



## Modeling and Simulation of Nonlinear Dynamics of Helicopter Rotor Flapping Considering Offset, Blade Weight Moment and Frequency of Flapping

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Navabi M. \*<sup>1</sup> PhD,  
Ghaffari H.<sup>1</sup> MSc

#### How to cite this article

Navabi M, Ghaffari H. Modeling and Simulation of Nonlinear Dynamics of Helicopter Rotor Flapping Considering Offset, Blade Weight Moment and Frequency of Flapping. Modares Mechanical Engineering. 2019; 19(10):2523-2534.

<sup>1</sup>New Technologies Engineering Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: New Technologies Engineering Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

Phone: -

Fax: -

m\_navabi@sbu.ac.ir

#### Article History

Received: April 21, 2018

Accepted: February 24, 2019

ePublished: October 22, 2019

### ABSTRACT

The helicopter rotor blade flapping results in a helicopter rotor symmetry lift and has a significant impact on stability and control. In this paper, the modeling of helicopter flapping in the presence of aerodynamic forces and moments and the effect of offset, blade torque, hinge resistant spring, blade geometry, natural frequency effect, and forward ratio to achieve reliable relief from flapping was investigated. In the simulation, the effects of small and large flapping angles and the role of offset on the momentum entered on the blade, as well as the role of the forward ratio in moments were investigated. Different models of flapping dynamics and equations for the flight of a hover and cruise helicopter are fully presented and all of the important issues are examined for a numerical example. Also, the effect of non-uniform flow in the flapping equations of the blade is the effect of the natural frequency of the flapping motion with the blade offset. This leads to increasing the accuracy in modeling the phenomenon of flapping on a helicopter. Simulation results show the importance and impact of offsets, moments and forces imposed on the blade in the motion of the flapping, which leads to an increase of accuracy in modeling.

**Keywords** Helicopter; Flapping Dynamics; Simulation; Offset; Blade Weight Moment

### CITATION LINKS

[1] A method for computation of the induced velocity field of a rotor in forward flight, suitable for application ... [2] Bramwell's helicopter ... [3] Principles of helicopter ... [4] On the flapping motion of a helicopter ... [5] Basic helicopter ... [6] Applications of an analytic stall model to time-history and eigenvalue analysis of rotor ... [7] Modeling helicopter rotor blade flapping motion considering nonlinear ... [8] Non-linear flutter of a buckled shear-deformable composite panel in ... [9] Implications of cubic physical/aerodynamic nonlinearities on the character of the flutter ... [10] On the importance of aerodynamic and structural geometrical nonlinearities in aeroelastic ... [11] Effects of geometric structural nonlinearity on flutter and limit cycle oscillations of high-aspect-ratio ... [12] Active twist rotor blade modelling using particle-wake aerodynamics and geometrically exact beam structural ... [13] Non-linear viscoelastodynamic equations of three-dimensional rotating structures in finite displacement and finite element ... [14] Asymptotic treatment of the trapeze effect in finite element cross-sectional analysis of composite ... [15] Non-linear rotorcraft ... [16] Aerodynamic design optimization of helicopter rotor blades including airfoil shape for ... [17] Design and implementation of a flight control system for an unmanned rotorcraft ... [18] Lagrangian formulation for the rapid estimation of helicopter rotor blade ... [19] Investigation of a new model accounting for rotors of finite tip-speed ratio ... [20] Performance and loads of a lift offset rotor: Hover and wind ... [21] Rotary-wing aeroelasticity: Current status and future ... [22] Milestones in rotorcraft aeromechanics: The 30th ... [23] Automatic flight control ... [24] Rotor loads prediction using helios: A multisolver framework for rotorcraft aeromechanics ... [25] Analytical estimate of rotor blade flapping caused by a straight ... [26] Experimental investigation and fundamental understanding of a full-scale slowed ... [27] The era of the ... [28] Rotor performance at high advance ratio ... [29] Reduced-order modeling and controller design for a high-performance ... [30] Analysis of aerodynamic characteristics on a counter-rotating wind ... [31] An extension of lifting rotor theory to cover operation at large angles of attack and ... [32] Helicopter blade flapping with and without small angle assumption in the ...

## مدل‌سازی و شبیه‌سازی دینامیک غیرخطی فلپینگ روتور هلیکوپتر با احتساب آفست، گشتاور وزن پره و فرکانس فلپینگ

محمد نوابی\* PhD

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

حامد غفاری MSc

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

### چکیده

فلپینگ تیغه روتور هلیکوپتر منجر به تقارن لیفت در روتور هلیکوپتر می‌شود و تاثیر قابل توجهی در پایداری و کنترل دارد. در این مقاله به مدل‌سازی فلپینگ هلیکوپتر در حضور نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی و بررسی اثر آفست، گشتاور وزن پره، فنر مقاوم در لولا، هندسه پره، اثر فرکانس طبیعی و نسبت پیشروی برای دستیابی به رفتار قابل اطمینانی از فلپینگ مورد بررسی قرار گرفته است. در شبیه‌سازی به اثرات زوایای کوچک و بزرگ فلپینگ و نقش آفست در گشتاورهای وارد شده بر پره و همچنین نقش نسبت پیشروی در گشتاورها پرداخته شده است. مدل‌های مختلف دینامیکی فلپینگ و معادلات برای پرواز هاور و کروز هلیکوپتر به طور کامل ارائه می‌شود و برای یک مثال عددی همه موارد مهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین اثر جریان غیریکنواخت در معادلات فلپینگ پره، تاثیر فرکانس طبیعی حرکت فلپینگ با آفست پره ارائه می‌شود. این مهم منجر به افزایش دقت در مدل‌سازی پدیده فلپینگ در هلیکوپتر می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده اهمیت و میزان تاثیر آفست، گشتاورها و نیروهای وارد شده بر پره در حرکت فلپینگ است که منجر به افزایش دقت در مدل‌سازی می‌شود.

**کلیدواژه‌ها:** هلیکوپتر، دینامیک فلپینگ، شبیه‌سازی، آفست، گشتاور وزن پره

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۲/۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۵

\* نویسنده مسئول: m\_navabi@sbu.ac.ir

### ۱- مقدمه

وسایل پرنده عمود پرواز در دهه گذشته توجه وسیعی را در کاربردهای تجاری و نظامی به خود جلب کرده است. در این میان هلیکوپترها به خاطر قابلیت‌هایی مانند توانایی نشست و برخاست در مساحت کمتر، سرعت بالا، توانایی هاورکردن و همچنین قابلیت مانوردهی بالا از اهمیت بالایی برخوردار هستند. البته با وجود قابلیت‌های فراوان هلیکوپترها معایب و مشکلات متعددی نیز در عملکرد آن‌ها دیده می‌شود. عملکرد دینامیکی هلیکوپترها به علت کوپلینگ معادلات دینامیکی آن‌ها نسبت به وسایل پرنده هوایی بال ثابت پیچیده‌تر می‌باشد. از مهم‌ترین کاراکترهای پروازی در هلیکوپتر، کارایی پرواز هاور می‌باشد که بدون قابلیت خوب پرواز کروز از کارایی آن کم می‌شود<sup>[1]</sup>. از این رو لازم است به دید کاملتری از رفتار آیرودینامیکی و دینامیکی هلیکوپتر در پرواز کروز دست یافت. از نظر آیرودینامیکی در پرواز هلیکوپتر نوع پره، تویست پره، جریان یکنواخت و غیریکنواخت، تغییرات فشار دینامیکی در پره، صلبیت پره و غیره در تولید نیروی لیفت و گشتاورهای وارد بر پره تاثیر دارند. معادلات آیرودینامیکی و دینامیکی هلیکوپتر در توانایی کنترل و پایداری هلیکوپتر اثر دارند، علاوه بر این کوپلینگ معادلات دینامیکی فلپینگ پره‌های هلیکوپتر در این کنترل و پایداری تاثیر چشم‌گیری دارد. با توجه به بارگذاری‌های اعمالی بر پره‌های روتور اصلی (ناشی از ورودی‌های کنترلی و عوامل محیطی) صفحه چرخش پره‌ها نسبت به حالت افقی دچار انحراف می‌شود، انحراف ناشی از فلپینگ پره و سرعت زاویه‌ای آن، اثر مهمی در دینامیک غیرخطی هلیکوپتر دارد. [2, 3].

حال این سوال مطرح می‌شود که فلپینگ در هلیکوپتر چه کاربرد و اثری دارد. حرکت رو به بالا و پایین تیغه روتور که با گام سایکلک در ارتباط است، در نهایت منجر به تقارن لیفت در تیغه روتور هلیکوپتر می‌شود. فلپینگ تیغه روتور مهم‌ترین فاکتور در پایداری و کنترل است. پایداری، تمایل سیستم به باقی‌ماندن در یک حالت است و تفاوت آن در سطح پایداری را می‌توان با تشریح افزایش مهارت مورد نیاز در باقی‌ماندن روی سه‌پایه، دوپایه یا تک‌پایه تشریح کرد. از سوی دیگر، کنترل در درجه اول اندازه‌گیری شتاب‌دهی‌هایی است که سیستم می‌تواند تولید کند. برای مثال مشکلات در حال افزایش در اتصال یک کشتی و کابین خلبان و یک ناو هواپیمابر را در نظر بگیرید. هنگامی که این تعاریف در نظر گرفته می‌شود به اهمیت فلپینگ تیغه روتور هلیکوپتر در پایداری و کنترل می‌توان پی برد. اگر فلپینگ در نتیجه تغییرات شرایط پروازی توسط خلبان هنگامی که خلبان کنترل را ثابت نگه می‌دارد باشد، فلپینگ به عنوان کاراکتر پایداری در نظر گرفته می‌شود. اما اگر فلپینگ توسط عمل خلبان باشد، به عنوان کاراکتر کنترلی در نظر گرفته می‌شود. در هر دو مورد، این اثر به عنوان گشتاوری حول مرکز ثقل هلیکوپتر احساس می‌شود.

