ISSN: 2476-6909; Modares Mechanical Engineering. 2019;19(9):2139-2148

Investigating the internal resonance and energy exchange between the vibration modes of a cracked beam

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Rezaee M.*[1] *PhD,*
Shaterian_Alghalandis V.[1] *MSc*

How to cite this article
Rezaee M, Shaterian_Alghalandis V. Investigating the internal resonance and energy exchange between the vibration modes of a cracked beam. Modares Mechanical Engineering. 2019;19 (9): 2139-2148.

[1]Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

***Correspondence**
Address: Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, 29 Bahman Boulevard, East Azarbaijan, Tabriz, Iran. Postal Code: 5166616471
Phone: +98 (41) 33392459
Fax: +98 (41) 33354153
m_rezaee@tabrizu.ac.ir

Article History
Received: March 19, 2018
Accepted: February 4, 2019
ePublished: September 01, 2019

ABSTRACT

The equations of nonlinear motion of clamped-hinged beam with an open crack were extracted and through solving them, the internal resonance in the cracked beam was studied. To this end, the crack was modeled as a torsional spring and the cracked beam was considered as two beam segments connected by a torsional spring. The equations of motion of the cracked beam were extracted considering the geometrical nonlinearity. Then, using the Galerkin's method, these equations were changed to a set of nonlinear differential equations for vibration modes which were solved by the perturbation method. Since the mechanical energy of the beam in each mode depends on the instantaneous amplitude of vibration of the beam at the corresponding mode, so to analyze the influence of the crack on the energy exchange between the modes, the instantaneous amplitudes of the vibration modes were obtained. The results show that in the cracked beam the magnitude of the energy exchanged between the modes is less and the frequency is more than that in the intact beam. Also, by increasing the crack depth the frequency of energy exchange between the modes increases. The Vibration response obtained for the cracked beam with various amounts of the damping ratios shows that the frequency and the amplitude of energy exchange between the modes are independent of the system damping. To validate the results by the perturbation method, the equations of motions are also solved by a numerical method and the obtained results are in agreement with the results of the analytical method.

Keywords Clamped-Hinged Beam; Open Crack; Geometrical Nonlinearity; Internal Resonance; Hilbert Transform

CITATION LINKS

[1] An analytical approach for obtaining the location and depth of an all-over part-through crack on externally in-plane loaded rectangular plate ... [2] A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements ... [3] Identification of a crack in clamped-clamped beam using frequency-based method ... [4] On the classification of normalized natural frequencies for damage detection ... [5] Sensitivity of fundamental mode shape and static deflection for damage identification ... [6] Mode shapes analysis of a cracked beam and its application ... [7] Damage identification techniques via modal curvature analysis: Overview and comparison. Mechanical Systems ... [8] The new frequency response functions for ... [9] Frequency response function based damage identification using principal component analysis and ... [10] Modeling and control of fuel sloshing and its effect ... [11] Analysis of the nonlinear behavior of the free vibration of a cantilever beam with a fatigue crack using ... [12] A theoretical and experimental investigation on free vibration behavior of a cantilever beam ... [13] Structural damage evaluation ... [14] A generalized flexibility matrix based approach for ... [15] Detection of fatigue cracks in flexible geometrically nonlinear bars by ... [16] Geometrically non-linear free vibrations of clamped-clamped beams ... [17] Geometrically non-linear steady state periodic forced response of a clamped-clamped beam with an edge ... [18] Vibration based damage detection in composite beams under temperature variations using ... [19] Non-linear vibration of Timoshenko damaged beams by a new p-version finite ... [20] Vibrations of beams with a breathing crack and large amplitude ... [21] Nonlinear reduced models for beam damage detection using data on moving oscillator ... [22] Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded ... [23] Geometrically nonlinear free vibration of composite materials: Clamped-clamped functionally graded beam with an edge crack using ... [24] Geometrically non-linear free and forced vibration of clamped-clamped functionally graded beam ... [25] Nonlinear ... [26] Analytical methods in ...[27] Beam vibrations with an arbitrary number...

بررسی پدیده تشدید درونی و انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی در تیر ترک‌دار

موسی رضائی* PhD
گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
وحید شاطریان القلندیس MSc
گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده
در این مقاله معادلات حرکت غیرخطی تیر یک‌سر گیردار و یک‌سر مفصل با ترک‌باز استخراج‌شده و با حل آن به مطالعه پدیده تشدید درونی در تیر ترک‌دار پرداخته شده است. ترک به صورت یک فنر پیچشی مدل‌سازی شده و تیر ترک‌دار به صورت دو تیر مجزا که با یک فنر پیچشی به هم متصل شده‌اند در نظر گرفته شده است. معادله حرکت تیر ترک‌دار با فرض غیرخطی هندسی استخراج و با استفاده از روش گالرکین به مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی برای مودهای ارتعاشی تبدیل شدند و با استفاده از روش اغتشاشات حل شدند. با توجه به وابستگی انرژی مکانیکی تیر با دامنه نوسان آن، برای بررسی انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی و تاثیر ترک در آن، دامنه آنی مودهای ارتعاشی به دست آمد. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که در تیر ترک‌دار مقدار انرژی انتقالی بین مودها کمتر از تیر سالم بوده ولی نرخ تکرار انتقال انرژی بیشتر از تیر سالم است و نرخ جابه‌جایی انرژی بین مودها با افزایش عمق ترک با شیب تندتری افزایش می‌یابد. همچنین پاسخ ارتعاشی به‌دست‌آمده برای تیر ترک‌دار با میرائی‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار و سرعت انتقال انرژی وابستگی ناچیزی به میرائی سیستم دارد. برای صحه‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده از روش اغتشاشات، معادلات حرکت با استفاده از روش عددی حل شده و نتایج به‌دست‌آمده حاکی از همخوانی کامل نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های تحلیلی و عددی است.

کلیدواژه‌ها: تیر یک‌سر گیردار و یک‌سر مفصل، ترک باز، غیرخطی هندسی، تشدید درونی، تبدیل هیلبرت

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۵

*نویسنده مسئول: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از عیب‌های رایج در تیر به‌عنوان جزء اصلی تشکیل‌دهنده سازه‌ها، وجود ترک است. با توجه به اینکه ترک سبب تغییر در مشخصه‌های مکانیکی تیر می‌شود، در صورتی که تیر ترک‌دار در معرض بارهای دینامیکی واقع شود رفتار ارتعاشی آن متفاوت با رفتار سازه سالم خواهد بود. بنابراین تحلیل ارتعاشات تیرها به‌عنوان روشی برای شناسایی عیوب سازه‌ای شناخته می‌شود. در ادبیات فن، بیشتر مطالعات صورت‌گرفته در زمینه ارتعاشات تیر ترک‌دار، با فرض دامنه ارتعاشی بی‌نهایت کوچک، بر مبنای خطی‌بودن معادلات حاکم بر حرکت ارتعاشی تیر استوار است. بر این اساس، با تحلیل پاسخ ارتعاشی خطی تیر، پارامترهای متعددی استخراج شده‌اند که وابسته به مشخصه‌های ذاتی تیر بوده و از این رو برای شناسایی ترک مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در حوزه ارتعاشات خطی، مهم‌ترین پارامترها برای تشخیص و شناسایی ترک، پارامترهای مودال و مشخصه‌های ارتعاشی استخراج‌شده از آنها هستند. فرکانس‌های طبیعی تیر به‌عنوان یکی از اصلی‌ترین پارامترها در تحقیقات بیشماری به‌منظور شناسایی ترک مورد استفاده قرار گرفته‌اند[1-4]. شکل مودهای ارتعاشی و توابع مشتق‌شده از آنها مشخصه‌های مودال دیگری هستند که در شناسایی ترک استفاده می‌شوند[5-7]. در مراجع متعددی، توابع پاسخ فرکانسی و تغییرات ایجادشده در آنها در تیر ترک‌دار به‌عنوان روشی برای شناسایی و مطالعه ترک مورد استفاده قرار گرفته‌اند[8-12]. همچنین، در روش‌های مبتنی بر المان محدود از تغییرات ماتریس‌های سفتی یا انعطاف‌پذیری برای شناسایی ترک استفاده می‌شود[13, 14].

