



## Postbuckling Analysis of Laminated Composites with Cutout Using Experimental, Numerical, and Finite Strip Methods

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Shojaee T.<sup>1</sup> MSc,  
Mohammadi B.\*<sup>1</sup> PhD,  
Madoliat R.<sup>1</sup> PhD

#### How to cite this article

Shojaee T, Mohammadi B, Madoliat R. Postbuckling Analysis of Laminated Composites with Cutout Using Experimental, Numerical, and Finite Strip Methods. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(8):2067-2077.

<sup>1</sup>School of Mechanical Engineering, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran  
Postal Code: 1311416846  
Phone: +98 (21) 77240208  
Fax: +98 (21) 77240488  
bijan\_mohammadi@iust.ac.ir

#### Article History

Received: July 23, 2018  
Accepted: January 30, 2019  
ePublished: August 12, 2019

### ABSTRACT

The optimal design of multilayer substrates containing the cutout under compression is very important to achieve maximum buckling resistance in comparison with structural weight, especially in aerospace structures. In this study, buckling and post-buckling behavior of composite laminated plates with orthogonal and symmetrical layup containing the cutout with different diameters has been investigated experimentally, semi-analytically, and numerically. To study the buckling of the composite plate with cutout semi-analytically, a finite strip method is developed. A finite element method was used for numerical analysis. The required material parameters for modeling were obtained from standard tests. The results of the current study show that the size of diameter of cutout does not have considerable effect on elastic rigidity of plate, but the buckling load significantly decreases by increasing cutout diameter. Also, buckling load and elastic rigidity of plate are considerably increased by increasing the number of composite layers. The thickness of plate has more effect on buckling load than the diameter of hole. Studies show that there is a good match between the results of buckling behavior derived from semi-analytical and finite element methods with experimental results.

**Keywords** Finite Strip Method; Post-Buckling; Circular Cutout

### CITATION LINKS

[1] Finite element buckling analysis of laminated ... [2] Optimization of laminated composite plates for maximizing buckling load using improved ... [3] Genetic algorithms and finite element analysis in optimization ... [4] Large deflection theory for orthotropic rectangular plates subjected ... [5] Large-deflection theory for plates with small initial curvature ... [6] Finite strip buckling and free vibration analysis of stepped ... [7] The compressive post-local buckling behaviour of thin plates using ... [8] The effect of anisotropy on post-buckling behavior of laminated ... [9] A semi-energy finite strip non-linear analysis of imperfect composite ... [10] An exact finite strip for the calculation of initial post-buckling stiffness of shear ... [11] Postbuckling response of square laminates with a central circular ... [12] Effects of boundary conditions on buckling and postbuckling responses ... [13] Buckling and postbuckling analyses of laminated anisotropic ... [14] Buckling and postbuckling behavior of delaminated ... [15] Development of a brittle fracture criterion for prediction of crack propagation ... [16] Mixed mode (I+II) fatigue crack growth ... [17] Micromechanical study of fibre-matrix debonding and matrix cracking ... [18] Analysis of composite skin/stringer debonding and failure under static loading ... [19] Fatigue life prediction for adhesively bonded root ... [20] Failure analysis of composite wing adhesive joints using ... [21] Study of free vibration analysis of laminated composite plates with ... [22] Computational modeling and constructal design method applied ... [23] Pre- and postbuckling response of curved, thin, composite panels with cutouts ... [24] Investigation of buckling behavior of composite shell ... [25] Effect of ply stacking sequence on buckling behavior of E-glass/epoxy ... [26] Buckling and post-buckling behaviour of moderately thick ... [27] Development of a finite strip method for efficient prediction of buckling and post-buckling ... [28] Experimental and numerical examination of the effect of ... [29] Experimental and numerical investigation of buckling behavior ... [30] The effect of geometrical imperfection on the axial buckling ... [31] Buckling analysis of perforated composite cylindrical ... [32] A new method to investigate the progressive damage of ... [33] Experimental and numerical investigation of skin/lattice stiffener ...

## تحلیل پس‌کمانش کامپوزیت‌های چندلایه دارای گشودگی به روش‌های تجربی، عددی و نوار محدود

تقی شجاعی MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

بیژن محمدی \* PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

رضا معدولیت PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

### چکیده

طراحی بهینه چندلایه‌های حاوی گشودگی تحت فشار به‌منظور دست‌یابی به بیشترین مقاومت کمانشی در مقایسه با وزن سازه امری بسیار ضروری، خصوصاً در سازه‌های هوایی است. در این پژوهش رفتار کمانش و پس‌کمانش ورق چندلایه‌های کامپوزیتی با لایه‌چینی متعامد متقارن شامل گشودگی با قطرهای مختلف به‌صورت تجربی، نیمه‌تحلیلی و عددی بررسی شده است. برای بررسی نیمه-تحلیلی کمانش ورق کامپوزیتی دارای گشودگی داخلی، یک روش نیمه انرژی نوار محدود توسعه داده شده است. جهت بررسی عددی نیز از روش اجزاء محدود استفاده شده است. پارامترهای مادی لازم برای مدل‌سازی از آزمایشات استاندارد به دست آمده‌اند. نتایج حاصل از پژوهش جاری نشان می‌دهند که ابعاد گشودگی تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر میزان سفتی صفحه ندارد ولی میزان بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی کاهش چشمگیری می‌یابد. همچنین با افزایش تعداد لایه‌ها هم میزان سفتی و هم میزان بار کمانش افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. در مقایسه بین دو پارامتر یاد شده، مشاهده می‌شود که تاثیر افزایش تعداد لایه‌ها در مقایسه با قطر سوراخ تاثیر بیشتری بر بار کمانش دارد. بررسی‌ها نشان می‌دهد، مطابقت مناسبی بین نتایج رفتار کمانشی حاصل از روش‌های نیمه‌تحلیلی و اجزا محدود با نتایج تجربی وجود دارد.

کلیدواژه‌ها: روش نوار محدود، پس‌کمانش، گشودگی دایروی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۵/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۰

\* نویسنده مسئول: bijan\_mohammadi@iust.ac.ir

### ۱- مقدمه

مواد کامپوزیتی به‌علت بالابودن نسبت استحکام به وزن آنها در مقایسه با مواد فلزی امروزه به‌صورت متداول در سازه‌های صنعتی به‌خصوص در صنایع هوایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. وجود گشودگی در ورق‌های ساخته‌شده از این مواد کامپوزیتی، پایداری آنها را در برابر بار فشاری کاهش داده و موجب کمانش ورق می‌شود. با توجه به این شرایط رایج برای بررسی رفتار کمانشی و پس از کمانشی ورق کامپوزیتی ضخیم شامل گشودگی، بسیار حائز اهمیت است.

پراستی<sup>[1]</sup> در سال ۲۰۰۱ کمانش ورق چندلایه تقویت‌شده بدون گشودگی را به کمک روش اجزا محدود بررسی نمود. در این تحلیل از المان هشت‌گره‌ای کوادرتیک برای تحلیل ورق و المان سه‌گره‌ای برای بررسی تقویت‌کننده استفاده شده است. هو و همکاران<sup>[2]</sup> به‌منظور طراحی بهینه کامپوزیت چندلایه‌ای تحت بار کمانشی و رسیدن به حداکثر ضریب بار کمانشی، یک فرآیند بهینه‌سازی رایج داده‌اند که در آن متغیرهای به‌کاررفته، راستای قرارگیری الیاف و ضخامت لایه‌ها است. این محققین برای حل این مساله از روش اجزا محدود استفاده نموده‌اند. در همین زمینه مک و گر<sup>[3]</sup> با هدف رسیدن به کمترین وزن سازه با تحمل بار کمانشی بالا به کمک یک کد نوشته‌شده یک صفحه کامپوزیتی تحت فشار درون‌صفحه‌ای اعمالی بر دو ضلع مقابل را آنالیز کرده، لایه چینی و

جهت‌های الیاف بهینه را به دست آوردند. یوسف<sup>[4]</sup> از اولین کسانی است که تحقیقاتی در زمینه رفتار پس از کمانش سازه‌های کامپوزیتی رایج کرده است. ایشان روش رایج‌شده توسط کوآن<sup>[5]</sup> به‌منظور تحلیل پس از کمانش صفحات ایزوتروپ را به صفحات ارتوتروپ گسترش داد. یکی از روش‌هایی که برای آنالیز کمانش ورق‌های کامپوزیتی استفاده شده است روش نوار محدود است<sup>[6]</sup>.

