



Optimal Landing of Unmanned Aerial Vehicle Using Vectorised High Order Expansions Method

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Moghadasian M.¹ PhD,

Roshanian J.^{*1} PhD

How to cite this article

Moghadasian M, Roshanian J. Optimal Landing of Unmanned Aerial Vehicle Using Vectorised High Order Expansions Method. Modares Mechanical Engineering. 2019;19-(11):2761-2769.

ABSTRACT

In this research, an innovative approach has been proposed to the calculation of high order sensitivities and designing its guidance commands for an unmanned aerial vehicle landing strategy design. This method, which is called vectorised high order method, has been developed based on high order expansions method and its implementation using matrix-based mathematical calculations. In this research, a method is presented to design and extract the acceleration commands for landing maneuvers, by combining the vectorised high order expansions method and optimal control theory. Accordingly, the sensitivity variables for the given problem are calculated up to the 6th term and then the reference trajectory and acceleration command in the simulations are updated based on the initial deviations. In order to performance evaluation of the proposed method, 3 landing scenarios with the different initial deviations have been considered and the results of simulation of the proposed guidance law have been presented.

Keywords High Order Expansions; Optimal Control; Optimal Maneuver; Unmanned Aerial Vehicle

¹Department of Flight Dynamics & Control, Faculty of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: No: Department of Flight Dynamics and Control, Faculty of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Daneshgah Boulevard, Ehsan Street Exit, East Zeynoddin Highway, Tehran, Iran

Phone: +98 (21) 73064207

Fax: +98 (21) 73064207

roshanian@kntu.ac.ir

Article History

Received: November 11, 2018

Accepted: May 21, 2019

ePublished: November 2, 2019

CITATION LINKS

[1] An approximate solution technique not dependent on small parameters: A special example [2] Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method [3] A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP [4] Forced vibration analysis of a nonlinear marine riser using homotopy analysis method [5] A novel semi analytical solution for the dynamic and heat transfer analysis of stagnation point flow using BK-HAM method [6] Application of high order expansions of two-point boundary value problems to astrodynamics [7] Gravity assist space pruning based on differential algebra [8] High order optimal control of space trajectories with uncertain boundary conditions [9] High order optimal feedback control of space trajectories with bounded control [10] A high order method for orbital conjunctions analysis: Monte Carlo collision probability computation [11] Long-term density evolution through semi-analytical and differential algebra techniques [12] Continuous maneuver of unmanned aerial vehicle using high order expansions method for optimal control problem [13] Semi-feedback optimal control design for nonlinear problems [14] Minimum landing-approach distance for a sailplane [15] Approximately optimal manoeuvre strategy for aero-assisted space mission [16] Chebyshev Polynomials

فرود بهینه پرنده بدون سرنشین به روش بسط مرتبه بالای برداری

مهدی مقدسیان PhD

گروه دینامیک پرواز و کنترل، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

جعفر روشنیان PhD*

گروه دینامیک پرواز و کنترل، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش، روشی نوآورانه برای محاسبه متغیرهای حساسیت مرتبه بالا و طراحی فرامین هدایت بر مبنای آن، به منظور فرود بهینه یک پرنده بدون سرنشین ارائه شده است. این روش که اصطلاحاً بسط مرتبه بالای برداری نامیده می‌شود، بر اساس توسعه روش بسط مرتبه بالا و پیاده‌سازی آن بر اساس محاسبات ماتریس-مینا شکل گرفته است. با ترکیب بسط مرتبه بالای برداری با تئوری کنترل بهینه، در این تحقیق روشی برای طراحی و استخراج فرامین شتاب به منظور مانور فرود ارائه شده است. با بهره‌مندی از روش پیشنهادی، متغیرهای حساسیت برای مسئله مورد نظر تا مرتبه ۶ام استخراج شده و سپس با اندازه‌گیری میزان انحراف متغیرهای حالت از مقدار اولیه، فرمان شتاب و مسیر مرجع در شبیه‌سازی‌ها به‌روز می‌گردند. به منظور ارزیابی عملکرد، ۳ سناریوی متفاوت با اغتشاشات اولیه متنوع در نظر گرفته شده و نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت پیشنهادی به طور کامل ارائه شده است.