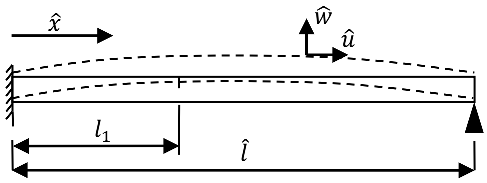
از سوی دیگر، در دامنه‌های ارتعاشی بزرگ‌تر، رفتار ارتعاشی غیرخطی به‌صورت پدیده‌های غیرخطی متعددی مانند تشدید زیرهارمونیک، تشدید فراهارمونیک، خمیدگی منحنی پاسخ فرکانسی، پدیده پرش و غیره بروز می‌کند. با مروری بر ادبیات فن، مشخص می‌شود که تاکنون مطالعات بسیار محدودی در زمینه بررسی تاثیر ترک در رفتار ارتعاشی غیرخطی ناشی از دامنه نوسان صورت گرفته است. *سینفانسکی* و *برسنویچ*[15] به‌منظور مطالعه ارتعاشات غیرخطی تیر ناشی از غیرخطی هندسی، معادله غیرخطی حاکم بر حرکت ارتعاشی تیر را با درنظرگرفتن رابطه غیرخطی بین انحنای تیر و گشتاور خمشی وارد بر آن استخراج نموده و تاثیر ترک خستگی را به‌صورت کاهش موضعی در ممان اینرسی سطح مقطع تیر در نظر گرفتند. نتایج حاصل از حل معادلات حرکت نشان داد که وجود ترک خستگی سبب ایجاد مولفه‌های غیرخطی جدیدی در پاسخ ارتعاشی تیر می‌شود که مستقل از مولفه‌های غیرخطی ناشی از دامنه نوسان تیر است. برخی از این مشخصه‌ها شامل ایجاد حالت خودتحریکی در طیف فرکانسی زیرهارمونیک، ایجاد مولفه‌های هارمونیک زوج در طیف فراهارمونیک مرتبه ۳/۱ و غیره هستند. محققان با استفاده از این مولفه‌های غیرخطی روش‌های جدیدی برای شناسایی ترک ارایه دادند. *البیکری* و همکاران[16] از روش ریلی-ریتز تعمیم‌یافته به سیستم‌های غیرخطی برای به‌دست‌آوردن شکل مودهای غیرخطی و فرکانس‌های نوسانی غیرخطی استفاده کردند. بنابراین مقادیر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غیرخطی تیرهای ترک‌دار برای مقادیر متنوعی از دامنه‌های نوسان و نیز موقعیت و عمق ترک استخراج شد. همین محققان در تحقیقی دیگر[17] با توسعه روش فوق به ارتعاش اجباری، پاسخ غیرخطی هندسی تیر ترک‌دار را به تحریک هارمونیک با فرکانسی نزدیک به فرکانس طبیعی پایه تیر به دست آوردند. *مانوچ* و همکاران[18] ارتعاشات با دامنه بزرگ تیر تیموشینکو ترک‌دار تحت تحریک هارمونیک و نیز تحت تغییرات دمایی را با روش‌های عددی و تجربی مورد مطالعه قرار دادند. برای این منظور، با مدل‌سازی ترک به‌صورت کاهش مدول الاستیسیته تیر در پیرامون آن، پاسخ ارتعاشی تیر را به‌صورت عددی و تجربی به دست آورده و با استخراج نمودارهای پوانکاره پاسخ، به بررسی تاثیر ترک در نمودار پوانکاره پاسخ تیر ترکدار با دمای متغیر پرداختند. در این تحقیق، تاثیر دما در فرآیند ترک‌یابی در تیر به وضوح نشان داده شد. *استاجانوویچ* و همکاران[19] برای بررسی ارتعاشات تیر تیموشینکو ترک‌دار با دامنه بزرگ از روش المان محدود جدیدی به نام روش "نسخه پی" بهره جستند. در شبیه‌سازی‌های عددی صورت‌گرفته در محدوده ارتعاش خطی، نوعی همبستگی بین مولفه‌های ارتعاش طولی و چرخش سطح مقطع تیر مشاهده شد، به‌طوری که در محل ترک مولفه جابه‌جایی طولی تغییر علامت داده و همزمان، تغییری آنی در مقدار چرخش سطح مقطع ایجاد می‌شود. در ادامه، ارتعاش اجباری غیرخطی هندسی نیز در حوزه زمان و با استفاده از روش نیومارک مورد مطالعه قرار گرفت و ابعاد جدیدی از همبستگی ما بین مولفه‌های جابه‌جایی کشف شد. *کارنیه‌رو* و همکاران[20] ترک خستگی را با درنظرگرفتن آثار باز و بسته‌شدن آن به‌صورت یک تابع اغتشاش در توزیع یکنواخت تیر در نظر گرفتند که سبب کاهش ضریب سفتی کلی تیر می‌شود. بنابراین معادله حرکت تیر را با استفاده از روش المان محدود نسخه پی و با معرفی توابع شکل مود جدیدی که آثار ترک را در بر داشته باشد، به

دست آورده و برای حل آن از روش نیومارک بهره جستند. این محققان با مطالعه منحنی‌های فاز به‌دست‌آمده از پاسخ ارتعاشی تیر نشان دادند که وجود ترک سبب تغییر در تقارن منحنی‌های فاز می‌شود. همچنین، تاثیر ترک باز و بسته‌شونده در سرعت و شتاب پاسخ ارتعاشی تیر بسیار بیشتر از جابه‌جایی آن است. *ماجومدر* و همکاران[21] از پاسخ غیرخطی هندسی تیر اویلر برنولی ترک‌دار به یک بار متحرک برای شناسایی ترک بهره جستند. برای این کار از روش المان محدود که در آن، ماتریس‌های سازه‌ای متغیر با زمان هستند، بهره گرفته شد. درنهایت، پارامترهای ترک با حل دسته‌ای از معادلات غیرخطی فرامعین به دست آمدند. *کیتی پورنچای* و همکاران[22] ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی با یک ترک باز را با استفاده از تئوری تیر تیموشینکو و با در نظر رفتار غیرخطی هندسی وون کارمن مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق، مقطع ترک‌دار به‌وسیله فنر پیچشی بدون جرم شبیه‌سازی شده و برای استخراج معادله مشخصه حاکم بر نوسان تیر و به‌دست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرخطی از روش ریتز بهره گرفته شده و مطالعه جامعی برای بررسی تاثیر ترک و مشخصات مکانیکی مواد تیر، نسبت رعنایی آن و شرایط مرزی روی مشخصه‌های ارتعاش غیرخطی آزاد تیر ترک‌دار صورت گرفت. *چاجی* و همکاران[23] ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی متخلخل دو سرگیردار با یک ترک عرضی را مورد مطالعه قرار دادند. برای این منظور، یک سیستم همگن و ایزوتروپیک معادل برای تیر متخلخل تعریف کرده و سپس با استفاده از اصل همیلتون و با درنظرگرفتن مدل نیمه‌تحلیلی برای پاسخ تیر، معادلات حرکت تیر به‌صورت مجموعه معادلات مقدار ویژه غیرخطی استخراج و با حل آنها مقادیر فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و شکل مودهای ارتعاشی تیر را به دست آوردند. از نتایج به‌دست‌آمده از این تحقیق برای استخراج پاسخ ارتعاش اجباری تیر به تحریک هارمونیک استفاده شد[24].