دیو و تن<sup>[6]</sup> با توسعه روش نوار محدود، گره‌هایی در راستای اضلاع طولی نوار قرار داده‌اند و در نتیجه موجب آسان‌تر شدن مراحل انتگرال‌گیری برای یافتن خصوصیات نوار در روش عمومی نوار محدود شده‌اند. این روش گسترش داده‌شده براساس تغییر شکل برشی مرتبه اول تئوری ورق و تئوری کلاسیک ورق بوده و همچنین مواد کامپوزیتی لایه‌ای را شامل می‌شود. در این تحقیق فرکانس‌های طبیعی و تنش‌ها در لحظه کمانش با این روش پیش‌بینی شده‌اند. در پژوهشی دیگر روش نوار محدود برای تحلیل رفتار پس از کمانش ورق کامپوزیتی متقارن تحت کوتاه‌شدگی لبه‌ای رایج شده است<sup>[7]</sup>. فرمولاسیون این روش براساس اصول روش نیمه‌انرژی است. بدین‌صورت که جابه‌جایی خارج صفحه نوارها تنها جابه‌جایی است که براساس تغییر شکل کلی ورق حدس زده شده است. این جابه‌جایی در معادلات سازگاری ون-کارمن قرار گرفته تا منجر به حل دقیقی از توزیع تنش و جابه‌جایی صفحه میانی ورق شود. جواب‌های حاصل از معادلات ون-کارمن و جابه‌جایی حدس‌زده‌شده در محاسبه انرژی نوار محدود استفاده شد و در نهایت با اعمال اصل مینیمم‌سازی انرژی، معادلات تعادل نوار محدود به دست آمده‌اند. از این معادلات به‌منظور بررسی رفتار پس از کمانش ورق نازک استفاده شده است. کولپینگ خمش و پیچش از تاثیرگذارترین عوامل در عملکرد مکانیکی ورق‌های لایه‌ای سازه‌ها در تغییر شکل‌های بزرگ است. عصایی و همکاران<sup>[8]</sup> تاثیر ناهمسانگردی (یعنی نسبت مدول الاستیسیته در راستای طولی به مدول الاستیسیته در راستای عرضی ورق مستطیلی) بر عملکرد رفتار کمانشی و پس از کمانشی ورق لایه‌ای تحت کوتاه‌شدگی لبه‌ای با استفاده از روش نوار محدود نیمه‌انرژی بررسی نموده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از روش اجزا محدود صحت‌سنجی شده و نشان داده شده است که رفتار کمانشی و پس از کمانشی با تغییر نسبت یادشده، تغییر خواهند کرد. بدین‌صورت که با افزایش این نسبت مقاومت کمانشی ورق و میزان نیروی عکس‌العمل فشاری در راستای طول ورق در مرحله پس از کمانش کاهش می‌یابند. در پژوهشی دیگر<sup>[9]</sup> تحلیل غیرخطی لایه کامپوزیتی شامل جابه‌جایی خارج صفحه به‌عنوان یک نقص اولیه به روش نوار محدود نیمه‌انرژی رایج شده است. این نقص اولیه به شکل سینوسی در راستای طولی و شکل‌های متفاوتی در راستای عرضی فرض شده است. نتایج به‌دست‌آمده از این روش با نتایج حاصل از روش نوار محدود تمام انرژی و همچنین مدل‌سازی به روش اجزا محدود در نرم‌افزار انسیس قیاس شده است. در چندلایه‌های کامپوزیتی مشخصات مکانیکی متفاوتی با تغییر لایه چینی به دست می‌آیند. فن‌ادپور و همکاران<sup>[10]</sup> با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و فرضیات ون-کارمن یک روش نوار محدود را برای چندلایه‌های کامپوزتی ضخیم توسعه دادند. جان و کومار<sup>[11]</sup> به کمک روش اجزا محدود رفتار پس از کمانش کامپوزیت لایه‌ای مربع‌شکل شامل گشودگی مرکزی به شکل دایره و بیضی تحت فشار جانبی یک‌طرفه را مطالعه نموده‌اند. ایشان به‌منظور تحلیل غیرخطی از فرمولاسیون تئوری ورق میندلین و فرضیات ون-کارمن استفاده کرده‌اند. هدف این تحقیق تاثیر شکل گشودگی، اندازه و

صنایع فضایی استفاده می‌شوند. این سازه‌ها تحت فشار محوری در معرض کمانش قرار می‌گیرند و حساسیت این عکس‌العمل با حضور نقص هندسی بالا می‌رود. بنابراین فهمیدن تاثیر گشودگی با اندازه‌های متفاوت بر بار کمانشی استوانه جدار نازک اهمیت می‌یابد. آریلو و همکاران [24] تاثیر اندازه گشودگی و انحنای ورق کامپوزیتی بر کمانش را بررسی نموده‌اند. شکریه و همکاران [25] اثر لایه چینی را در کمانش چندلایه‌های کامپوزیتی مورد ارزیابی قرار دادند. همچنین قنادپور و همکاران [26] رفتار کمانش چندلایه‌های کامپوزیتی بدون گشودگی را با ارایه یک مدل نوار محدود جدید مبتنی بر فرضیات ون-کارمن مطالعه نمودند. در یک پژوهش دیگر شجاعی و همکاران به روش تجربی و با ارایه یک مدل نوار محدود مبتنی بر تئوری کلاسیک ورق‌ها، رفتار چندلایه‌های کامپوزیتی حاوی گشودگی با و بدون تقویت‌کننده را مورد بررسی قرار دادند [27]. بررسی کمانش سازه‌های حاوی گشودگی در پوسته‌های استوانه‌ای نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. طاهری‌به‌روز و همکاران [28, 29] و طالع‌زاده و رحیمی [30, 31] کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی گشودگی را به روش تجربی و اجزا محدود بررسی نمودند. بررسی تخریب در سازه‌های کامپوزیتی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. قنادپور و شاکری [32] رفتار تخریب پیش‌رونده در چندلایه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری فشاری را مورد ارزیابی قرار دادند. همچنین فرخ‌آبادی و همکاران [33] تخریب چندلایه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده را با در نظر گرفتن جدایش پوسته و تقویت‌کننده مورد مطالعه قرار دادند. علی‌رغم پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه روش نوار محدود نیمه‌انرژی، در این پژوهش روش نوار محدود نیمه‌انرژی مبتنی بر "تئوری برشی مرتبه اول" ورق جهت تحلیل رفتار کمانش و پس از کمانش ورق کامپوزیتی ضخیم "دارای گشودگی دایروی" توسعه داده شده است. مزیت تئوری برشی مرتبه اول در مقایسه با تئوری کلاسیک لایه‌ای این است که به دلیل در نظر گرفتن اثرات برش دقت بهتری در ورق‌های ضخیم دارد. صحت روش ارایه‌شده با استفاده از روش اجزای محدود و تست‌های تجربی مورد ارزیابی قرار گرفته و سعی شده است با ارایه نتایج تجربی، تاثیر قطر گشودگی و ضخامت لایه کامپوزیتی بر رفتار کمانشی و پس از کمانشی ورق کامپوزیتی مورد ارزیابی قرار گیرد.

## ۲- روش نوار محدود نیمه‌انرژی

فرمولاسیون روش نوار محدود نیمه‌انرژی به منظور تحلیل رفتار کمانشی و پس از کمانشی ورق نازک کامپوزیتی شامل گشودگی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین‌منظور ابتدا مشخصات یک نوار محدود و نحوه استخراج معادلات سازگاری و محاسبه میدان‌های جابه‌جایی برای آن، به روش نیمه‌انرژی بررسی شده است. سپس ماتریس سختی برای نوار کامل، ناقص شامل گشودگی محاسبه شده و با سرهم‌بندی این نوارهای کامل، ناقص و تقویتی به یکدیگر، ماتریس سختی کلی سازه به‌دست‌آمده و در نتیجه با روش حل تکراری نیوتون-رافسون، رفتار کمانشی و پس از کمانشی ورق شامل گشودگی و تقویت‌کننده بررسی شده است.

### ۲-۱- فرضیات استفاده‌شده برای ورق

طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، پنج متغیر  $w$ ،  $\theta_y$ ،  $\theta_x$ ،  $v$  و  $u$  به‌عنوان درجات آزادی مستقل ورق در نظر گرفته می‌شوند. متغیرهای  $v$  و  $u$  معرف تغییر مکان داخل صفحه و  $w$  معرف تغییر مکان خارج صفحه و  $\theta_y$ ،  $\theta_x$  به ترتیب بیانگر چرخش نسبت به محورهای  $y$  و  $x$  هستند. طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه

راستای قرارگیری گشودگی بر رفتار کمانشی و شکست اولین لایه در یک ورق لایه‌ای بوده است. مشاهده شده که پارامترهای ذکرشده تاثیر مهمی بر مقاومت ورق در برابر کمانش خواهند داشت. کومار و سینق [12] تاثیر شرایط مرزی انعطاف‌پذیر بر رفتار کمانشی و پس از کمانشی چندلایه شبه‌ایزوتروپیک تحت فشار یک‌طرفه با گشودگی‌های متفاوت به شکل‌های دایره، مربع، لوزی و بیضی عمودی و افقی با اندازه‌های متفاوت به روش اجزا محدود ارایه کرده است. معادلات اجزا محدود برای تحلیل تغییر شکل‌های غیرخطی براساس تغییر شکل برشی و فرضیات ون-کارمن استوار هستند و معیار شکست سه‌بعدی تسای-هیل برای پیش‌بینی شکست چندلایه اعمال شده است. زمان جدایش لایه‌ها براساس معیار شکست بین‌لایه‌ای بوده و مشاهده شده است که ورق با تکیه‌گاه گیردار و ساده به ترتیب دارای بالاترین و کمترین مقاومت در برابر کمانش است.

