه، ماده تغییر فاز می‌دهد و وارد فاز مارتنزیت می‌شود. این تغییر فاز همراه با تغییر شکل قابل ملاحظه‌ای است و با باربرداری آلیاژ از فاز مارتنزیت به آستنیت برگشته و تغییر شکل ناشی از تغییر فاز از بین می‌رود. به‌طور کلی، کاربرد اصلی آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل در زمینه پزشکی است، زیرا آنها توانایی بازیابی بیش از ۲٪ کرنش در بافت‌های زنده و همچنین قابلیت‌هایی چون جذب انرژی، کاهش وزن و تنظیم مدول الاستیک کاشتنی با استخوان بدن را دارا هستند. مشهورترین آلیاژ حافظه‌دار متخلخل با پخت پودر نیکل و تیتانیوم حاصل می‌شود. نیکل-تیتانیوم متخلخل به‌عنوان یک ماده کامپوزت فرض شده که شامل دو فاز، حاوی ماتریس و تخلخل‌ها است. تخلخل‌ها در ماتریس دارای شکل، اندازه و جهت‌گیری‌های متفاوتی هستند [1]. هدف از همگن‌سازی، پیش‌بینی پاسخ مکانیکی آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل که یک ماده ناهمگن بوده، با روابط حاکم بر ماده همگن است. با این روش می‌توان تخمینی از رفتار کلی مواد متخلخل به دست آورد و پاسخ مکانیکی مواد ناهمگن با تکنیک همگن‌سازی به دست آورده می‌شود.

تعداد زیادی از محققان، رفتار مکانیکی مواد متخلخل را با درصد تخلخل‌ها، شکل و توزیع‌های متفاوت بررسی کرده‌اند. گورسن [3] روی تقریب سطح تسلیم به‌صورت تابعی از محیط متخلخل حاوی تخلخل‌های کروی با فرض همسان‌گرد بودن، غیرقابل تراکم و انعطاف‌پذیر بودن ماده کار کرده است. تورگاد [4] با کمک مدل ارائه شده توسط گورسن روی موقعیت تخلخل‌های کروی در مواد نرم، مطالعاتی انجام داده است. داناس و پونته‌کاستاندا [5] یک روش همگن‌سازی غیرخطی را برای تخمین رفتار مواد همسان‌گرد متخلخل ارائه داده‌اند. بیلگر و همکاران [6] مدل گورسن را گسترش داده و نتایج عددی را با تبدیل فوریه برای به‌دست‌آوردن جواب کلی توزیع خوشه‌ای تخلخل‌ها در حالت سه‌بعدی به دست آورده‌اند. فریتزن و همکاران [7] روی مواد انعطاف‌پذیر شامل تخلخل‌های کروی با درصد تخلخل‌های متفاوت بین ۰.۵ تا ۴۰٪ مطالعاتی را انجام داده‌اند. آنها مدل‌های دوره‌ای از تخلخل‌های کروی را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. بررسی‌های آنها منجر به ارائه یک مدل جدید همگن‌سازی تنها با تعریف یک پارامتر اضافه شد. خدیر و همکاران [8] محاسبات همگن‌سازی را توسعه دادند و برای محیط‌های متخلخل تصادفی، اثرات شکل تخلخل‌ها روی تسلیم و همچنین توزیع تصادفی تخلخل‌ها در سلول واحد در جهت‌گیری‌ها، شکل‌ها و حجم‌های جزئی متفاوت را بهبود دادند.

اخیراً تحلیل آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل به‌دلیل امکان استفاده در زمینه‌های متفاوتی همچون هوافضا و مهندسی پزشکی به‌دلیل خواص منحصربه‌فرد آن مورد توجه قرار گرفته است. لی و همکاران [9, 10] با روش سنتز احتراقی و پخت پودر نیکل-تیتانیوم، آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل را تولید کردند. آنها پاسخ مکانیکی محیط متخلخل آلیاژ حافظه‌دار را با اندازه‌ها و جهت‌گیری‌های متفاوت تخلخل‌ها با توزیع یکنواخت آنها مورد بررسی قرار دادند. دی‌گیورگی و کیدوی [11] با دو روش، رفتار کلی ترمودینامیک آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل را تخمین زده‌اند که یکی برای توزیع دوره‌ای تخلخل‌ها در ماتریس آلیاژ حافظه‌دار و دیگری روش موری-تاناکا بوده که برای توزیع تصادفی تخلخل‌ها در ماتریس استفاده شده است. آنها شکل سیلندر را برای تخلخل‌های باز و شکل کره را برای تخلخل بسته در نظر گرفتند. انچف و لاگوداس [12] با استفاده از مدل میکرومکانیک و اصلاح مدل رفتاری آلیاژ حافظه‌دار، یک روش همگن‌سازی را برای تخمین رفتار آلیاژ حافظه‌دار متخلخل پیشنهاد دادند. سیپ و همکاران [13] برای تحلیل رفتار آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل روش موری-تاناکا را بهبود داده و یک روش همگن‌سازی ارائه کرده‌اند. فاطمی‌دهقانی و همکاران [14] با تعریف توزیع دوره‌ای تخلخل‌های بیضی در ماتریس آلیاژ حافظه‌دار، حل‌های عددی را برای رفتار کلی این مواد ارائه کرده‌اند. کارآموزاوری و شهریار [15] براساس روش ورونوی، مدل سه‌بعدی از آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل را ایجاد نموده و به‌صورت تصادفی تعدادی از المان‌های ایجادشده را به‌عنوان تخلخل، انتخاب و تحلیل نموده‌اند. آنها نشان داده‌اند که نتایج حاصل از مدل‌سازی براساس تخلخل‌های تصادفی دقیق‌تر از نتایج حاصل از تخلخل‌های دوره‌ای است.

در این پژوهش، ابتدا رفتار سوپرلاستیک آلیاژهای حافظه‌دار براساس مدل بوید و لاگوداس [16] مورد بررسی قرار گرفته و در آن از یک تابع سختی بهبودیافته استفاده شده است. مدل بوید و لاگوداس یک مدل ترمودینامیک است که براساس مفاهیم سطح تسلیم پلاستیسیته شکل گرفته است. مدل‌سازی عددی این مدل

$$\varepsilon = -\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \mathbb{S} : \sigma + \alpha(T - T_0) + \varepsilon^{tr} \quad (4)$$

$$s = -\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \sigma : \alpha + c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0$$

علاوه بر این، با استفاده از نامعادله کلازیوس- پلانک، نرخ محلی اتلاف با توجه به متغیرهای حالت داخلی به صورت زیر به دست می آید [18]:

$$\sigma : \varepsilon^{tr} - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0 \quad (5)$$

در طول انتقال فاز فرض می شود که کرنش در انتقال فاز برگشت با کاهش نسبت حجمی مارتنزیت  $\xi$  از بیشینه مقدارش به صفر کاهش خواهد یافت. براساس این فرض، تانسور کرنش انتقالی به صورت زیر تعریف می شود [18]:

$$\varepsilon^{tr} = \xi \Lambda \quad (6)$$

در اینجا  $\Lambda$  تانسور جهت انتقال است که به صورت زیر محاسبه می شود [18]:

$$\Lambda = \frac{3}{2} H \frac{\sigma'}{\sigma} \quad (7)$$

$H$  مقدار بیشینه کرنش انتقالی،  $\sigma'$  تانسور تنش انحرافی کوشی و  $\bar{\sigma}$  تنش مؤثر است که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \|\sigma'\|} \quad (8)$$