یکی از پدیده‌های غیرخطی ناشی از کشش که در تیرهای دو سر ثابت می‌آید، تشدید درونی است که در آن، در حین ارتعاش تیر انرژی مکانیکی به‌صورت متناوب در میان مودهای ارتعاشی غیرخطی آن جابه‌جا شده و در نتیجه، سطح انرژی هر یک از مودهای ارتعاشی دچار تغییرات نوسانی می‌شود. با توجه به ارتباط بین انرژی مکانیکی تیر و دامنه نوسان آن در هر یک از مودهای ارتعاشی، پدیده تشدید درونی را می‌توان با بررسی دامنه آنی نوسان تیر در هر یک از مودهای ارتعاشی مورد مطالعه قرار داد. از سوی دیگر همان‌طور که اشاره شد، در ادبیات فن در مورد تاثیر عیوب سازه‌ای در پدیده تشدید درونی نیز همانند سایر پدیده‌های غیرخطی ناشی از دامنه نوسان تحقیقی صورت نگرفته است. بنابراین در این مقاله تاثیر ترک در تشدید درونی یک تیر یک سر گیردار و یک سر مفصل تحت ارتعاشات آزاد میرا مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، معادله حرکت حاکم بر تیر ترک‌دار با فرض دامنه نوسان بزرگ و میرائی از نوع ویسکوز و با چشم‌پوشی از اثر نیروی برشی و اینرسی چرخشی استخراج می‌شود. در این شرایط با توجه به ثابت‌بودن دو انتهای تیر، در حین نوسان، تیر تحت کشش واقع شده و این موضوع سبب ارتعاشات غیرخطی از نوع هندسی می‌شود. معادله حرکت غیرخطی به‌دست‌آمده برای تیر ترک‌دار با استفاده از روش گالرکین به دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل برای بخش زمانی پاسخ ارتعاشی تیر تبدیل می‌شود که پارامترها و ضرایب آنها به مشخصه‌های مکانیکی تیر و ترک موجود در آن وابسته هستند؛ این معادلات، برای ترک‌های مختلف و به‌ازای مقادیر مختلف میرائی سیستم با استفاده از روش‌های اغتشاشات حل شده و توابع زمانی به دست می‌آید. با توجه به ارتباط بین انرژی مکانیکی تیر با دامنه ارتعاشی آن در یک مود معین، برای بررسی تغییرات انرژی مکانیکی و انتقال آن بین مودهای ارتعاشی، تغییرات زمانی دامنه آنی هر یک از توابع مودال با استفاده از تبدیل هیلبرت به‌دست‌آمده و تاثیر ترک در نوسانات دامنه آنی توابع مودال مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین، برای صحه‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده، دستگاه معادلات غیرخطی مربوط به توابع زمانی با استفاده از روش عددی حل و نتایج آن با نتایج به‌دست‌آمده از روش اغتشاشات مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۲- معادله حرکت تیر ترک‌دار

در شکل ۱، تیر یکنواخت یک سر گیردار و یک سر مفصل به طول $\hat{l}$ و با ترک عرضی در موقعیت $\hat{l}_1$ نشان داده شده است. ترک از نوع باز در نظر گرفته می‌شود. در ادبیات فن به‌منظور تحلیل ارتعاشات خطی تیر ترک‌دار، عموماً تیر ترک‌دار به‌صورت دو تیر پیوسته مجزا که در محل ترک به یکدیگر متصل هستند در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق با درنظرگرفتن اثر کشش محوری، ارتعاشات غیرخطی هندسی تیر ترک‌دار مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۱) تیر یک سر گیردار و یک سر مفصل با ترک باز

اگر مطابق شکل ۱ جابه‌جایی عرضی تیر در سمت چپ و راست ترک (تیر سمت چپ و راست) را با $\hat{w}_i, (i=1,2)$، جابه‌جایی محوری را با $\hat{u}_i$ و نیروی عرضی وارد بر واحد طول تیر را با $\hat{F}_i$ نشان دهیم، معادله حرکت ارتعاشی دوبعدی تیر با درنظرگرفتن ارتعاش غیرخطی ناشی از کشش تیر و با چشم‌پوشی از اثرات برش و اینرسی دورانی به‌صورت زیر به دست می‌آید[25]:

$$\rho A\frac{\partial^2\hat{u}_i}{\partial\hat{t}^2}-EA\frac{\partial^2\hat{u}_i}{\partial\hat{x}^2}=\frac{1}{2}EA\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left(\frac{\partial\hat{w}_i}{\partial\hat{x}}\right)^2 \qquad \text{(۱- الف)}$$

$$\rho A\frac{\partial^2\hat{w}_i}{\partial\hat{t}^2}+C\frac{\partial\hat{w}_i}{\partial\hat{t}}+EI\frac{\partial^4\hat{w}_i}{\partial\hat{x}^4}=EA\sigma_i\frac{\partial^2\hat{w}_i}{\partial\hat{x}^2}+\hat{F} \qquad \text{(۱- ب)}$$

$$\sigma_i=\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial\hat{x}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}_i}{\partial\hat{x}}\right)^2 \qquad \text{(۱-ج)}$$

که در آن، ρ چگالی، C ضریب میرایی، E مدول الاستیسیته و I ممان اینرسی سطح مقطع تیر است.

در تیرهای بلند که ابعاد سطح مقطع تیر در مقایسه با طول آن بسیار کوچک است می‌توان از اینرسی تیر در راستای محوری چشم‌پوشی کرد[25]. در این حالت، با چشم‌پوشی از جمله اینرسی در معادله (۱- الف) و انتگرال‌گیری از معادله حاصل، رابطه (۲) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial\hat{x}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}_i}{\partial\hat{x}}\right)^2+e_i(\hat{t}) \qquad \text{(۲)}$$

که در آن، تابع زمانی $e_{\mathrm{i}}(t)$ ناشی از انتگرال‌گیری نسبت به متغیر زمانی $\hat{x}$ است و با توجه به شرایط مرزی تیر تعیین می‌شود. همچنین، با توجه به روابط (۲) و (۱- ج) تابع $e_{\mathrm{i}}(t)$ همان تابع σ_{i} است که در رابطه تعریف شده (۱- ج) است. با انتگرال‌گیری مجدد از رابطه (۲)، جابه‌جایی محوری تیر در طرفین ترک با رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$\hat{u}_1 = e_1(\hat{t})\hat{x} + c_1(\hat{t}) - \frac{1}{2}\int_0^{\hat{x}}\left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}}\right)^2 \mathrm{d}\hat{x} \quad 0 \le \hat{x} \le \hat{l}_1 \qquad \text{(۳- الف)}$$

$$\hat{u}_2 = e_2(\hat{t})\left(\hat{x} - \hat{l}_1\right) + c_2(\hat{t}) - \frac{1}{2}\int_{\hat{l}_1}^{\hat{x}}\left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}}\right)^2 \mathrm{d}\hat{x} \quad \hat{l}_1 \le \hat{x} \le \hat{l}_2 \qquad \text{(۳- ب)}$$

که در آن c_1 و c_2 همانند e_1، e_2 با شرایط مرزی تیر تعیین می‌شوند. با توجه به ثابت‌بودن تیر در دو انتها، شرایط مرزی در ابتدای تیر ۱ و انتهای تیر ۲ به‌صورت جابه‌جایی صفر خواهد بود:

$$\hat{u}_1(0,\hat{t}) = 0 \qquad \text{(۴- الف)}$$

$$\hat{u}_2(\hat{l},\hat{t}) = 0 \qquad \text{(۴- ب)}$$

همچنین، با توجه به پیوستگی جابه‌جایی محوری و نیروی محوری در محل ترک، خواهیم داشت:

$$\hat{u}_1(\hat{l}_1,\hat{t}) = \hat{u}_2(\hat{l}_1,\hat{t}) \qquad \text{(۵- الف)}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}}(\hat{l}_1) = \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}}(\hat{l}_1) \qquad \text{(۵- ب)}$$

با قراردادن رابطه (۳) در روابط (۴) و (۵) توابع e_1 و e_2 درنهایت به‌صورت رابطه (۶) زیر استخراج می‌شوند:

$$e_1(t) = \frac{\hat{l}_2}{2l}\left(\left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}}\right)^2\bigg|_{\hat{l}_1} - \left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}}\right)^2\bigg|_{\hat{l}_1}\right) + \frac{1}{2\hat{l}}\int_0^{l_1}\left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}}\right)^2 \mathrm{d}\hat{x} + \frac{1}{2\hat{l}}\int_{l_1}^{l}\left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}}\right)^2 \mathrm{d}\hat{x} \qquad \text{(۶- الف)}$$

$$e_2(t) = \frac{\hat{l}_1}{2l}\left(\left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}}\right)^2\bigg|_{\hat{l}_1} - \left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}}\right)^2\bigg|_{\hat{l}_1}\right) + \frac{1}{2\hat{l}}\int_0^{l_1}\left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}}\right)^2 \mathrm{d}\hat{x} + \frac{1}{2\hat{l}}\int_{l_1}^{l}\left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}}\right)^2 \mathrm{d}\hat{x} \qquad \text{(۶- ب)}$$

به‌منظور ساده‌سازی و خلاصه‌نمودن معادلات، می‌توان جابه‌جایی عرضی تیر، w، را در سرتاسر آن با تابع واحدی به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{w} = \begin{cases} \hat{w}_1 & 0 \le \hat{x} \le \hat{l}_1 \\ \hat{w}_2 & \hat{l}_1 \le \hat{x} \le \hat{l} \end{cases} = \hat{w}_1 + \mathrm{H}\left(\hat{x} - \hat{l}_1\right)(\hat{w}_2 - \hat{w}_1) \qquad \text{(۷)}$$

که در آن، H تابع هوی‌ساید است.

