



Dynamic Instability Analysis of Moderately Thick Rectangular Plates Influenced by an Orbiting Mass Based on the First-order Shear Deformation Theory

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Torkan E.¹ MSc,
Pirmoradian M.^{*2} PhD,
Hashemian M.² PhD

How to cite this article

Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. Dynamic Instability Analysis of Moderately Thick Rectangular Plates Influenced by an Orbiting Mass Based on the First-order Shear Deformation Theory. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(9): 2203-2213.

¹Young Researchers & Elite Club, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

²Mechanical Engineering Department, Mechanical Engineering Faculty, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

*Correspondence

Address: Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Daneshjoo Boulevard, Manzarieh, Khomeinishahr, Isfahan, Iran
Phone: +98 (31) 33660011
Fax: +98 (31) 33660088
pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

Article History

Received: April 5, 2018
Accepted: February 7, 2019
ePublished: September 01, 2019

ABSTRACT

In this paper, the dynamic stability of a moderately thick rectangular plate carrying an orbiting mass and lying on a visco-elastic foundation is studied. Considering all inertial terms of the moving mass and using plate first-order shear deformation theory, the governing equations on the dynamic behavior of the system are derived. The Galerkin's method on the basis of trigonometric shape functions is applied to change the coupled governing partial differential equations to a system of ordinary differential equations. Due to the alternative motion of the mass along the circular path over the plate's surface, the governing equations are the equations with the periodic constant. Applying the semi-analytical incremental harmonic balance method, the influences of the relative thickness of the plate, radius of the motion path, and stiffness and damping of the visco-elastic foundation on the instability conditions of the system are investigated. A good agreement can be observed by comparing the predicted results of the incremental harmonic balance method with the numerical solution results. Based on the findings, increasing the radius of the motion path broadens the instability regions. Moreover, increasing the stiffness and damping of the foundation cause the system more stable.

Keywords Plate-Orbiting Mass; First-Order Shear Deformation Theory; Dynamic Stability; Parametric Resonance; Incremental Harmonic Balance Method

CITATION LINKS

[1] On the theory of transverse bending of elastic plates [2] Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates [3] Three dimensional solution of thick rectangular simply supported plates under a moving load [4] Exact nonstationary responses of rectangular thin plate on Pasternak foundation excited by stochastic moving loads [5] Dynamic response of geometrically nonlinear, elastic rectangular plates under a moving mass loading by inclusion of all inertial components [6] Geometrically nonlinear rectangular simply supported plates subjected to a moving mass [7] Parametric study of the dynamic response of thin rectangular plates traversed by a moving mass [8] Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads [9] Parametric resonance analysis of rectangular plates subjected to moving inertial loads via IHB method [10] Dynamic response of a Mindlin elastic rectangular plate under a distributed moving mass [11] Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method [12] Stability and bifurcation analysis of a beam-mass-spring-damper system under primary and one-to-three internal resonances [13] On the parametric and external resonances of rectangular plates on an elastic foundation traversed by sequential masses [14] Dynamic stability of a beam carrying moving masses [15] Instability and resonance analysis of a beam subjected to moving mass loading via incremental harmonic balance method [16] On the parametric excitation of a Timoshenko beam due to intermittent passage of moving masses: Instability and resonance analysis [17] Nonlinear effects on parametric resonance of a beam subjected to periodic mass transition [18] Occurrence of parametric resonance in vibrations of rectangular plates resting on elastic foundation under passage of continuous series of moving masses [19] Instability inspection of parametric vibrating rectangular Mindlin plates lying on Winkler foundations under periodic loading of moving masses [20] A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear elastic systems

تحلیل ناپایداری دینامیکی ورق‌های مستطیلی نسبتاً ضخیم تحت تحریک جرم دوار مبتنی بر تئوری برشی مرتبه اول

احسان ترکان MSc

باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، ایران

مصطفی پیرمردیان PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، ایران

محمد هاشمیان PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، ایران

چکیده

در این مقاله، پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم حامل جرم دوار و واقع بر بستر ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور با در نظر گرفتن همه‌نرم‌های اینرسی جرم متحرک و استفاده از تئوری برشی مرتبه اول ورق، معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی سیستم استخراج شده است. سپس با به‌کارگیری روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی، معادلات پاره‌ای استخراج شده برای ورق نسبتاً ضخیم با تکیه‌گاه‌های ساده، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در اثر حرکت تناوبی جرم در طول مسیری دایره‌ای روی سطح ورق، معادلات حاکم معادلاتی با ضرایب متناوب هستند. در ادامه با حل این معادلات توسط روش نیمه‌تحلیلی هارمونیک بالانس نمودی، اثرات پارامترهایی شامل ضخامت نسبی ورق، شعاع مسیر حرکتی و ضرایب سفتی و استهلاک بستر ویسکوالاستیک بر ناپایداری سیستم مورد تحلیل قرار گرفته است. با مقایسه نتایج پیش‌بینی شده توسط روش هارمونیک بالانس نمودی در تعیین نواحی پایدار و ناپایدار با نتایج حل عددی، تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. نتایج حاکی از این است که با افزایش شعاع مسیر حرکتی، وسعت ناحیه ناپایدار در صفحه فرکانس-جرم بار دوار افزایش پیدا می‌کند. به علاوه، با افزایش سفتی و استهلاک بستر، سیستم به سمت پایداری بیشتر میل می‌کند.

کلیدواژه‌ها: ورق-جرم دوار، تئوری برشی مرتبه اول، پایداری دینامیکی، تشدید پارامتریک، روش هارمونیک بالانس نمودی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱/۱۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۸

نویسنده مسئول: pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

۱- مقدمه

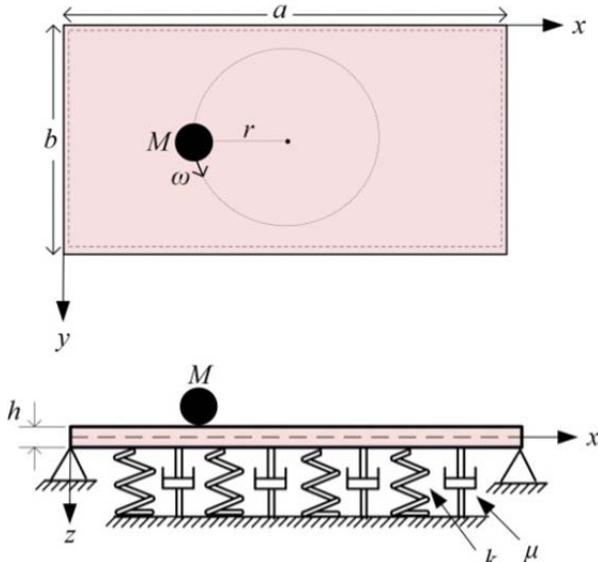
ورق‌ها از سازه‌های مهم در ساختارهای مکانیکی به شمار می‌آیند و در کاربردهای مهندسی، گاهی متحمل نیروهای داخل صفحه‌ای، برشی و متحرک می‌شوند. تئوری‌های مختلفی برای توصیف رفتار دینامیکی و استاتیکی ورق‌های الاستیک وجود دارد که بسته به هندسه و مواد تشکیل‌دهنده آنها، در مسائل مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. درک تفاوت بین این تئوری‌ها و استفاده از آنها در کاربردهای مرتبط، برای مهندسیین شاغل در زمینه سازه‌های ورق و همچنین محققین فعال در توسعه دانش ورق‌ها، بسیار قابل توجه است.

از اواسط قرن نوزدهم میلادی تاکنون، تحقیق و توسعه تئوری‌های ورق، همواره در حال انجام بوده است. تئوری ورق کیرشهف ساده‌ترین تئوری برای بیان رفتار ورق‌ها است. بر اساس فرضیات این تئوری، خطوط عمود بر سطح میانی ورق بعد از تغییر شکل دچار چرخش نمی‌شوند و همچنین تغییر طول و تغییر شکلی تجربه نمی‌کنند. اگرچه این تئوری نتایج دقیقی برای ورق‌های

نازک ارائه می‌دهد اما برای ورق‌های ضخیم به دلیل نادیده‌گرفتن تغییر شکل‌های برشی، نتایج مناسبی ارائه نمی‌دهد، مخصوصاً در مورد فرکانس‌های طبیعی که جواب‌ها اغراق‌آمیز هستند. با معرفی تئوری برشی مرتبه اول توسط ریزنر^[1] و میندلین^[2]، اثرات تغییر شکل برشی در فرمول‌بندی ورق در نظر گرفته شد. طبق این تئوری خطوط عمود بر سطح میانی دچار چرخش می‌شوند که این فرض منجر به ایجاد تنش برشی ثابت در راستای ضخامت می‌شود.