در مرجع [4] حرکت فلپینگ تیغه روتور هلیکوپتر با معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب پریودیک مدل‌سازی و از دو روش برای محاسبه ضرایب فوریه استفاده شده است. معادلات فلپینگ برای تیغه صلب با فرض زوایای کوچک و فرض زوایای بزرگ فلپینگ در منابع [2, 3, 5] بحث شده است. در مراجع فوق به دلیل غیرخطی شدن معادلات، ناشی از فرض زوایای فلپینگ بزرگ، از پرداختن به زوایای فلپینگ بزرگ ( $5 < \beta < 10$ ) اجتناب شده است. تعداد بسیار کمی از مقالات به هر دو مبحث زوایای فلپینگ بزرگ و کوچک پرداخته شده است. روگرز<sup>[6]</sup> از مدل پره (تیغه) صلب برای مدل‌سازی استال دینامیکی با فرض زوایای کوچک فلپینگ استفاده کرده است. در منبع [7] به بررسی فلپینگ با فرضیات غیرخطی آیرودینامیکی پرداخته شده است.

تحقیقات قابل ملاحظه‌ای در طول دو دهه اخیر نشان داده‌اند که آیروالاستیسیته غیرخطی نقش مهمی را در بال ثابت‌ها [8-11] همچنین در آیروالاستیسیته هلیکوپتر<sup>[12-15]</sup> دارد، اما در مبحث معادلات دینامیکی فلپینگ و انواع مدل‌سازی آن با فرضیات دینامیکی و آیرودینامیکی مختلف، تحقیقات کمی انجام شده است. در این مقاله به بررسی معادلات دینامیکی غیرخطی و خطی با فرض آفست‌های مختلف و فرض زوایای بزرگ و کوچک فلپینگ در فازهای پروازی هاور و کروز پرداخته می‌شود. همچنین معادلات فلپینگ تحت اثر گشتاور وزن پره، اثر جریان معکوس در گشتاورهای اعمالی به پره در حضور فلپینگ روتور، حرکت فلپینگ با هارمونیک بالا، ویژگی‌های هندسه پره مانند پیچش خطی، تغییر گشتاورهای اعمالی به پره در سرعت‌های پیشروی به جلوی مختلف استخراج می‌شود. همچنین اثر جریان غیریکنواخت در معادلات فلپینگ پره، تاثیر فرکانس طبیعی حرکت فلپینگ با آفست پره ارائه می‌شود. این مهم منجر به افزایش دقت در مدل‌سازی پدیده فلپینگ در هلیکوپتر می‌شود. این مقاله اولین کار تحقیقاتی داخلی در مدل‌سازی و شبیه‌سازی فلپینگ با احتساب تمام فرضیات آیرودینامیکی و دینامیکی غیرخطی در هلیکوپتر می‌باشد. این مهم منجر به افزایش دقت در شبیه‌سازی ارتعاشات سازه پره هلیکوپتر، و در نتیجه مدل‌سازی دقیق‌تر معادلات حرکت هلیکوپتر می‌شود. برای یک مثال عددی شبیه‌سازی انجام شده و نتایج نشان‌دهنده میزان تاثیر پارامترهای مدل‌سازی می‌باشد.

پدیده‌ای که با جریان رو به جلو مطرح می‌شود، ناحیه جریان معکوس است. در شکل ۳، ناحیه‌ای که در قسمت عقب دیسک روتور قرار دارد و سرعت آن از ریشه تا لبه پره مطرح می‌شود، به عنوان ناحیه جریان معکوس شناخته می‌شود. طبق مرجع [21] ناحیه وارونه در دیسک روتور برای نسبت پیشروی بالا قابل صرف نظر است [21].

شکل ۴ نیروهای آیرودینامیکی وارد بر سطح مقطع روتور را نشان می‌دهد. نیروهای آیرودینامیکی لیفت و درگ ( $L$ ،  $D$ ) به ترتیب عمود و موازی با سرعت متناظر  $U$  (معادلات ۴ تا ۶) می‌باشند. مؤلفه‌های نیروهای لیفت و درگ و شعاعی (معادلات ۷ تا ۹) معادل در صفحه رفرنس به ترتیب  $F_z$ ،  $F_D$ ،  $F_x$  و  $F_y$  در جهت‌های فوق تعریف می‌شوند. علت تعریف این نیروها، به دلیل بیان نیروهای مقطعی به صورت ترم‌هایی از ضرایب لیفت و درگ است [22].

$$U = \sqrt{u_T^2 + u_P^2} \quad (4)$$

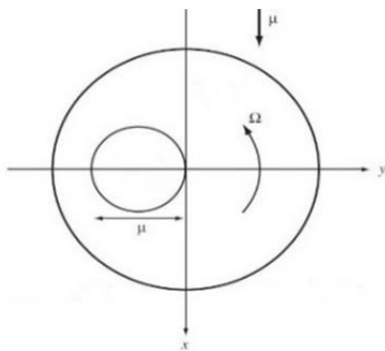
$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_L \quad (5)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_D \quad (6)$$

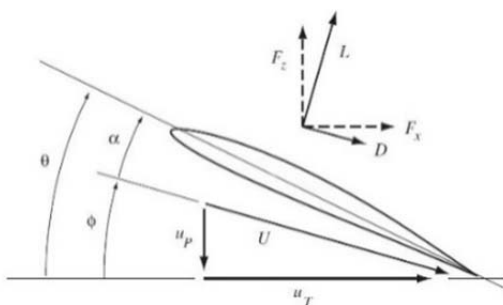
$$F_z = L \cos \phi - D \sin \phi \quad (7)$$

$$F_x = L \sin \phi + D \cos \phi \quad (8)$$

$$F_r = -\beta F_z + D_{radial} \quad (9)$$



شکل ۳ ناحیه جریان معکوس (وارونه) برای  $\mu = 0.7$  [21] مماس بر مبدأ دایره‌ای به شعاع  $\mu$



شکل ۴ نیروها و سرعت‌های سطح مقطع پره روتور [22]

### ۲-۱- حرکت فلپینگ روتور

برای کامل کردن رفتار روتور در پرواز رو به جلو، دانش حرکت فلپینگ روتور نیاز است. تعادل نیروهای اینرسی و گشتاورهای آیرودینامیکی را حول لولای فلپینگ همانند شکل ۵ و انحراف  $z = \beta r$  از صفحه افقی برای حرکت صلب بدون آفست که به المان جرم  $m dr$  (که  $m$  جرم در واحد طول پره می‌باشد) در فاصله شعاعی  $r$  از محور چرخش قرار دارد را در نظر بگیرید. توزیع نیروی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

### ۲- مدل روتور هلیکوپتر در پرواز کروز

در پرواز کروز، مؤلفه‌های سرعتی که توسط پره روتور هلیکوپتر دیده می‌شود شامل سرعت رو به جلو و سرعت ناشی از چرخش آن می‌باشد. در جهت پیشروی دیسک، سرعت پره با سرعت رو به جلو افزایش پیدا می‌کند، در حالی که در قسمت عقب سرعت کاهش پیدا می‌کند [16]. این باعث می‌شود برای یک زاویه حمله ثابت، اختلاف فشار دینامیکی اطراف روتور در پرواز کروز، لیفت بیشتر در قسمت جلو نسبت به عقب ایجاد شود که باعث ایجاد گشتاور رول و پیچ همانند شکل ۱ می‌شود. این گشتاور باعث ایجاد گشتاور خمشی بالا در پره هلیکوپتر می‌شود [17].



شکل ۱ گشتاور پیچ ناشی از اختلاف لیفت در پره [5]

شکل ۲ مؤلفه‌های سرعت پره هلیکوپتر در پرواز کروز را برای هلیکوپتری با سرعت رو به جلوی  $V$  و زاویه نصب پره  $i$  نشان می‌دهد. روتور دارای سرعت چرخشی  $\Omega$  می‌باشد که جهت چرخش پادساعت‌گرد روتور مطلوب می‌باشد. با تعریف نسبت پیشروی روتور در پرواز رو به جلو به صورت مؤلفه‌های سرعت خواهیم داشت [18]:

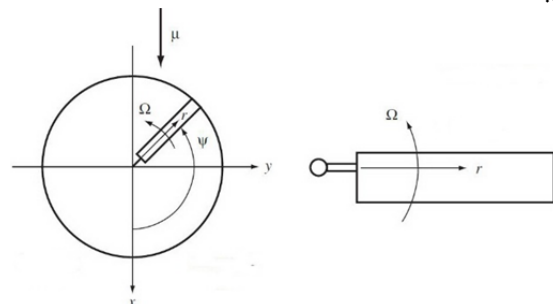
$$\mu = \frac{V \cos i}{\Omega R} \quad (1)$$

در معادله ۱،  $\mu$  به عنوان سرعت رو به جلوی بدون بعد پره شناخته می‌شود. موقعیت پره با زاویه آزیموت  $\psi = \Omega t$  مشخص شده است و مؤلفه‌های سرعت مماسی و شعاعی پره در معادلات ۲ و ۳ بیان شده است [19].

$$u_T = r + \mu \sin(\psi) \quad (2)$$

$$u_R = \mu \cos(\psi) \quad (3)$$

نسبت پیشروی  $\mu$  برای هلیکوپترهای متداول در پرواز کروز، کوچک می‌باشد. اولین هلیکوپترهای ساخته شده دارای سرعت پیشروی ماکزیمم  $\mu = 0.25$  بودند، در حالی که هلیکوپترهایی که در حال حاضر طراحی شده‌اند شاید حدود  $0.40$  تا  $0.35$   $\mu_{max}$  را دارا باشند. به عنوان نمونه عددی برای سرعت لبه  $\Omega R = 675$  فوت بر ثانیه و نسبت پیشروی حدوداً  $0.5$  دارای سرعت  $V = 200$  فوت می‌باشد [20].