با جای گذاری معادله های ۶ و ۷ در نامعادله کلازیوس- پلانک، معادله ۵، نرخ کلی اتلاف به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left(\sigma : \Lambda - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) \dot{\xi} = \pi \dot{\xi} \geq 0 \quad (9)$$

در اینجا مقدار صریح نیروی ترمودینامیک با استفاده از معادله ۱ به صورت زیر به دست می آید [18]:

$$\begin{aligned} \pi = & \sigma : \Lambda + \frac{1}{2} \sigma : \Delta \mathbb{S} : \sigma + \Delta \alpha : \sigma (T - T_0) \\ & + \rho \Delta c \left[ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] \\ & + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta u_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (10)$$

پیشوند  $\Delta$  در معادله ۱۰، نشان دهنده اختلاف مقادیر بین فاز آستنیت و مارتنزیت است. براساس نتایج آزمایشگاهی به دست آمده، تغییرات انرژی گرمایی ویژه و تغییرات بین تانسور ضریب انبساط گرمایی بین فاز مارتنزیت و آستنیت ناچیز بوده [18] و همچنین برای ساده سازی، در معادلات از مقدار میانگین مدول یانگ در فاز آستنیت و مارتنزیت استفاده شده است. تابع انتقال  $\Phi$  برای انتقالات رفت و برگشت از فاز آستنیت به مارتنزیت و برعکس به صورت زیر تعریف می شود [16]:

$$\Phi = \begin{cases} \pi - Y^* & \dot{\xi} > 0 \\ -\pi - Y^* & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

در اینجا  $Y^*$  مقدار انرژی اتلافی محلی در انتقال فاز است. همانند مدل های پلاستیسیته، براساس شرایط کوهن- تاکر می توان شرایط

به راحتی امکان پذیر است و نتایج حاصل از آن بیشترین قرابت را با نتایج آزمایشگاهی دارد [17]. در روش همگن سازی پیشنهادی، مدول الاستیسیته و تابع سختی در مدل بوید و لاگوداس به صورت توابعی از درصد تخلخل در نظر گرفته می شوند. برای شبیه سازی رفتار ماده، یک الگوریتم عددی پیشنهاد شده و در نرم افزار اباکوس با نوشتن یک برنامه یومت، عملیاتی شده است. همچنین روند به دست آوردن توزیع تخلخلها در مدل های سه بعدی براساس توزیع تخلخل های استخراج شده از مجموعه عکس های دوبعدی مواد متخلخل واقعی و با استفاده از روش مونت کارلو پیاده شده و در آخر، رفتار سوپرالاستیک یک آلیاژ حافظه دار متخلخل مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- معادلات حاکم آلیاژهای حافظه دار

در این پژوهش، برای تحلیل رفتار سوپرالاستیک آلیاژ حافظه دار متخلخل از مدل بوید و لاگوداس [16] استفاده می شود. در معادلات، ماده همسان گرد فرض شده و تئوری کرنش های کوچک به کار برده می شود. براساس این تئوری، کرنش کلی به صورت مجموع کرنش های الاستیک و کرنش های انتقالی در نظر گرفته شده و تغییر شکل ماده در هنگام انتقال فاز غیرقابل تراکم فرض می شود. در مدل بوید و لاگوداس، انرژی آزاد گیبس به صورت تابعی از متغیرهای حالت  $\xi$ ،  $T$ ،  $\sigma$  و  $\varepsilon$  در نظر گرفته می شود. برای آلیاژهای حافظه دار چند کریستالی، این تابع به صورت زیر تعریف می شود [16]:

$$\begin{aligned} G(\sigma, T, \xi, \varepsilon^t) = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \sigma : \mathbb{S} : \sigma \\ & - \frac{1}{\rho} \sigma : [\alpha(T - T_0) + \varepsilon^{tr}] \\ & + c \left[ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] \\ & - s_0 T + u_0 + f(\xi) \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا،  $\sigma$ ،  $\xi$ ،  $T$ ،  $\varepsilon^{tr}$  و  $T_0$  به ترتیب تانسور کرنش انتقالی، تانسور تنش کوشی، نسبت حجمی مارتنزیت، دمای لحظه ای و دمای مرجع هستند.  $\mathbb{S}$ ،  $\rho$ ،  $c$ ،  $\alpha$  و  $s_0$  به ترتیب تانسور مرتبه چهار انطباق، چگالی، گرمای ویژه، ضریب انبساط دمایی، آنترپی ویژه و انرژی داخلی در حالت مرجع هستند.  $f(\xi)$  تابع سختی است که رفتار ماده را در طول انتقال فاز شرح می دهد. به طور کلی، ویژگی های مؤثر مواد به صورت تابعی خطی از خواص فاز خالص و نسبت حجمی مارتنزیت  $\xi$  به صورت زیر بیان می شوند [18]:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} = & \mathbb{S}^A + \xi (\mathbb{S}^M - \mathbb{S}^A), \\ \alpha = & \alpha^A + \xi (\alpha^M - \alpha^A) \\ c = & c^A + \xi (c^M - c^A), \\ s_0 = & s_0^A + \xi (s_0^M - s_0^A), \\ u_0 = & u_0^A + \xi (u_0^M - u_0^A) \end{aligned} \quad (2)$$

رابطه انرژی داخلی  $u$  نسبت به انرژی آزاد گیبس  $G$  به صورت زیر است [16]:

$$u = G + Ts + \frac{1}{\rho} \sigma : \varepsilon \quad (3)$$

در معادله بالا  $\varepsilon$  تانسور کرنش کلی است. با جای گذاری انرژی داخلی  $u$  در قانون اول و دوم ترمودینامیک، نتایج زیر به دست می آیند:

انتقال فاز رفت و برگشت را تعیین نمود:

$$\begin{aligned} \xi \geq 0, \Phi(\sigma, T, \xi) \leq 0, \Phi \xi = 0 \\ \xi \leq 0, \Phi(\sigma, T, \xi) \geq 0, \Phi \xi = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

در حالت آستنیت و برای  $\Phi < 0$ ، معادله ۱۲ نشان می‌دهد که رفتار ماده الاستیک است ( $\xi = 0$ ) تا وقتی که تابع انتقال صفر شود ( $\Phi = 0$ )، در این صورت انتقال فاز آغاز می‌شود ( $\xi > 0$ ). به‌طور مشابه در حالت مارتنزیت و برای  $\Phi < 0$ ، رفتار ماده الاستیک است ( $\xi = 0$ )، تا وقتی که تابع انتقال صفر شود ( $\Phi = 0$ )، در این صورت انتقال فاز برگشت آغاز می‌شود ( $\xi < 0$ ).