بررسی رفتار دینامیکی سازه ورق تحت تاثیر جرم متحرک موضوع مورد توجه محققین و مهندسیین در طی دهه‌های اخیر بوده و سعی شده است که از جنبه‌های مختلف مورد مطالعه قرار گیرد. در این مطالعات دسته‌ای از محققین با صرف‌نظر از اثرات اینرسی جرم متحرک، به تحلیل پاسخ دینامیکی سیستم مزبور در قالب نیروی متحرک پرداختند^[3, 4]. همچنین دینامیک غیرخطی سیستم ورق-جرم متحرک^[5, 6]، تاثیر ترم‌های اینرسی جرم متحرک بر پاسخ سیستم^[7]، فرضیات مختلف بر چگونگی حرکت جرم (منفرد، دسته‌ای و شتاب‌دار)^[8, 9] و اثرات تغییر شکل‌های برشی^[10, 11]، مورد مطالعه قرار گرفت. جیب‌دبان و داد^[10] برای اولین بار از تئوری برشی مرتبه اول برای بررسی پاسخ الاستودینامیکی ورق مستطیلی ضخیم تحت عبور جرم متحرک استفاده نمودند. اگرچه نتایج آنها محدود به استخراج تعدادی منحنی پاسخ زمانی برای سیستم مذکور بود، اما با این حال بیان‌گر اهمیت توجه به اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی ورق است. واتقی/امیری و همکاران^[11] مطالعه‌ای جامع بر پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی متفاوت تحت عبور جرم متحرک در طول مسیرهای مختلف انجام دادند. آنها معادلات دینامیکی حاکم را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول استخراج نمودند و با استفاده از روش بسط توابع ویژه به حل این معادلات پرداختند. ناطقی بابگی و همکاران^[3] حل دقیقی برای معادلات الاستیسیته سه‌بعدی حاکم بر ورق مستطیلی ضخیم حامل نیروی متحرک ارائه نمودند.

امروزه با توجه به ملاحظات اقتصادی سعی می‌شود در حد امکان وزن سازه‌های حامل اشیاء متحرک کم در نظر گرفته شود و همین امر موجب شده است تا امکان ایجاد ارتعاشات با دامنه بزرگ در این سیستم‌ها افزایش یافته و شناخت و کنترل آنها بیش از پیش اهمیت یابد. یکی از جنبه‌های مهم این موضوع، تعیین شرایطی است که سبب بروز ناپایداری در سازه حامل‌کننده جرم‌های متحرک می‌شود. در صورت عدم پیش‌گیری از ایجاد این شرایط، امکان بروز خسارات غیرقابل جبران وجود دارد. ناپایداری دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت تاثیر بارهای متحرک می‌تواند ناشی از انواع مختلف تشدید از جمله تشدیدهای داخلی^[12]، خارجی^[13] و پارامتریک^[14]^[18] باشد. در مقایسه با تشدید خارجی که در اثر هماهنگی فرکانس تحریک خارجی با فرکانس طبیعی سیستم اتفاق می‌افتد، تشدید داخلی می‌تواند در اثر تداخل مدهای غیرخطی یک سیستم در نسبت‌های فرکانسی خاصی رخ دهد. از سوی دیگر، تشدید پارامتریک معمولاً در سیستم‌های خود تحریک اتفاق می‌افتد که آهنگ ضربان داخلی آنها مضرپی از فرکانس‌های طبیعی سیستم است. نلسون و کونور^[14] برای اولین بار به مطالعه ناپایداری ناشی از وقوع تشدید پارامتریک در تیرهای اوپلر-برنولی تحت عبور سری متوالی از جرم‌های متحرک پرداختند. در سال‌های اخیر، پیرمردیان و همکاران وقوع تشدیدهای پارامتریک و خارجی در تیرهای اوپلربرنولی و تیموشنکو تحریک‌شده توسط جرم‌های متحرک پی‌درپی را تحقیق کردند^[15, 16]. آنها بر مبنای تئوری فلاکه مرزهای



شکل (۱) شمایی از ورق حامل جرم دوار

با در نظر گرفتن اینرسی دورانی، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کوپل حاکم بر حرکت عرضی ورق مستطیلی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت معادله (۱) بیان می‌شود [19].

$$\kappa Gh \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۱-الف)$$

$$+ \kappa w + \mu \frac{\partial w}{\partial t} = F(x, y, t)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \kappa Gh \left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۱-ب)$$

$$- \rho J \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \kappa Gh \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (۱-ج)$$

$$- \rho J \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0$$

که در رابطه (۱)، $w(x, y, t)$ جابجایی عرضی ورق، $\psi_x(x, y, t)$ و $\psi_y(x, y, t)$ به ترتیب تغییر شکل‌های برشی (چرخش خطوط عمود بر سطح میانی ورق) حول محورهای x و y هستند. $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ سفتی خمشی ورق و $G = E/2(1+\nu)$ مدول برشی ورق است. همچنین $J = h^3/12$

اینرسی دورانی ورق و K ضریب تصحیح برشی است. تابع بارگذاری $F(x, y, t)$ مرتبط با جرم متحرک در طول مسیر دلخواه روی سطح ورق به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$F(x, y, t) = M \left(g - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \delta(x - x_M(t)) \delta(y - y_M(t)) \quad (۲)$$

که در رابطه (۲)، g شتاب گرانشی و δ معرف تابع دلتای دیراک است. با در نظر گرفتن همه ترم‌های اینرسی ناشی از جرم متحرک، تابع بارگذاری را می‌توان به فرم رابطه زیر گسترش داد.

نواحی ناپایدار را در صفحه جرم- سرعت بارهای عبوری استخراج نمودند. پیرمردیان و کریم‌پور [17] مساله پایداری تیر حامل جرم‌های متحرک را به‌عنوان یک سیستم جرم متغیر و با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی بررسی کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد که حضور ترم‌های غیرخطی تأثیری بر مرز ناپایداری سیستم ندارد. با این حال به علت مشخصه وابستگی فرکانس به دامنه، پاسخ را در نزدیکی تشدید سیستم محدود می‌کند. ترکان و همکاران [18] شرایط وقوع تشدید پارامتریک در ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی مختلف تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک را جستجو کردند. در این مطالعه ورق بر اساس تئوری کیرشهف مدل‌سازی شد و مسیری مستقیم برای توالی جرم‌ها لحاظ شد. نتایج آنها حاکی از اهمیت شرایط مرزی ورق در پایداری این قبیل سیستم‌ها است.

آنچه در بالا مرور شد گزیده‌ای از مطالعات مرتبط با شرایط تشدید پارامتریک در تعامل بین سازه‌های الاستیک و جرم متحرک است. اگرچه سازه تیر به وفور به‌عنوان سازه بستر بارگذاری انتخاب شده است، با این وجود شرایط تشدید پارامتریک سازه ورق تنها در مرجع [18] مدنظر قرار گرفته است. همان‌طور که بیان شد، در مرجع مذکور مدل‌سازی سیستم بر اساس تئوری کیرشهف بوده، لذا خلاء استفاده از تئوری برشی مرتبه اول در زمینه بررسی شرایط تشدید پارامتریک سیستم ورق-جرم متحرک مشاهده می‌شود. بر این اساس در این مقاله پایداری دینامیکی ورق مستطیلی ضخیم حامل جرم دوار بر اساس تئوری برشی مرتبه اول صورت گرفته است. شرایط مرزی چهارگوشه ورق به صورت تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته شده است. مسیری دایره‌ای برای حرکت جرم روی سطح ورق انتخاب شده است؛ مسیری که دارای کاربردهای عملی فراوان در طراحی و ساخت سیستم‌های دوار همچون اره‌های مدور هدایت‌شونده در صنایع چوب، هارد دیسک کامپیوتر و دیسک‌های خودرو است. برای حل معادلات حاکم، روش گالریکین به همراه توابع شکل مثلثاتی استفاده شده و معادلات دیفرانسیل کوپل پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است.

در ادامه با استفاده از روش هارمونیک بالانس نومی دیاگرام‌های پایداری سیستم استخراج شده و اثرات ضخامت نسبی ورق، شعاع مسیر حرکتی و ضرایب استهلاک و سفتی بستر ویسکوالاستیک بر پایداری سیستم مورد تحلیل قرار گرفته است. استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، در نظر گرفتن مسیر دایره‌ای برای حرکت جرم و بررسی تأثیر استهلاک بستر از نوآوری‌های این تحقیق به شمار می‌آید و این تحقیق را نسبت به مرجع [18] متمایز می‌کند.

۲- معادلات حاکم

سازه در نظر گرفته شده در مساله مورد نظر شامل یک ورق مستطیلی‌شکل نسبتاً ضخیم به طول a ، عرض b ، ضخامت ثابت h ، مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν ، جرم واحد حجم ρ و واقع بر بستر ویسکوالاستیک با ضریب سفتی k و ضریب استهلاک μ است (شکل ۱). ورق، حامل جرم متحرک M است که در طول مسیر دایره‌ای حول مرکز آن با فرکانس ω دوران می‌کند. محوره‌های مختصات به نحوی انتخاب می‌شوند که صفحه xy منطبق بر سطح میانی ورق و محور z عمود بر آن باشد.