یکی دیگر از پارامترهای موثر در کمانش چندلایه‌های کامپوزیتی جدایی بین لایه‌ای است. جدایش لایه‌های کامپوزیتی یا به عبارتی از بین رفتن به هم پیوستگی بین لایه‌های موجب از دست رفتن مقاومت کمانشی ورق کامپوزیتی خواهد شد. نور [13] با در نظر گرفتن این پارامتر، به بررسی رفتار کمانش و پس از کمانشی ورق کامپوزیتی با شرایط متفاوت از قبیل جنس، هندسه و بارگذاری‌های مختلف پرداخته است. در این بررسی جدایش محلی لایه‌های کامپوزیتی در محدوده پس از کمانش در سازه در نظر گرفته شده و برای کاهش اندازه مدل و هزینه تحلیل، ورق متقارن فرض شده است. کلنرو و ولمکه [14] از یک مدل غیرخطی برای مدل‌سازی تیر چندلایه استفاده کرده و بارهای کمانشی را برای طول‌ها و عمق‌های متفاوت این تیر به کمک مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل به دست آورده و رفتار این تیر را در مرحله پس از کمانش بررسی نموده‌اند. همچنین تاثیر جدایش لایه‌ای بر رفتار کمانش و پس از کمانش ورق کامپوزیتی بررسی شده است. ورق‌های دارای گشودگی از جنس فولاد از جمله سازه‌های پرکاربرد در مهندسی هستند. این ورق‌ها در صورت قرارگیری تحت نیروی فشاری موجب بروز کمانش ناخواسته در آنها می‌شود. برای در نظر گرفتن جدایی بین لایه‌ای در چندلایه‌های کامپوزیتی یکی از رویکردها رویکرد مکانیک شکست و استفاده از مفاهیم ضریب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی کرنشی است [15, 16]. یکی دیگر از رویکردهای مناسب برای پیش‌بینی جدایی بین لایه‌ای، رویکرد مدل ناحیه چسبنده است [17]. مدل ناحیه چسبنده به خوبی توسط محمدی و همکاران برای پیش‌بینی جدایی بین لایه‌ای تحت بارگذاری استاتیکی و خستگی به کار گرفته شده است [18-20].

بررسی ارتعاشات و کمانش ورق‌های دارای گشودگی اخیراً نیز مورد توجه قرار گرفته است. بهارادواج و همکاران [21] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی حاوی گشودگی مثلثی شکل را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول روش اجزا محدود بررسی کردند. لورنرزی و همکاران [22] با استفاده از مدل‌سازی عددی و به‌کارگیری رفتار کمانشی الاستیک و الاستوپلاستیک ورق را بررسی نمودند. همچنین ایشان ورق مربعی و مستطیلی با گشودگی به شکل بیضی را با مقادیر متفاوت نسبت قطر بزرگ به کوچک بیضی تحلیل کرده‌اند. حل تحلیلی رفتار پس از کمانشی ورق انحنادار کامپوزیتی تحت فشار محوری مشکل است بنابراین ماندسی و باروت [23] مرحله قبل و بعد از کمانش این نوع ورق لایه‌ای حاوی گشودگی را به روش اجزا محدود بررسی نموده‌اند. نتایج این روش با نتایج تجربی مقالات صحه‌سنجی شده است. استوانه‌های جدار نازک ساخته‌شده از ورق‌های کامپوزیتی در

اول میدان جابه‌جایی به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

و روابط کرنش-جابه‌جایی برای یک المان ورق با توجه به فرضیات ون-کارمن در شرایط تغییر شکل بزرگ به صورت رابطه زیر است [27]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

### ۲-۲- محاسبه نیروی عکس‌العمل در راستای طولی یک نوار و کل سازه

معادله تعمیم‌یافته هوک برای یک ماده مرکب چندلایه نازک تا نسبتاً ضخیم با توجه به تئوری مرتبه اول برشی ورق‌ها به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ k \end{Bmatrix}, Q = A_S \gamma = \begin{bmatrix} A_{S44} & 0 \\ 0 & A_{S55} \end{bmatrix} \gamma \quad (3)$$

که در این رابطه بردارهای  $M$ ,  $N$  و  $Q$  به ترتیب ممان‌های عمل‌کننده بر جزء المان، بردارهای نیروهای عمل‌کننده داخل صفحه و بردارهای نیروهای برشی عمل‌کننده خارج صفحه‌ای هستند و بردارهای  $k$ ,  $\epsilon^0$ ,  $\gamma$  به ترتیب انحنای تار خنثی المان، کرنش درون صفحه‌ای روی تار خنثی المان و کرنش‌های برشی خارج صفحه‌ای هستند [27]. همچنین در این رابطه ماتریس  $A$  ماتریس سختی داخل صفحه ماده مرکب،  $B$  ماتریس کوپلینگ نیروهای داخل صفحه و ممان‌های خارج صفحه و نهایتاً  $D$  ماتریس سختی ممان‌ها و پیچش خارج صفحه المان و  $A_S$  ماتریس سختی برشی خارج صفحه المان هستند.

معادله سازگاری برای این ورق به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود [27]:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

می‌توان روابط (۳) را به شکل روابط (۵) بازنویسی نمود [27]:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ H^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ k \end{Bmatrix}, Q = A_S \gamma = \begin{bmatrix} A_{S44} & 0 \\ 0 & A_{S55} \end{bmatrix} \gamma \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A^* &= A^{-1} \\ B^* &= -A^{-1} \cdot B \\ H^* &= B \cdot A^{-1} \\ D^* &= D - B \cdot A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

همچنین توابع نیرویی ابری به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود [27]:

(۷)

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

با فرض تقارن و توازن لایه چینی ورق کامپوزیتی، اثرات ماتریس کوپلینگ ( $B$ ) و همچنین ضرایب  $A_{13}^*$  و  $A_{23}^*$  از تعریف کرنش حذف شده و معادله سازگاری ون-کارمن در حالت تعمیم‌یافته برای ورق کامپوزیتی متقارن متوازن به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید [27]:

(۸)

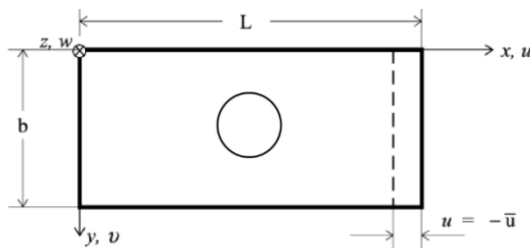
$$A_{22}^* \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2A_{12}^* + A_{33}^*) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11}^* \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

همان‌گونه که در معادله سازگاری ون-کارمن مشاهده می‌شود تابع تغییر مکان خارج صفحه با تابع تنش‌های داخل صفحه به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین با حدس تابع تغییر مکان خارج صفحه و حل معادله ون-کارمن می‌توان تابع تنش را محاسبه نمود و پس از آن می‌توان تغییر مکان‌های داخل صفحه را به دست آورد. بنابراین انتخاب صحیح تابع تغییر مکان خارج صفحه‌ای بسیار مورد اهمیت است.

در این پژوهش یک سر نوار در امتداد طول ثابت بوده و در سر دیگر آن یک کوتاه‌شدگی انتهایی یکنواخت اعمال می‌شود. شرط مرزی روی لبه‌های غیربارگذاری‌شونده به صورت شرایط مرزی آزاد در نظر گرفته می‌شود. شکل ۱ نحوه اعمال کوتاه‌شدگی با تکیه‌گاه گیردار در هر طرف و روابط زیر شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار را ارائه می‌دهد:

(۹)

$$\begin{aligned} w = \theta_x = N_{xy} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, L \\ u = \begin{cases} 0 & \text{at} \quad x = 0 \\ -\bar{u} & \text{at} \quad x = L \end{cases} \end{aligned}$$



شکل ۱ اعمال کوتاه‌شدگی در یک نوار

توابع تغییر مکان خارج صفحه باید طوری انتخاب شوند که شرایط مرزی را روی مرزهای نوار محدود ارضا نمایند. از آنجایی که شکل موده‌های طبیعی کمانش یک نوار الاستیک و بلند هنگامی که شرایط مرزی دو سر نوار تکیه‌گاه گیردار است به صورت تابع هارمونیک است می‌توان در تعیین توابع شکل در جهت طولی نوار از توابع شکل هارمونیک استفاده کرد اما در بیان تغییرات در جهت عرض نوار می‌توان از توابع شکل چندجمله‌ای استفاده نمود که چندجمله‌ای ارایه‌شده باید شامل درجات آزادی نوار نیز باشند. بدین ترتیب توابع تغییر مکان خارج از صفحه و چرخش نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  نوار برای ارضای شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در دو لبه بارگذاری‌شونده، به قرار رابطه (۱۰) است:



مقادیر  $u_1, u_2, u_3$  در روابط (۱۵) الی (۱۷) انرژی بر واحد سطح هستند.

با جای‌گذاری بردار انحنای  $k$  و نیروی  $N$  و گشتاور  $M$  و کرنش‌های برشی خارج صفحه  $\gamma$ ، انرژی کرنشی کل نوار محدود بر حسب درجات آزادی به دست می‌آیند.