کلیدواژه‌ها: بسط مرتبه بالا، کنترل بهینه، مانور بهینه، پرنده بدون سرنشین

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۳۱

*نویسنده مسئول: roshanian@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

به طور کلی می‌توان گفت تمامی پدیده‌های فیزیکی و طبیعی غیرخطی بوده و مدل‌های خطی ارائه شده برای برخی مسائل صرفاً با در نظر گرفتن ساده‌سازی‌ها و فرضیات مشخص استخراج شده‌اند. با استخراج یک مدل خطی از یک پدیده فیزیکی غیرخطی، می‌توان پاسخ‌های تقریبی برای مسئله استخراج کرد. همچنین می‌توان نتایج حاصل از حل مسئله را به شکل تحلیلی بررسی نمود. با این وجود، کاهش اعتبار پاسخ‌ها در نتیجه خطی‌سازی مسئله، اجتناب‌ناپذیر است.

به منظور افزایش دقت و اعتبار پاسخ‌ها، ناگزیر از حل عددی تقریبی استفاده می‌گردد. از جمله می‌توان به حل معادلات دینامیک سیالات با روش دینامیک سیالات محاسباتی، تحلیل سازه‌ها به روش عددی، حل مسئله کنترل بهینه به روش عددی مانند شبه طیفی و غیره اشاره نمود. اگرچه این روش‌ها حل نسبتاً دقیق از مسئله را ارائه می‌نمایند، اما پاسخ‌های ارائه شده به شکل عددی است و در نتیجه بررسی تحلیلی مسئله ممکن نخواهد بود. به علاوه، معمولاً پاسخ ارائه شده فقط برای شرایط مشخصی از مسئله معتبر است. به طور مثال، با استخراج ضریب پسا در یک زاویه حمله مشخص برای یک بال با استفاده از دینامیک سیالات محاسباتی، پاسخ استخراجی صرفاً برای همان زاویه حمله معتبر است و برای استخراج پاسخ کامل باید روند حل برای سایر زوایای حمله تکرار گردد. به طور مشابه، برای حل یک مسئله هدایت بهینه غیرخطی به روش عددی، با تغییر شرایط اولیه مسئله، روند حل باید تکرار گردد. به دلیل بار محاسباتی بالا، تکرار محاسبات برای شرایط مختلف به طور کلی زمان‌بر بوده و عملاً انجام محاسبات به شکل برخط، در بسیاری از مسائل ناممکن است.

برای حل این مشکل، روش‌های مبتنی بر بسط سری توانی در شکل‌های گوناگون ارائه شده‌اند. این روش‌ها با حل مجموعه‌ای از مسائل خطی، حلی تقریبی از مسئله غیرخطی ارائه می‌نمایند که به شکل تحلیلی قابل ارائه است. عموماً این روش‌ها را روش‌های تحلیلی تقریبی گویند.

از جمله روش‌های تحلیلی تقریبی می‌توان به روش آنالیز هموتوپی اشاره کرد. روش آنالیز هموتوپی اولین بار توسط لیاو^[1] ارائه شد. در ادامه روشی دیگر با نام روش هموتوپی اغتشاشی معرفی شد که تفاوتی با روش ارائه شده توسط لیاو ندارد^[2]. بر اساس روش آنالیز هموتوپی، برای یک مسئله غیرخطی، با حل مجموعه‌ای از معادلات خطی و ترکیب آن‌ها می‌توان پاسخ مسئله غیرخطی را استخراج کرد. برای پیاده‌سازی این روش لزوماً از نرم‌افزارهای محاسبات ریاضی تحلیلی مانند مپیل بهره گرفته می‌شود. به منظور حل این مشکل، در تحقیقی^[3] از ترکیب روش آنالیز هموتوپی و روش شبه طیفی بهره گرفته شده است؛ روش ارائه شده از دسته روش‌های عددی-تحلیلی است. با این کار مشکل بار محاسباتی حل تحلیلی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن، با بهره‌گیری از روش شبه طیفی مرتفع شده است. نمونه‌هایی از بهره‌مندی از روش آنالیز هموتوپی برای حل مسائل غیرخطی را می‌توان در تحقیقات ارائه شده^[4, 5] بررسی کرد.