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \kappa G h \left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (۶-ب)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \kappa G h \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (۶-ج)$$

در این تحقیق، شرایط مرزی ورق به صورت تکیه‌گاه‌های ساده فرض شده است. با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، این شرایط مرزی منجر به اعمال شرایط ذیل بر روی لبه‌های ورق خواهد شد:

$$w = \psi_y = 0, \quad M_{xx} = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (۷)$$

برای $y = 0, b$

$$w = \psi_x = 0, \quad M_{yy} = -D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (۸)$$

۳- روند حل

۳-۱ روش گالرکین

پس از استخراج معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حرکت، برای حل آنها، ابتدا این معادلات با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. در این پژوهش، برای گسسته‌سازی از روش گالرکین استفاده شده است. برای این منظور ابتدا متغیرهای w ، ψ_x و ψ_y مطابق روابط (۹) تا (۱۱) به صورت مجموعه‌ای از توابع پایه بیان می‌شوند.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^w(x, y) w_i(t) \quad (۹)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^{\psi_x}(x, y) \psi_{xi}(t) \quad (۱۰)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^{\psi_y}(x, y) \psi_{yi}(t) \quad (۱۱)$$

در روابط اخیر، $w_i(t)$ ، $\psi_{xi}(t)$ و $\psi_{yi}(t)$ مختصه‌های تعمیم‌یافته وابسته به زمان هستند و همچنین $\phi_i^w(x, y)$ ، $\phi_i^{\psi_x}(x, y)$ و $\phi_i^{\psi_y}(x, y)$ توابع شکل ورق هستند و به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی مساله (روابط (۷) و (۸)) را ارضا کنند. این توابع شکل برای ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده به صورت روابط (۱۲) تا (۱۴) تعریف می‌شوند.

$$\phi_i^w(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۱۲)$$

$$\phi_i^{\psi_x}(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۱۳)$$

$$\phi_i^{\psi_y}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۱۴)$$

که در روابط اخیر، m و n مودهای ارتعاشی ورق هستند. با جایگذاری روابط (۹) تا (۱۱) در (۶)، سپس ضرب طرفین معادلات (۶-الف) در $\phi_j^w(x, y)$ ، (۶-ب) در $\phi_j^{\psi_x}(x, y)$ و (۶-ج) در $\phi_j^{\psi_y}(x, y)$ و در نهایت انتگرال‌گیری از معادلات حاصل روی سطح ورق، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شود.

$$F(x, y, t) = \left[Mg - M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \left(\frac{dx}{dt} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right] \delta(x - x_M(t)) \delta(y - y_M(t))$$

همان طور که ذکر شد، مسیری دایره‌ای برای حرکت جرم در نظر گرفته شده است. بنابراین مکان متغیر با زمان جرم روی سطح ورق را می‌توان با استفاده از رابطه (۴) تعریف نمود.

$$x_M(t) = \frac{a}{2} + r \cos(\omega t) \quad (۴)$$

$$y_M(t) = \frac{b}{2} + r \sin(\omega t)$$

که در رابطه اخیر، r شعاع مسیر حرکتی است. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۳)، تابع بارگذاری مرتبط با جرم دوار با به احتساب آوردن همه ترم‌های اینرسی، برابر خواهد شد با:

$$F(x, y, t) = \left[Mg - M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (r^2 \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)) \right. \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (r \omega \sin(\omega t)) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} (r \omega \cos(\omega t)) - \frac{\partial w}{\partial x} (r \omega^2 \cos(\omega t)) - \frac{\partial w}{\partial y} (r \omega^2 \sin(\omega t)) \right] \delta(x - x_M(t)) \delta(y - y_M(t))$$

با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۱)، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کوپل حاکم بر ارتعاش عرضی ورق مستطیلی ضخیم واقع بر بستر ویسکوالاستیک و حامل جرم دوار به صورت رابطه (۶) استخراج می‌شود.

$$\kappa G h \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} = \left[Mg - M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (r^2 \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (r \omega \sin(\omega t)) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} (r \omega \cos(\omega t)) - \frac{\partial w}{\partial x} (r \omega^2 \cos(\omega t)) \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial w}{\partial y} (r \omega^2 \sin(\omega t)) \right] \delta(x - x_M(t)) \delta(y - y_M(t)) \quad (۶-الف)$$

$$[K]_{ij}^{\psi_x \psi_y} = -D \left(\frac{1+\nu}{2} \int_A \phi_{i,xy}^{\psi_y}(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA \right)$$

$$[K]_{ij}^{\psi_y w} = -\kappa Gh \int_A \phi_{i,y}^{\psi_y}(x,y) \phi_j^{\psi_y}(x,y) dA$$

$$[K]_{ij}^{\psi_x \psi_x} = -D \left(\frac{1+\nu}{2} \int_A \phi_{i,xy}^{\psi_x}(x,y) \phi_j^{\psi_y}(x,y) dA \right)$$

$$[K]_{ij}^{\psi_y \psi_y} = -D \left(\int_A l \phi_{i,yy}^{\psi_y}(x,y) \phi_j^{\psi_y}(x,y) dA \right)$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \int_A \phi_{i,xx}^{\psi_y}(x,y) \phi_j^{\psi_y}(x,y) dA \right)$$

$$+ \kappa Gh \int_A \phi_i^{\psi_y}(x,y) \phi_j^{\psi_y}(x,y) dA$$

$$\{F\}_j^w = Mg \phi_j^w(x_M(t), y_M(t))$$

اینک، با در نظر گرفتن مود اول ارتعاشی ورق، معادلات دیفرانسیل معمولی کوپل حاکم بر ارتعاشات عرضی ورق مستطیلی حامل جرم دوار به صورت رابطه (۱۷) محاسبه خواهد شد.

(الف - ۱۷)

$$\left(\frac{\rho h a b}{4} + MP_1(t) \right) \ddot{w} + \left(\frac{\mu a b}{4} + 2M \frac{\pi r}{a} \omega \sin(\omega t) P_2(t) - 2M \frac{\pi r}{b} \omega \cos(\omega t) P_3(t) \right) w + \left(\kappa Gh \left(\frac{\pi^2 a^2 + \pi^2 b^2}{4ab} \right) - M \frac{\pi^2 r^2}{a^2} \omega^2 \sin^2(\omega t) P_1(t) - M \frac{\pi^2 r^2}{b^2} \omega^2 \cos^2(\omega t) P_1(t) - 2M \frac{\pi^2 r^2}{ab} \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) P_4(t) P_5(t) + M \frac{\pi r}{a} \omega^2 \cos(\omega t) P_2(t) + M \frac{\pi r}{b} \omega^2 \sin(\omega t) P_3(t) \right) w - \frac{\kappa Gh \pi b}{4} \psi_x - \frac{\kappa Gh \pi a}{4} \psi_y = Mg P_5(t)$$

(ب - ۱۷)

$$\frac{\rho J a b}{4} \ddot{\psi}_x + \left(\frac{\kappa G h a b}{4} + D \left(\frac{\pi^2 b}{4a} + \frac{1-\nu \pi^2 a}{2 \cdot 4b} \right) \right) \psi_x + D \left(\frac{1+\nu \pi^2}{2 \cdot 4} \right) \psi_y - \frac{\kappa G h \pi b}{4} w = 0$$

(ج - ۱۷)

$$\frac{\rho J a b}{4} \ddot{\psi}_y + \left(\frac{\kappa G h a b}{4} + D \left(\frac{\pi^2 a}{4b} + \frac{1-\nu \pi^2 b}{2 \cdot 4a} \right) \right) \psi_y + D \left(\frac{1+\nu \pi^2}{2 \cdot 4} \right) \psi_x - \frac{\kappa G h \pi a}{4} w = 0$$

که در رابطه اخیر داریم:

(۱۸)

$$P_1(t) = \cos^2 \left(\frac{\pi r}{a} \cos(\omega t) \right) \cos^2 \left(\frac{\pi r}{b} \sin(\omega t) \right)$$

$$\begin{bmatrix} [M]^{ww} & [M]^{w\psi_x} & [M]^{w\psi_y} \\ [M]^{\psi_x w} & [M]^{\psi_x \psi_x} & [M]^{\psi_x \psi_y} \\ [M]^{\psi_y w} & [M]^{\psi_y \psi_x} & [M]^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\psi}_x \\ \ddot{\psi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C]^{ww} & [C]^{w\psi_x} & [C]^{w\psi_y} \\ [C]^{\psi_x w} & [C]^{\psi_x \psi_x} & [C]^{\psi_x \psi_y} \\ [C]^{\psi_y w} & [C]^{\psi_y \psi_x} & [C]^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K]^{ww} & [K]^{w\psi_x} & [K]^{w\psi_y} \\ [K]^{\psi_x w} & [K]^{\psi_x \psi_x} & [K]^{\psi_x \psi_y} \\ [K]^{\psi_y w} & [K]^{\psi_y \psi_x} & [K]^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}^w \\ \{F\}^{\psi_x} \\ \{F\}^{\psi_y} \end{Bmatrix}$$