با المان‌بندی ورق به نوارهای محدود و محاسبه ماتریس سختی مماسی و بردار نیرویی نوارهای محدود و مونتاژ کردن بردارهای نیرویی و ماتریس‌های سختی مماسی برای یک سازه با استخراج بردار معادلات تعادل براساس اصل مینیمم‌سازی انرژی، رفتار کل سازه به کمک یافتن درجات آزادی مجهول نوارها به روش نیوتن-رافسون قابل تحلیل است. در نهایت با روابط (۱۸) نیروی عمل‌کننده بر هر نوار محدود در جهت طولی ( $P_s$ ) و کل نیروی اعمالی به سازه ( $P$ ) محاسبه می‌شوند:

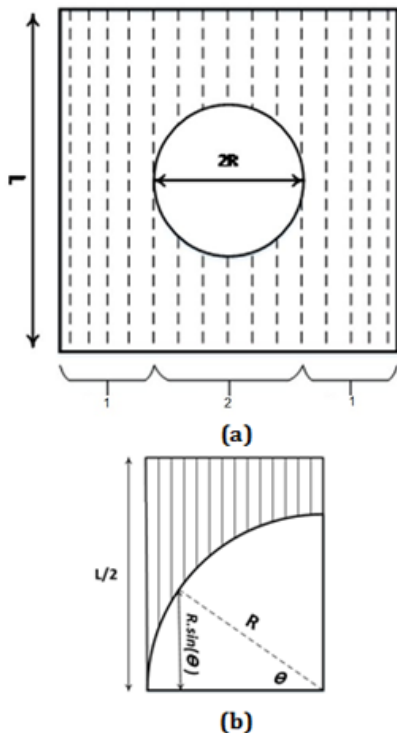
$$P_s = \int_0^L \int_0^{b_s} N_x dx dy$$

$$P = \frac{\sum_{i=1}^K P_s^i}{L}$$

در این رابطه  $b_s$  عرض نوار،  $L$  طول ورق (طول نوار) و  $K$  تعداد کل نوارها است.

### ۲-۳- نحوه مدل‌سازی گشودگی به روش نوار محدود

اصول روش نیمه‌انرژی محاسبه انرژی سطح اِشغالی هر المان و مینیمم‌سازی مجموع انرژی‌های همه المان‌ها براساس اصل مینیمم انرژی استوار است. همچنین روش نوار محدود بر مبنای تقسیم‌کردن سازه به تعدادی نوار و متصل‌کردن آنها به یکدیگر است. در شکل ۲ یک ورق با حضور گشودگی نمایش داده شده و به روش نوار محدود تقسیم‌بندی شده است. کل ورق به دو ناحیه نوارهای کامل (ناحیه ۱) و ناحیه نوارهای شامل گشودگی (ناحیه ۲) تقسیم‌بندی شده است.



شکل ۲) تقسیم‌بندی ورق شامل گشودگی به روش نوار محدود

$$w = \sin(\zeta x) \times (f_1 \sin(\zeta x) + f_2 \sin(2\zeta x) + f_3 \sin(3\zeta x))$$

$$\phi_x = \sin(\zeta x) \times (g_1 \cos(\zeta x) + g_2 \cos(2\zeta x) + g_3 \cos(3\zeta x))$$

$$\phi_y = \sin(\zeta x) \times (s_1 \sin(\zeta x) + s_2 \sin(2\zeta x) + s_3 \sin(3\zeta x))$$

که در آن  $\zeta = \frac{\pi}{L}$  است. برای آنکه پیوستگی روی مرزهای نوار برقرار باشد در بیان تغییرات عرضی از توابع چندجمله‌ای لاگرانژی در تابع شکل استفاده می‌شود. برای بالا بردن دقت برای بیان تغییرات عرضی تابع خیز از توابع لاگرانژی مرتبه سوم مطابق رابطه (۱۱) استفاده شده است:

$$f_n(y) = \left(1 - \frac{19}{3}\eta + \frac{32}{3}\eta^2 - \frac{16}{3}\eta^3\right)w_{1n}$$

$$+ \left(8\eta - \frac{56}{3}\eta^2 + \frac{32}{3}\eta^3\right)w_{\frac{1}{4}n}$$

$$+ \left(-\frac{8}{3}\eta + \frac{40}{3}\eta^2 - \frac{32}{3}\eta^3\right)w_{\frac{3}{4}n}$$

$$+ \left(\eta - \frac{16}{3}\eta^2 + \frac{16}{3}\eta^3\right)w_{2n}$$

$$g_n(y) = (1 + 2\eta^2 - 3\eta)\phi_{x1n} + (-4\eta^2 + 4\eta)\phi_{x\frac{1}{2}n} + (-2\eta^2 + \eta)\phi_{x2n}$$

$$s_n(y) = (1 + 2\eta^2 - 3\eta)\phi_{y1n} + (-4\eta^2 + 4\eta)\phi_{y\frac{1}{2}n} + (-2\eta^2 + \eta)\phi_{y2n}$$

که در این رابطه  $\eta = \frac{y}{b_s}$  و  $w_{in}$  و  $\phi_{xin}$  و  $\phi_{yin}$  معرف درجات آزادی خیز خارج از صفحه و چرخش نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  هستند.

با توجه به فرضیات تئوری مرتبه اول برشی ورق، انرژی کرنش ذخیره شده در یک المان از نوار محدود به صورت رابطه (۱۲) بر حسب بردار تنش و کرنش‌های داخل و خارج صفحه‌ای تعریف می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{\sigma}^T \bar{\epsilon} + \bar{\tau}^T \bar{\gamma}) dx dy dz$$

با استفاده از روابط نیرو و گشتاور با تنش، رابطه (۱۲) را می‌توان به شکل رابطه (۱۳) تغییر داد:

$$U = \frac{1}{2} \iint \left( \int_0^t (\bar{\sigma}) dz \right)^T \cdot \epsilon dx dy + \frac{1}{2} \iint \left( \int_0^t (\bar{\sigma}) dz \right)^T \cdot k dx dy + \frac{1}{2} \iint \left( \int_0^t (\bar{\tau}) dz \right)^T \cdot \gamma dx dy = \frac{1}{2} \iint N^T \cdot \epsilon dx dy + \frac{1}{2} \iint M^T \cdot k dx dy + \frac{1}{2} \iint Q^T \cdot \gamma dx dy$$

با استفاده از رابطه هوک تعمیم‌یافته در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (14)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint N^T \cdot (A^* \cdot N + B^* \cdot k) dx dy = \iint u_1 dx dy \quad (15)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint (H^* \cdot N + D^* \cdot k)^T \cdot k dx dy = \iint u_2 dx dy \quad (16)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \iint \gamma^T \cdot A_s \cdot \gamma dx dy = \iint u_3 dx dy \quad (17)$$

ساخته شده برای مدل سازی آزمون کمانش ارایه شده است. نمونه های بریده شده از ورق کامپوزیتی ساخته شده به منظور آزمون کمانش به صورت مربعی با ضلع ۶۰ میلی متر و یک گشودگی دایروی در وسط آنها است. گشودگی ها با قطرهای ۱۲ میلی متر و ۱۸ میلی متر و صفحات در دو حالت لایه چینی  $[0/90/0/90]_s$  و  $[0/90/0/90]_{vs}$  هستند. ضخامت هر لایه به طور میانگین ۰/۱ میلی متر است. جدول ۲ مشخصات هندسی نمونه های تست شده را نمایش می دهد.

جدول (۱) خواص مکانیکی پارچه (۰/۹۰) ساخته شده

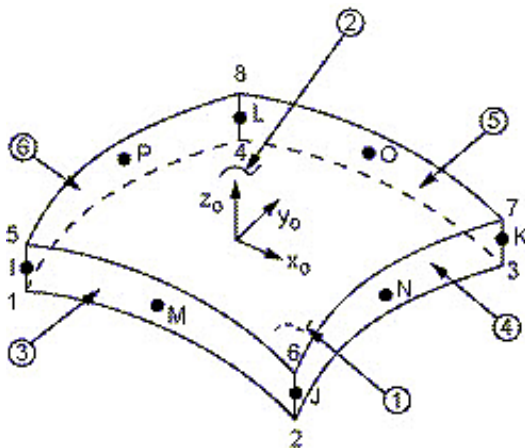
| پارامتر                   | نماد            | مقدار             |
|---------------------------|-----------------|-------------------|
| مدول الاستیک در جهت الیاف | $E_x$ and $E_y$ | ۱۴/۵ (گیگاپاسکال) |
| مدول برشی                 | G               | ۵/۵۷ (گیگاپاسکال) |
| ضریب پواسون               | $\nu$           | ۰/۱۱              |

جدول (۲) مشخصات هندسی نمونه های مورد آزمایش

| لایه چینی          | ضخامت (mm) | قطر گشودگی (mm) | عرض (mm) | طول (mm) | نام نمونه |
|--------------------|------------|-----------------|----------|----------|-----------|
| $[0/90/0/90]_s$    | ۰/۸±۰/۱    | ۱۲±۰/۲          | ۶۰±۰/۵   | ۶۰±۰/۵   | GE-۱۲-۸   |
| $[0/90/0/90]_{vs}$ | ۱/۶±۰/۱    | ۱۲±۰/۲          | ۶۰±۰/۵   | ۶۰±۰/۵   | GE-۱۲-۱۶  |
| $[0/90/0/90]_s$    | ۰/۸±۰/۱    | ۱۸±۰/۲          | ۶۰±۰/۵   | ۶۰±۰/۵   | GE-۱۸-۸   |
| $[0/90/0/90]_{vs}$ | ۱/۶±۰/۱    | ۱۸±۰/۲          | ۶۰±۰/۵   | ۶۰±۰/۵   | GE-۱۲-۱۶  |

۴- مدل سازی اجزاء محدود

بر اساس مدل های تجربی ساخته شده، مدل اجزا محدود طراحی و از تحلیل غیرخطی برای بررسی کمانش استفاده شده است. در این مدل سازی از المان ورق مندرج در شکل ۴ برگرفته از راهنمای نرم افزار انسیس ۱۳، استفاده شده است. المان دارای هشت گره که هر گره دارای شش درجه آزادی (سه درجه جابه جایی و سه درجه چرخش) است. این المان برای تحلیل ورق های نازک و نسبتاً ضخیم مناسب است زیرا می تواند تغییر شکل های برشی را مدل سازی نماید. در این مدل سازی به دلیل آنکه مدل سه بعدی بوده و تنش ها صفحه ای هستند از این المان استفاده شده است. مدل اجزا محدود ورق کامپوزیتی دارای گشودگی در شکل ۵ آمده است. در این مدل سازی بارگذاری مطابق شکل ۱ صورت گرفته است. بدین صورت که مقداری جابه جایی اولیه به ورق در راستای طولی داده شده و مدول کمانشی ورق در این نوع بارگذاری به دست آمده است. سپس برای تحلیل غیرخطی ابتدا تغییر شکل اولیه ای مطابق با مقدار بسیار کوچکی از مدول به ورق داده شده و رفتار ورق در اثر اضافه کردن جابه جایی لبه ای به دست آمده است.