شکل ۲ سرعت پره روتور در پرواز کروز [1]؛ سمت راست: فریم در حال چرخش، سمت چپ: فریم ثابت

$$\lambda = \frac{\sigma a}{16} \left[ \sqrt{1 + \frac{32}{\sigma a} \theta r} - 1 \right] \quad (24)$$

یا:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sigma a}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma a}{8} \theta r} - \left(\frac{\sigma a}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right) \quad (25)$$

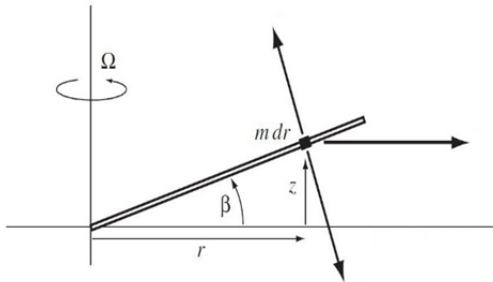
که در رابطه ۲۵،  $\lambda_c = V/\Omega R$  می‌باشد [26].

حال اگر نقش نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در پاسخ فلپینگ استخراج شود، برای موردی با عدم وجود نیروهای آیرودینامیکی و بدون آفست لولا و مقاومت فنر، معادله فلپینگ را می‌توان به فرم معادله ۲۶ نوشت [27].

$$\ddot{\beta} + \beta = 0 \quad (26)$$

که دارای حل سایکلک به فرم معادله ۲۷ می‌باشد.

$$\beta = \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi \quad (27)$$



شکل ۵ گشتاورهای فلپینگ پره روتور [2]؛ جهت نمای شمال: نیروی آیرودینامیکی، شرق: نیروی گریز از مرکز، جنوب: اینرسی

## ۲-۲- هارمونیک‌های بالای حرکت فلپینگ

با در نظر گرفتن حل معادله فلپینگ با هارمونیک‌های دوم  $(\beta_{2c}, \beta_{2s})$  هارمونیک‌های بالای حرکت پره به شدت تحت تاثیر جریان غیریکنواخت و خمش پره‌های الاستیک می‌باشد، اما حل حاضر نقش راهنما برای رفتار پایه‌ای هارمونیک‌های بالا را دارد. با فرض اینکه  $\beta_{2c}, \beta_{2s}$  بسیار کوچکتر از  $\beta_{1c}, \beta_{1s}$  باشند، معادله جبری برای  $\beta_{2c}, \beta_{2s}$ ، با تاثیرگذاری بر معادله دیفرانسیل فلپینگ به صورت معادلات ۲۸ و ۲۹ خواهد بود که فرم کامل معادلات در مرجع [27] بیان شده است.

$$\beta_{2c} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \cos 2\psi \, d\psi \quad (28)$$

$$\beta_{2s} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \sin 2\psi \, d\psi \quad (29)$$

تحریک اولیه هارمونیک‌های بالای حرکت پره توسط جریان غیریکنواخت ارائه شده، فقط برای تغییرات خطی ساده در نظر گرفته شده است. با جریان غیریکنواخت، حرکت پره با هارمونیک بالا، دارای دامنه بزرگتری می‌باشد. از طرفی حرکت با هارمونیک بالا، معمولاً تاثیر کمی روی عملکرد روتور و کنترل دارد، اما برای ارتعاشات هلیکوپتر و نیروهای وارد بر پره مهم می‌باشد [20].

حال به بررسی پاسخ هارمونیک‌های بالای کنترل پیچ فلپینگ پرداخته می‌شود. یک روتور در حالت هاور در نظر بگیرید، بنابراین هیچ کنترل پیچ و پاسخ فلپینگ برای کوپلینگ هارمونیک در پرواز رو به جلو اتفاق نخواهد افتاد. معادله فلپینگ حرکت هاور به صورت معادله ۳۰ بیان می‌شود [28].

$$\ddot{\beta} + \beta = \frac{\gamma}{8} (-\dot{\beta} + \theta) \quad (30)$$

## ۲-۳- گشتاور وزن پره

نیروی گرانش که تقریباً بر دیسک روتور هلیکوپتر عمود است، باعث ایجاد گشتاور وزن حول لولای فلپینگ می‌شود. وزن پره با نیروی

انحراف از صفحه افقی ناشی از اثر فلپینگ با فاصله z و بازوی گشتاور r و زاویه فلپینگ  $\beta$ ، در معادله ۱۰ نمایش داده شده است [23].

$$z = \beta r \quad (10)$$

الف) نیروی اینرسی (معادله ۱۱) که با حرکت فلپینگ مخالفت می‌کند، دارای یک بازوی گشتاور r حول لولا می‌باشد [23].

$$m\ddot{z} = m r \ddot{\beta} \quad (11)$$

ب) نیروی سانتریفیوژی یا گریز از مرکز (معادله ۱۲؛ شکل ۲) که به صورت شعاعی به سمت بیرون وارد می‌شود [23].

$$c f = m \Omega^2 r \quad (12)$$

ج) نیروی آیرودینامیکی که به طور نرمال به پره وارد می‌شود. برای زوایای کوچک فلپینگ، این نیرو لیفت L (معادله ۱۳) می‌باشد که دارای بازوی گشتاور r است [23].

$$L = F_z r dr \quad (13)$$

بنابراین با توجه به بندهای الف تا ج، معادله حرکت فلپینگ با فرض زوایای کوچک فلپینگ، به صورت معادلات ۱۴ و ۱۵ نوشته می‌شود.

$$\int_0^R m r \ddot{\beta} r dr + \int_0^R m \Omega^2 r (r \beta) dr - \int_0^R F_z r dr = 0 \quad (14)$$

$$\left( \int_0^R m r^2 dr \right) (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) = \int_0^R F_z r dr \quad (15)$$

مومنتم اینرسی حول لولای فلپینگ با فرض آفست (e) صفر با  $I_B$  نشان داده شده است (معادله ۱۶).

$$I_B = \int_0^R m r^2 dr \quad (16)$$

بنابراین با فرض بی‌بعدسازی زمان در معادله ۱۷ و تعریف پارامتر  $\gamma$  به عنوان لاک نامبر (Lock number) در معادله ۱۸ خواهیم داشت:

$$\Psi = \Omega t \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{\rho a c R^4}{I_B} \quad (18)$$

در معادله ۱۸،  $\rho$  چگالی هوا، a شیب منحنی لیفت سطح مقطع دوبعدی پره و c نشان‌دهنده وتر پره روتور می‌باشد [23].

لاک نامبر به طور معمول برای روتورهای مستطیلی مقدار ۱۰ تا ۸  $\gamma =$  و برای روتورهای بدون لولا یا مفصل مقدار  $\gamma$  تا ۵ دارد. با فرض وتر ثابت و داخل کردن لاک نامبر در معادلات، معادلات فلپینگ را می‌توان به صورت معادله ۱۹ بیان کرد [24].

$$\ddot{\beta} + \beta = \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr = \gamma M_F \quad (19)$$

نیروی آیرودینامیکی نرمال وارد بر پره به صورت معادله ۲۰ می‌باشد. بنابراین گشتاور آیرودینامیکی فلپینگ را می‌توان به صورت معادله ۲۱ بیان کرد.

$$M_F = \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr = \int_0^1 r \frac{1}{2} [(r + \mu \sin \psi)^2 \theta - (\lambda + r \dot{\beta} + \mu \beta \cos \psi)(r + \mu \sin \psi)] dr \quad (21)$$

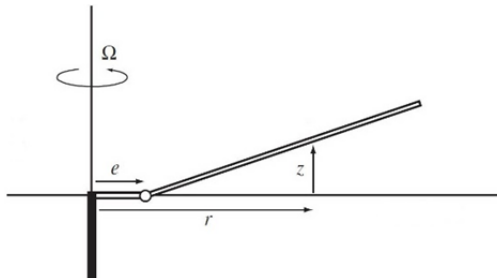
با فرض جریان یکنواخت و تویست خطی، انتگرال‌گیری در طول وتر نتیجه می‌دهد [24]:

$$M_F = M_\theta \theta_{con} + M_{tw} \theta_{tw} + M_\lambda \lambda + M_\beta \dot{\beta} + M_B \beta \quad (22)$$

$$M_F = \theta_{con} \left( \frac{1}{8} + \frac{\mu}{3} \sin \psi + \frac{\mu^2}{4} \sin^2 \psi \right) + \theta_{tw} \left( \frac{1}{10} + \frac{\mu}{4} \sin \psi + \frac{\mu^2}{6} \sin^2 \psi \right) - \lambda \left( \frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) - \dot{\beta} \left( \frac{1}{8} + \frac{\mu}{6} \sin \psi \right) - \beta \mu \cos \psi \left( \frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) \quad (23)$$

در رابطه ۲۲ و ۲۳،  $\theta_{con} = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi$  عنوان کنترلرهای کالکتیو و سایکلک پیچ شناخته می‌شوند [18]. برای توزیع جریان غیریکنواخت داریم [25]:

بگیرید، که به فاصله  $eR$  از مرکز چرخش قرار دارد. چنین چیدمانی معمولاً از لحاظ مکانیکی ساده‌تر از حالت بدون آفست می‌باشد و علاوه بر این اثر خوبی روی کیفیت هندلینگ (خوش‌دستی) هلیکوپتر دارد. روتورهای مفصلی معمولاً دارای آفست  $0.05$  تا  $0.03$  می‌باشند. تحلیل فلپینگ در این قسمت همراه با فنر در لولا در نظر گرفته شده است و همچنان مختصات شعاعی پره یعنی  $r$  از مرکز چرخش اندازه‌گیری می‌شود [29].