که ماتریس‌های غیر صفر به نحو زیر بیان می‌شوند:

$$[M]_{ij}^{ww} = \rho h \int_A \phi_i^w(x,y) \phi_j^w(x,y) dA$$

$$+ M \phi_i^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t))$$

$$[M]_{ij}^{\psi_x \psi_x} = \rho J \int_A \phi_i^{\psi_x}(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA$$

$$[M]_{ij}^{\psi_y \psi_y} = \rho J \int_A \phi_i^{\psi_y}(x,y) \phi_j^{\psi_y}(x,y) dA$$

$$[C]_{ij}^{ww}$$

$$= \mu \int_A \phi_i^w(x,y) \phi_j^w(x,y) dA$$

$$- 2Mr \omega \sin(\omega t) \phi_{i,x}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t)) + 2Mr \omega \cos(\omega t) \phi_{i,y}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t))$$

$$[K]_{ij}^{ww} = -\kappa Gh \left(\int_A \phi_{i,xx}^w(x,y) \phi_j^w(x,y) dA \right)$$

$$+ \int_A \phi_{i,yy}^w(x,y) \phi_j^w(x,y) dA \right)$$

$$+ k \int_A \phi_i^w(x,y) \phi_j^w(x,y) dA$$

$$+ Mr^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \phi_{i,xx}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t)) + Mr^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \phi_{i,yy}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t)) - 2Mr^2 \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \phi_{i,xy}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t))$$

$$- Mr \omega^2 \cos(\omega t) \phi_{i,x}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t)) - Mr \omega^2 \sin(\omega t) \phi_{i,y}^w(x_M(t), y_M(t)) \phi_j^w(x_M(t), y_M(t))$$

$$[K]_{ij}^{w\psi_x} = \kappa Gh \int_A \phi_{i,x}^{\psi_x}(x,y) \phi_j^w(x,y) dA$$

$$[K]_{ij}^{w\psi_y} = \kappa Gh \int_A \phi_{i,y}^{\psi_y}(x,y) \phi_j^w(x,y) dA$$

$$[K]_{ij}^{\psi_x w} = -\kappa Gh \int_A \phi_{i,x}^w(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA$$

(۱۶)

$$[K]_{ij}^{\psi_x \psi_x} = -D \left(\int_A \phi_{i,xx}^{\psi_x}(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA \right)$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \int_A \phi_{i,yy}^{\psi_x}(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA \right)$$

$$+ \kappa Gh \int_A \phi_i^{\psi_x}(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA$$

$$+ \kappa Gh \int_A \phi_i^{\psi_x}(x,y) \phi_j^{\psi_x}(x,y) dA$$

$$\begin{aligned}
 & -4\alpha\Omega^2(\pi^2\zeta^2\sin^2(\tau)P_1(\tau) + \pi^2\eta^2\cos^2(\tau)P_1(\tau) \\
 & + 2\pi^2\zeta\eta\omega^2\sin(\tau)\cos(\tau)P_4(\tau)P_5(\tau) \\
 & - \pi\zeta\cos(\tau)P_2(\tau) \\
 & - \pi\eta\sin(\tau)P_3(\tau)]W - \lambda^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\pi r_a^2 \left(\sqrt[4]{1/a_r} + \sqrt[4]{a_r^7} \right)^2} \Psi_x
 \end{aligned}$$

$$-\lambda^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\pi r_a^2 \left(\sqrt[4]{1/a_r^3} + \sqrt[4]{a_r^5} \right)^2} \Psi_y = 4\alpha g^* P_5(\tau)$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 \Psi_x'' + \left(\lambda^2 \frac{144(1-\nu^2)}{\pi^2 r_a^2 (r_a + a_r r_b)^2} + \frac{12}{\pi^2 (r_a + a_r r_b)^2} \right. \\
 \left. + \frac{6a_r^2(1-\nu)}{\pi^2 (r_a + a_r r_b)^2} \right) \Psi_x \\
 + \frac{6a_r(1+\nu)}{\pi^2 (r_a + a_r r_b)^2} \Psi_y
 \end{aligned}$$

$$-\lambda^2 \frac{144(1-\nu^2)}{\pi \sqrt{a_r} (r_a^2 + r_b^2)^2} W = 0 \quad (ب-۲۰)$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 \Psi_y'' + \left(\lambda^2 \frac{144(1-\nu^2)}{\pi^2 r_a^2 (r_a + a_r r_b)^2} + \frac{12r_a^2}{\pi^2 (r_a + a_r r_b)^2} \right. \\
 \left. + \frac{6(1-\nu)}{\pi^2 (r_a + a_r r_b)^2} \right) \Psi_y \\
 + \frac{6a_r(1+\nu)}{\pi^2 (r_a + a_r r_b)^2} \Psi_x
 \end{aligned}$$

$$-\lambda^2 \frac{144\sqrt{a_r}(1-\nu^2)}{\pi (r_a^2 + r_b^2)^2} W = 0 \quad (ج-۲۰)$$

که بالانویس پرایم بیانگر مشتق نسبت به زمان بی بعد τ است. همچنین در رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned}
 P_1(\tau) &= \cos^2(\pi\zeta\cos(\tau))\cos^2(\pi\eta\sin(\tau)) \\
 P_2(\tau) &= \cos(\pi\zeta\cos(\tau))\sin(\pi\zeta\cos(\tau))\cos^2(\pi\eta\sin(\tau)) \\
 P_3(\tau) &= \cos^2(\pi\zeta\cos(\tau))\cos(\pi\eta\sin(\tau))\sin(\pi\eta\sin(\tau)) \\
 P_4(\tau) &= \sin(\pi\zeta\cos(\tau))\sin(\pi\eta\sin(\tau)) \\
 P_5(\tau) &= \cos(\pi\zeta\cos(\tau))\cos(\pi\eta\sin(\tau))
 \end{aligned}$$

از آنجایی که پایداری یا ناپایداری به عنوان خاصیت ذاتی سیستم مورد تحقیق است، با حذف عبارت سمت راست رابطه (۲۰-الف)، معادله همگن متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned}
 \Omega^2(1 + 4\alpha P_1(\tau))W'' \\
 + \Omega^2(\mu^* \\
 + 8\alpha\pi\zeta\sin(\tau)P_2(\tau) - 8\alpha\pi\eta\cos(\tau)P_3(\tau))W' \\
 + [\lambda^2 12(1-\nu^2)/(r_a^2 + r_b^2) \\
 + k^* \\
 - 4\alpha\Omega^2(\pi^2\zeta^2\sin^2(\tau)P_1(\tau) + 2\pi^2\eta^2\cos^2(\tau)P_1(\tau) \\
 + 2\pi^2\zeta\eta\omega^2\sin(\tau)\cos(\tau)P_4(\tau)P_5(\tau) \\
 - \pi\zeta\cos(\tau)P_2(\tau) \\
 - \pi\eta\sin(\tau)P_3(\tau)]W
 \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$-\lambda^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\pi r_a^2 \left(\sqrt[4]{1/a_r} + \sqrt[4]{a_r^7} \right)^2} \Psi_x$$

$$-\lambda^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\pi r_a^2 \left(\sqrt[4]{1/a_r^3} + \sqrt[4]{a_r^5} \right)^2} \Psi_y = 0$$

روابط (۲۲)، (۲۰-ب) و (۲۰-ج) سه معادله کوپلی هستند که در ادامه توسط روش هارمونیک بالانس نمودی مورد تحلیل قرار

$$\begin{aligned}
 P_2(t) &= \cos\left(\frac{\pi r}{a}\cos(\omega t)\right)\sin\left(\frac{\pi r}{a}\cos(\omega t)\right)\cos^2\left(\frac{\pi r}{b}\sin(\omega t)\right) \\
 P_3(t) &= \cos^2\left(\frac{\pi r}{a}\cos(\omega t)\right)\cos\left(\frac{\pi r}{b}\sin(\omega t)\right)\sin\left(\frac{\pi r}{b}\sin(\omega t)\right) \\
 P_4(t) &= \sin\left(\frac{\pi r}{a}\cos(\omega t)\right)\sin\left(\frac{\pi r}{b}\sin(\omega t)\right) \\
 P_5(t) &= \cos\left(\frac{\pi r}{a}\cos(\omega t)\right)\cos\left(\frac{\pi r}{b}\sin(\omega t)\right)
 \end{aligned}$$

به منظور عمومیت بخشیدن به معادلات و تحلیل آنها، پارامترهای بی بعد زیر معرفی می شوند:

$$\alpha \triangleq \frac{M}{\rho h a b}$$

$$\Omega \triangleq \frac{\omega a^2 b^2}{\pi^2 (a^2 + b^2)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

$$\lambda \triangleq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\kappa G}{E}}$$

$$\tau \triangleq \omega t$$

$$W \triangleq \frac{w}{\sqrt{a b}}$$

$$k^* \triangleq \frac{\kappa a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}$$

$$\Psi_x \triangleq \psi_x$$

$$\Psi_y \triangleq \psi_y$$

$$\mu^* \triangleq \frac{\mu a^2 b^2}{\pi^2 \sqrt{\rho h D} (a^2 + b^2)}$$

$$a_r \triangleq \frac{a}{b}$$

$$r_a \triangleq \frac{h}{a}$$

$$r_b \triangleq \frac{h}{b} \quad (۱۹)$$

$$g^* \triangleq \frac{g \rho h a^4 b^4}{\pi^4 D \sqrt{a b} (a^2 + b^2)^2}$$

$$\zeta \triangleq \frac{r}{a}$$

$$\eta \triangleq \frac{r}{b}$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد تعریف شده و قاعده مشتق زنجیره ای، معادلات حاکم در فرم بی بعد به صورت رابطه (۲۰) به دست می آیند.