تابع سختی  $f(\xi)$  تشریح‌کننده نحوه تغییر فاز بین فاز مارتنزیت و آستنیت است. توابع متعددی توسط محققان برای تعیین رفتار آلیاژ حافظه‌دار حین فرآیند انتقال فاز پیشنهاد شده است [18]. در این پژوهش تابع ارائه‌شده توسط  $\xi \ln \xi$  [19] با افزودن ترم  $\xi \ln \xi$  بهبود داده شده است. تابع سختی  $f(\xi)$  پیشنهادی به‌صورت زیر است:

$$f(\xi) = \begin{cases} b^M [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi \ln \xi - \xi] \\ \quad + (\mu_1 + \mu_2) \xi & \xi > 0 \\ b^A [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi \ln \xi - \xi] \\ \quad + (\mu_1 - \mu_2) \xi & \xi < 0 \end{cases} \quad (13)$$

در اینجا  $b^M, \mu_2, \mu_1$  و  $b^A$  پارامترهای ماده هستند. این پارامترها را می‌توان به‌طور مستقیم از خواص ترمومکانیک ماده تعیین کرد که جزئیات روش توسط لاگوداس ارایه شده است [18]. براساس این روش، پارامترها به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{4} \rho \Delta s_0 (A_f + A_s + M_f + M_s) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\rho \Delta s_0}{\ln(0.0001)} (A_f - A_s - M_f + M_s) - \rho \Delta u_0 \\ \mu_2 &= \frac{1}{4} \rho \Delta s_0 \left( \frac{\ln(0.0001) + 1}{\ln(0.0001)} \right) (A_f - A_s \\ &\quad + M_f - M_s) \end{aligned} \quad (14)$$

$$Y = \frac{1}{2} \rho \Delta s_0 (M_f - A_s)$$

$$b^A = \frac{1}{2} \frac{\rho \beta \Delta s_0}{\ln(0.0001)} (A_f - A_s)$$

$$b^M = -\frac{1}{2} \frac{\rho \beta \Delta s_0}{\ln(0.0001)} (M_f - M_s)$$

که  $M_s, M_f, A_s$  و  $A_f$  به ترتیب درجه حرارت شروع فاز مارتنزیت، درجه حرارت اتمام فاز مارتنزیت، درجه حرارت شروع فاز آستنیت و درجه حرارت اتمام فاز آستنیت هستند. در این معادله،  $\beta$  اثر تخلخل روی تابع انتقال است و به‌صورت تابعی از نسبت حجمی تخلخل تعریف می‌شود. بقیه پارامترهای رفتاری ماده، ثابت‌های ترموالاستیک برای فاز آستنیت و مارتنزیت و بیشینه کرنش انتقالی هستند که به‌طور مستقیم از تست‌های آزمایشگاهی به دست می‌آیند [18].

### ۳- روش حل عددی

برای تعیین رفتار آلیاژهای حافظه‌دار براساس معادلات حاکم از روش حل عددی الگوریتم بازگشت انطباقی استفاده می‌شود. در این الگوریتم، حل به تعدادی نمو تقسیم می‌شود. در ابتدای هر نمو فرض می‌شود تمام متغیرها معلوم باشند و در انتهای نمو، تنها کرنش کلی مشخص است و سایر متغیرها در انتهای نمو باید توسط الگوریتم بازگشت انطباقی محاسبه شوند. با در نظر گرفتن روش اولیور و با فرض حالت  $n$  برای ابتدای نمو و حالت  $n + 1$  برای انتهای نمو، تغییرات متغیرها در نمو به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+1}^e + \epsilon_{n+1}^{tr} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta \epsilon \\ \epsilon_{n+1}^{tr} = \epsilon_n^{tr} + \Delta \epsilon^{tr} \\ \sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma \\ \xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \xi \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma_{n+1} = \mathbb{C}^e : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{tr}) \quad (17)$$

$$\Delta \epsilon^{tr} = \Delta \xi \Lambda_{n+1} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1} &= H \frac{\sigma'_{n+1}}{\sqrt{\frac{2}{3} \sigma'_{n+1} : \sigma'_{n+1}}} \\ &= H \frac{\mathbb{P} : (\sigma_n + \Delta \sigma)}{\sqrt{\frac{2}{3} [\mathbb{P} : (\sigma_n + \Delta \sigma)] : [\mathbb{P} : (\sigma_n + \Delta \sigma)]}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \sigma_{n+1} : \Lambda_{n+1} + \rho \Delta s_0 T_{n+1} - \rho \Delta u_0 \\ &\quad - \left( \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \right)_{n+1} - Y \end{aligned} \quad (20)$$

در اینجا  $\mathbb{C}^e$  و  $\mathbb{P}$  تانسورهای مرتبه چهار الاستیسیته و پروجکشن هستند. در گام اول فرض می‌شود که رفتار ماده در نمو مورد نظر، کاملاً الاستیک باشد. در این صورت، مقدار تنش در انتهای نمو به‌صورت زیر خواهد بود. این تنش، تنش سعی اولیه نامیده می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^* &= \mathbb{C}^e \\ &: (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^{tr}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}^* &= \sigma_{n+1}^* : \Lambda_{n+1} + \rho \Delta s_0 T_{n+1} - \rho \Delta u_0 \\ &\quad - \left( \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \right)_n - Y \end{aligned} \quad (22)$$

اگر  $\Phi_{n+1}^* < 0$  باشد، انتقال فاز در این نمو اتفاق نمی‌افتد و  $\sigma_{n+1}^*$  به‌عنوان پذیرفته می‌شود. به این معنی که پاسخ، الاستیک است و متغیرهای وابسته به انتقال فاز در نمو بدون تغییر باقی می‌مانند. اما اگر  $\Phi_{n+1}^* \geq 0$  باشد، انتقال فاز رخ داده و  $\sigma_{n+1}^*$  را نمی‌توان به‌عنوان  $\sigma_{n+1}$  پذیرفت. در این حالت با جای‌گذاری معادلات ۱۵، ۱۶، ۱۸ و ۱۹ در معادلات ۱۷ و ۲۰، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \sigma} : d\Delta \sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \xi} : d\Delta \xi = 0 \quad (26)$$

$$d\Delta \xi = - \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \xi}} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \sigma} : d\Delta \sigma$$

با دیفرانسیل گیری از معادله ۱۹،  $d\Lambda = \mathbb{A} : d\Delta \sigma$  و ادغام آن و معادله ۲۶ در معادله ۲۵ می توان نوشت:

$$d\Delta \sigma = \mathbb{C}^e : d\Delta \epsilon + 2G\Lambda \otimes \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \xi}} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \sigma} : d\Delta \sigma - 2G\Delta \xi \mathbb{A} : d\Delta \sigma \quad (27)$$

و در نهایت، مدول تماسی لحظه ای به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{d\Delta \sigma}{d\Delta \epsilon} = \mathbb{K}^{-1} \mathbb{C}^e \quad (28)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{I} - 2G\Lambda \otimes \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \xi}} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \sigma} + 2G\Delta \xi \mathbb{A}$$