شکل ۷ حرکت فلپینگ پره با آفست لولا [24]

می‌توان معادلات حرکت فلپینگ را به فرم معادله ۳۷ بیان کرد.

$$\ddot{\beta} + v^2 \beta = \frac{k_\beta \eta(1)}{I_b \Omega^2 (1-e)} \beta_p + \gamma \int_e^1 \frac{\eta F_z}{ac} dr \quad (37)$$

فرکانس طبیعی حرکت فلپینگ برای پره با آفست لولا و فنر با معادله ۳۸ بیان می‌شود.

$$v^2 = 1 + \frac{e \eta(1) \int_e^1 \eta m dr}{1-e \int_e^1 \eta^2 m dr} + \frac{k_\beta}{I_b \Omega^2 (1-e)} \quad (38)$$

در معادله ۳۸، ترم اول ناشی از نیروی سانتریفیوژی فنر، ترم دوم اثر آفست لولا (ناشی از نیروی سانتریفیوژی) و ترم سوم ناشی از فنر لولا می‌باشد. برای توزیع جرم یکنواخت و بدون فنر لولا، فرکانس طبیعی از رابطه ۳۹ به دست می‌آید [31].

$$v^2 = 1 + \frac{3}{2} \frac{e}{1-e} \quad (39)$$

### ۳- مدل تحلیل المان پره در فلپینگ

بعد از استخراج معادله فلپینگ در بخش ۱-۲ به بررسی نیروها و مؤلفه‌های سرعت در رویکرد فلپینگ مک‌لین پرداخته می‌شود.

$$U_R = (\Omega R) \mu \cos \psi \quad (40)$$

$$U_T = (\Omega R)(r \cos \beta + \mu \sin \psi) \quad (41)$$

$$U_p = (\Omega R)(\lambda \cos \beta + r \dot{\beta} + \mu \sin \beta \cos \psi) \quad (42)$$

که  $\mu = v_\infty \cos \alpha / \Omega R$  نسبت پیشروی یک اندازه‌گیر سرعت رو به جلوی بی‌بعد است.  $\alpha_s$  زاویه حمله دیسک روتور و  $\lambda$  نسبت جریان القایی بی‌بعد روتور می‌باشد.

نسبت جریان القایی  $\lambda$  در عبارت سرعت جریان القایی به صورت  $v_h \equiv v_i = \lambda_h \Omega R$  بیان می‌شود که کمیت بی‌بعد  $\lambda_h$  به طور عادی برای مقایسه کمی نتایج بین روتورهای مختلف استفاده می‌شود.

$$\lambda_h \equiv \lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R} = \frac{1}{\Omega R} \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A (\Omega R)^2}} = \sqrt{\frac{C_T}{2\mu}} \quad (43)$$

برای محاسبه نسبت جریان القایی  $\lambda$  که در رابطه ۴۳ تشریح شده است، نیازمند دانشی از جریان‌های حلقوی تیغه روتور شامل اثرات جداگانه جریان‌های حلقوی نوک بال و شبیه‌سازی کامل جریان‌های حلقوی است و این مهم یک امر طاقت‌فرسا است [32].

$$F_z = L \cos \phi - D \sin \phi \quad (44)$$

$$\alpha = \theta - \phi = \theta - \arctan \frac{U_p}{U_t} = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi +$$

$$\theta_{1s} \sin \psi - \arctan \frac{\lambda \cos \beta + r \dot{\beta} - \mu \sin \beta \cos \psi}{r \cos \beta + \mu \sin \psi} \quad (45)$$

لیفت مخالفت می‌کند و بنابراین زاویه مخروطی را کاهش می‌دهد. نیروی گرانش روی المان پره  $mg$  می‌باشد که جهت آن به سمت پایین و دارای بازوی ممان  $r$  حول لولای فلپینگ است [28]. بنابراین گشتاور فلپینگ افزوده شده به صورت معادله ۳۱ بیان می‌شود.

$$\int_0^R mgr dr = g \int_0^R rm dr = g S_b \quad (31)$$

در رابطه فوق  $S_b = \int_0^R rm dr = M_b r_{cg}$  گشتاور حول محور لولا می‌باشد ( $M_b$  جرم پره و  $r_{cg}$  موقعیت شعاعی مرکز گرانش است). این گشتاور فلپینگ به معادله افزوده شده است. همچنین کمیت‌های بدون بعد استفاده شده و معادله با تقسیم به  $I_b$  نرمالیزه می‌شود. نتیجه به صورت معادله‌های ۳۲ و ۳۳ بیان می‌شود [29]. با شبیه‌سازی فوق (معادله ۳۲)، با اعمال گشتاور وزن پره و معادلات گشتاور کلی (معادله ۲۳) می‌توان به رفتار خیلی نزدیک به واقعیت در فلپینگ هلیکوپتر دست یافت.

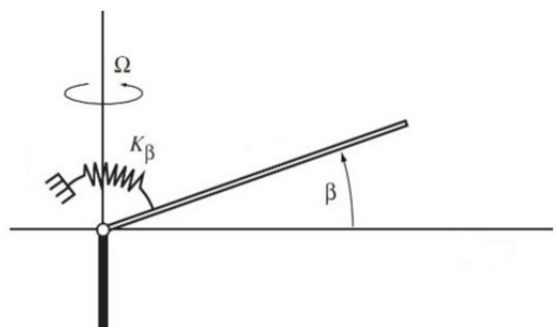
$$\ddot{\beta} + \beta = \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr - \frac{S_b g}{\Omega^2 R} \quad (32)$$

که:

$$\hat{S}_b = \frac{R S_b}{I_b} = \frac{\int_0^1 r m dr}{\int_0^1 r^2 m dr} \cong \frac{3}{2} \quad (33)$$

### ۴-۲ حرکت فلپینگ در حضور فنر لولا

یک پره روتور مربعی بدون آفست لولا در محور چرخش در نظر بگیرد، اما حال لولای فلپینگ دارای یک فنر همانند شکل ۶ می‌باشد که گشتاور فرمان به پره وارد می‌کند. چنین فنی ممکن است برای افزایش کنترل قدرت استفاده شود، زیرا چنین فنی نه تنها باعث تغییر بردار تراس می‌شود بلکه باعث تولید گشتاور مستقیم به هاب سیستم در حال چرخش می‌شود [18].



شکل ۶ حرکت فلپینگ پره در حضور فنر لولا [24]

در استخراج معادله حرکت فلپینگ، تنها کافی است که گشتاور ناشی از فنر لولا را به آن اضافه کرد (معادله ۳۴)، یعنی عبارت  $k_\beta(\beta - \beta_p)$  که  $k_\beta$  نرخ فنر و  $\beta_p$  زاویه پریکون (پیش از زاویه کونینگ) می‌باشد. بنابراین با یک فنر در لولای فلپینگ، معادله فلپینگ به فرم معادله ۳۵ بیان می‌شود [30].

$$I_b (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) + k_\beta (\beta - \beta_p) = \int_0^R r F_z dr \quad (34)$$

یا:

$$\ddot{\beta} + v^2 \beta = (v^2 - 1) \beta_p + \gamma \int_0^R \frac{F_z}{ac} dr \quad (35)$$

که:

$$v^2 = 1 + \frac{k_\beta}{I_b \Omega^2} \quad (36)$$

که در رابطه ۳۶، فرکانس طبیعی حرکت فلپینگ فریم در حال چرخش را نشان می‌دهد.

### ۵-۲ آفست لولای فلپینگ

حال پره‌ای با آفست لولای فلپینگ همانند شکل ۷ را در نظر

کوچک فلپینگ استخراج شد. حال طبق مرجع [2] به بررسی معادلات فلپینگ دارای آفست، فرض زوایای بزرگ و کوچک و معادلات فلپینگ در حضور مدل خطی ضریب برای تیغه روتور، پرداخته خواهد شد.

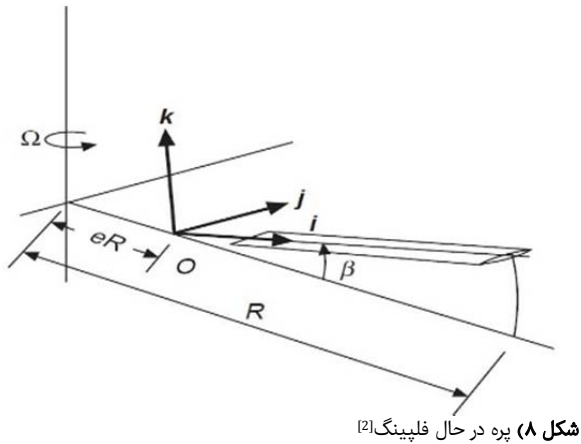
۴-۱- معادلات حرکت فلپینگ با آفست

در مرجع [2] معادلات فلپینگ با فرضیات ساده‌کننده که در قسمت قبل گفته شد مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر آن در این کتاب با فرض داشتن آفست، معادلات فلپینگ را مدل کرده است. در واقع تفاوت معادلات فلپینگ در این بخش، استفاده از آفست در مدل‌سازی معادلات فلپینگ و فرض زوایای بزرگ و کوچک می‌باشد. یک پره همانند شکل ۸ را در نظر بگیرید که لولای فلپینگ در فاصله  $eR$  از محور چرخش قرار دارد، شفت با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  در حال چرخش است و پره با سرعت زاویه‌ای  $\dot{\beta}$  می‌باشد. با در نظر گرفتن مختصات ثابت در پره، به طوری که مختصات جدید موازی محور اصلی باشد و مرکز آن در لولا و محور  $i$  در طول اسپین پره، محور  $j$  عمود بر اسپین پره و به موازات محور چرخش باشد و در نهایت محور  $k$  در جهت کامل‌کننده قانون دست راست باشد [2]، در این حالت معادلات حرکت فلپینگ از معادلات اویلر برای یک جسم صلب استخراج می‌شود. همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، بردار موقعیت مرکز ثقل پره به ترتیب با معادلات ۶۰ و ۶۱ نشان داده شده است [2].