(۲۰-الف)

$$\begin{aligned}
 \Omega^2(1 + 4\alpha P_1(\tau))W'' \\
 + (\Omega\mu^* \\
 + 8\alpha\Omega^2\pi\zeta\sin(\tau)P_2(\tau) - 8\alpha\Omega^2\pi\eta\cos(\tau)P_3(\tau))W' \\
 + [\lambda^2 12(1-\nu^2)/(r_a^2 + r_b^2) + k^*
 \end{aligned}$$

$$T_{odd} = [\cos(\tau), \cos(3\tau), \cos(5\tau) \dots, \sin(\tau), \sin(3\tau), \dots]$$

$$a_{i,odd} = [a_{i1}, a_{i3}, a_{i5}, \dots, b_{i1}, b_{i3}, \dots]^T$$

$$\Delta A_{odd} = [\Delta a_{i1}, \Delta a_{i3}, \Delta a_{i5}, \dots, \Delta b_{i1}, \Delta b_{i3}, \dots]^T$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان رابطه (۲۸) را تعریف نمود.

$$Q^* = YA, \quad \Delta Q^* = Y\Delta A \quad (۲۸)$$

که در رابطه (۲۸)، $Y = \text{diag}(T)$ و همچنین ضرایب ΔA و A عبارتند از:

$$A = [a_1^T, a_2^T, a_3^T]^T, \quad \Delta A = [\Delta a_1^T, \Delta a_2^T, \Delta a_3^T]^T \quad (۲۹)$$

با اعمال روش گالرکین به رابطه (۲۹) برای یک دوره تناوب نتیجه می‌شود:

$$(۳۰)$$

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Delta Q)^T \left[\Omega^{*2} (\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) \Delta Q'' \right. \\ \left. + (\Omega^* \tilde{C}_1 + 8\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{C}_2(\tau)) \Delta Q' \right. \\ \left. + (\tilde{K}_1 + 4\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{K}_2(\tau)) \Delta Q \right] d\tau \\ = \int_0^{2\pi} \delta(\Delta Q)^T \left\{ r - [\Omega^{*2} (4\tilde{M}_2(\tau) Q^{*''} + 8\tilde{C}_2(\tau) Q^{*'} \right. \\ \left. + 4\tilde{K}_2(\tau) Q^*] \Delta \alpha \right. \\ \left. - [2\Omega^* \left((\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) Q^{*''} \right. \right. \\ \left. \left. + (\tilde{C}_1/2\Omega^* + 8\alpha^* \tilde{C}_1(\tau)) Q^{*'} \right. \right. \\ \left. \left. + 4\alpha^* \tilde{K}_2(\tau) Q^* \right) \Delta \Omega \right\} d\tau$$

با جایگذاری رابطه (۲۸) در (۳۰)، مجموعه معادلات خطی (۳۱) بر حسب پارامترهای ΔA ، $\Delta \alpha$ و $\Delta \Omega$ به دست می‌آیند.

$$S_{\Delta A} \Delta A + S_{\Delta \alpha} \Delta \alpha + S_{\Delta \Omega} \Delta \Omega = R \quad (۳۱)$$

که در رابطه (۳۱)، ماتریس‌های ضرایب و بردار R عبارتند از:

$$S_{\Delta A} = \int_0^{2\pi} Y^T \left[\Omega^{*2} (\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) Y'' \right. \\ \left. + (\Omega^* \tilde{C}_1 + 8\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{C}_2(\tau)) Y' \right. \\ \left. + (\tilde{K}_1 \right. \\ \left. + 4\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{K}_2(\tau)) Y \right] d\tau \\ S_{\Delta \alpha} = \int_0^{2\pi} Y^T [\Omega^{*2} (4\tilde{M}_2(\tau) Y'' + 8\tilde{C}_2(\tau) Y' \\ + 4\tilde{K}_2(\tau) Y)] A d\tau \\ S_{\Delta \Omega} = \int_0^{2\pi} Y^T \left[2\Omega^* \left((\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) Y'' \right. \right. \\ \left. \left. + (\tilde{C}_1/2\Omega^* + 8\alpha^* \tilde{C}_1(\tau)) Y' \right. \right. \\ \left. \left. + 4\alpha^* \tilde{K}_2(\tau) Y \right) \right] A d\tau \\ R = - \int_0^{\pi} Y^T \left[\Omega^{*2} (\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) Y'' \right. \\ \left. + (\Omega^* \tilde{C}_1 + 8\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{C}_2(\tau)) Y' \right. \\ \left. + (\tilde{K}_1 \right. \\ \left. + 4\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{K}_2(\tau)) Y \right] A d\tau$$

$$(۳۲)$$

می‌گیرند.

۳-۲ روش هارمونیک بالانس نموی

روش هارمونیک بالانس نموی روشی نیمه‌تحلیلی، کارآمد و سازگار با اجرای کامپیوتری است که در ابتدا توسط لائو و همکاران [20] ارائه شد و بعد از آن توسعه پیدا کرد و با موفقیت به سیستم‌های ارتعاشی خطی و غیرخطی متناوب اعمال شد. در این روش پاسخ متناوب سیستم دینامیکی با سری‌های فوریه محدودی جایگزین می‌شود و متعاقباً معادلات حاکم به مجموعه‌ای از معادلات جبری نموی تبدیل می‌شوند. سپس روش گالرکین به این معادلات اعمال شده و در نهایت با استفاده از الگوریتمی بازگشتی حل می‌شوند. گام اول روش هارمونیک بالانس نموی، روند نمو است. اگر (α^*, Ω^*) به عنوان نقطه اولیه واقع بر مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار متناظر با پاسخ پریودیک $Q^*(\tau) = [W^*, \Psi_x^*, \Psi_y^*]^T$ باشد، نقطه مجاور را می‌توان با اضافه کردن نمو مرتبط به صورت رابطه (۲۳) در نظر گرفت.

$$Q(\tau) = Q^*(\tau) + \Delta Q(\tau), \\ \alpha = \alpha^* + \Delta \alpha, \\ \Omega = \Omega^* + \Delta \Omega \quad (۲۳)$$

که در رابطه اخیر، $\Delta \alpha$ ، $\Delta \Omega$ و $\Delta Q(\tau)$ نمو‌های کوچک هستند. با جایگذاری رابطه (۲۳) در روابط (۲۲)، (۲۰-ب) و (۲۰-ج) و سپس حذف ترم‌های غیرخطی نمو‌های کوچک، معادله نموی خطی در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۲۴) حاصل می‌شود.

$$(۲۴)$$

$$\Omega^{*2} (\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) \Delta Q'' \\ + (\Omega^* \tilde{C}_1 + 8\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{C}_2(\tau)) \Delta Q' \\ + (\tilde{K}_1 + 4\alpha^* \Omega^{*2} \tilde{K}_2(\tau)) \Delta Q \\ = r - [\Omega^{*2} (4\tilde{M}_2(\tau) Q^{*''} \\ + 8\tilde{C}_2(\tau) Q^{*'} + 4\tilde{K}_2(\tau) Q^*) \Delta \alpha \\ - [2\Omega^* \left((\tilde{M}_1 + 4\alpha^* \tilde{M}_2(\tau)) Q^{*''} \right. \\ \left. + (\tilde{C}_1/2\Omega^* + 8\alpha^* \tilde{C}_1(\tau)) Q^{*'} \right. \\ \left. + 4\alpha^* \tilde{K}_2(\tau) Q^* \right) \Delta \Omega]$$

که در رابطه (۲۴)، بردار باقی‌مانده است و هنگامی که $Q^*(\tau)$ به مقدار دقیق خود نزدیک می‌شود، اندازه‌ی آن به سمت صفر میل می‌کند. مقدار r و همچنین ماتریس‌های \tilde{M}_1 ، $\tilde{M}_2(\tau)$ ، \tilde{C}_1 ، $\tilde{C}_2(\tau)$ ، \tilde{K}_1 و $\tilde{K}_2(\tau)$ در پیوست ارائه شده است.

اینک با گسترش Q^* و ΔQ^* به سری‌های فوریه محدود و اعمال روش گالرکین، پاسخ‌های متناوب معادلات حاکم به دست آورده می‌شوند. پاسخ‌های متناوب با دوره تناوب $2T$ را می‌توان به صورت رابطه (۲۵) بیان کرد.

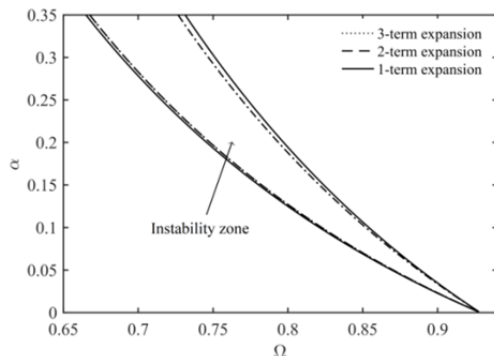
$$Q_i^*(\tau) = \sum_{p=1,3,5,\dots} [a_{ip} \cos(p\tau) + b_{ip} \sin(p\tau)], \quad i \\ = 1,2,3 \\ \Delta Q_i^*(\tau) = \sum_{p=1,3,5,\dots} [\Delta a_{ip} \cos(p\tau) \\ + \Delta b_{ip} \sin(p\tau)], \quad i = 1,2,3 \quad (۲۵)$$

به منظور اختصارنویسی، توابع $Q_i^*(\tau)$ و $\Delta Q_i^*(\tau)$ را می‌توان به فرم رابطه (۲۶) نوشت.