**۴- همگن سازی آلیاژهای حافظه دار متخلخل با روش مونت کارلو**  
 معادلات حاکم بر رفتار آلیاژهای حافظه دار و نحوه حل عددی آنها در بخش های قبلی ارائه شد. در این بخش به بررسی رفتار آلیاژهای حافظه دار متخلخل در درصد تخلخل های متفاوت پرداخته خواهد شد. در تخلخل های بالاتر از ۵۰٪، حفره ها در ماده متخلخل، مستقل از هم نیستند و با هم ادغام می شوند. در این حالت، استحکام نهایی ماده و مدول ینگ آن کاهش قابل ملاحظه ای می یابد. در این مقاله، حفره ها مستقل از هم در نظر گرفته شده و تداخل حفره ها حذف شده است. لذا بیشترین تخلخل برابر ۴۰٪ در نظر گرفته شده است. به طور کلی، رفتار مکانیکی آلیاژ حافظه دار متخلخل با فرض کروی شکل بودن تخلخل ها مورد بررسی قرار گرفته است. برای همگن سازی، ابتدا یک سلول واحد برای مطالعه پاسخ آلیاژهای حافظه دار متخلخل در نظر گرفته شده است. سلول واحد در نظر گرفته شده شامل تخلخل های کروی است. توزیع تخلخل ها در سلول واحد با روش مونت کارلو به دست می آیند. روش مونت کارلو یک بخش از الگوریتم های محاسبه گر بوده که تکیه آن بر نمونه گیری تصادفی است و برای مطالعه سیستم هایی که در آن تعداد زیادی درجات آزادی وجود دارد، مفید است [20]. مواد دارای ساختار بی نظم همچون مواد متخلخل می تواند نمونه مناسبی برای تحلیل با این روش باشد. مبنای اصلی روش مونت کارلو براساس استفاده از اعداد تصادفی است. در این پژوهش، نمونه های تصادفی از تخلخل ها براساس توزیع مشاهده شده در یک مجموعه از عکس های آلیاژ نیکل تیتانیوم متخلخل در نظر گرفته می شوند. در این پژوهش، توزیع تخلخل ها به گونه ای در نظر گرفته شده اند که هیچ تداخلی با یکدیگر نداشته باشند و همه تخلخل ها دارای شعاع یکسان هستند. آلیاژ متخلخل به عنوان ماده کامپوزیتی شامل دو فاز، یکی تخلخل ها و دیگری ماتریس ماده در نظر گرفته شده است. در این بخش، پاسخ کلی مکانیکی آلیاژ با استفاده از تکنیک همگن سازی به دست می آید. با استفاده از معادله زیر، رابطه بین شعاع تخلخل ها، تعداد تخلخل ها  $N$  و درصد تخلخل  $f$  به دست می آید:

$$f_{shere} = \frac{4\pi NR^3}{3|\Omega_{tot}|} \quad (29)$$

در اینجا  $G$  مدول برشی الاستیک است. در معادلات فوق فرض شده است که تغییر شکل ماده هنگام انتقال فاز، غیرقابل تراکم باشد. این معادلات در اصل هفت معادله اسکالر غیرخطی هستند که می توان با روش نیوتن-رافسون آنها را حل کرد و متغیرهای مجهول را که عبارت از  $\Delta \sigma$  و  $\Delta \xi$  هستند، به دست آورد. به دلیل پیوسته بودن توابع در این معادلات، مشتقات معادلات نیز پیوسته و قابل محاسبه هستند. همچنین تقریب اولیه مقادیر مجهول به سادگی انجام می شود. بر این اساس، روش نیوتن-رافسون بهترین روش برای حل سریع این معادلات و رسیدن به نتایج معقول همگرا شده است. براساس روش نیوتن-رافسون معادلات به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \xi \end{Bmatrix}^{i+1} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \xi \end{Bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial R_1}{\partial \Delta \xi} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \xi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_i \quad i = 0 \dots k$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \Delta \sigma} = [\mathbb{I} : \Lambda + (\sigma^n + \Delta \sigma) : \mathbb{A}]$$

$$\mathbb{A} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \sigma} = \frac{\mathbb{P}}{\sqrt{\frac{2}{3} [\mathbb{P} : (\sigma^n + \Delta \sigma)] : [\mathbb{P} : (\sigma^n + \Delta \sigma)]}} - \frac{2}{3} \frac{[\mathbb{P} : (\sigma^n + \Delta \sigma)] \otimes [\mathbb{P} : (\sigma^n + \Delta \sigma)]}{\left( \sqrt{\frac{2}{3} [\mathbb{P} : (\sigma^n + \Delta \sigma)] : [\mathbb{P} : (\sigma^n + \Delta \sigma)]} \right)^3}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \Delta \xi} = \frac{\partial}{\partial \Delta \xi} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = -b^M \left[ \left( \frac{1}{0.0001 + \xi^n + \Delta \xi} \right) + \left( \frac{1}{1.0001 - (\xi^n + \Delta \xi)} \right) \right]$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \Delta \sigma} = \mathbb{I} + 2G\mathbb{A}\Delta \xi \quad \text{ک} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \xi} = 2G\Lambda$$

در اینجا  $i$  نشان دهنده تعداد تکرار است. تکرار نیوتن-رافسون تا زمانی که تغییرات  $\Delta \sigma$  و  $\Delta \xi$  ناچیز باشد، ادامه می یابد. با به دست آوردن این متغیرها با استفاده از معادلات ۱۸ و ۱۹ می توان کرنش انتقالی را حساب نمود. بدین ترتیب تمام متغیرها در انتهای نمو محاسبه خواهند شد. برای حل المان محدود، علاوه بر مقادیر متغیرها در انتهای نمو باید مدول تماسی لحظه ای  $\left( \frac{d\Delta \sigma}{d\Delta \epsilon} \right)$  را نیز مشخص نمود. با فرض اینکه کل متغیرها در انتهای نمو به دست آمده باشند، دیفرانسیل معادله ۱۷ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$d\Delta \sigma = \mathbb{C}^e : d\Delta \epsilon - 2G\Lambda d\Delta \xi - 2G\Delta \xi d\Lambda \quad (25)$$

علاوه بر این، مقدار تابع انتقال در حالت  $n$  و حالت  $n+1$  صفر است و دیفرانسیل آن نیز در طول نمو برابر صفر خواهد شد و معادلات زیر حاصل می شوند.

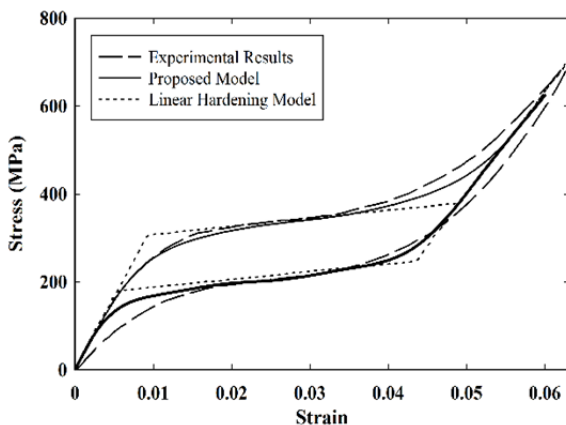
جدول ۱) خواص ترمومکانیک آلیاژ نیکل تیتانیوم [18]