شکل (۴) المان ورق (۲۸۱ shell) دارای ۸ گره و شش درجه آزادی در هر گره

بر اساس شکل ۲ انرژی نوارها در نواحی مختلف به قرار زیر محاسبه شده است. ناحیه (۱):

$$U_I = \int_0^{L} \int_0^{b_s} (u_1 + u_2 + u_3) dy dx \quad (19)$$

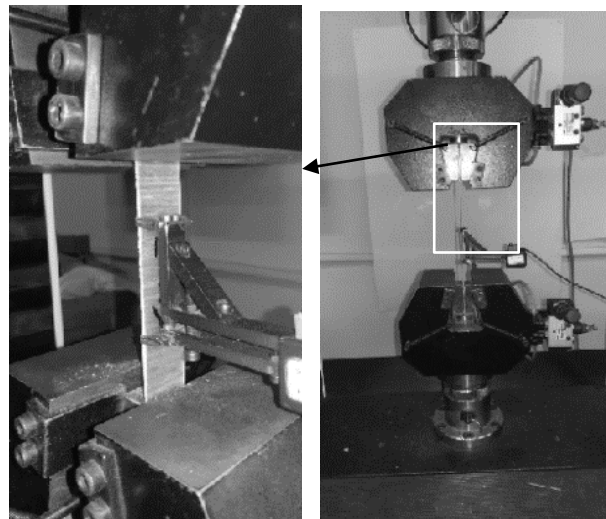
ناحیه (۲):

$$U_{II} = \int_0^{L-2R\sin(\theta)} \int_0^{b_s} (u_1 + u_2 + u_3) dy dx + \int_{L+2R\sin(\theta)}^L \int_0^{b_s} (u_1 + u_2 + u_3) dy dx \quad (20)$$

که در این روابط  $b_s$  عرض هر نوار و  $\theta$  مطابق شکل ۲، برابر زاویه نقطه وسط المان روی مرز دایره است.

۳- ساخت نمونه های ورق کامپوزیتی و تست کمانش و پس کمانش

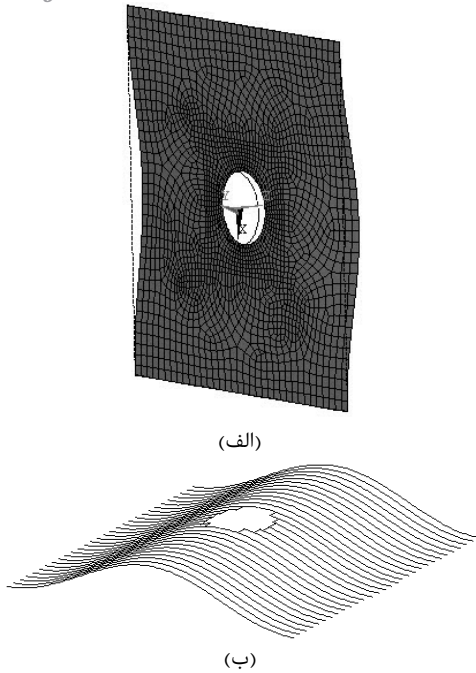
نمونه ها با رزین اپوکسی با کد Sika cr83 و پارچه الیاف از جنس شیشه با کد Colan af218 به روش اینفیوژن ساخته شده اند. برای استخراج مدول الاستیک این نمونه ها، ورقی به شکل صفحات  $300 \times 300$  میلی متر ساخته شده است. سپس نمونه های مورد نظر از این صفحات برش داده شده و با انجام آزمون های کشش بر اساس استاندارد ASTM D3039 به کمک دستگاه SANTAM، خواص مکانیکی به دست آمده اند. روش به دست آوردن مدول الاستیک بدین صورت است که با نصب اکستنسومتر روی نمونه میزان کرنش دقیق آن در راستای بارگذاری به همراه نیروی وارده از دستگاه روی نمونه همزمان ثبت شده و با رسم نمودار تنش بر حسب کرنش و محاسبه شیب آن مدول الاستیک محاسبه شده است. در شکل ۳ نمونه قرار داده شده درون دستگاه نمایش داده شده است.



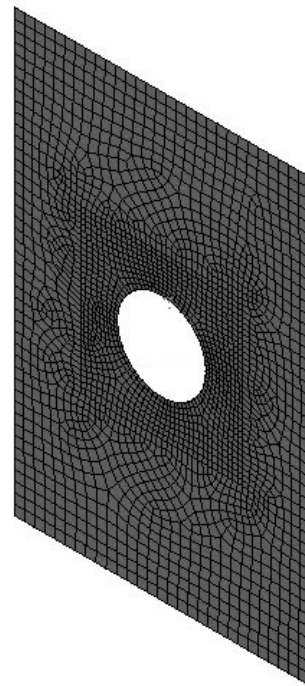
شکل (۳) قرارگیری نمونه های آزمون کشش درون دستگاه SANTAM

برای استخراج مدول الاستیک برشی، پارچه (۴۵±) به شکل صفحاتی ساخته شده و بر اساس استاندارد ASTM D3518 نمونه های مورد نظر برش خورده، مورد آزمون برشی قرار گرفته و مدول برشی استخراج شده است.

در جدول ۱ خواص مکانیکی به دست آمده مربوط به نمونه های

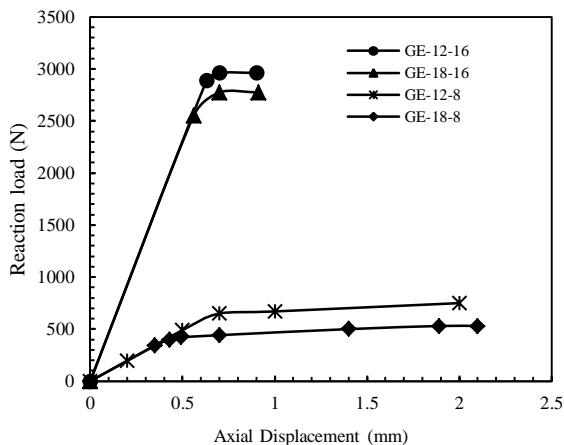


شکل ۷) شکل مود کمانش ورق با حضور گشودگی به روش (الف) المان محدود (ب) نوار محدود



شکل ۸) مدل اجزا محدود ورق شامل گشودگی دایروی

نتایج حاصل از آزمون تجربی دو نوع لایه چینی متفاوت به تعداد هشت و شانزده لایه و هر کدام با یک گشودگی به قطرهای ۱۲ و ۱۸ میلی‌متر در نمودار ۱ نمودار بار-جاب‌جایی ارائه شده‌اند. رفتار این نمودار به این صورت است که ابتدا با افزایش بار به شکل جابه‌جایی، نیروی عکس‌العمل تقریباً به صورت خطی افزایش می‌یابد تا به نقطه کمانش برسد. بعد از کمانش ورق، با افزایش جابه‌جایی طولی نیروی عکس‌العمل تقریباً ثابت می‌ماند تا به نقطه انتهایی یا همان نقطه آغاز خرابی می‌رسد که در این نمودار محدوده خرابی نمایش داده نشده است زیرا هدف این مقاله تنها بررسی رفتار کمانشی و پس از کمانشی بوده است.



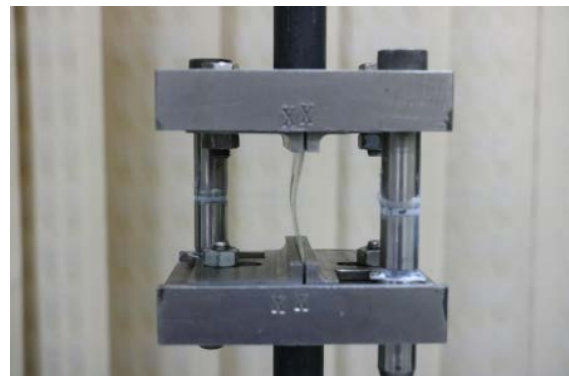
نمودار ۱) نمودار نیرو-جاب‌جایی حاصل از نتایج آزمون تجربی ورق ۸ و ۱۶ لایه دارای گشودگی به قطر ۱۲ و ۱۸ میلی‌متری

همانطوری که منحنی‌های فوق نشان می‌دهند، ابعاد گشودگی تأثیری روی میزان سفتی صفحه ندارد ولی میزان بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی کاهش می‌یابد ولی با افزایش تعداد لایه‌ها هم میزان سفتی و هم میزان بار کمانش افزایش قابل توجهی پیدا