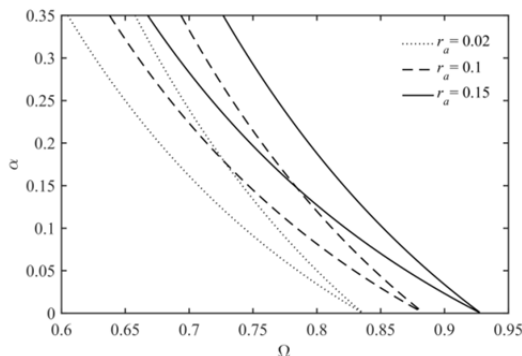
$$Q_i^*(\tau) = T_{odd} a_{i,odd}, \quad \Delta Q_i^*(\tau) = T_{odd} \Delta a_{i,odd} \quad (۲۶)$$

که در رابطه (۲۶)، ضرایب عبارتند از:

شکل‌های برشی، ناچیز فرض می‌شوند. از نمودار ۲ می‌توان استنباط نمود که فرکانس‌های تشدید پارامتریک متعلق به ورق ضخیم ($r_a = 0.15$) بالاتر از فرکانس‌های تشدید پارامتریک ورق نازک ($r_a = 0.02$) است؛ بدین معنا که از نقطه نظر دینامیکی، ورق ضخیم حامل بار دوار پایدارتر از ورق نازک است. علت این است که با توجه به رابطه‌ی مستقیم فرکانس طبیعی ورق با ضخامت آن، با کاهش ضخامت، فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد و به دنبال آن از سفتی ورق کاسته می‌شود که نتیجه‌ی آن کاهش پایداری سیستم است.



نمودار ۱ دیاگرام پایداری ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم حامل جرم دوار: $a_r = 1$, $\mu^* = 0$, $k^* = 0$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0.3$, $\zeta = \eta = 0.15$, $r_a = r_b = 0.15$



نمودار ۲ تاثیر ضخامت نسبی بر دیاگرام پایداری: $a_r = 1$, $\zeta = \eta = 0.15$, $\mu^* = 0$, $k^* = 0$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0.3$

پارامترهای شعاع نسبی (ζ و η)، متغیرهای دیگری هستند که تاثیر آنها بر نواحی پارامتریک بررسی می‌شوند. این تاثیر در نمودار ۳ ارائه شده است. می‌توان مشاهده نمود که افزایش شعاع مسیر حرکتی جرم تاثیر بر مبدأ ناحیه ناپایدار نداشته بلکه وسعت آن در صفحه پارامترها افزایش یافته است و در نتیجه ارتعاشات ورق به ازای مقادیر وسیع‌تری از فرکانس جرم دوار ناپایدار خواهد شد. دلیل افزایش وسعت ناحیه ناپایدار این است که مطابق رابطه (۱۷-الف)، شعاع مسیر حرکتی جرم (r) ضریبی از پارامترهای متناوب با زمان (پارامترهای متعلق به بارگذاری جرم) است و لذا تغییر در آن فقط منجر به تغییر در وسعت ناحیه ناپایدار می‌شود و بر مبدأ این ناحیه تاثیرگذار نیست. این در حالی است که پارامترهایی که به عنوان ضریب ثابت با زمان در معادلات ظاهر شده‌اند (مانند ضخامت نسبی ورق) بر مبدأ ناحیه ناپایدار تاثیرگذار هستند.

نمودار ۴ تاثیر سفتی بستر ویسکوالاستیک را بر نواحی پارامتریک نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش سفتی

معادله (۳۱) معادله‌ای است که برای به دست آوردن مرزهای ناپایداری در صفحه پارامترهای جرم دوار برای ترم‌های A ، α^* و Ω^* استفاده می‌شود. از آنجایی که تعداد متغیرهای مجهول از تعداد معادلات دوتا بیشتر است، برای برابری تعداد معادلات و مجهولات، بدون کاهش کلیت حل مساله، یک المان A برابر یک و نمو متناظر آن در ΔA برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. با برابر شدن تعداد معادلات و مجهولات می‌توان آن را با استفاده از الگوریتمی بازگشتی حل کرد. جزئیات این الگوریتم در مرجع [18] ارائه شده است. نکته قابل ذکر این است که رابطه (۳۱) شامل عبارت‌های متغیر با زمان $P_1(\tau), \dots, P_5(\tau)$ است که انتگرال‌گیری از آنها به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. بنابراین در روش هارمونیک بالانس نموی، به منظور اعمال روش گالربین و انجام انتگرال‌های مربوطه، لازم است که این توابع با توابع بسط بیان شده در رابطه (۳۳) جایگزین شوند.

$$\begin{aligned} \cos(\pi\zeta \cos(\tau)) &= J_0(\pi\zeta) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_{2i}(\pi\zeta) \cos(2i\tau) \\ \cos(\pi\eta \sin(\tau)) &= J_0(\pi\eta) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\infty} J_{2i}(\pi\eta) \cos(2i\tau) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi\zeta \cos(\tau)) &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i J_{2i+1}(\pi\zeta) \cos((2i+1)\tau) \\ \sin(\pi\eta \sin(\tau)) &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} J_{2i+1}(\pi\eta) \sin((2i+1)\tau) \end{aligned}$$

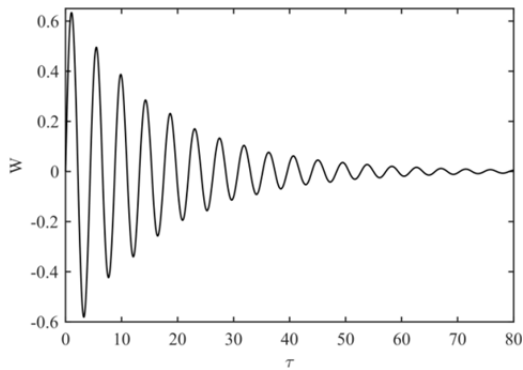
که در روابط اخیر، $n = 0, 1, 2, \dots$ توابع بسط نوع n هستند.

۴- نتایج و بحث

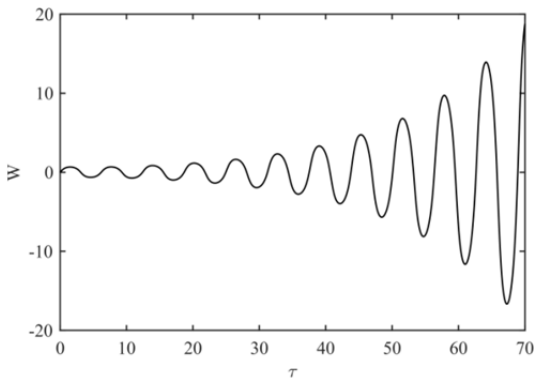
در این بخش، اثرات ضخامت نسبی ورق، شعاع‌های نسبی مسیر و سفتی و استهلاک بستر ویسکوالاستیک بر پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم حامل جرم دوار مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودار ۱ منحنی‌های متناظر با پاسخ‌های متناوب با دوره تناوب $2T$ را در صفحه فرکانس-جرم بار دوار نمایش می‌دهد. ناحیه محصور بین دو منحنی، ناحیه ناپایدار و نواحی دیگر پایدار هستند. ناحیه ناپایدار در کاربردهای عملی دارای اهمیت فراوان است چراکه برای آن دسته از پارامترهای جرم و فرکانس بار دوار متعلق به این ناحیه، دامنه ارتعاشات ورق با گذشت زمان به طور پیوسته افزایش می‌یابد و موجب ایجاد پیامدهای ناخواسته در سازه تحت بارگذاری می‌شود. علاوه بر این، در نمودار ۱ تاثیر تعداد جملات هارمونیک رابطه (۳۳) بر منحنی‌های گذار بررسی شده است. می‌توان ملاحظه نمود که نتایج حاصل از دو و سه جمله هارمونیک همگرا شده است. بنابراین به منظور حصول نتایج دقیق در تحلیل‌های آتی، سه جمله هارمونیک از رابطه (۳۳) در نظر گرفته می‌شود.