$\alpha^A = \alpha^M = 0.100022$	$H = 0.133$
$c^A = c^M = \epsilon \cdot \frac{J}{kg K}$	$\rho = 7500 \frac{kg}{m^3}$
$E = 217 GPa$	$\rho \Delta s_0 = -11500 \frac{J}{m^3 K}$
$T_0 = 313$	$b^A = 457719$
$A_s = 217$	$M_s = 274$
$A_f = 290$	$M_f = 160$
$\mu_1 = -26327718$	$\mu_2 = -797938$
$\gamma = 3291750$	$b^M = 752093$

شرایط مرزی اعمال شده روی مکعب واحد براساس روش جابه‌جایی کنترل است. این روش این حسن را دارد که مقدار کاهش ظرفیت بارپذیری ماده را می‌توان در آن برآورد کرد. بر این اساس، سه وجه متعامد مکعب را در جهات عمود بر آنها مقید کرده و یک وجه دیگر در جهت عمود، تحت جابه‌جایی یکنواخت قرار داده می‌شود. این شرایط به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= d \\ u(x_1, x_2, 0) &= 0 \\ u(x_1, 0, x_3) &= 0 \\ u(0, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

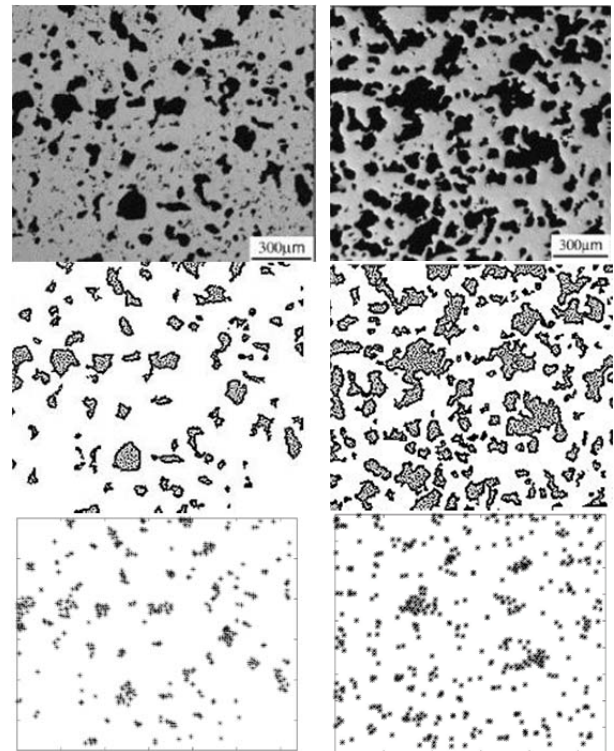
برای شبیه‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار متخلخل از روش المان محدود استفاده می‌شود. براساس حل عددی پیشنهادی، یک برنامه یومت در نرم‌افزار اباکوس برای تحلیل رفتار آلیاژ حافظه‌دار تهیه شده است. ابتدا مکعب حاوی حفره‌های کروی ترسیم می‌شود که مکان آنها با استفاده از توزیع حاصل از روش مونت‌کارلو به دست آمده است. سپس مدل ترسیم شده المان‌بندی می‌شود. برای تحلیل از المان‌های هرمی چهارنودی استفاده شده است. المان‌های هرمی می‌توانند کل محیط متخلخل را به‌سادگی پوشش دهند. تعداد المان‌ها به‌شکلی انتخاب شده‌اند که جواب با ریزترکردن آنها تغییر نکند. در نمودار ۱، مدل المان محدود برای مکعب‌های متخلخل با درصد تخلخل ۵، ۲۰ و ۴۰ به تصویر کشیده شده است. لازم به ذکر است که المان‌بندی نمونه‌های تحلیل شده از آنچه در شکل ۳ دیده می‌شود، ریزتر است و المان‌بندی درشت‌تر برای امکان دیده‌شدن در تصاویر انتخاب شده است. تعداد المان‌هایی که در درصد تخلخل‌های متفاوت استفاده شده، بین ۶۰۰۰ تا ۱۵۰۰۰ المان بوده است.



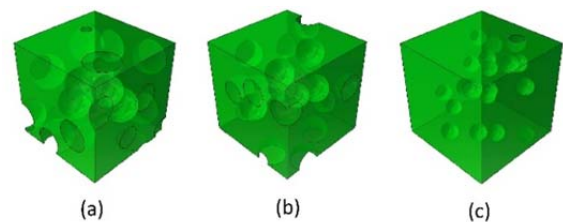
نمودار ۱) نمودار مقایسه‌ای مدل ارائه‌شده در این پژوهش با داده‌های آزمایشگاهی و مدل خطی بویید و لاگوداس

در اینجا  $|\Omega_{tot}|$  حجم در نظر گرفته شده برای آلیاژ حافظه‌دار متخلخل بوده و برای سلول واحد، مقدار آن برابر یک است. برای هر درصد تخلخل در سلول واحد، تعداد ۲۰ حفره در نظر گرفته شده است. توزیع تخلخل‌ها با استفاده از پردازش تصویر به دست می‌آید، به این صورت که توزیع تخلخل‌ها را در عکس‌های دوبعدی به دست آورده و سپس با استفاده از نتایج حاصله و استفاده از روش مونت‌کارلو توزیع‌های جدید ایجاد می‌شوند. دو نمونه از توزیع‌های به‌دست آمده در شکل ۱ مشاهده می‌شود. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، توزیع تخلخل‌ها کاملاً تصادفی است و فاصله بین تخلخل‌ها یکنواخت نیست.

توزیع تخلخل‌ها در حالت سه‌بعدی براساس توزیع تخلخل‌ها در عکس‌های دوبعدی به دست می‌آید. در این حالت، توزیع تصادفی دوبعدی در یک مربع واحد به توزیع سه‌بعدی در یک مکعب واحد گسترش داده می‌شود. سه نمونه از توزیع‌های به‌دست آمده برای درصد تخلخل‌های متفاوت در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل شعاع تخلخل‌ها براساس معادله ۲۹ محاسبه شده است. برای ارزیابی رفتار آلیاژ حافظه‌دار متخلخل از خواص یک آلیاژ نیکل تیتانیوم که از پرکاربردترین آلیاژهای حافظه‌دار است استفاده می‌شود. خواص ترمومکانیک این آلیاژ در جدول ۱ ارایه شده است [18]. مدول یانگ استفاده شده، میانگین مدول یانگ برای فاز آستنیت ( $\xi = 0$ ) و مارتنزیت ( $\xi = 1$ ) است.