همانند تابع $\hat{w}$، تابع e را نیز می‌توان برای دو بخش تیر با یک تابع واحد تعریف نمود:

$$e = e_1 + \mathrm{H}\left(\hat{x} - \hat{l}_1\right)(e_2 - e_1) \qquad \text{(۸)}$$

به این ترتیب معادله حرکت ارتعاش عرضی تیر، رابطه (۱- ب)، به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + C\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + EI\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} = EAe\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \hat{F} \qquad \text{(۹)}$$

قبل از حل معادله (۹)، متغیرهای بی‌بعد زیر را تعریف می‌کنیم: (۱۰)

$$x = \frac{\hat{x}}{L},\quad w = \frac{\hat{w}}{L},\quad u = \frac{\hat{u}}{L},\quad F = \frac{L}{EA}\hat{F},\quad t = \frac{\hat{r}}{L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\hat{t},\quad r = \frac{\hat{r}}{L},\quad l = \frac{\hat{l}}{L},$$

که در آن، $\hat{r}$ شعاع ژیراسیون سطح مقطع و L طول مشخصه تیر است.

با جای‌گذاری روابط (۱۰) در معادله (۹)، معادله بی‌بعدشده حرکت به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$r^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) = e\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F \qquad \text{(۱۱)}$$

معادله (۱۱) در حقیقت معادله حرکت غیرخطی هندسی تیر است که در این تحقیق، با بهره‌گیری از توابع استخراج‌شده در معادلات (۶) و (۸) به تیر ترک‌دار با ترک باز تعمیم داده شده است.

برای حل معادله (۱۱) از روش گالرکین استفاده می‌شود. برای این منظور، پاسخ معادله غیرخطی (۱۱) مطابق رابطه (۱۲) به‌صورت مجموعی از حاصل‌ضرب‌های شکل مودهای خطی تیر ترک‌دار و توابع مودال زمانی در نظر گرفته می‌شود. همچنین، با توجه به این که در این تحقیق، هدف مطالعه ارتعاشات غیرخطی ضعیف تیر ترک‌دار است، برای اجتناب از ایجاد آثار غیرخطی شدید، دامنه نوسان تیر کم و از مرتبه‌ای کوچکتر از شعاع ژیراسیون سطح مقطع آن در نظر گرفته می‌شود، در این شرایط از یک‌سو با توجه به ثابت‌بودن دو انتهای تیر، کشش ایجادشده در آن در حین ارتعاش سبب ایجاد آثار غیرخطی هندسی در آن شده و از سوی دیگر به‌علت دامنه نوسان کوچک، از اثرات برشی و دورانی چشم‌پوشی می‌شود. تابع w را می‌توان به‌صورت رابطه (۱۲) تعریف کرد:

$$w = r^k \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\eta_n(t) \qquad \text{(۱۲)}$$

که در آن، $\eta_n(t)$ تابع زمانی و $\phi_n(x)$ شکل مود خطی nام تیر با

ترک باز است. همچنین، با توجه به اینکه $r \gg 1$، در نتیجه برای کوچک‌بودن دامنه نوسان نسبت به شعاع ژیراسیون r، پارامتر k بزرگ‌تر از یک خواهد بود. برای استخراج شکل مودهای خطی، تیر ترک‌دار به‌صورت دو تیر مجزا که به‌وسیله یک فنر پیچشی معادل با ترک باز به هم متصل شده‌اند مدل‌سازی می‌شود[26]. شکل مودهای خطی هر یک از دو بخش تیر در طرفین ترک با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی به‌صورت رابطه (۱۳) است[27]:

$$\phi_n^i(x) = A_1^i \sin[\beta_i(x - x_{i-1})] + A_2^i \cos[\beta_i(x - x_{i-1})] + A_3^i \sinh[\beta_i(x - x_{i-1})] + A_4^i \cosh[\beta_i(x - x_{i-1})],$$
$$x_{i-1} < x < x_i \quad i = 1,2 \tag{۱۳}$$

که در آن، $\phi_n^i(x),\ i = 1,2$ به‌ترتیب بیانگر شکل مود خطی nام تیر در سمت چپ و راست ترک است. همچنین، $\beta_i = \left(\frac{\rho A \omega_i^2}{EI}\right)$، و x_0، x_1 و x_2 به‌ترتیب برابر 0، l_1 و l هستند. برای تعیین ۸ ضریب مجهول A_j^i در رابطه (۱۳)، ۸ شرط مرزی (۴ شرط مرزی برای تیر فرضی سمت چپ ترک و ۴ شرط مرزی برای تیر فرضی سمت راست ترک) بایستی تعیین شوند. مطابق شکل ۱، شرایط مرزی ابتدایی تیر چپ، به‌صورت گیردار و شرایط مرزی انتهایی تیر راست، به‌صورت مفصل است:

$$w(0,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{۱۴- الف}$$

$$w(l,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0 \tag{۱۴- ب}$$

همچنین، شرایط مرزی انتهای تیر اول و ابتدای تیر دوم براساس پیوستگی در جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی در محل ترک به‌صورت روابط (۱۵) بیان می‌شود:

$$w(l_1^-, t) = w(l_1^+, t) \tag{۱۵- الف}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l_1^-, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l_1^+, t) \tag{۱۵- ب}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l_1^-, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l_1^+, t) \tag{۱۵- ج}$$

درنهایت، با توجه به مدل فنر پیچشی درنظرگرفته‌شده، اختلاف شیب تیر در طرفین ترک مطابق با رابطه (۱۶) با گشتاور خمشی در محل ترک مربوط است:

$$k_s\left[\frac{\partial w}{\partial x}(l_1^-, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(l_1^+, t)\right] = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l_1^+, t) \tag{۱۶}$$

که در آن، k_s ضریب فنر پیچشی بوده و به‌صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود[26]:

$$k_s = \left[6\pi\mu^2 f(\alpha) h\right]^{-1} \tag{۱۷}$$

که در آن، h ضخامت بی‌بعد تیر و α عمق نسبی ترک است و تابع $f(\alpha)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود[26]:

$$f(\alpha) = 0.6384 - 1.035\alpha + 3.7201\alpha^2 - 5.1773\alpha^3 + 7.553\alpha^4 - 7.332\alpha^5 + 2.4909\alpha^6 \tag{۱۸}$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۴) در روابط (۱۵) تا (۱۷)، یک مساله مقدار ویژه حاصل می‌شود که با حل آن، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر ترک‌دار و نیز ضرایب مجهول A_j^i و در نتیجه، شکل مودهای خطی تیر ترک‌دار استخراج می‌شوند[26]. شکل مودهای خطی $\phi_n(x)$ را نیز می‌توان همانند $\hat{w}$ و e برای دو بخش تیر با یک رابطه تعریف کرد:

$$\phi_n(x) = \phi_n^1 + \mathrm{H}(x - l_1)(\phi_n^2 - \phi_n^1) \tag{۱۹}$$

شکل مودهای ارتعاشی را می‌توان به‌صورت رابطه (۲۰) نرمالیزه نمود:

$$\int_0^l \phi_i(x)\phi_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{۲۰}$$