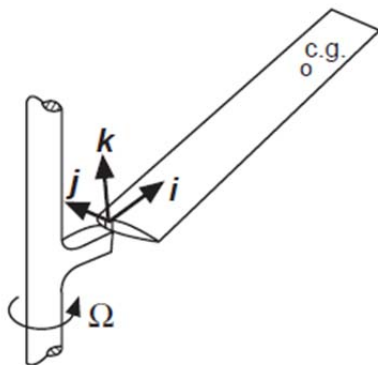
$$r_g = x_g \vec{i} + y_g \vec{j} + z_g \vec{k} \quad (60)$$

مؤلفه شتاب به صورت زیر است.

$$a_0 = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (61)$$



شکل ۸) پره در حال فلپینگ [2]



شکل ۹) مرکز ثقل پره

معادله ۴۴ نشان می‌دهد که از فرض زوایای کوچک  $\Phi$  استفاده نشده است. در صورت استفاده از فرض زوایای کوچک، رابطه  $F_z = L - D\Phi$  نیروی نرمال را تشکیل می‌دهد. نیروی لیفت، درگ و سرعت برآیند نیز به همین صورت به دست می‌آیند (معادلات ۴۶ تا ۴۸).

$$L = \frac{1}{2} \rho u^2 c C_L \quad (46)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho u^2 c C_D \quad (47)$$

$$U = \text{result velocity} = \sqrt{U_T^2 + U_p^2} \quad (48)$$

در معادلات ۴۶ و ۴۷ برای ضرایب لیفت و درگ  $C_L, C_D$  مدل آیرودینامیکی خطی در معادلات فلپینگ استفاده شده است که به فرم معادلات ۴۹ و ۵۰ بیان می‌شود.

$$C_L(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha \quad (49)$$

$$C_D(\alpha) = d_0 + d_1 \alpha + d_2 \alpha^2 \quad (50)$$

در معادلات ۴۹ و ۵۰ مقادیر  $a_0, a_1, d_0, d_1, d_2$  مقادیر ثابت هستند. این مدل تا زمانی که اسنال استاتیکی اتفاق افتد، صدق می‌کند. مومنتم اینرسی حول لولای فلپینگ با فرض آفست (e) صفر با  $J_B$  (معادله ۵۱) نشان داده شده است.

$$J_B = \int_0^R m r^2 dr \quad (51)$$

بنابراین با فرض بی‌بعدسازی زمان (معادله ۵۲) و تعریف پارامتر  $\gamma$  به عنوان لاک‌نامبر (معادله ۵۳) خواهیم داشت:

$$\Psi = \Omega t \quad (52)$$

$$\gamma = \frac{\rho a c R^4}{J_B} \quad (53)$$

در معادله (۵۳)  $\rho$  چگالی هوا،  $a$  شیب منحنی لیفت سطح مقطع دوبعدی پره و  $c$  نشان‌دهنده وتر پره روتور می‌باشد. با انتگرال‌گیری از معادله ۵۳، معادله فلپینگ به صورت معادله ۵۴ می‌شود.

$$(\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) = \frac{1}{J_B} \int_0^R F_z r dr \quad (54)$$

با توجه به تعریف لاک‌نامبر، معادله ۵۳ و معادله ۵۴ خواهیم داشت:

$$\ddot{\beta} + \beta = \gamma M_F \quad (55)$$

در معادله (۵۵) گشتاور فلپ  $M_F$  که ناشی از نیروهای آیرودینامیکی فلپ است به صورت زیر است:

$$M_F = M_\theta \theta_c + M_{\theta_T} \theta_T + M_\lambda \lambda + M_\beta \dot{\beta} + M_\beta \beta \quad (56)$$

در معادله (۵۶)  $\theta_c$  زاویه کنترل سایکلک،  $\theta_T$  زاویه پیچش پره روتور،  $\beta$  جابجایی حرکت زاویه فلپینگ و  $\lambda$  نسبت جریان القایی است و  $\gamma = 1$  (لاک‌نامبر) در نظر گرفته شده است. در کتاب مک‌لین فرض لاک‌نامبر برابر یک است، ولی در مراجع دیگر بزرگتر از یک در نظر گرفته شده است [23].

در حالت پرواز هاور هلیکوپتر معادله فلپینگ با فرض زوایای کوچک فلپینگ به صورت زیر می‌شود.

$$\ddot{\beta} = M_\beta \dot{\beta} + (M_\beta - 1)\beta + M_\theta \theta_c \quad (57)$$

با استفاده از روش کاهش مرتبه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \beta = x_1 \\ \dot{\beta} = x_2 \end{cases} \quad (58)$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M_\beta \dot{\beta} + (M_\beta - 1)\beta + M_\theta \theta_c \end{cases} \quad (59)$$

۴- رویکرد آیرودینامیکی و دینامیکی در شبیه‌سازی فلپینگ

در بخش گذشته معادلات فلپینگ با فرض آفست صفر و زوایای

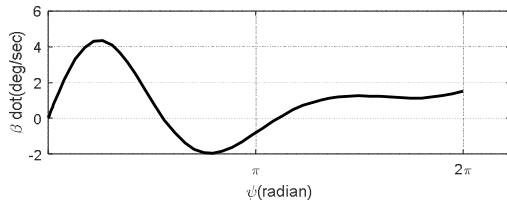
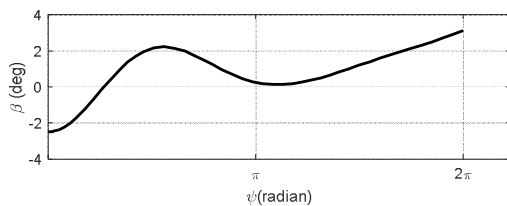
۶۲، دو معادله اویلر دیگر (معادلات اول و سوم) به صورت معادله ۷۶ می‌شوند.

$$L = 0 \quad N = -2B\Omega\dot{\beta} \sin \beta \quad (۷۶)$$

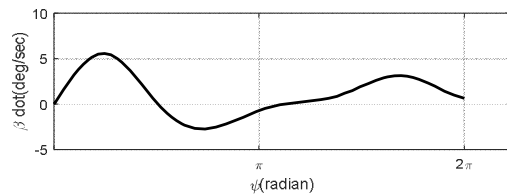
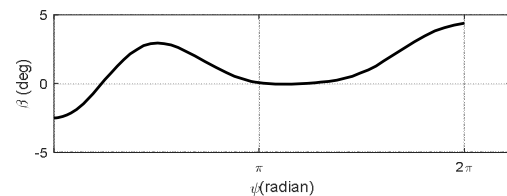
### ۵- شبیه‌سازی و نتایج

معادلات فلپینگ برای پره با فرض آفست و بدون آفست، با در نظر گرفتن گشتاور وزن پره  $m = ۱۳/۰۴۶۵۱۱۶۳ \frac{kg}{m}$  شعاع پره  $R = ۸/۱۷ m$  و تعداد پره  $N = ۵$  در حضور فنر لولا و بدون فنر و با در نظر گرفتن سرعت کروز ۲۰۰ نوات،  $\mu = ۰/۳$ ، فرکانس فلپینگ  $\nu = ۱$  و  $\nu > ۱$ ، وتر ایرفویل  $c = ۰/۵۲۷۳ m$  و شرایط اولیه صفر در حل سیستم معادلات دیفرانسیل، پاسخ زاویه فلپینگ و نرخ آن نسبت به موقعیت آزیموت  $\psi$  شبیه‌سازی شده است. همچنین تغییرات گشتاورهای وارد شده بر ایرفویل پره در نتایج آمده است.

نتایج شبیه‌سازی در نمودارهای ۱ تا ۸ مبنی بر در نظر گرفتن معادله فلپینگ ۱۹ با فرض توزیع جریان یکنواخت و توزیع پیچش خطی برای یک پره روتور هلیکوپتر مستطیلی شکل با فرض وتر ثابت پره، نشان داده شده است. می‌توان مشاهده کرد که با افزایش نسبت پیشروی، زاویه فلپینگ و نرخ آن افزایش یافته است. همچنین با افزایش آفست پره از صفر به  $۰/۱۵$  میزان تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن، کاهش یافته است و در نهایت با افزودن به شعاع پره، میزان فلپینگ و نرخ آن افزایش پیدا کرده است که این عامل را می‌توان با توجه به رفتار الاستیک پره توجیه کرد.



نمودار (۱) تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = ۰$  و  $\mu = ۰/۵$  و  $\alpha = ۱ \text{ radian}$



نمودار (۲) تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = ۰$  و  $\mu = ۱$  و  $\alpha = ۱ \text{ radian}$

با استفاده از قوانین مومنتم زاویه‌ای که انتقال از دستگاه بدنی به دستگاه اینرسی است که در مرجع [2] در پیوست الف-۱ و الف-۱-۲ شرح داده شده است، معادلات اویلر برای پره صلب به فرم معادله ۶۲ خواهد شد.

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 - M_b(y_g a_z - z_g a_y) = L \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_1\omega_3 - M_b(z_g a_x - x_g a_z) = M \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_2\omega_1 - M_b(x_g a_y - y_g a_x) = N \end{cases} \quad (۶۲)$$

در معادله (۶۲) مقادیر  $A, B, C$  ممان اینرسی جسم صلب (تیغه پره) در معادلات ۶۳ تا ۶۵،  $M_b$  جرم پره و  $L, M, N$  مؤلفه‌های گشتاور  $T$  می‌باشند [2].

$$A = \sum m(y^2 + z^2) \quad (۶۳)$$

$$B = \sum m(x^2 + z^2) \quad (۶۴)$$

$$C = \sum m(y^2 + x^2) \quad (۶۵)$$

بنابراین اگر  $A$  ممان اینرسی حول محور  $i$  و  $B$  ممان اینرسی حول  $z$  باشد، ممان اینرسی حول محور  $k$  را با  $C$  نشان دهیم که برابر  $A + B$  خواهد بود [2]. مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  حول این محورها را می‌توان به صورت معادلات ۶۶ و ۶۷ بیان کرد [2].

$$\Omega = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \quad (۶۶)$$

$$\omega_1 = \Omega \sin \beta, \quad \omega_2 = -\dot{\beta}, \quad \omega_3 = \Omega \cos \beta \quad (۶۷)$$

شتابی که بر مبدأ شفت در حال چرخش بر محور آن عمود است،  $a_0$  برابر  $\Omega^2 eR$  است. بنابراین مؤلفه‌های محورها اصلی شتاب را می‌توان به صورت معادله ۶۸ بیان کرد [2].