در نمودار ۲ تاثیر ضخامت نسبی ورق (نسبت ضخامت به طول و عرض) بر ناحیه ناپایدار بررسی شده است. در واقع اگر نسبت ضخامت ورق به یکی از ابعاد آن کوچک‌تر یا مساوی ۰/۰۲ باشد، ورق به عنوان یک سازه نازک به حساب می‌آید [19] و اثرات تغییر

به منظور بررسی صحت نتایج اخیر، با حل عددی معادلات حاکم، در نمودارهای ۶ و ۷ تغییرات زمانی دامنه ارتعاشات سیستم ورق-جرم دوار به ازای نقاط متعلق به نواحی مختلف نمودار ۵ ترسیم شده است. اولین نقطه ($\Omega = 0.83, \alpha = 0.3$) مجاور مرز از ناحیه‌ی پایدار انتخاب شده و پاسخ زمانی مرتبط با آن در نمودار ۶ ترسیم شده است. می‌توان ملاحظه نمود که به خاطر وجود جمله استهلاک، دامنه پاسخ سیستم با گذشت زمان کاهش یافته و سیستم دارای پایداری مجانبی است. از سوی دیگر، پاسخ زمانی مرتبط با نقطه ($\Omega = 0.9, \alpha = 0.3$) برگرفته از ناحیه ناپایدار در همسایگی مرز، در نمودار ۷ نمایش داده شده است. مطابق این نمودار علی‌رغم وجود جمله استهلاک، دامنه نوسانات عرضی ورق برای پارامترهای جرم و فرکانس انتخابی به صورت نوسانی افزایش یافته و در نتیجه ورق رفتاری ناپایدار را تجربه می‌کند. در واقع این بدین خاطر است که به ازای پارامترهای انتخابی، انتقال انرژی از این عامل نیرویی به ارتعاش ورق با نرخ انجام می‌گیرد که منجر به انباشت انرژی در سیستم و نهایتاً رشد بی‌رویه دامنه ارتعاش ورق با گذشت زمان می‌شود. همان طور که انتظار می‌رفت، تطابق خوبی بین نتایج عددی و نتایج پیش‌بینی‌شده توسط روش هارمونیک بالانس نمودی وجود دارد.



نمودار ۶) پاسخ زمانی ورق حامل جرم دوار برای نقطه ($\Omega = 0.83, \alpha = 0.3$) متعلق به ناحیه پایدار

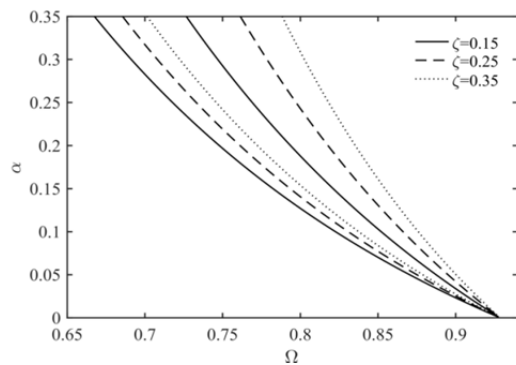


نمودار ۷) پاسخ زمانی ورق حامل جرم دوار برای نقطه ($\Omega = 0.9, \alpha = 0.3$) متعلق به ناحیه ناپایدار

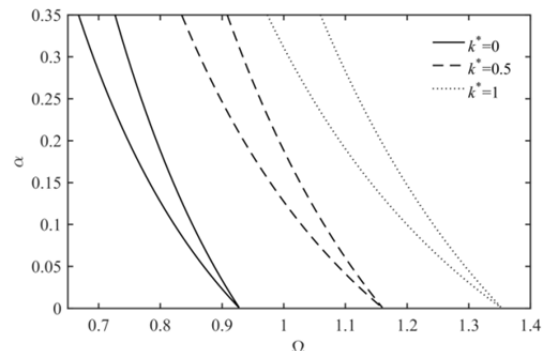
۵- اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی معادلات مستخرج و روش به کار گرفته شده، تعدادی از فرکانس‌های مرتبط با تشدید خارجی سیستم محاسبه و با نتایج واتقی/امیری و همکاران [11] مقایسه می‌شود. در سیستم‌های متغیر با زمان علاوه بر تشدید پارامتریک، شرایط تشدید خارجی را نیز می‌توان بررسی کرد. در واقع عبارت ناهمگن

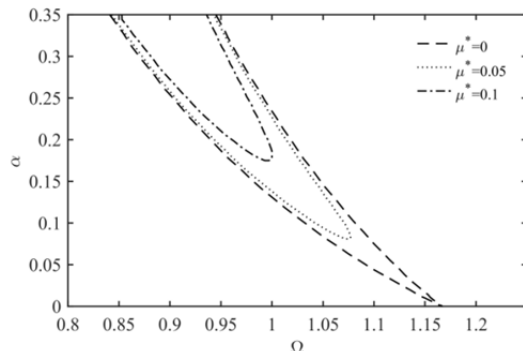
بستر، ناحیه ناپایدار به فرکانس‌های بی‌بعد بالاتری انتقال می‌یابد و در نتیجه سیستم دینامیکی پایدارتر می‌شود. همان طور که در معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر سیستم (معادلات (۱۷)) واضح است، ترم سفتی بستر الاستیک در کنار ترم مربوط به فرکانس طبیعی ورق (به عنوان ضرایب سفتی) ظاهر می‌شود، لذا افزایش سفتی بستر منجر به افزایش فرکانس طبیعی ورق شده و سفتی ورق افزایش می‌یابد و نهایتاً سیستم پایدارتر خواهد شد. در نمودار ۵ تاثیر ضریب استهلاک بستر ویسکوالاستیک بر ناحیه ناپایدار صفحه پارامترها مطالعه شده است. از این شکل استنباط می‌شود که استهلاک بستر اثر مثبت بر توسعه نواحی پایدار داشته است؛ به طوری که با افزایش مقدار آن، ناحیه ناپایدار از محور Ω جدا شده و به سمت بالا انتقال می‌یابد و در عین حال این ناحیه لاغرتر نیز می‌شود. بنابراین افزایش استهلاک بستر، منجر به پایدارتر شدن سیستم می‌شود.



نمودار ۳) تاثیر شعاع‌های نسبی بر دیاگرام پایداری؛ $\tau_a = \tau_b = 0.15, a_r = 1, \mu^* = 0, k^* = 0, \kappa = 5/6, \nu = 0.3$



نمودار ۴) تاثیر سفتی بستر بر دیاگرام پایداری؛ $\tau_a = \tau_b = 0.15, a_r = 1, \mu^* = 0, \kappa = 5/6, \nu = 0.3, \zeta = \eta = 0.15$



نمودار ۵) تاثیر استهلاک بستر بر دیاگرام پایداری؛ $\tau_a = \tau_b = 0.15, a_r = 1, k^* = 0.5, \kappa = 5/6, \nu = 0.3, \zeta = \eta = 0.15$

ناپایدار در صفحه پارامترها ظاهر می‌شود که عدم توجه به آن در طراحی مهندسی منجر به شکست طرح خواهد شد.

- با کاهش ضخامت نسبی ورق، ناحیه ناپایدار به فرکانس‌های پایین‌تری از جرم دوار منتقل می‌شود.
- افزایش شعاع مسیر حرکتی اثر منفی بر توسعه نواحی پایدار دارد و با افزایش این مقدار سیستم به سمت ناپایداری بیشتر میل می‌کند.
- با افزایش سفتی و استهلاک بستر ویسکوالاستیک، وسعت نواحی پایدار افزایش می‌یابد. از این رو با انتخاب مقداری مناسب برای سفتی و استهلاک بستر در کاربردهای عملی، می‌توان تا حدودی از رفتارهای نامناسب سیستم پیش‌گیری کرد.
- نتایج تحلیل‌های عددی در تطابق با نتایج پیش‌بینی‌شده توسط روش هارمونیک بالانس نمودی است.

تشکر و قدردانی: نویسندگان بر خود لازم می‌دانند مراتب تشکر صمیمانه خود را از تمام کسانی که در انجام و ارتقاء کیفی این پژوهش ما را یاری دادند، اعلام نمایند.

تاییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده و همچنین برای بررسی و چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. محتوای علمی و ادبی مقاله حاضر مستخرج از فعالیت علمی نویسندگان است.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که این اثر حاصل پژوهشی مستقل است و هیچ گونه تضاد منافی با اشخاص یا سازمان‌های دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: احسان ترکان (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ مصطفی پیرمادیان (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/روش‌شناس/پژوهشگر اصلی (۴۰٪)؛ محمد هاشمیان (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی (۱۰٪)

منابع مالی: هزینه‌های این پژوهش به صورت شخصی تأمین شده است.