با جای‌گذاری تابع w در معادله (۱۱)، ضرب طرفین در شکل مود دلخواه nام و انتگرال‌گیری در طول تیر و با توجه به تعامد شکل مودهای تیر ترک‌دار، درنهایت مجموعه معادلات حرکت تیر ترک‌دار به‌صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\ddot{\eta}_n + 2\varepsilon\mu_n\dot{\eta}_n + \omega_n^2\eta_n = \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\Gamma_{nmpq}\eta_m\eta_p\eta_q + f_n, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{۲۱}$$

که در آن:

$$\varepsilon = r^{2(k-1)} \tag{۲۲-الف}$$

$$r^{2+k} f_n = \int_0^l F\phi_n \mathrm{d}x \tag{۲۲- ب}$$

$$\mu_n = \int_0^l \mu\phi_n^2 \mathrm{d}x \tag{۲۲- ج}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{nmpq} &= \left[\frac{l_2}{2l}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^-} - \left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^+}\right) + \frac{1}{2l}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\left(\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\phi_n\right)\Big|_{l_1^-} \\
&- \left[\frac{l_1}{2l}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^+} - \left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^-}\right) + \frac{1}{2l}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\left(\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\phi_n\right)\Big|_{l_1^+} \\
&- \left[\frac{l_1}{2l}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^+} - \left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^-}\right) + \frac{1}{2l}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \times \left(\int_{l_1}^l \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \\
&- \left[\frac{l_2}{2l}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^-} - \left(\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{l_1^+}\right) + \frac{1}{2l}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\left(\int_0^{l_1} \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned} \tag{۲۲- د}$$

در رابطه (۲۲- ج) میرائی مودال در نظر گرفته می‌شود.

معادله (۲۱) معادله حرکت غیرخطی تیر ترک‌دار با ترک باز است. ترک باز سبب تغییر در پارامترهای مودال (شکل‌مودها و

فرکانس‌های طبیعی) تیر شده و با توجه به روابط استخراج‌شده (۲۲)، سبب تغییر در ضرایب معادلات حرکت (۲۱) می‌شود.

برای حل معادله (۲۱) از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است[25]. در این روش، مقیاس‌های زمانی T_p به‌صورت رابطه (۲۳- الف) تعریف می‌شوند و متغیر وابسته η_n مطابق رابطه (۲۳- ب) در نظر گرفته می‌شود:

$$T_p = \varepsilon^p t,\quad p = 1,2,\ldots \tag{۲۳- الف}$$

$$\eta_n = \eta_{n0}(T_0,T_1,\ldots) + \varepsilon\eta_{n1}(T_0,T_1,\ldots) + O(\varepsilon^2) \tag{۲۳- ب}$$

با توجه به متغیرهای مستقل تعریف‌شده با رابطه (۱۳- الف)، مشتقات زمانی توابع η_n به‌صورت زیر باز تعریف شده و در معادله (۲۱) جایگزین می‌شوند:

$$\frac{d\eta_n}{dt} = \frac{\partial\eta_n}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial\eta_n}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2) = D_0\eta_n + \varepsilon D_1\eta_n + O(\varepsilon^2) \tag{۲۴- الف}$$

$$\frac{d^2\eta_n}{dt^2} = \frac{\partial^2\eta_n}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2\eta_n}{\partial T_0\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\eta_n}{\partial T_1^2} + O(\varepsilon^3) = D_0^2\eta_n + 2\varepsilon D_0D_1\eta_n + \varepsilon^2 D_0^2\eta_n + O(\varepsilon^3) \tag{۲۴- ب}$$

با قراردادن روابط (۲۳) و (۲۴) در معادله (۲۱) و با فرض ارتعاشات آزاد خواهیم داشت:

$$D_0^2\eta_{n0} + \varepsilon\left(D_0^2\eta_{n1} + 2D_0D_1\eta_{n0}\right) + \omega_n^2(\eta_{n0} + \varepsilon\eta_{n1}) = \varepsilon\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\Gamma_{nmpq}(\eta_{m0} + \varepsilon\eta_{m1})\left(\eta_{p0} + \varepsilon\eta_{p1}\right) \times\left(\eta_{q0} + \varepsilon\eta_{q1}\right)\right] - 2\mu_n[D_0\eta_{n0} + \varepsilon(D_0\eta_{n1} + D_1\eta_{n0})]\right\} \tag{۲۵}$$

که با مساوی صفر قراردادن ضرایب توان‌های یکسان ε خواهیم داشت:

$$D_0^2\eta_{n0} + \omega_n^2\eta_{n0} = 0 \tag{۲۶- الف}$$

$$D_0^2\eta_{n1} + 2D_0D_1\eta_{n0} + \omega_n^2\eta_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\Gamma_{nmpq}\eta_{m0}\eta_{p0}\eta_{q0}\right) - 2\mu_n D_0\eta_{n0} \tag{۲۶- ب}$$

با حل معادله (۲۶- الف)، تابع η_{n0} به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\eta_{n0} = a_n(T_1)\cos(\omega_n T_0 + \beta_n(T_1)) \tag{۲۷}$$

با قراردادن تابع (۲۷) در معادله (۲۶- ب) و جداسازی جملات سکولار و با لحاظ‌کردن دو مود ابتدایی تیر، به معادلات حالت زیر برای توابع a_n و β_n برای $n = 1,2$ می‌رسیم که با حل آنها و جای‌گذاری در معادله (۲۷)، توابع $\eta_n,\ n = 1,2$ تا مرتبه ε به دست خواهند آمد:

$$\omega_1\acute{a}_1 + \omega_1\mu_1 a_1 - \frac{1}{8}Q_1 a_1^2 a_2\sin(\gamma_1) = 0 \tag{۲۸- الف}$$

$$\omega_1 a_1\acute{\gamma}_2 - \omega_1 a_1\sigma_2 - \frac{1}{8}(\alpha_{11}a_1^2 + \alpha_{12}a_2^2)a_1 - \frac{1}{8}Q_1 a_1^2 a_2\cos(\gamma_1) = 0 \tag{۲۸- ب}$$

$$\omega_2\acute{a}_2 + \omega_2\mu_2 a_2 + \frac{1}{8}Q_2 a_1^3\sin(\gamma_1) = 0 \tag{۲۸- ج}$$

$$\omega_2(\acute{\gamma}_1 - 3\acute{\gamma}_2 + 3\sigma_2 - \sigma_1)a_2 + \frac{1}{8}(\alpha_{21}a_1^2 + \alpha_{22}a_2^2)a_2 + \frac{1}{8}Q_2 a_1^3\cos(\gamma_1) = 0 \tag{۲۸- د}$$

که در آن:

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 + \beta_2 - 3\beta_1,$$

$$\gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \beta_1,$$

$$\alpha_{11} = \Gamma_{1111}$$

$$\alpha_{22} = 3\Gamma_{2222},$$

$$Q_1 = 3\Gamma_{1112},$$

$$Q_2 = \Gamma_{2111},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2(\Gamma_{1122} + 2\Gamma_{1212})$$

در روابط (۲۸) اندیس پریم بیانگر مشتق نسبت به متغیر زمانی T_1 است. با حل معادلات (۲۸) و قراردادن آن در معادله (۲۷)، تغییرات زمانی توابع η_{n0} به دست می‌آید. با توجه به معادله (۲۳- ب) در صورتی که پارامتر ε به اندازه کافی کوچک باشد، می‌توان از جملات مرتبه ε صرف نظر نمود. در این شرایط، دامنه توابع زمانی η_n را می‌توان با دقت خوبی برابر با a_n در نظر گرفت و با مطالعه تغییرات زمانی a_n می‌توان چگونگی انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی را مورد مطالعه قرار داد. در ادامه، پاسخ ارتعاش آزاد تیر یک سر گیردار و یک سر مفصل با ترک عرضی باز به‌ازای مقادیر مختلف میرائی سیستم، مورد مطالعه قرار گرفته و با به‌دست‌آوردن دامنه توابع مودال، تاثیر ترک در پدیده تشدید درونی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۳- مطالعه موردی

در این بخش، تغییرات زمانی دامنه مودهای ارتعاشی اول و دوم تیر ترک‌دار به‌ازای مقادیر مختلف عمق ترک و میرائی سیستم به دست آمده و انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات تیر مطابق جدول ۱ بوده و شرایط مرزی به‌صورت یک سر گیردار و یک سر مفصل در نظر گرفته می‌شود.