$$\{-\Omega^2 eR \cos \beta, 0, \Omega^2 eR \sin \beta\} \quad (۶۸)$$

بردار موقعیت مرکز ثقل پره،  $r_g = x_g R \vec{i}$  می‌باشد. بنابراین مؤلفه‌های  $r_g \times a_0$  به صورت زیر هستند:

$$\{0, e x_g \Omega^2 R^2 \sin \beta, 0\} \quad (۶۹)$$

در نتیجه طبق معادله ۶۹، حرکت فلپینگ پره حول محور  $z$  می‌باشد، پس با پوشش مقادیر بالا در معادله ۶۲، عبارت دوم که در پیوست A در مرجع [2] اثبات شده است و استفاده از رابطه  $A+B = C$ ، معادلات ۷۰ تا ۷۳ را نتیجه می‌دهد [2].

$$B\ddot{\beta} + \Omega^2 (B \cos \beta + M_b e x_g R^2) \sin \beta = M_A \quad (۷۰)$$

$$M_A = \frac{1}{8} \rho \Omega^2 c C_{L\alpha} R^4 \left( \theta - \frac{\dot{\beta}}{\Omega} - \frac{4\lambda_i}{3} \right) \quad (۷۱)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial t} = \Omega \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \quad (۷۲)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{16} \rightarrow \dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\Omega \gamma}{16} \quad (۷۳)$$

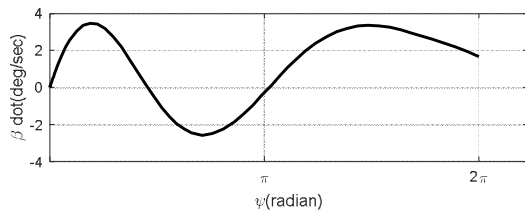
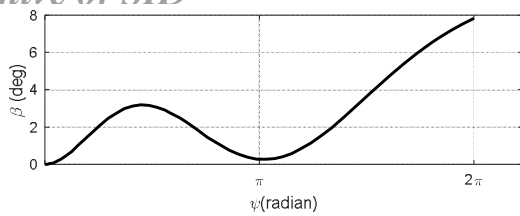
که  $10 < \gamma < 5$  و سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  از رابطه  $V_{tip} = \Omega R$  به دست می‌آید. زاویه  $\theta$  در معادله ۷۱ طبق شکل ۴، زاویه بین صفحه رفرنس افقی و امتداد وتر ایرفویل می‌باشد که می‌تواند مقادیر مختلف با شرط  $\theta < 90$  را اختیار کند. در معادله ۷۰،  $M_A = -M$  مومنتم آیرودینامیکی و  $M_b$  جرم پره می‌باشد. برای مقادیر کوچک زاویه فلپینگ معادله ۷۰، را می‌توان به صورت معادله ۷۴ نوشت [2].

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 (1 + \varepsilon) \beta = \frac{M_A}{B} \quad (۷۴)$$

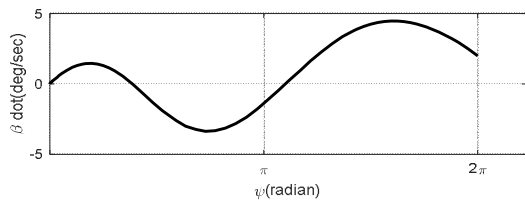
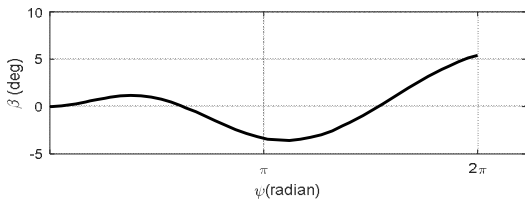
که در عبارت فوق:

$$\varepsilon = \frac{M_b e x_g R^2}{B} \quad (۷۵)$$

اگر پره هلیکوپتر، دارای توزیع پیوسته جرم باشد، می‌توان نشان داد که  $\varepsilon = 3e/2(1 - e)$  می‌باشد [2]. مقدار عمومی  $e = ۰/۰۴$  و طبق مرجع [3] خروج از مرکز  $e$  را می‌توان  $e < ۰/۱۵$  در نظر گرفت و مقدار  $\varepsilon$  تقریباً برابر  $۰/۰۶$  برای مقدار  $e = ۰/۰۴$  می‌باشد. در معادله



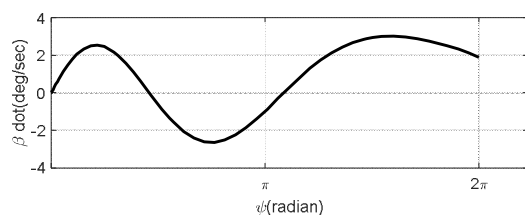
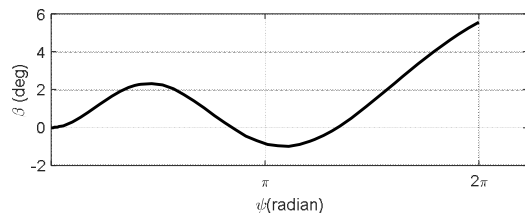
**نمودار ۷)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0/10$  و  $R = 15$



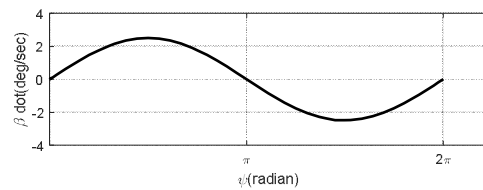
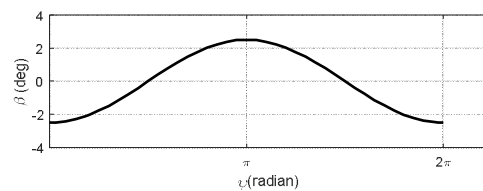
**نمودار ۸)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0/10$  و  $theta_{twist} = 9$

نمودارهای ۹ و ۱۰ نشان‌دهنده اثر گشتاور وزن پره (معادله ۳۲) بر معادلات فلپینگ می‌باشند. اثر افزایش آفست در این شبیه‌سازی نشان‌دهنده عدم تاثیر زیاد آفست در میزان زاویه فلپینگ بوده و نرخ آن مشهود است.

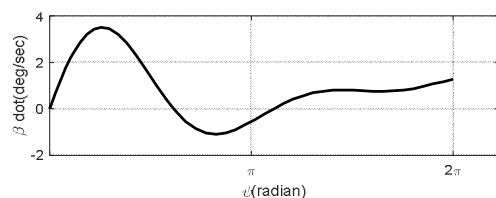
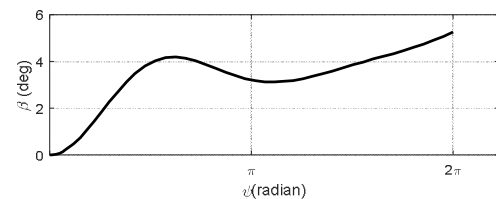
نمودارهای ۱۱ و ۱۲ نشان‌دهنده گشتاور ناشی از فنر قرار گرفته شده در لولا می‌باشند. این فنر، تولید گشتاور مستقیم به هاب سیستم در حالت چرخش را نشان می‌دهد. در اثر افزایش آفست، مشاهده می‌شود که زاویه فلپینگ و نرخ آن کاهش پیدا کرده است.



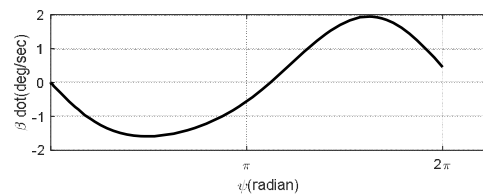
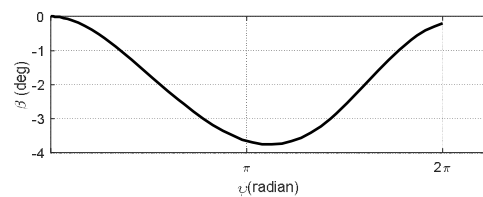
**نمودار ۹)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0$  تحت اثر گشتاور وزن پره



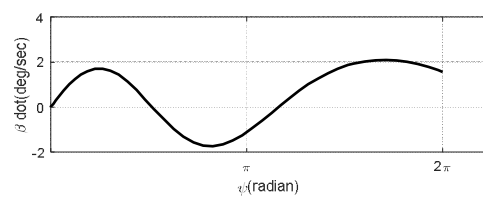
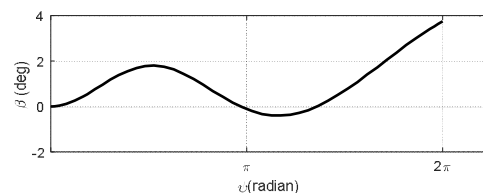
**نمودار ۳)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0/10$  و  $Nb = 2$  و  $\alpha = 1$  radian



**نمودار ۴)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0/10$  و  $theta_{twist} = 0$

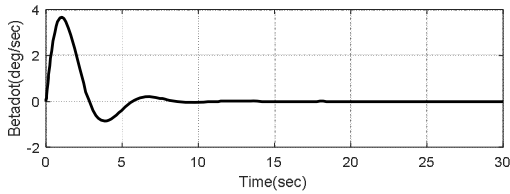
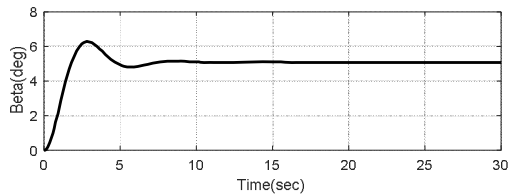