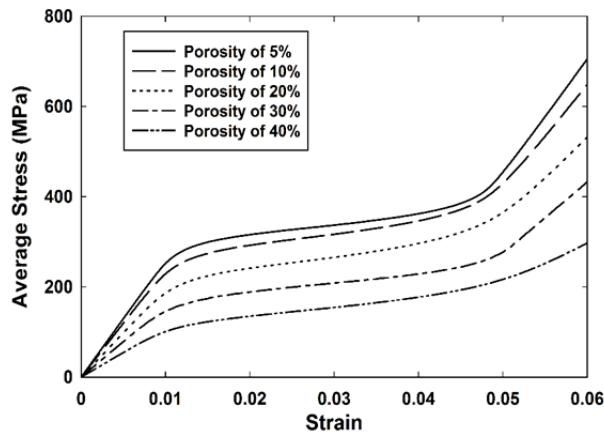
شکل ۱) توزیع تخلخل‌های به‌دست آمده با پردازش تصویر



شکل ۲) توزیع تخلخل‌ها در درصد تخلخل‌های ۲۰، ۴۰ و ۵۰٪ (a: ۲۰، b: ۴۰، c: ۵۰٪)

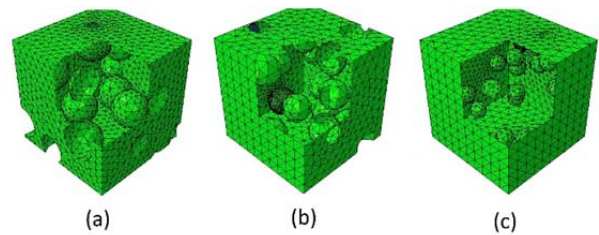
در نمودار ۲، نتایج رفتار سوپرلاستیک مدل های متخلخل با درصد تخلخل ۱۰، ۲۰ و ۴۰ ارائه شده است. از هر درصد تخلخل، ده مدل با توزیع حفره های متفاوت مورد تحلیل قرار گرفته است. همان طور که در نمودار دیده می شود، تفاوت منحنی ها با افزایش درصد تخلخل افزایش پیدا می کند. لازم به ذکر است در تمام نمودارها قسمت رفت انتقال از آستنیت به مارتنزیت آورده شده است. قسمت برگشت از آستنیت به مارتنزیت کاملاً شبیه حالت رفت است و برای جلوگیری از شلوغ شدن تصاویر ارائه نشده اند.

با کامل شدن حل تمام نمونه ها در درصد تخلخل های مختلف از آنها میانگین گیری می شود. نمودار ۳، نتایج میانگین گیری برای درصد تخلخل های ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰ و ۴۰ را به تصویر کشیده است. همان طور که در این نمودار مشاهده می شود، با افزایش درصد تخلخل، ظرفیت بارپذیری و مدول الاستیسیته نمونه ها کاهش پیدا می کند. از طرفی همان طور که ملاحظه می شود، در فرآیند انتقال از فاز آستنیت به مارتنزیت، نحوه سخت شونده گی نیز تغییر پیدا می کند و می توان گفت تغییرات ملایم تر انجام می شود.



نمودار ۳) نمودار میانگین رفتار سوپرلاستیک مقادیر میانگین برای هر تخلخل

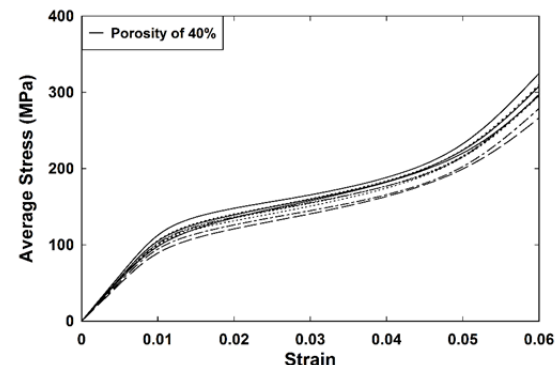
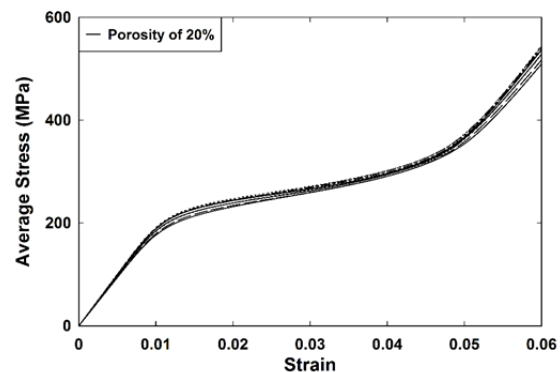
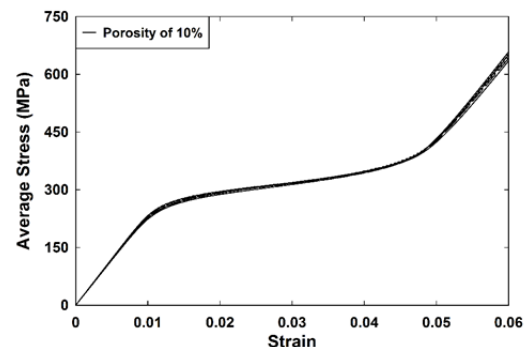
هدف از این تحقیق به دست آوردن یک روش همگن سازی با ارائه مدل همگن و همسان گرد با خواص مشابه المان متخلخل بود که در درصد تخلخل های مختلف به جای مدل متخلخل استفاده شود. برای همگن سازی در معادلات حاکم، تغییرات مدول الاستیسیته و نیز تغییرات تابع انتقال باید به صورت تابعی از درصد تخلخل بیان شوند. برای تابع انتقال ضریب  $\beta$ ، معادله ۱۴، به صورت تابعی از درصد تخلخل بیان می شود. محاسبه تغییرات مدول الاستیسیته ساده است. کافی است که شیب خط قسمت خطی نمودار تنش- کرنش را محاسبه نمود. ولی برای محاسبه ضریب  $\beta$  باید با سعی و خطا مقدار متناسب را یافت، بدین صورت که برای یک مدل بدون تخلخل با اعمال مدول الاستیسیته اصلاح شده و تغییر دادن ضریب  $\beta$ ، مقدار این ضریب را به شکلی یافت که منحنی تنش و کرنش دو حالت بدون تخلخل و مدل متخلخل روی هم بیافتند. در نمودار ۴ نتایج حاصل از روش همگن سازی پیشنهادی با اعمال مدول الاستیسیته اصلاح شده و مقدار بهینه ضریب  $\beta$  روی یک مکعب واحد بدون تخلخل نشان داده شده است. در این نمودار، دو درصد تخلخل ۲۰ و ۴۰ مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج روش همگن سازی با نتایج حاصل از مدل های متخلخل مقایسه شده است. همان طور که در نمودار دیده می شود، روش همگن سازی پیشنهادی با دقت مناسب توانسته است تا رفتار ماده متخلخل را پیش بینی نماید. در نمودار ۴ اثر اعمال مدول الاستیسیته



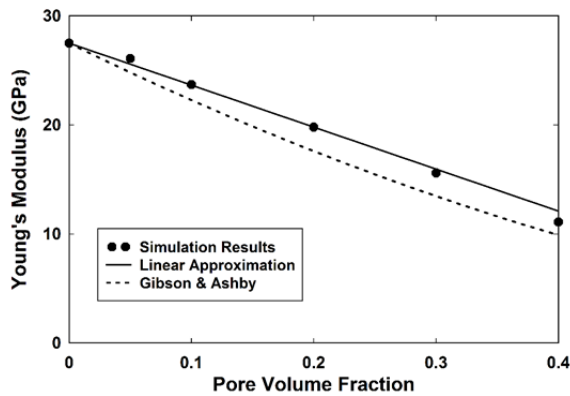
شکل ۳) مدل المان محدود برای درصد تخلخل های ۲۰، ۴۰ (a)؛ ۴۰، ۲۰ (b)؛ ۴۰، ۲۰ (c)