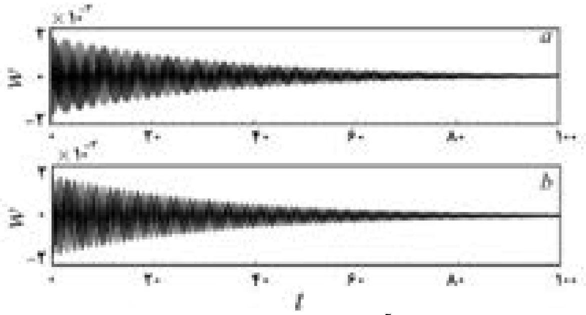
جدول ۱) مشخصات مکانیکی و هندسی تیر

جنس	آلومینیوم ۲۰۲۴
طول (سانتی‌متر)	٥٦
عرض (سانتی‌متر)	۲/٥٤
ضخامت (سانتی‌متر)	۰/٦٤
چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)	۲۷۸۰
مدول الاستیسیته (مگاپاسگال)	۷۲٤۰۰

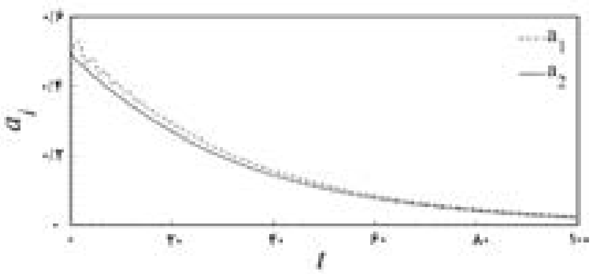
تیر در لحظه اولیه ساکن در نظر گرفته شده و جابه‌جایی اولیه آن به‌صورت ترکیب خطی دو شکل مود اول و با نسبت ۰/۵ مود اول و ۰/۵ مود دوم در نظر گرفته می‌شود. در نمودار ۱ پاسخ تیر در نقطه میانی آن در حالت سالم (a) و حالت ترک‌دار با ترکی با عمق نسبی ۰/۴ در فاصله نسبی ۰/۶ از انتهای گیردار (b) نمایش داده شده

است. در هر دو حالت، سیستم کم میرا و نسبت میرائی مودال سیستم (ζ) ۰/۰۰۲ در نظر گرفته شده است. در نمودار ۲ به‌منظور درک بهتر فرآیند انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی اول و دوم، تغییرات زمانی دامنه آنی دو مود اول در نمودار ۲ و نمای بزرگ‌شده‌ای از آن در نمودار ۳ نمایش داده شده است. در این نمودارها، $a_i,\ i = 1,2$ به‌ترتیب بیانگر دامنه مودهای اول و دوم است.

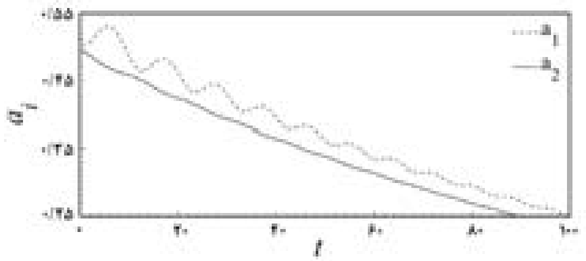
به‌منظور صحه‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده از روش اغتشاشات، معادله (۲۱) با استفاده از روش عددی رانگ کوتا نیز حل شد. در نمودارهای ۴ و ۵ تغییرات دامنه مودهای اول و دوم به‌دست‌آمده از روش اغتشاشات و روش عددی نمایش داده شده است.



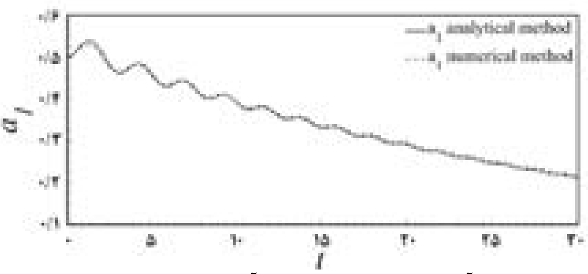
نمودار ۱) پاسخ ارتعاشات آزاد تیر؛ a) در حالت سالم، b) با یک ترک با عمق نسبی ۰/۵ در موقعیت نسبی ۰/۶



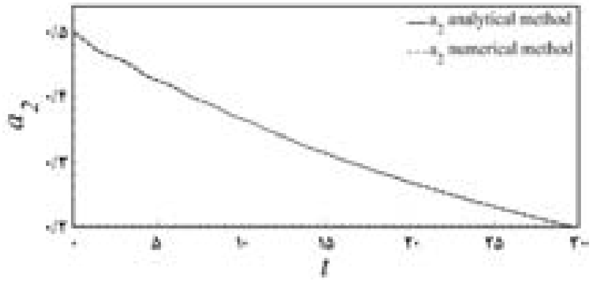
نمودار ۲) دامنه آنی مودهای ارتعاشی اول و دوم تیر سالم



نمودار ۳) تغییرات دامنه آنی مودهای ارتعاشی تیر سالم در لحظات اولیه ارتعاش آزاد



نمودار ۴) دامنه آنی مود ارتعاشی اول به‌دست‌آمده از روش‌های تحلیلی و عددی



نمودار ۵) دامنه آنی مود ارتعاشی دوم به‌دست‌آمده از روش‌های تحلیلی و عددی

با توجه به نمودارهای ۴ و ۵ نتایج به‌دست‌آمده از روش اغتشاشات و روش عددی همخوانی کاملی با یکدیگر دارند. همچنین، با توجه به نمودار ۲ با کاهش دامنه ارتعاشات تیر، نوسانات دامنه مودهای ارتعاشی نیز میرا شده و در نتیجه، انتقال انرژی بین مودها کاهش می‌یابد؛ به‌طوری که بعد از زمان $t = 25$ نوسانات دامنه از بین رفته و اثرات تشدید داخلی ناپدید می‌شود. در نمودار ۳ با توجه به روند تغییرات دامنه مودهای ارتعاشات و با توجه به وابستگی آنها به سطح انرژی در هر یک از مودها، می‌توان نتیجه گرفت که بسامد تغییرات انرژی در مودهای ارتعاشی اول و دوم با یکدیگر برابر بوده و سطح انرژی کمینه در یکی از آنها معادل با سطح انرژی بیشینه در مود دیگر است و این موضوع نشان‌دهنده انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی است. همچنین در مود ارتعاشی دوم، به‌علت برخورداری از سطح بالاتری از انرژی نسبت به مود اول، دامنه نوسانات در حین انتقال انرژی بین مودها نوسانات کمتری نسبت به دامنه مود ارتعاشی دوم خواهد داشت. از این رو، مود ارتعاشی اول برای مطالعه پدیده تشدید درونی مناسب‌تر از مود دوم بوده و بنابراین، در ادامه برای بررسی تاثیر ترک و نیز میرائی سیستم در انتقال انرژی بین مودها، نوسانات دامنه آنی مود اول مورد بررسی قرار می‌گیرد.