**نمودار ۵)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0/10$  و  $theta_{twist} = 0$

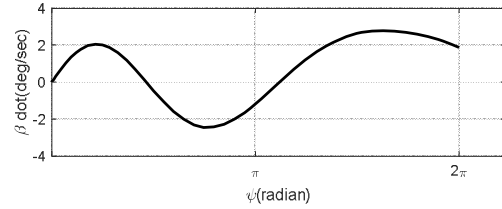
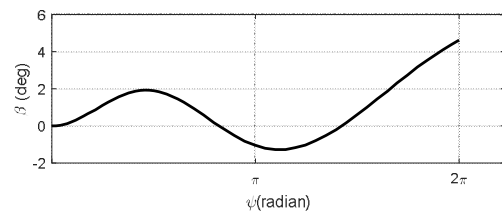


**نمودار ۶)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0/10$  و  $R = 5$

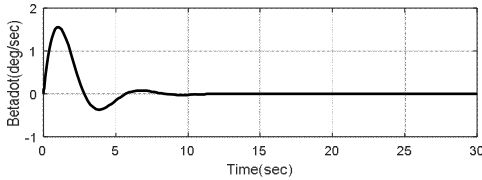
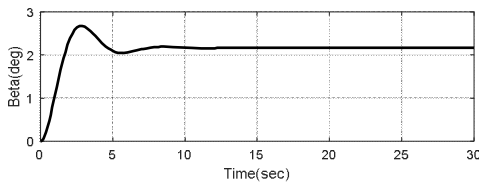




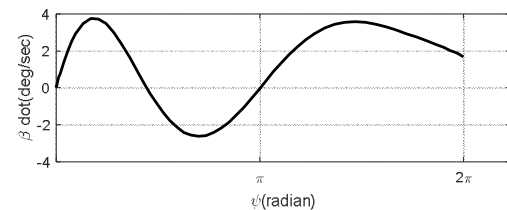
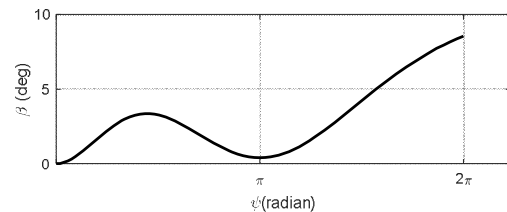
**نمودار ۱۳** تغییرات زمانی زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز رو به جلو با فرض داشتن آفست پره



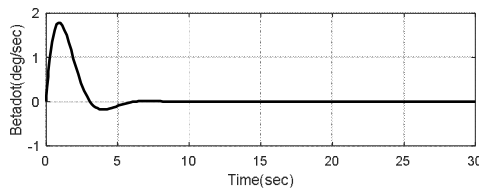
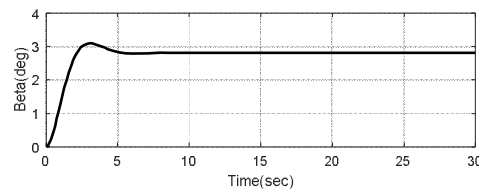
**نمودار ۱۰** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0.15$  تحت اثر گشتاور وزن پره



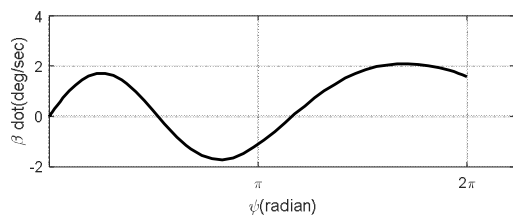
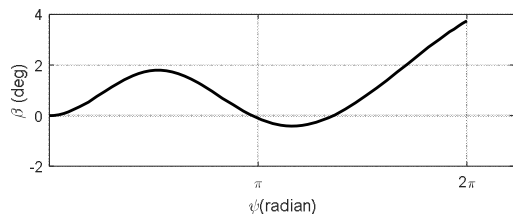
**نمودار ۱۴** تغییرات زمانی زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز هاور با فرض داشتن آفست پره



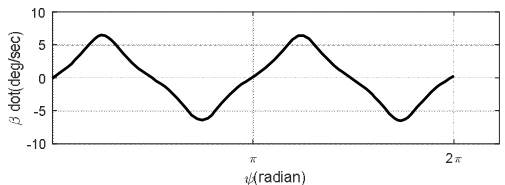
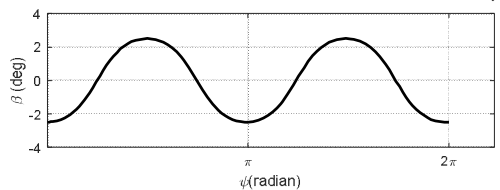
**نمودار ۱۱** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0$  در حضور فنر لولا



**نمودار ۱۵** تغییرات زمانی زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز هاور با فرض نداشتن آفست پره



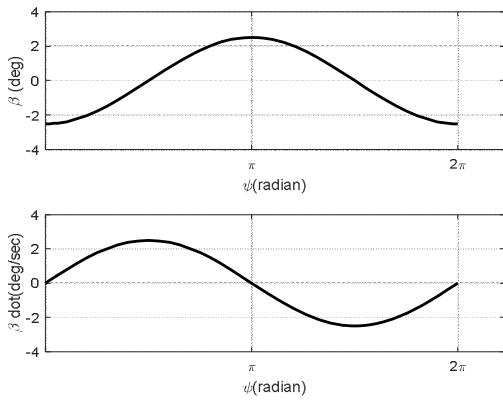
**نمودار ۱۲** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض  $e = 0.15$  در حضور فنر لولا



**نمودار ۱۶** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض داشتن آفست پره  $e = 0.15$  (مقادیر بزرگ زاویه فلپینگ)

نمودارهای ۱۳ تا ۱۵ مدلسازی فلپینگ در حالت معادلات خطی شده مکاین در حالت هاور و کروز را در حالت دارای آفست و بدون آفست را نشان می‌دهند.

حال در شبیه‌سازی با رویکرد متفاوت آیرودینامیکی و دینامیکی برمویل، با فرض زوایای بزرگ و کوچک فلپینگ نتایج شبیه‌سازی در نمودارهای ۱۶ تا ۲۰ برای مقادیر مختلف آفست در پرواز کروز نشان داده شده است.

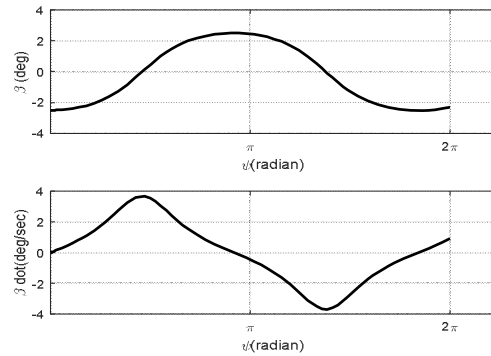


**نمودار ۲۰)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض داشتن آفست پره  $e = 0$  (مقادیر کوچک زاویه فلپینگ)

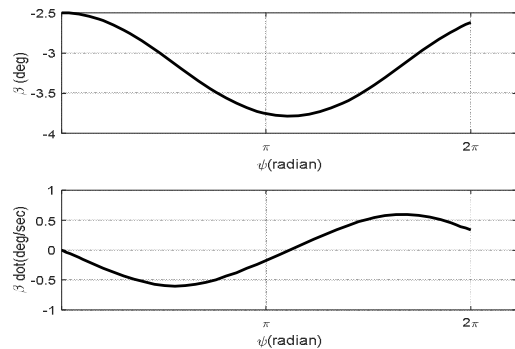
### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، استفاده از جزئیات بیشتر و واقعی‌تر به حالت پرواز واقعی با در نظر گرفتن گشتاور وزن پره، فرکانس فلپینگ و آفست لولا باعث شده است مدل‌سازی دقیق‌تری نسبت به مطالعات در سال‌های اخیر داشته باشد. مشاهده شد که با افزایش زاویه حمله ایرفویل، در نسبت پیشروی ثابت، زاویه فلپینگ و نرخ آن افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که افزایش نسبت پیشروی باعث کاهش زاویه فلپینگ می‌شود. از طرفی افزایش در طول پره هلیکوپتر منجر به افزایش زاویه فلپینگ و نرخ آن می‌شود. از میزان الاستیسیته ایرفویل پره نیز می‌توان استنتاج کرد که افزایش طول پره منجر به افزایش میزان الاستیسیته می‌شود و در نتیجه زاویه ارتعاش و فلپینگ افزایش می‌یابد. تعداد پره استفاده شده در هلیکوپتر نیز در میزان زاویه فلپینگ و نرخ آن تاثیر دارد، به این صورت که با کاهش تعداد پره‌ها، میزان زاویه فلپینگ و نرخ آن کاهش می‌یابد. در شبیه‌سازی معادله فلپینگ در هارمونیک‌های بالا با افزایش آفست، میزان فلپینگ و نرخ آن نیز افزایش یافت. در مدل‌سازی خطی مک/مین تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز رو به جلو در پنج ثانیه اول پرواز نسبت به پرواز هاور بیشتر است. هنگامی که لاک نامبر برابر یک می‌شود، تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن پیوسته در حال کاهش و افزایش است (نوسان دارد) و مدت زمان لازم برای ثابت شدن فلپینگ و نرخ آن افزایش می‌یابد. در مدل‌سازی غیرخطی برمویل با تاثیر آفست در گشتاور اعمالی به پره مشاهده می‌شود که با افزایش آفست، میزان تغییر زاویه فلپینگ و نرخ آن در یک دور کامل پره، افزایش می‌یابد. می‌توان گفت فلپینگ در پره روتور هلیکوپتر جزء رفتار طبیعی الاستیک پره می‌باشد و عملاً نمی‌توان آن را کنترل کرد. در واقع با مدل‌سازی دقیق رفتار دینامیک فلپینگ پره روتور هلیکوپتر، به پاسخ دقیق‌تر رفتار دینامیک حرکت هلیکوپتر پرداخته شد.