### ۵- نتایج و بحث

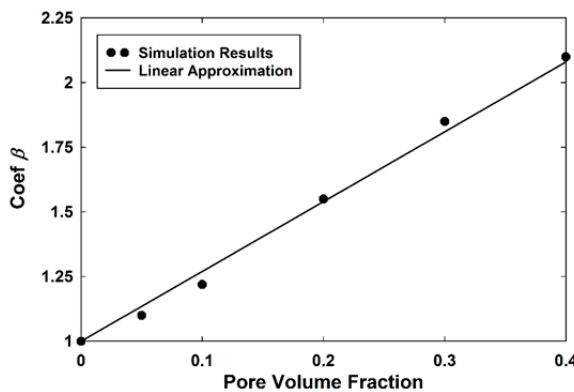
در تمام تحلیل ها نمونه ها تحت جابه جایی کششی و دمای ثابت  $T = 313 K$  که دمایی بالاتر از دمای انتهای آستنیت است، قرار گرفته اند. مقدار جابه جایی اعمالی به شکلی تعیین شده است که تغییر فاز کامل از آستنیت به مارتنزیت حاصل شود. در نمودار ۲، نتایج حاصل از مدل پیشنهادی برای یک مکعب بدون حفره ارائه شده است. نتایج حاصل با نتایج آزمایشگاهی و مدل خطی بوید و لاگوداس<sup>[16]</sup> مقایسه شده است. همان طور که در نمودار مشاهده می شود مدل حاصل از تابع انتقال پیشنهادی (معادله ۱۳)، توانسته است تخمین بهتری به نسبت مدل خطی ارائه نماید. از طرفی رفتار ماده در مدل پیشنهادی کاملاً غیرخطی در نظر گرفته شده است.



نمودار ۲) رفتار سوپرلاستیک نمونه هایی با درصد تخلخل ۲۰ و ۴۰%



نمودار ۵) تغییرات مدول الاستیسیته نسبت به نسبت حجمی تخلخل



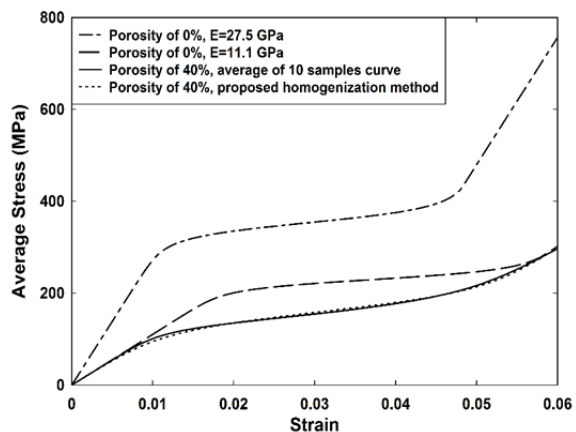
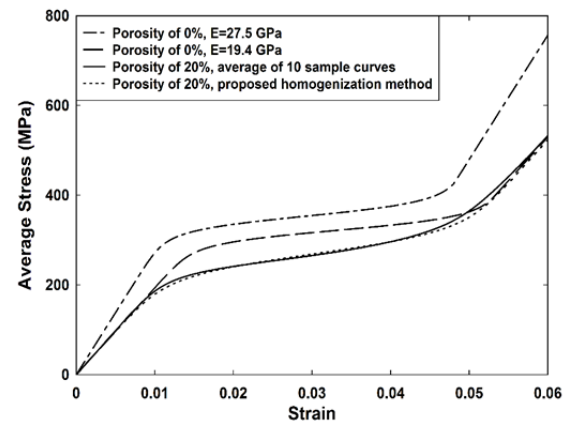
نمودار ۶) تغییرات ضریب beta نسبت به نسبت حجمی تخلخل

بدیهی است که با افزایش درصد تخلخل، مدول الاستیسیته کاهش می‌یابد. گیبسون و اشبای [21] این کاهش را به صورت تابعی درجه دوم از نسبت حجمی تخلخل برای تمام مواد متخلخل پیشنهاد داده‌اند، یعنی  $E = E_0(1 - f)^2$ . تفاوت تابع پیشنهادی با مدل گیبسون و اشبای [21] کمتر از ۵٪ است و البته نباید از نظر دور داشت که مدل آنها بیشتر برای درصد تخلخل‌های بالا کاربرد دارد. یانیکو و برینسون [22] در سال ۲۰۰۸ رابطه خطی برای درصد تخلخل‌های کم را گزارش کرده‌اند. روش آنها در مدل‌سازی تخلخل براساس مدل‌سازی المان محدود و استفاده از المان‌های مکعبی ریز با مدول الاستیسیته ناچیز استوار بوده است. آنچه از نتایج این تحلیل مشخص می‌شود، آن است که آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل برای استفاده در کاربردهای پزشکی به‌عنوان مواد کاشتنی بسیار مفید است. علاوه بر سازگاری آلیاژ نیکل-تیتانیوم با بافت‌های زنده، مدول الاستیسیته آن بسیار به مدول الاستیسیته استخوان نزدیک است. تحقیقات ترونر و همکاران [23] نشان داده که مدول الاستیسیته استخوان در بدن بین یک تا ۲۰ گیگاپاسکال است.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار سوپرالاستیک آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل براساس مدل بوید و لاگوداس [16] و با استفاده از یک تابع سختی بهبود داده شده مورد بررسی قرار گرفت. برای همگن‌سازی آلیاژهای حافظه‌دار متخلخل، مدول الاستیسیته و تابع سختی به صورت توابعی از درصد تخلخل در نظر گرفته شدند. و برای شبیه‌سازی رفتار ماده، یک الگوریتم عددی پیشنهاد داده شد و در نرم‌افزار آباکوس با نوشتن یک برنامه یوتم عملیاتی شد. سپس روند به دست آوردن توزیع تخلخل‌ها در مدل‌های سه‌بعدی براساس توزیع تخلخل‌ها از

اصلاح شده و ضریب  $\beta$  نیز نشان داده شده است. همانند آنچه به تصویر کشیده شده است، عدم اعمال هر کدام از این پارامترها باعث ایجاد خطای قابل ملاحظه در فرآیند همگن‌سازی می‌شود. در جدول ۲ مقدار مدول الاستیسیته اصلاح شده و مقدار بهینه ضریب  $\beta$  برای درصد تخلخل‌های مختلف ارائه شده است.