### ۵) ارایه و توصیف نتایج

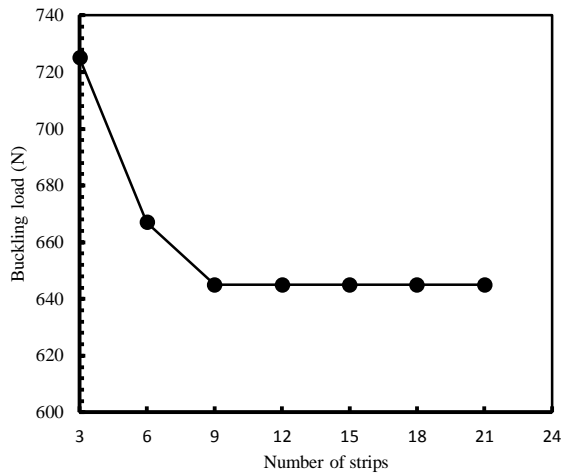
در این قسمت رفتار کمانشی و پس از کمانشی ورق با لایه چینی و گشودگی به قطرهای متفاوت حاصل از آزمون‌های تجربی و مدل‌سازی به روش نوار محدود نیمه‌انرژی و اجزا محدود ارائه شده‌اند. شیوه بارگذاری در آزمون‌های تجربی به این صورت بوده است که یک طرف از ورق در فک ثابت دستگاه قرار داده شده و طرف دیگر به کمک فک بالایی، جابه‌جایی به صورت گام به گام اضافه شده که در اصطلاح به این شیوه بارگذاری، کوتاه‌شدگی انتهایی گویند. قطعه کمانش‌شده در شکل ۶ نشان داده شده است. به منظور بررسی رفتار پس از کمانشی، بارگذاری به شکل جابه‌جایی بعد از کمانش تا لحظه خرابی قطعه ادامه یافته است.

محدوده بارگذاری در مدل‌سازی عددی به روش اجزای محدود و روش نوار محدود با محدوده نتایج تجربی تا قبل از خرابی قطعه است؛ بنابراین معیارهای خرابی در مدل‌سازی عددی اعمال نشده است. قطعه کمانش‌کرده حاصل از تحلیل مدل اجزا محدود و مدل نوار محدود در شکل ۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییر شکل ورق کمانش‌یافته همانند نتایج تجربی در شکل ۶ هست.

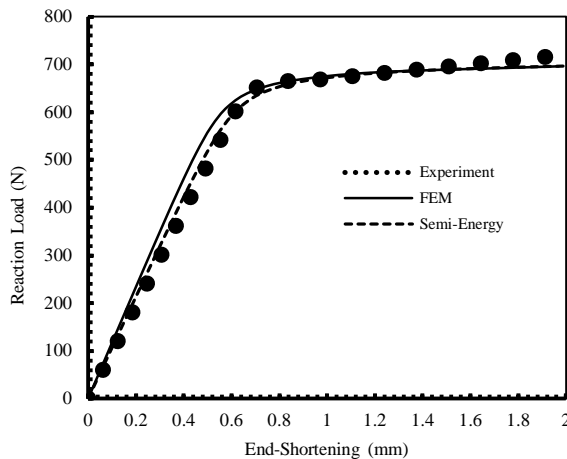


شکل ۱۰) ورق دارای گشودگی هنگام طی کردن مرحله پس از کمانش

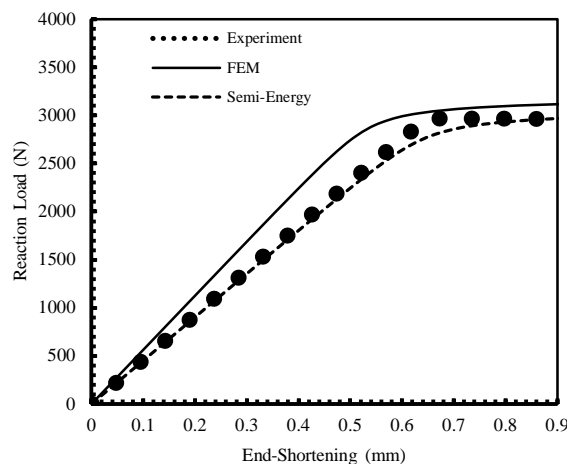
نيمه انرژي، اجزا محدود و تجربي در نمودارهاي ۳ تا ۶ ارايه شده است.



نمودار ۲) تاثيرات تعداد المانها روي همگرابي نيروي كمانش در روش نوار محدود



نمودار ۳) مقايسه روشهاي نوار محدود نيمه انرژي و اجزا محدود با نتايج تجربي ورق هشت لايه شامل گشودگي با قطر ۱۲ ميلي متری ( نمونه GE-۱۲-۸ در جدول ۲)



نمودار ۴) مقايسه روشهاي نوار محدود نيمه انرژي و اجزا محدود با نتايج تجربي ورق هشت لايه شامل گشودگي با قطر ۱۲ ميلي متری (نمونه GE-۱۲-۱۶ در جدول ۲)

می کند. در مقایسه بین دو پارامتر مشاهده می شود که افزایش تعداد لایه ها در مقایسه با اندازه گشودگي تاثير بيشتري روي بار كمانش دارد. همچنين با به وجود آمدن خرابي در صفحه ميزان ظرفيت تحمل بار کاهش می يابد.

افزايش تعداد لايه چيني موجب کاهش تحمل بار جابه جايي در مرحله پس از كمانش و افزايش نيروي عكس العمل در اين مرحله شده است. با توجه به نمودار بالا ميزان تحمل بار ورق به شكل کوتاه شدگي لبه اي براي ورق نازك تر با ۸ لايه تقريبا ۲/۲ برابر ورق ضخيم تر با ۱۶ لايه است. بنا بر اين می توان نتيجه گرفت كه ورق با ضخامت كمتر تحمل بيشتري در برابر بار به شكل جابه جايي تا لحظه خرابي خواهد داشت.

بار كمانشي بي بعد شده نسبت به حجم ورق با حضور گشودگي دايروي با قطر هاي مختلف در جدول ۳ ارايه شده است. جهت يافتن بار كمانشي در نمودار بار-جابه جايي خطي از نقطه مبدا به موازات منحنی رسم شده و نقطه برخورد برابر بار كمانشي قرار داده شده است.

جدول ۳) نسبت بار كمانشي به حجم ورق با حضور گشودگي دايروي با قطر هاي مختلف

| تعداد لايه | قطر گشودگي (mm) | بار كمانشي (N) | نسبت بار كمانش به حجم نمونه (%) |
|------------|-----------------|----------------|---------------------------------|
| ۸          | ۱۲              | ۶۵۰            | ۲۳/۳                            |
| ۸          | ۱۸              | ۴۰۰            | ۱۴/۹۵                           |
| ۱۶         | ۱۲              | ۲۸۸۷           | ۵۱/۷۵                           |
| ۱۶         | ۱۸              | ۲۵۵۰           | ۴۷/۶۴                           |

در جدول ۳ مقدار ضريب بي بعد بار كمانشي به حجم ورق در ورق هاي شانزده لايه بالاتر بوده و مقدار ماكسيمم را ۱۶ لايه با گشودگي به قطر ۱۲ ميلي متر به خود اختصاص داده است. با افزايش قطر گشودگي در ورق ۸ لايه نسبت بار كمانشي به حجم ورق ۰/۶۵ برابر شده اما در ورق ۱۶ لايه ۰/۹۲ برابر شده است. در نتيجه افزايش قطر گشودگي در ورق نازك تر تاثير بيشتري بر بار كمانشي گذاشته است. با افزايش تعداد لايه با حضور گشودگي با قطر ۱۲ ميلي متر نسبت بار كمانشي به حجم ورق ۲/۲۶ برابر و با حضور گشودگي با قطر ۱۸ ميلي متر مقدار اين نسبت ۳/۲ برابر شده است. بنا بر اين تاثير افزايش ضخامت ورق با حضور گشودگي با قطر بزرگ تر بر بار كمانشي بيشتراست.

### ۱-۵- تحليل حاصل از روش نوار محدود نيمه انرژي

پس از ارايه روش نوار محدود نيمه انرژي و معرفي شرايط آزمايشگاهي كمانش و نتايج تست كمانش، در اين قسمت نتايج حاصل از روش هاي نوار محدود نيمه انرژي و روش اجزا محدود ارايه می شود و نتايج با هم مقايسه شده و با نتايج تست كمانش صحت سنجي می شوند.

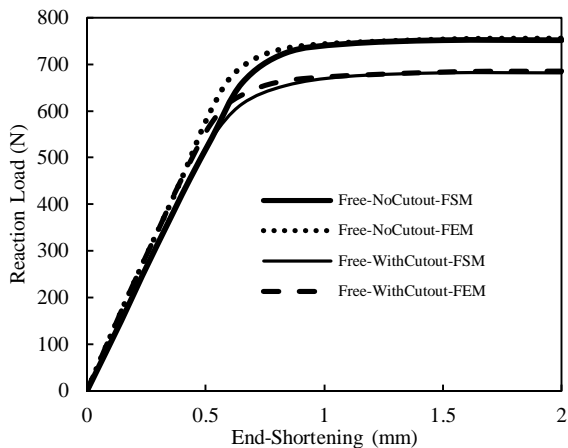
در روش نوار محدود مشابه روش اجزا محدود ورق به تعدادي نوار تقسيم می شود بنا بر اين همگرابي روش نوار محدود براساس تعداد نوارها بايد مورد بررسي قرار گيرد. در نمودار ۲ همگرابي نيروي تكيه گاهي براساس تعداد نوارها در روش نيمه انرژي براي ورق نمايش داده شده است. همان طوري كه از نمودار قابل مشاهده است، اين روش با تعداد ۹ نوار براي ورق شش لايه با قطر سوراخ ۱۲ ميلي متر به همگرابي رسیده است.