۷- پیوست

مقادیر ماتریس‌های ارائه شده در رابطه (۲۴) عبارتند از:

$$r = -\Omega^2 (\bar{M}_1 + 4\alpha^* \bar{M}_2(\tau)) Q^{*''} - (\Omega^* \bar{C}_1 + 8\alpha^* \Omega^{*2} \bar{C}_2(\tau)) Q^{*'} - (\bar{K}_1 + 4\alpha^* \Omega^{*2} \bar{K}_2(\tau)) Q^*$$

$$\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_2 = \begin{bmatrix} P_1(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_2(\tau) = \begin{bmatrix} \pi\zeta \sin(\tau)P_2(\tau) - \pi\eta \cos(\tau)P_3(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_2(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در روابط اخیر، مولفه‌های ماتریس‌های \bar{K}_1 و $\bar{K}_2(\tau)$ برابر هستند با:

$$k_{11} = \frac{\lambda^2 12(1-v^2)}{(r_a^2 + r_b^2)} + k^*$$

$$k_{12} = -\lambda^2 \frac{12(1-v^2)}{\pi r_a^2 \left(\sqrt[4]{1/a_r} + \sqrt[4]{a_r^7} \right)^2}$$

$$k_{13} = -\lambda^2 \frac{12(1-v^2)}{\pi r_a^2 \left(\sqrt[4]{1/a_r^3} + \sqrt[4]{a_r^5} \right)^2}$$

رابطه (۲۰- الف) شامل ترم‌های تحریک با فرکانس‌های مختلف است. هنگامی که این فرکانس‌ها با فرکانس معادله همگن هماهنگ شوند، شرایط تشدید خارجی در سیستم بوجود می‌آید. روش هارمونیک بالانس نمودی این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان پاسخی با فرکانس دلخواه برای معادله همگن طراحی کرد. لذا در این مطالعه به منظور مقایسه، پاسخ‌هایی با فرکانس‌های مشابه عبارت ناهمگن رابطه (۲۰- الف) برای معادله همگن در نظر گرفته شده و تعدادی از فرکانس‌های تشدید جرم دوار (Ω_{res}) برای ضخامت‌های نسبی و نسبت‌های جرمی مختلف محاسبه شده است. این مقادیر در جدول‌های ۱ و ۲ در کنار نتایج مرجع [11] ارائه شده است. مشابه مرجع مذکور، در این تحلیل‌ها پارامترهای بی‌بعد به صورت $\mu^* = 0$ و $k^* = 0$ ، $\kappa = \pi/\sqrt{12}$ ، $v = 0.3$ ، $\alpha_r = 1$ در نظر گرفته شده است. در جدول ۱، نسبت جرمی و شعاع نسبی مسیر به ترتیب برابر $\alpha = 0.2$ و $\zeta = 0.2$ تنظیم شده و مقایسه برای ضخامت‌های نسبی مختلف صورت گرفته است. در جدول ۲، $\zeta = 0.2$ و $r_a = 0.1$ در نظر گرفته شده و فرکانس‌های تشدید برای جرم‌های نسبی مختلف محاسبه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد.

جدول ۱) فرکانس‌های تشدید ورق حامل جرم دوار برای ضخامت‌های نسبی مختلف

ضخامت نسبی (r_a)	پژوهش حاضر	مرجع [11]
۰/۰۱	۰/۲۲۲۳	۰/۲۲۲
۰/۰۶	۰/۲۱۹۷	۰/۲۱۸
۰/۰۹	۰/۲۱۶۴	۰/۲۱۶
۰/۱۲	۰/۲۱۲۲	۰/۲۱

جدول ۲) فرکانس‌های تشدید ورق حامل جرم دوار برای نسبت‌های جرمی مختلف

جرم نسبی (α)	پژوهش حاضر	مرجع [11]
۰/۰۱	۰/۲۴۱۳	۰/۲۴
۰/۱۵	۰/۲۱۹۱	۰/۲۱۵
۰/۳	۰/۲۰۱۵	۰/۱۹۳
۰/۴	۰/۱۹۲۵	۰/۱۸

۶- نتیجه‌گیری

رفتار دینامیکی سازه ورق تحت عبور جرم متحرک دارای کاربردهای فراوان در حوزه سازه‌های مهندسی است. از این رو در این تحقیق، پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم حامل جرم دوار بر اساس تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفت. در حقیقت این مقاله تکمیل‌کننده پژوهش‌های پیشین در زمینه پایداری سیستم ورق-جرم متحرک در سه جنبه است که عبارتند از: به‌کارگیری تئوری برشی مرتبه اول برای مدل‌سازی سازه تحت بارگذاری، استفاده از مسیر دایره‌ای برای حرکت جرم روی سطح ورق و بررسی تاثیر استهلاک بستر بر پایداری سیستم. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت سیستم با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی شد و متعاقباً توسط روش نیمه‌تحلیلی هارمونیک بالانس نمودی نواحی پایدار و ناپایدار صفحه فرکانس-جرم بار دوار محاسبه شد. اثرات شعاع مسیر حرکتی، ضخامت نسبی ورق و ضرایب سفتی و استهلاک بستر ویسکوالاستیک بر پایداری سیستم مطالعه شد. گزیده‌ای از نتایج به شرح ذیل هستند:

- در اثر حرکت تناوبی جرم روی سطح ورق، ناحیه‌ای

8- Nikkhoo A, Ebrahimzadeh Hassanabadi M, Eftekhari Azam S, Vaseghi Amiri J. Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads. *Mechanics Research Communications*. 2014;55:105-113.

9- Pirmoradian M, Torkan E, Karimpour H. Parametric resonance analysis of rectangular plates subjected to moving inertial loads via IHB method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018;142-143:191-215.

10- Gbadeyan JA, Dada MS. Dynamic response of a Mindlin elastic rectangular plate under a distributed moving mass. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2006;48(3):323-340.

11- Vaseghi Amiri J, Nikkhoo A, Davoodi MR, Ebrahimzadeh Hassanabadi M. Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method. *Thin Walled Structures*. 2013;62:53-64.

12- Hodayoun Sadeghi M, Lotfan S. Stability and bifurcation analysis of a beam-mass-spring-damper system under primary and one-to-three internal resonances. *Modes Mechanical Engineering*. 2017;17(2):166-176. [Persian]

13- Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. On the parametric and external resonances of rectangular plates on an elastic foundation traversed by sequential masses. *Archive of Applied Mechanics*. 2018;88(8):1411-1428.

14- Nelson HD, Conover RA. Dynamic stability of a beam carrying moving masses. *Journal of Applied Mechanics*. 1971;38(4):1003-1006.

15- Pirmoradian M, Keshmiri M, Karimpour H. Instability and resonance analysis of a beam subjected to moving mass loading via incremental harmonic balance method. *Journal of Vibroengineering*. 2014;16(6):2779-2789.

16- Pirmoradian M, Keshmiri M, Karimpour H. On the parametric excitation of a Timoshenko beam due to intermittent passage of moving masses: Instability and resonance analysis. *Acta Mechanica*. 2015;226(4):1241-1253.

17- Pirmoradian M, Karimpour H. Nonlinear effects on parametric resonance of a beam subjected to periodic mass transition. *Modes Mechanical Engineering*. 2017;17(1):284-292. [Persian]

18- Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. Occurrence of parametric resonance in vibrations of rectangular plates resting on elastic foundation under passage of continuous series of moving masses. *Modes Mechanical Engineering*. 2017;17(9):225-236. [Persian]

19- Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. Instability inspection of parametric vibrating rectangular Mindlin plates lying on Winkler foundations under periodic loading of moving masses. *Acta Mechanica Sinica*. 2019;35(1):242-263.

20- Lau SL, Cheung YK, Wu SY. A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear elastic systems. *Journal of Applied Mechanics*. 1982;49(4):849-853.

$$\begin{aligned}
 k_{21} &= -\lambda^2 \frac{144(1-\nu^2)}{\pi\sqrt{a_r}(r_a^2+r_b^2)^2} \\
 k_{22} &= \lambda^2 \frac{144(1-\nu^2)}{\pi^2 r_a^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 &\quad + \frac{12}{\pi^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 &\quad + \frac{6a_r^2(1-\nu)}{\pi^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 k_{23} &= \frac{6a_r(1+\nu)}{\pi^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 k_{31} &= -\lambda^2 \frac{144\sqrt{a_r}(1-\nu^2)}{\pi(r_a^2+r_b^2)^2} W = 0 \\
 k_{32} &= \frac{6a_r(1+\nu)}{\pi^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 k_{33} &= \lambda^2 \frac{144(1-\nu^2)}{\pi^2 r_a^2 (r_a+a_r r_b)^2} + \frac{12r_a^2}{\pi^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 &\quad + \frac{6(1-\nu)}{\pi^2 (r_a+a_r r_b)^2} \\
 \bar{k}_{11} &= -(\pi^2 \zeta^2 \sin^2(\tau) P_1(\tau) + \pi^2 \eta^2 \cos^2(\tau) P_1(\tau) \\
 &\quad + 2\pi^2 \zeta \eta \omega^2 \sin(\tau) \cos(\tau) P_4(\tau) P_5(\tau) \\
 &\quad - \pi \zeta \cos(\tau) P_2(\tau) - \pi \eta \sin(\tau) P_3(\tau)
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

منابع

1- Reissner E. On the theory of transverse bending of elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1976;12(8):545-554.

2- Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1951;18:31-38.

3- Nateghi Babagi P, Navayi Neyha B, Dehestani M. Three dimensional solution of thick rectangular simply supported plates under a moving load. *Meccanica*. 2017;52(15):3675-3692.

4- Chen G, Meng Z, Yang D. Exact nonstationary responses of rectangular thin plate on Pasternak foundation excited by stochastic moving loads. *Journal of Sound and Vibration*. 2018;412:166-183.

5- Rahimzadeh Rofooei F, Enshaeian AR, Nikkhoo A. Dynamic response of geometrically nonlinear, elastic rectangular plates under a moving mass loading by inclusion of all inertial components. *Journal of Sound and Vibration*. 2017;394:497-514.

6- Enshaeian AR, Rahimzadeh Rofooei F. Geometrically nonlinear rectangular simply supported plates subjected to a moving mass. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):595-608.

7- Nikkhoo A, Rahimzadeh Rofooei F. Parametric study of the dynamic response of thin rectangular plates traversed by a moving mass. *Acta Mechanica*. 2012;223(1):15-27.