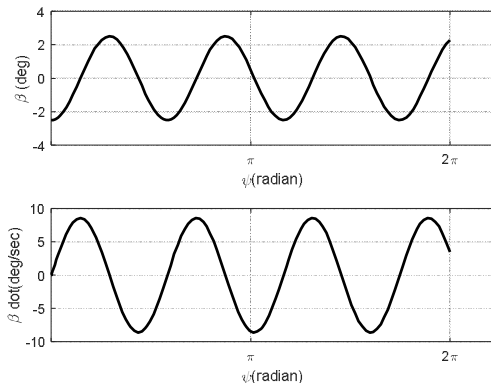
**تشکر و قدردانی:** نویسندگان مقاله از دبیر، هیئت تحریریه و داوران مجله مهندسی مکانیک مدرس، کمال تشکر و قدردانی را دارند.  
**تأییدیه اخلاقی:** این مقاله در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده و به نشریه دیگری نیز ارسال نشده است.  
**تعارض منافع:** موردی بیان نشد.  
**سهم نویسندگان:** محمد نوابی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی (۵۰٪)؛ حامد غفاری (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)  
**منابع مالی:** موردی بیان نشد.



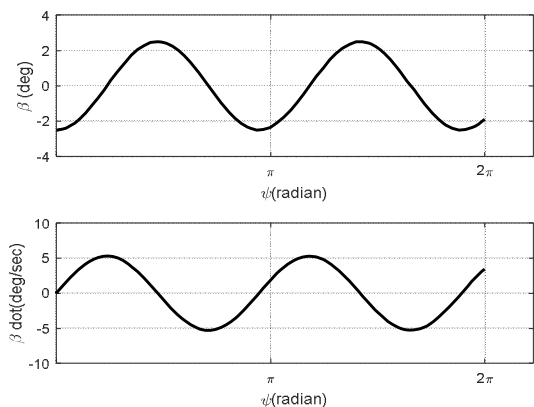
**نمودار ۱۷)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض داشتن آفست پره  $e = 0.04$  (مقادیر بزرگ زاویه فلپینگ)



**نمودار ۱۸)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض نداشتن آفست پره  $e = 0$  (مقادیر بزرگ زاویه فلپینگ)



**شکل ۲۸)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض داشتن آفست پره  $e = 0.15$  (مقادیر کوچک زاویه فلپینگ)



**نمودار ۱۹)** تغییرات زاویه فلپینگ و نرخ آن در پرواز کروز با فرض داشتن آفست پره  $e = 0.04$  (مقادیر کوچک زاویه فلپینگ)

6- Rogers JP. Applications of an analytic stall model to time-history and eigenvalue analysis of rotor blades. *Journal of the American Helicopter Society*. 1984;29(1):25-33.

7- Majhi JR, Ganguli R. Modeling helicopter rotor blade flapping motion considering nonlinear aerodynamics. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2008;27(1):25-36.

8- Chandiramani NK, Plaut RH, Librescu LI. Non-linear flutter of a buckled shear-deformable composite panel in a high-supersonic flow. *International Journal of Non Linear Mechanics*. 1995;30(2):149-167.

9- Librescu L, Chiocchia G, Marzocca P. Implications of cubic physical/aerodynamic non-linearities on the character of the flutter instability boundary. *International Journal of Non Linear Mechanics*. 2003;38(2):173-199.

10- Patil MJ, Hodges DH. On the importance of aerodynamic and structural geometrical nonlinearities in aeroelastic behavior of high-aspect-ratio wings. *Journal of Fluids and Structures*. 2004;19(7):905-915.

11- Tang DM, Dowell EH. Effects of geometric structural nonlinearity on flutter and limit cycle oscillations of high-aspect-ratio wings. *Journal of Fluids and Structures*. 2004;19(3):291-306.

12- Cesnik CES, Opoku DG, Nitzsche F, Cheng T. Active twist rotor blade modelling using particle-wake aerodynamics and geometrically exact beam structural dynamics. *Journal of Fluids and Structures*. 2004;19(5):651-668.

13- Desceliers C, Soize C. Non-linear viscoelastodynamic equations of three-dimensional rotating structures in finite displacement and finite element discretization. *International Journal of Non Linear Mechanics*. 2004;39(3):343-368.

14- Popescu B, Hodges DH. Asymptotic treatment of the trapeze effect in finite element cross-sectional analysis of composite beams. *International Journal of Non Linear Mechanics*. 1999;34(4):709-721.

15- Tongue BH, Flowers G. Non-linear rotorcraft analysis. *International Journal of Non Linear Mechanics*. 1988;23(3):189-203.

16- Vu NA, Lee JW. Aerodynamic design optimization of helicopter rotor blades including airfoil shape for forward flight. *Aerospace Science and Technology*. 2015;42:106-117.

17- Cai G, Wang B, Chen BM, Lee TH. Design and implementation of a flight control system for an unmanned rotorcraft using RPT control approach. *Asian Journal of Control*. 2013;5(1):95-119.

18- Goulos I, Pachidis V, Pilidis P. Lagrangian formulation for the rapid estimation of helicopter rotor blade vibration characteristics. *The Aeronautical Journal*. 2014;118(1206):861-901.

19- Branlard E, Gaunaa M, Macheaux E. Investigation of a new model accounting for rotors of finite tip-speed ratio in yaw or tilt. *Journal of Physics: Conference Series*. 2014;524: 012124.

20- Cameron CG. Performance and loads of a lift offset rotor: Hover and wind tunnel testing. *Journal of the American Helicopter Society*. 2019;64(2):1-12.

21- Friedmann PP. Rotary-wing aeroelasticity: Current status and future trends. *AIAA Journal*. 2004;42(10):1953-1972.

22- Johnson W. Milestones in rotorcraft aeromechanics: The 30th Alexander A. Nikolsky Honorary lecture.

## ۷- فهرست علائم

a	شیب منحنی برآ
$a_0$	مؤلفه شتاب پره
A	ممان اینرسی جسم صلب حول x
B	ممان اینرسی جسم صلب حول y
C	ممان اینرسی جسم صلب حول z
$C_T$	ضریب تراست
e	آفست
$F_x$	برآیند نیروها در راستای x
$F_y$	برآیند نیروها در راستای y
$F_r$	برآیند نیروها در راستای r
$I_b$	مومنتم اینرسی حول لولای فلیپینگ
L	مؤلفه‌های گشتاور
L	نیروی لیفت پره
M	مؤلفه‌های گشتاور
$M_b$	جرم پره
$M_F$	گشتاور کلی آیرودینامیکی فلیپینگ
N	مؤلفه‌های گشتاور
R	شعاع پره هلیکوپتر
$r_g$	مرکز ثقل پره
$S_b$	گشتاور ناشی از وزن پره
T	تراست
$U_t$	مؤلفه سرعت مماسی
$U_r$	مؤلفه سرعت شعاعی
<b>علائم یونانی</b>	
$\alpha$	زاویه حمله پره
$\beta$	زاویه فلیپینگ پره
$\gamma$	لاک‌نامبر
$\xi$	زاویه لگینگ پره
$\theta_c$	زاویه کنترلی سایکلیک کسینوسی
$\theta_t$	زاویه پیچش پره روتور
$\theta_s$	زاویه کنترلی سایکلیک سینوسی
$K_\beta$	نرخ مقاومت فنر
$\lambda$	نسبت جریان القایی
$\mu$	نسبت پیشروی
$\nu$	فرکانس طبیعی حرکت فلیپینگ
$\varphi$	زاویه بین برآیند سرعت و محور افقی
$\psi$	زاویه آرموت (موقعیت پره)
$\Omega$	سرعت زاویه‌ای پره

## منابع

1- Arcidiacono PJ. A method for computation of the induced velocity field of a rotor in forward flight, suitable for application to tandem rotor configurations. *Journal of the American Helicopter Society*. 1964;9(3):34-45.

2- Bramwell ARS, Balmford D, Done G. *Bramwell's helicopter dynamics*. Oxford UK: Butterworth-Heinemann; 2001. pp. 1-32.

3- Gordon Leishman J. *Principles of helicopter aerodynamics*. New York: Cambridge University Press; 2006. pp. 174-185.

4- Perdomo O, Wei FSJ. On the flapping motion of a helicopter blade. *Applied Mathematical Modelling*. 2017;46:299-311.

5- Seddon J, Newman S. *Basic helicopter aerodynamics*. Chichester: John Wiley & Sons; 2011. pp. 85-87.

- 28- Harris FD. Rotor performance at high advance ratio: Theory versus test [Internet]. Washington: NASA; 2008 [cited 2018 July 15]. Available from: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20090005978>
- 29- Ekblad M. Reduced-order modeling and controller design for a high-performance helicopter. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1990;13(3):439-449.
- 30- Lee S, Kim H, Lee S. Analysis of aerodynamic characteristics on a counter-rotating wind turbine. *Current Applied Physics*. 2010;10(2):S339-S342.
- 31- Gessow A, Crim AD. An extension of lifting rotor theory to cover operation at large angles of attack and high inflow conditions [Internet]. Langley Field VA: NACA; 1952 [cited 2018 June 14]. Available from: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930083369>
- 32- Majhi JR, Ganguli R. Helicopter blade flapping with and without small angle assumption in the presence of dynamic stall. *Applied Mathematical Modelling*. 2010;34(12):3726-3740.
- Journal of the American Helicopter Society. 2011;56(3):031001.
- 23- McLean D. Automatic flight control systems. New Jersey: Prentice Hall; 1990. pp. 121-123.
- 24- Sitaraman J, Potsdam M, Wissink A, Jayaraman B, Datta A, Mavriplis D. et al. Rotor loads prediction using helios: A multisolver framework for rotorcraft aeromechanics analysis. *Journal of Aircraft*. 2013;50(2):478-492.
- 25- van der Wall BG. Analytical estimate of rotor blade flapping caused by a straight vortex disturbance. *Journal of the American Helicopter Society*. 2017;62(4):1-6.
- 26- Datta A, Yeo H, Norman TR. Experimental investigation and fundamental understanding of a full-scale slowed rotor at high advance ratios. *Journal of the American Helicopter Society*. 2013;58(2):1-17.
- 27- Bennett JAJ. The era of the autogiro. *The Aeronautical Journal*. 1961;65(610):649-660.