به منظور اطمينان از صحت فرمولاسيون ارايه شده براي روش نوار محدود نيمه انرژي ارايه شده، تغييرات نيرو- کوتاه شدگي انتهايي براي ورق شامل گشودگي با استفاده از روش هاي نوار محدود

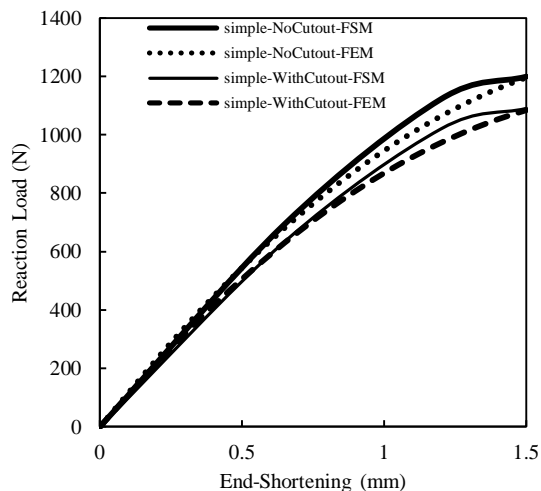


مطابق جدول ۴ نتایج روش نوار محدود نیمه‌انرژی مبتنی بر تئوری مرتبه اول برشی تطابق بیشتری با نتایج تجربی دارد و همچنین نتایج به‌ازای گشودگی کوچک‌تر نزدیک به نتایج تجربی است و با افزایش قطر سوراخ مقدار خطا در سیستم افزایش پیدا می‌کند. همچنین با توجه به اشکال ۱۰ تا ۱۳، از انطباق عالی بین نتایج به‌دست‌آمده از روش نوار محدود نیمه‌انرژی با نتایج به‌دست‌آمده از روش اجزا محدود می‌توان به صحت فرمولاسیون ارایه‌شده برای صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی اطمینان پیدا کرد.

یکی از مزایای روش نوار محدود این است که به‌راحتی می‌توان صفحات با شرایط متفاوت در لبه بارگذاری‌نشده را بررسی کرد. بدین‌منظور، صفحاتی با و بدون گشودگی که علاوه بر انتهای بارگذاری‌شده، در کناره‌ها نیز در دو حالت تکیه‌گاه جانبی ساده به شکل متقارن گرفته شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از ورق هشت لایه با و بدون گشودگی به قطر ۱۲ میلی‌متر به روش نوار محدود (FSM) و اجزا محدود در نمودارهای ۷ و ۸ به‌ترتیب با شرایط مرزی آزاد و ساده در لبه‌های جانبی رسم شده است.

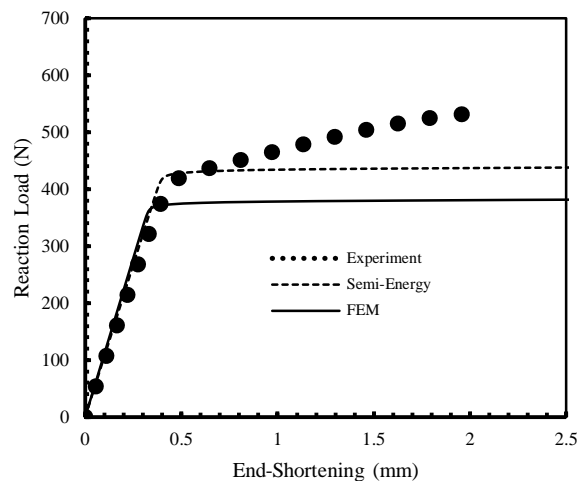


نمودار ۷) مقایسه نتایج کوتاه‌شدگی ورق هشت لایه با و بدون گشودگی ۱۲ میلی‌متری با شرایط مرزی گیردار در لبه‌های بارگذاری‌شده و آزاد در لبه‌های جانبی

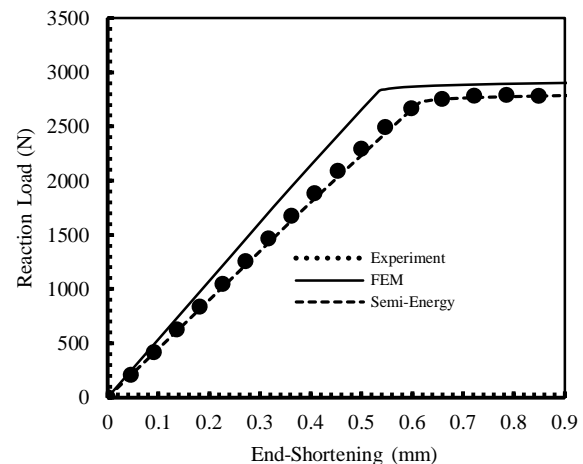


نمودار ۸) مقایسه نتایج کوتاه‌شدگی ورق هشت لایه با و بدون گشودگی ۱۲ میلی‌متری با شرایط مرزی گیردار در لبه‌های بارگذاری‌شده و ساده در لبه‌های جانبی

همان‌طور که از نمودارهای ۷ و ۸ ملاحظه می‌شود، تاثیر گشودگی در کاهش بار کمانش ورق قابل ملاحظه است. به علاوه تغییر



نمودار ۵) مقایسه روش‌های نوار محدود نیمه‌انرژی و اجزا محدود با نتایج تجربی ورق هشت لایه شامل گشودگی با قطر ۱۸ میلی‌متری (نمونه GE-۱۸-۸ در جدول ۲)



نمودار ۶) مقایسه روش‌های نوار محدود نیمه‌انرژی و اجزا محدود با نتایج تجربی ورق شانزده لایه شامل گشودگی با قطر ۱۸ میلی‌متر (نمونه GE-۱۸-۱۶ در جدول ۲)

همان‌طوری که از نمودارهای ۳ تا ۶ مشاهده می‌شود، روش‌های تجربی، اجزا محدود و روش نوار محدود نیمه‌انرژی با تقریب خوبی بر هم منطبق هستند. از بررسی نمودارهای ۳ تا ۶ می‌توان نتیجه گرفت که روش المان محدود رفتار صفحه را سفت‌تر از روش نیمه‌انرژی پیش‌بینی می‌کند و سفتی حاصل از روش نیمه‌انرژی نسبت به روش المان محدود تطابق بیشتری با نتایج تجربی دارد. جدول ۴ مقادیر بارهای کمانش حاصل از روش‌های نیمه‌انرژی، اجزا محدود و نتایج تست را با هم مقایسه نموده است. جهت یافتن بار کمانشی در نمودار بار-جابجایی خطی از نقطه مبدا به موازات منحنی تجربی، تحلیلی و اجزا محدود رسم شده و نقطه برخورد برابر بار کمانشی قرار داده شده است.

جدول ۴) مقایسه بارهای کمانشی به‌دست‌آمده از روش‌های مختلف نیمه‌انرژی، اجزا محدود و تجربی برای نمونه‌های ساخته‌شده

| Specimen | Test (N) | FEM     |            | SE-FSM (N) | SE-FSM (%Error) |
|----------|----------|---------|------------|------------|-----------------|
|          |          | FEM (N) | SE-FSM (N) |            |                 |
| GE-۱۲-۸  | ۶۵۰      | ۶۴۳     | ۶۴۵        | ۱/۸۰       |                 |
| GE-۱۸-۸  | ۴۰۰      | ۴۶۸     | ۴۲۳        | ۵/۷۵       |                 |
| GE-۱۲-۱۶ | ۲۸۸۷     | ۳۰۲۳    | ۲۹۱۰       | ۰/۹۸       |                 |
| GE-۱۸-۱۶ | ۲۵۵۰     | ۲۸۲۳    | ۲۷۱۸       | ۶/۶۰       |                 |

است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.  
**تعارض منافع:** مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با سازمانها و اشخاص دیگر ندارد.

**سهم نویسندگان:** موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است  
**منابع مالی:** موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

### منابع

- 1- Prusty BG, Satsangi SK. Finite element buckling analysis of laminated composite stiffened shells. International Journal of Crashworthiness. 2001;6(4):471-484.
- 2- Ho-Huu V, Do-Thi TD, Dang-Trung H, Vo-Duy T, Nguyen-Thoi T. Optimization of laminated composite plates for maximizing buckling load using improved differential evolution and smoothed finite element method. Composite Structures. 2016;146:132-147.
- 3- Muc A, Gurba W. Genetic algorithms and finite element analysis in optimization of composite structures. Composite Structures. 2001;54(2-3):275-281.
- 4- Yusuff S. Large deflection theory for orthotropic rectangular plates subjected to edge compression. Journal Application of Mechanics. 1952;19:446-452.
- 5- Coan JM. Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression. Journal of Applied Mechanics Transactions ASME. 1951;18:143-151.
- 6- Dawe DJ, Tan D. Finite strip buckling and free vibration analysis of stepped rectangular composite laminated plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999;46(8):1313-1334.
- 7- Ovesy HR, Loughlan J, Assaee H. The compressive post-local buckling behaviour of thin plates using a semi-energy finite strip approach. Thin Walled Structures. 2004;42(3):449-474.
- 8- Assaee H, Hajikazemi M, Ovesy HR. The effect of anisotropy on post-buckling behavior of laminated plates using semi-energy finite strip method. Composite Structures. 2012;94(5):1880-1885.
- 9- Assaee H, Ovesy HR, Hajikazemi M. A semi-energy finite strip non-linear analysis of imperfect composite laminates subjected to end-shortening. Thin Walled Structures. 2012;60:46-53.
- 10- Ghannadpour SAM, Ovesy HR, Zia Dehkordi E. An exact finite strip for the calculation of initial post-buckling stiffness of shear-deformable composite laminated plates. Composite Structures. 2014;108:504-513.
- 11- Jain P, Kumar A. Postbuckling response of square laminates with a central circular/elliptical cutout. Composite Structures. 2004;65(2):179-185.
- 12- Kumar D, Singh SB. Effects of boundary conditions on buckling and postbuckling responses of composite laminate with various shaped cutouts. Composite Structures. 2010;92(3):769-779.
- 13- Noor AK, Peters JM. Buckling and postbuckling analyses of laminated anisotropic structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1989;27(2):383-401.
- 14- Köllner A, Völlmecke C. Buckling and postbuckling behavior of delaminated composite struts. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2017;18(1):25-33.