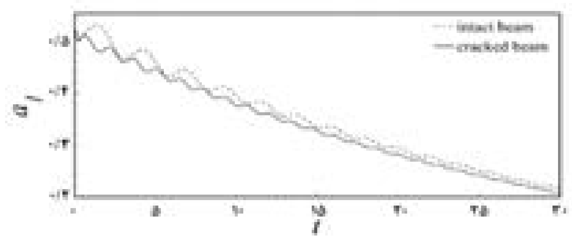
در نمودار ۶ تغییرات دامنه مود ارتعاشی اول تیر سالم و ترک‌دار برای ترک اشاره‌شده در بالا نمایش داده شده است. با توجه به نمودار ۶، ایجاد ترک دامنه نوسانات a_1 را کاهش و تعداد دفعات نوسان آن را افزایش می‌دهد. بسامد نوسان a_1 در تیرهای ترک‌دار و بدون ترک تقریباً ثابت بوده و به‌ترتیب برابر با ۰/۴۲ و ۰/۷۱هرتز است. همچنین، نرخ تغییرات دامنه نوسانات a_1 در تیر ترکدار و بدون ترک در نمودار ۷ نمایش داده شده است. در نمودار ۷ متغیر a_{re} برابر با نسبت دامنه نوسانات a_1 بر مقدار میانگین آن است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، شدت نوسان دامنه a_1 در تیر ترک‌دار کمتر از نصف تیر بدون ترک است و بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که وجود ترک در تیر سبب کاهش آثار تشدید درونی در ارتعاشات آزاد تیر شده است.

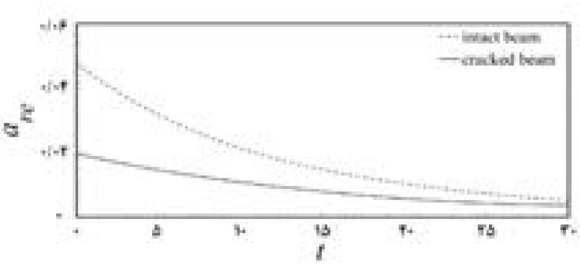
برای بررسی تاثیر ترک در نوسانات دامنه مودهای ارتعاشی در میرائی‌های بالاتر و بررسی تاثیر میرائی سیستم در برهم‌کنش ترک و تشدید درونی تیر، پاسخ ارتعاشی تیر در حالت سالم و حالت ترک‌دار با فرض میرائی مودال $\zeta = 0.005$ به دست می‌آید. شرایط اولیه تیر و ترک مورد نظر همانند حالت قبل در نظر گرفته می‌شود. در نمودار ۸ تغییرات دامنه a_1 در تیر سالم و ترک‌دار نمایش داده شده است؛ مطابق نمودار، بسامد نوسان a_1 در تیر سالم برابر با ۰/۴۳ و در تیر ترک‌دار برابر با ۰/۷۲ است. بنابراین، با مقایسه با نمودار ۶ می‌توان نتیجه گرفت که افزایش میرائی سیستم تاثیری در دفعات نوسان a_1 و در نتیجه بسامد انتقال انرژی بین مودها در

تیرهای سالم و ترک‌دار نخواهد داشت. همچنین با مقایسه نمودارهای ۶ و ۸ مشاهده می‌شود افزایش میرائی سیستم، هم در تیر سالم و هم در تیر ترک‌دار سبب کاهش دامنه نوسانات a_1 و میرائی سریع آن شده و در نتیجه آثار پدیده تشدید درونی را کاهش می‌دهد. با این حال، به ازای میرائی بالا نیز همانند حالت قبل، دامنه نوسانات a_1 در تیر ترک‌دار نسبت به تیر سالم کاهش ولی دفعات نوسان آن افزایش می‌یابد. این موضوع با بررسی نمودار ۹ که تغییرات زمانی دامنه نسبی نوسان a_1 را نشان می‌دهد قابل استنتاج است. درنهایت، برای بررسی روند تغییرات پدیده تشدید درونی با افزایش عمق ترک، تغییرات بسامد نوسان a_1 برای مقادیر مختلف عمق ترک محاسبه شد.

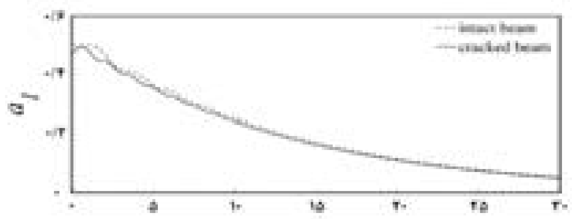
در نمودار ۱۰ تغییرات بسامد تشدید درونی با افزایش عمق ترک برای تیر با نسبت‌های میرائی $\zeta = 0.002$ و $\zeta = 0.005$ نشان داده شده است. در این نمودار، ω_{int} نشان‌دهنده بسامد انتقال انرژی بین مودهای اول و دوم بوده و γ عمق نسبی ترک است. با توجه به نمودار، با افزایش عمق ترک، ω_{int} با شیب صعودی افزایش می‌یابد. همچنین، مقدار ω_{int} همان‌طور که قبلاً نیز مشخص شد، تقریباً مستقل از مقدار میرائی سیستم است. درنهایت، بررسی‌های به‌عمل‌آمده نشان داد که در میرائی‌های بالاتر اثر پدیده تشدید درونی در پاسخ ارتعاشی تیر از بین می‌رود. همچنین، پاسخ ارتعاشی به‌دست‌آمده برای موقعیت‌های مختلف ترک، نشان‌دهنده تاثیر مشابه ترک در تشدید درونی تیر است. به عبارت دیگر، با افزایش عمق ترک در هر موقعیتی از تیر، بسامد نوسان دامنه مودها افزایش و دامنه آن کاهش می‌یابد.



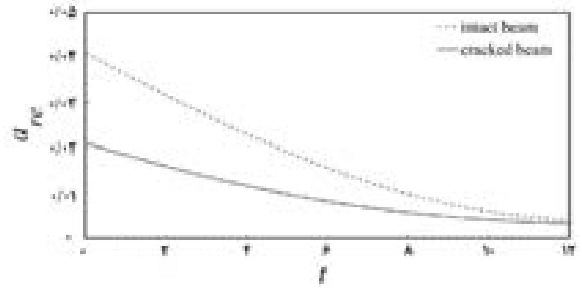
نمودار ۶) تغییرات a_1 در ارتعاشات آزاد تیر سالم و تیر با ترک در موقعیت نسبی ۰/۶ و عمق نسبی ۰/۴، ضریب میرائی مودال ۰/۰۰۲



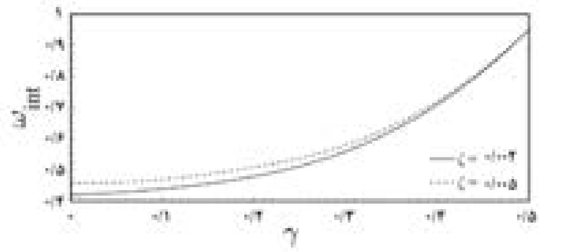
نمودار ۷) تغییرات a_{re} در ارتعاشات آزاد تیر سالم و تیر با ترک در موقعیت نسبی ۰/۶ و عمق نسبی ۰/۴، ضریب میرائی مودال ۰/۰۰۲



نمودار ۸) تغییرات a_1 در ارتعاشات آزاد تیر سالم و تیر با ترک در موقعیت نسبی ۰/۶ و عمق نسبی ۰/۴، ضریب میرائی مودال ۰/۰۰۵



نمودار ۹) تغییرات a_{re} در ارتعاشات آزاد تیر سالم و تیر با ترک در موقعیت نسبی ۰/۶ و عمق نسبی ۰/۴، ضریب میرائی مودال ۰/۰۰۵



نمودار ۱۰) تغییرات ω_{int} در تیر با ترک در موقعیت l_1=0.6 در برابر عمق نسبی ترک به‌ازای ضرایب میرائی مودال ۰/۰۰۲ و ۰/۰۰۵

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، معادله حرکت ارتعاشی غیرخطی تیر ترک‌دار دو سر ثابت (یک سر گیر دار و یک سر مفصل) تحت دامنه نوسان بزرگ، استخراج و با حل آن، پدیده تشدید درونی و تاثیر ترک و میرائی تیر در این پدیده غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور، با استفاده از مدل فنر پیچشی برای ترک باز، تیر ترک‌دار به‌صورت دو تیر مجزا که توسط فنر پیچشی به هم متصل شده‌اند در نظر گرفته شده و معادله حاکم بر ارتعاش تیر، با فرض ارتعاش غیرخطی هندسی ناشی از کشش در تیر استخراج شد. سپس معادله حاکم با استفاده از روش گالرکین به‌صورت مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی کوپل استخراج و این معادلات در حالت ارتعاشات آزاد تیر و با درنظرگرفتن جابه‌جایی اولیه معین حل شد. در حل این معادلات به‌علت غیرخطی‌بودن و نیز کوپل‌بودن آنها از روش اغتشاشات استفاده شد. با حل این معادلات تغییرات دامنه توابع مودال برای مقادیر مختلف عمق ترک و میرائی سیستم استخراج شدند.

نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که در تیر ترک‌دار نسبت به تیر بدون ترک دامنه نوسانات دامنه آنی توابع مودال کمتر بوده و بسامد نوسانات دامنه بیشتر است. همچنین، نتایج به‌دست‌آمده برای مقادیر مختلف عمق ترک نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک، بسامد نوسان دامنه با نرخی صعودی افزایش یافته و مقدار آن مستقل از میرائی سیستم است. به‌منظور صحه‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده از روش اغتشاشات، دستگاه معادلات غیرخطی حاصل، با استفاده از روش عددی نیز حل شده و توابع مودال زمانی استخراج شدند. سپس دامنه آنی تغییرات توابع زمانی با استفاده از روش هیلبرت به دست آمده و با نتایج حاصل‌شده از روش اغتشاشات مورد مقایسه قرار گرفت.

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.
تاییدیه‌اخلاقی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.
تعارض منافع: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

سهم نویسندگان: موسی رضائی (نویسنده اول)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی (۵۰%)؛ وحید شاطریان القلندیس (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی (۵۰%)
منابع مالی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

۵) پی‌نوشت

علایم انگلیسی

C ضریب میرایی ویسکوز
E مدول الاستیسیته
$\hat{F}$ نیروی عرضی وارد بر واحد طول تیر
F نیروی عرضی بی‌بعد وارد بر واحد طول تیر
f_n نیروی عرضی مودال وارد بر تیر
H تابع هوی‌ساید
h ضخامت بی‌بعد تیر
I ممان اینرسی سطح مقطع تیر
k_s ضریب فنر پیچشی بوده
L مشخصه طول در بی‌بعد سازی معادلات
$\hat{l}_1$ موقعیت طولی ترک در تیر
$\hat{l}$ طول تیر
$\hat{r}$ شعاع ژیراسیون سطح مقطع
r شعاع ژیراسیون بی‌بعد سطح مقطع
T_p متغیر زمانی مرتبه p در روش مقیاس‌های چندگانه
$\hat{t}$ متغیر زمانی
t متغیر زمانی بی‌بعد
$\hat{u}$ جابه‌جایی طولی تیر
u جابه‌جایی طولی بی‌بعد تیر
$\hat{w}$ جابه‌جایی عرضی تیر
w جابه‌جایی عرضی بی‌بعد تیر
$\hat{x}$ متغیر مکانی تیر
x متغیر مکانی بی‌بعد تیر

علایم یونانی

α عمق نسبی ترک
ε پارامتر کوچک بی‌بعد در روش اغتشاشات
ζ ضریب میرایی ویسکوز مودال
η_n تابع زمانی مودال n ام
μ ضریب میرایی ویسکوز
ρ چگالی تیر
ϕ_n شکل مود خطی n ام تیر ترک‌دار
ω_n فرکانس طبیعی بی‌بعد n ام تیر ترک‌دار

منابع

1- Khadem SE, Rezaee M. An analytical approach for obtaining the location and depth of an all-over part-through crack on externally in-plane loaded rectangular plate using vibration analysis. Journal of Sound and Vibration. 2000;230(2):291-308.
2- Khiem NT, Toan LK. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. Journal of Sound and Vibration. 2014;333(18):4084-4103.
3- Mungla MJ, Sharma DS, Trivedi RR. Identification of a crack in clamped-clamped beam using frequency-based method and genetic algorithm. Procedia Engineering. 2016;144:1426-1434.
4- Dahak M, Touat N, Benseddiq N. On the classification of normalized natural frequencies for damage detection in cantilever beam. Journal of Sound and Vibration. 2017;402:70-84.
5- Cao M, Ye L, Zhou L, Su Z, Bai R. Sensitivity of fundamental mode shape and static deflection for damage identification in cantilever beams. Mechanical Systems and Signal Processing. 2011;25(2):630-643.
6- Nguyen KV. Mode shapes analysis of a cracked beam and its application for crack detection. Journal of Sound and Vibration. 2014;333(3):848-872.
7- Dessi D, Camerlengo G. Damage identification techniques via modal curvature analysis: Overview and comparison. Mechanical Systems and Signal Processing. 2015;52-53:181-205.
8- Gelman L. The new frequency response functions for structural health monitoring. Engineering Structures. 2010;32(12):3994-3999.
9- Bandara RP, Chan THT, Thambiratnam DP. Frequency response function based damage identification using principal component analysis and pattern recognition technique. Engineering Structures. 2014;66:116-128.
10- Mohan SC, Maiti DK, Maity D. Structural damage assessment using FRF employing particle swarm optimization. Applied Mathematics and Computation. 2013;219(20):10387-10400.
11- Rezaee M, Fekrmandi H. Analysis of the nonlinear behavior of the free vibration of a cantilever beam with a fatigue crack using Lindstedt-Poincare's method. Amirkabir Journal of Mechanical Engineering. 2014;46(2):29-31.
12- Rezaee M, Fekrmandi H. A theoretical and experimental investigation on free vibration behavior of a cantilever beam with a breathing crack. Shock and Vibration. 2012;19(2):175-186.
13- Na C, Kim SP, Kwak HG. Structural damage evaluation using genetic algorithm. Journal of Sound and Vibration. 2011;330(12):2772-2783.
14- Li J, Wu B, Zeng QC, Lim CW. A generalized flexibility matrix based approach for structural damage detection. Journal of Sound and Vibration. 2010;329(22):4583-4587.
15- Tsyfansky SL, Beresnevich VI. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. Journal of Sound and Vibration. 1998;213(1):159-168.
16- El Bikri K, Benamar R, Bennouna MM. Geometrically non-linear free vibrations of clamped-clamped beams with an edge crack. Computers & Structures. 2006;84(7):485-502.
17- Merrimi EB, El Bikri K, Benamar R. Geometrically non-linear steady state periodic forced response of a clamped-clamped beam with an edge open crack. Comptes Rendus Mécanique. 2011;339(11):727-742.
18- Manoach E, Samborski S, Mitura A, Warminski J. Vibration based damage detection in composite beams under temperature variations using Poincaré maps. International Journal of Mechanical Sciences. 2012;62(1):120-132.
19- Stojanović V, Ribeiro P, Stoykov S. Non-linear vibration of Timoshenko damaged beams by a new *p*-version finite element method. Computers & Structures. 2013;120:107-119.
20- Carneiro GN, Ribeiro P. Vibrations of beams with a breathing crack and large amplitude displacements. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science. 2016;230(1):34-54.
21- Majumder L, Manohar CS. Nonlinear reduced models for beam damage detection using data on moving oscillator-beam interactions. Computers & Structures. 2004;82(2-3):301-314.

22- Kitipornchai S, Ke LL, Yang J, Xiang Y. Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams. Journal of Sound and Vibration. 2009;324(3-5):962-982.

23- Chajdi M, Merrimi EB, ELBikri K. Geometrically nonlinear free vibration of composite materials: Clamped-clamped functionally graded beam with an edge crack using Homogenisation method. Key Engineering Materials. 2017;730:521-526.

24- Chajdi M, Merrimi EB, El Bikri Kh. Geometrically non-linear free and forced vibration of clamped-clamped functionally graded beam with discontinuities. Procedia Engineering. 2017;199:1870-1875.

25- Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear oscillations. Hoboken: Wiley; 1979.

26- Meirovitch L. Analytical methods in vibrations. London: Macmillan; 1967.

27- Lin HP, Chang SC, Wu JD. Beam vibrations with an arbitrary number of cracks. Journal of Sound and Vibration. 2002;258(5):987-999.