نمودار ۴) مقایسه نمودارهای رفتار سوپرالاستیک در روش همگن‌سازی و نتایج حاصل از تحلیل نمونه‌های متخلخل در درصد تخلخل‌های ۲۰ و ۴۰

جدول ۲) مدول الاستیسیته اصلاح شده و مقدار بهینه ضریب  $\beta$  برای درصد تخلخل‌های مختلف

$f$	$\beta$	$E$
۰/۰۵	۱/۱	۲۶/۱
۰/۱	۱/۲۲	۲۳/۷
۰/۲	۱/۵۵	۱۹/۵
۰/۳	۱/۸۵	۱۵/۶
۰/۴	۲/۱	۱۱/۱

با توجه به مقادیر ارائه شده در جدول ۲ می‌توان رابطه بین درصد تخلخل و مدول الاستیسیته اصلاح شده و مقدار بهینه ضریب  $\beta$  را به دست آورد. در نمودارهای ۵ و ۶ به ترتیب تغییرات مدول الاستیسیته اصلاح شده و مقدار بهینه ضریب  $\beta$  نسبت به نسبت حجمی تخلخل‌ها نشان داده شده است. همان‌طور که در این نمودارها دیده می‌شود، نرخ تغییرات این دو پارامتر تقریباً ثابت است، به عبارتی رابطه خطی بین آنها وجود دارد. براساس این دو برآورد، معادلات خطی زیر برای رابطه مابین مدول الاستیسیته اصلاح شده و مقدار بهینه ضریب  $\beta$  نسبت به نسبت حجمی تخلخل‌ها پیشنهاد می‌شود.

$$E = 27.5(1.1 - 1.45f) \quad (31)$$

$$\beta = 1 + 1.7f$$



**منابع**

1- Martynova I, Skorohod V, Solonin S, Goncharuk S. Shape memory and superelasticity behavior of porous Ti-Ni material. *Journal de Physique IV*. 1991;01(C4):C4-421-C4-426.

2- Li BY, Rong LJ, Li YY. Porous NiTi alloy prepared from elemental powder sintering. *Journal of Materials Research*. 1998;13(10):2847-2851.

3- Gurson AL. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1977;99(1):2-15.

4- Tvergaard V. On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*. 1982;18(4):237-252.

5- Danas K, Ponte Castañeda P. A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I-Theory. *European Journal of Mechanics A Solids*. 2009;28(3):387-401.

6- Bilger N, Auslender F, Bornert M, Moulinec H, Zaoui A. Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a nonuniform distribution of voids. *European Journal of Mechanics A Solids*. 2007;26(5):810-836.

7- Fritzen F, Forest S, Böhlke T, Kondo D, Kanit T. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*. 2012;29:102-119.

8- Khdir YK, Kanit T, Zaïri F, Naït-Abdelaziz M. A computational homogenization of random porous media: Effect of void shape and void content on the overall yield surface. *European Journal of Mechanics A Solids*. 2015;49:137-145.

9- Li B, Rong L, Li Y. Microstructure and superelasticity of porous NiTi alloy. *Science in China Series E Technological Sciences*. 1999;42(1):94-99.

10- Li BY, Rong LJ, Luo XH, Li YY. Transformation behavior of sintered porous NiTi alloys. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 1999;30(11):2753-2756.

11- De Giorgi VG, Qidwai MA. A computational mesoscale evaluation of material characteristics of porous shape memory alloys. *Smart Materials and Structures*. 2002;11(3):435.

12- Entchev PB, Lagoudas DC. Modeling porous shape memory alloys using micromechanical averaging techniques. *Mechanics of Materials*. 2002;34(1):1-24.

13- Sepe V, Auricchio F, Marfia S, Sacco E. Homogenization techniques for the analysis of porous SMA. *Computational Mechanics*. 2016;57(5):755-772.

14- Fatemi Dehaghani P, Hatefi Ardakani S, Bayesteh H, Mohammadi S. 3D hierarchical multiscale analysis of heterogeneous SMA based materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;118-119:24-40.

15- Karamooz Ravari MR, Shahriari B. A numerical model based on Voronoi tessellation for the simulation of the mechanical response of porous shape memory alloys. *Meccanica*. 2018;53(13):3383-3397.

16- Boyd JG, Lagoudas DC. A thermodynamical constitutive model for shape memory materials, part I. the monolithic shape memory alloy. *International Journal of Plasticity*. 1996;12(6):805-842.

17- Cisse C, Zaki W, Zineb TB. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*. 2016;76:244-284.

مجموعه عکس‌های دوبعدی با استفاده از روش مونت‌کارلو پیاده شده است. برای شبیه‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار متخلخل، مکعب‌های حاوی حفره‌های کروی با توزیع تصادفی، ترسیم و با استفاده از المان‌های هرمی المان‌بندی شد. نتایج تحلیل‌های انجام‌شده نشان داد که تغییرات مدول الاستیسیته و تابع انتقال فاز به صورت خطی وابسته به نسبت حجمی تخلخل‌ها است و با ارائه تابع متناسب برای این پارامترها، یک مدل همگن‌سازی پیشنهاد شد که توانایی تخمین رفتار سوپرالاستیک آلیاژ حافظه‌دار متخلخل را به خوبی دارا است.

**تشکر و قدردانی:** موردی از سوی نویسنده بیان نشده است.

**تأییدیه اخلاقی:** نتایج ارائه شده، حاصل پژوهش نویسندگان بوده که تا کنون در نشریه و یا مجموعه مقالات کنفرانس دیگری چاپ نشده است و در دست بررسی نیست.

**تعارض منافع:** مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با اشخاص و سازمان‌های دیگر ندارد.

**سهم نویسندگان:** مستوره حیدری (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۴۰٪)؛ سیدحامد حسینی (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/روش‌شناس/پژوهشگر اصلی (۳۵٪)؛ شیرکو فاروقی (نویسنده سوم)، پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری (۲۵٪)

**منابع مالی:** از منابع مالی خاصی برای انجام پژوهش حاضر استفاده نشده است.

**۷- پی‌نوشت**

**علامت**

$A^f$	دمای انتهایی آستنیت
$A^s$	دمای آغاز آستنیت
$b_1$	ثابت کرنش انتقالی
$b_2$	ثابت کرنش انتقالی
$c^A$	ضریب گرمایی ویژه آستنیت
$c^M$	ضریب گرمایی ویژه مارتنزیت
$f$	نسبت حجمی تخلخل
$G$	انرژی آزاد گیبس
$H$	کرنش انتقال محوری بیشینه
$M^s$	دمای آغاز مارتنزیت
$M^f$	دمای انتهایی مارتنزیت
$s_0$	آنترופی مرجع
$T$	دما
$T_0$	دمای مرجع
$u_0$	انرژی داخلی مرجع
$Y^*$	انرژی اتلافی محلی در انتقال فاز

**علامت یونانی**

$\epsilon$	تانسور کرنش کلی
$\epsilon^t$	تانسور کرنش انتقالی
$\Lambda$	تانسور جهت انتقال
$\mu_1$	ثابت تابع انتقال
$\mu_2$	ثابت تابع انتقال
$\xi$	نسبت حجمی مارتنزیت
$\rho$	چگالی
$\pi$	نیروی ترمودینامیک انتقال
$\sigma$	تانسور تنش
$\Phi$	تابع انتقال
$\delta$	تانسور انطباق

properties. Cambridge UK: Cambridge University Press; 1999.

22- Panico M, Brinson LC. Computational modeling of porous shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*. 2008;45(21):5613-5626.

23- Turner CH, Rho J, Takano Y, Tsui TY, Pharr GM. The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: Results from two microscopic measurement techniques. *Journal of Biomechanics*. 1999;32(4):437-441.

18- Lagoudas DC, editor. *Shape memory alloys: Modeling and engineering applications*. New York: Springer; 2008.

19- Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effect: One-dimensional tensile behavior. *Res Mechanica*. 1986;18:251-263.

20- Lemieux C. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo sampling*. New York: Springer Science & Business Media; 2009.

21- Gibson LJ, Ashby MF. *Cellular solids: Structure and*