شرایط مرزی جانبی از حالت آزاد به ساده موجب افزایش قابل ملاحظه بار کمانشی در هر دو حالت با و بدون گشودگی شده است.

### ۶- نتیجه گیری

در این پژوهش تاثیر لایه چینی و قطر گشودگی بر بار کمانشی و رفتار پس از کمانش به کمک آزمونهای تجربی، روش نیمه تحلیلی و روش اجزا محدود بررسی شد. در روش نیمه تحلیلی به منظور پیش بینی بار کمانشی ورق کامپوزیتی "دارای گشودگی"، یک روش نوار محدود نیمه انرژی مبتنی بر تئوری مرتبه اول برشی توسعه داده شد. مزیت تئوری برشی مرتبه اول در مقایسه با تئوری کلاسیک لایه ای این است که به دلیل در نظر گرفتن اثرات برش دقت بهتری در ورق های ضخیم دارد.

بر اساس نتایج به دست آمده رفتار کمانشی حاصل از روش نیمه تحلیلی به نتایج تجربی نزدیک تر است و محل وقوع کمانش را بر اساس مقدار کوتاه شدگی طولی بهتر از روش اجزا محدود پیش بینی می کند.

نمودار جابه جایی- نیرو را می توان به سه قسمت تقسیم نمود. قسمت اول که تقریباً خطی بوده یعنی با اضافه کردن بار به شکل جابه جایی نیروی عکس العمل تکیه گاهی به شکل خطی افزایش می یابد. قسمت دوم مرحله ای از بار گذاری است که با افزایش جابه جایی طولی نیرو تغییر چندانی نکرده و تقریباً ثابت می ماند و قسمت آخر مرحله خرابی نمونه است که در نتایج ارائه شده در این پژوهش تنها به شکل یک نقطه در انتهای هر نمودار تفسیر شده و تمام توجه به دو قسمت اول به دلیل اهمیت بیشتر آنها معطوف شد.

ابعاد گشودگی تاثیر چندانی روی میزان سفتی صفحه ندارد ولی میزان بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی کاهش می یابد. ولی با افزایش تعداد لایه ها هم میزان سفتی و هم میزان بار کمانش افزایش قابل توجهی پیدا می کند. در مقایسه بین دو پارامتر مشاهده می شود که افزایش تعداد لایه ها در مقایسه با اندازه گشودگی تاثیر بیشتری روی بار کمانش دارد.

با افزایش قطر گشودگی در ورق ۱۶ لایه ۰/۹۲ برابر شده است. در ورق ۰/۶۵ برابر شده اما در ورق ۱۶ لایه ۰/۹۲ برابر شده است. در نتیجه افزایش قطر گشودگی در ورق نازک تر تاثیر بیشتری بر بار کمانشی گذاشته است. با افزایش تعداد لایه ها از ۸ به ۱۶، با حضور گشودگی با قطر ۱۲ میلی متر نسبت بار کمانشی به حجم ورق ۲/۲۶ برابر و با حضور گشودگی با قطر ۱۸ میلی متر مقدار این نسبت ۳/۲ برابر شده است. بنابراین تاثیر افزایش ضخامت ورق با حضور گشودگی با قطر بزرگ تر بر بار کمانشی بیشتر است.

با اعمال شرایط مرزی آزاد و ساده در لبه های جانبی نتیجه گرفته شد، اولاً تاثیر گشودگی در کاهش بار کمانش ورق قابل ملاحظه است. ثانیاً تغییر شرایط مرزی جانبی از حالت آزاد به ساده موجب افزایش قابل ملاحظه بار کمانشی در هر دو حالت با و بدون گشودگی شده است.

**تشکر و قدردانی:** مقاله حاضر بخشی از رساله دکترای تخصصی مهندسی مکانیک- گرایش طراحی کاربردی مصوب دانشگاه علم و صنعت ایران است که نویسندگان بر خود لازم می دانند مراتب تشکر صمیمانه خود را از هیئت داوران این پایان نامه که ما را در انجام و ارتقاء کیفی این پژوهش یاری دادند، اعلام نمایند.

**تأییدیه اخلاقی:** این مقاله تا کنون در نشریه دیگری به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده

- Zimmermann R, Degenhardt R. Investigation of buckling behavior of composite shell structures with cutouts. *Applied Composite Materials*. 2015;22(6):623-636.
- 25- Heidari Rarani M, Khalkhali Sharifi SS, Shokrieh MM. Effect of ply stacking sequence on buckling behavior of E-glass/epoxy laminated composites. *Computational Materials Science*. 2014;89:89-96.
- 26- Ghannadpour SAM, Ovesy HR, Zia Dehkordi E. Buckling and post-buckling behaviour of moderately thick plates using an exact finite strip. *Computers & Structures*. 2015;147:172-180.
- 27- Shojaee T, Mohammadi B, Madoliat R, Salimi Majd D. Development of a finite strip method for efficient prediction of buckling and post-buckling in composite laminates containing a cutout with/without stiffener. *Composite Structures*. 2019;210:538-552.
- 28- Taheri Behrooz F, Omidi M, Shokrieh MM. Experimental and numerical examination of the effect of geometrical imperfection on buckling load in axially compressed composites cylinder with and without cutout. *Modares Mechanical Engineering*. 2016;16(6):367-377. [Persian]
- 29- Taheri Behrooz F, Omidi M, Shokrieh MM. Experimental and numerical investigation of buckling behavior of composite cylinders with cutout. *Thin Walled Structures*. 2017;116:136-144.
- 30- Talezadehlari A, Rahimi GH. The effect of geometrical imperfection on the axial buckling of unstiffened and stiffened composite cylinders with and without cutout. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;17(7):245-256. [Persian]
- 31- Talezadehlari A, Rahimi GH. Buckling analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM). *Modares Mechanical Engineering*. 2018;17(11):385-396. [Persian]
- 32- Ghannadpour SAM, Shakeri M. A new method to investigate the progressive damage of imperfect composite plates under in-plane compressive load. *AUT Journal of Mechanical Engineering*. 2017;1(2):159-168.
- 33- Kamareh F, Farrokhhabadi A, Rahimi GH. Experimental and numerical investigation of skin/lattice stiffener debonding growth in composite panels under bending loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2018;190:471-490.
- 15- Sajjadi SH, Salimi Majd D, Ostad Ahmad Ghorabi MJ. Development of a brittle fracture criterion for prediction of crack propagation path under general mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2016;155:36-48.
- 16- Lesiuk G, Kucharski P, Correia JAF, De Jesus AMP, Rebelo C, Simões Da Silva L. Mixed mode (I+II) fatigue crack growth in puddle iron. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017;185:175-192.
- 17- Farrokhhabadi A, Naghdi Nasab M. Micromechanical study of fibre- matrix debonding and matrix cracking using cohesive zone model and extended finite element method. *Journal of Science and Technology of Composites*. 2016;3(1):21-30. [Persian]
- 18- Mohammadi B, Salimi Majd D, Ali Bakhshi MH. Analysis of composite skin/stringer debonding and failure under static loading using cohesive zone model. *Modares Mechanical Engineering*. 2014;14(10):17-25. [Persian]
- 19- Azimzadeh Kalkhoran V, Salimi Majd D, Mohammadi B. Fatigue life prediction for adhesively bonded root joint of composite wind turbine blade using cohesive zone approach. In: Attaf B, editor. *Recent advances in composite materials for wind turbine blades*. Unknown City: The World Academic Publishing; 2013. pp. 221-232.
- 20- Heidari M, Salimi Majd D, Mohammadi B. Failure analysis of composite wing adhesive joints using 3D cohesive interface element. *Journal of Science and Technology of Composites*. 2015;2(2):31-40. [Persian]
- 21- Bhardwaj HK, Vimal J, Sharma AK. Study of free vibration analysis of laminated composite plates with triangular cutouts. *Engineering Solid Mechanics*. 2015;3(1):43-50.
- 22- Lorenzini G, Helbig D, Real MDV, Dos Santos ED, Isoldi LA, Rocha LAO. Computational modeling and constructal design method applied to the mechanical behavior improvement of thin perforated steel plates subject to buckling. *Journal of Engineering Thermophysics*. 2016;25(2):197-215.
- 23- Madenci E, Barut A. Pre- and postbuckling response of curved, thin, composite panels with cutouts under compression. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994;37(9):1499-1510.
- 24- Arbelo MA, Herrmann A, Castro SGP, Khakimova R,