روش دیگر برای حل این دسته از مسائل، روش بسط مرتبه بالا است. روش بسط مرتبه بالا، نسخه عمومی‌تر داده شده روش بسط سری است. در سال ۲۰۰۸ میلادی، در تحقیقی^[6] کاربرد روش بسط مرتبه بالا برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مقادیر مرزی بیان شده است. در این تحقیق جریان حساسیت‌های مرتبه بالا در معادلات دیفرانسیل با به کارگیری روش اویلر محاسبه می‌شود. دو سال بعد، در تحقیق مشابهی^[7] برای بیان کاربرد بسط مرتبه بالا ارائه شده است؛ در این تحقیق مانور مداری با کمک جاذبه مد نظر بوده است. اشاره مستقیم کاربرد بسط مرتبه بالا در حل مسئله کنترل بهینه در مرجع^[8] ارائه گردید؛ در این پژوهش حل مسئله کنترل بهینه به شکل حلقه باز ارائه شده است. به علاوه حل حلقه بسته مرتبه بالا مسئله کنترل بهینه در مرجع^[9] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. از مطالعات دیگر در زمینه بسط مرتبه بالا می‌توان به پژوهش^[10] اشاره کرد که در آن به شکل نوآورانه‌ای بسط مرتبه بالا برای حل مسئله شبیه‌سازی مونت کارلوی برخورد اجسام فضایی استفاده شده است. همچنین، اخیراً در تحقیقی^[11] از روش بسط مرتبه بالا بر پایه جبر دیفرانسیلی برای بررسی و تحلیل آماری دینامیک مداری بر پایه روابط معمول و همچنین روش میانگین‌گیری استفاده شده است.

در حقیقت روش بسط مرتبه بالا نیز همانند روش آنالیز هموتوپی یک روش تحلیلی تقریبی است. در این روش، با استفاده از روش‌هایی مانند بسط سری تیلور حول حل نامی مسئله، می‌توان پاسخ مسئله غیرخطی را نزدیک به حل نامی، به شکل تقریبی به دست آورد. برای این منظور یک مسئله خطی ناهمگن مکرراً تا مرتبه دلخواه حل می‌گردد.

دشواری اصلی در پیاده‌سازی روش بسط مرتبه بالا، روش آنالیز هموتوپی و روش‌های دیگر مبتنی بر بسط سری، سازوکار پیاده‌سازی محاسبات تحلیلی است؛ تمامی این روش‌ها نیازمند بهره‌مندی از نرم‌افزارهای محاسبات ریاضی تحلیلی هستند. برای رفع این مشکل، با توسعه روش ارائه شده در منابع^[12, 13]، روشی نو برای محاسبات بسط مرتبه بالا در این تحقیق ارائه خواهد شد که در آن با پیاده‌سازی روند محاسبات به شکل ماتریس-مینا، بار محاسباتی کاهش یافته و روند استخراج پاسخ مسئله تسهیل می‌گردد. به طور خاص، این

برای محاسبه این پارامترها از معادله (۲) می‌توان بهره برد.

$$\begin{aligned} L' &= \eta C_l v^2 \\ D' &= \eta C_d v^2 \\ C_d &= C_{d0} + C_{d1} C_l + C_{d2} C_l^2 \\ C_l &= C_{l\alpha} \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

در معادله (۲)، C_l و C_d به ترتیب ضرایب آیرودینامیکی برآ و پسا هستند. برای محاسبه این ضرایب پارامترهای C_{d0} ، C_{d1} ، C_{d2} و $C_{l\alpha}$ به ترتیب برابر با 0.05 ، 0.01 ، 0.05 و 0.025 هستند و η ثابت و معادل 0.01916 است. این عبارت برابر با نصف چگالی ضرب در سطح مشخصه آیرودینامیکی برای بی‌بعدسازی است. در معادله (۲)، α زاویه حمله است که بر اساس فرمان شتاب درخواستی بر اساس معادله (۳) محاسبه می‌گردد.

$$\alpha = \frac{a_N}{\eta C_{l\alpha} v^2} \quad (3)$$

در این رابطه که زاویه حمله مطلوب به شکل تقریبی محاسبه می‌گردد، a_N فرمان شتاب نرمال بر بردار سرعت است که باید محاسبه شود. برای استخراج حل نامی از روش عددی شبه طیفی استفاده شده است و به منظور به‌روزرسانی a_N از روش بسط مرتبه بالای برداری بهره گرفته می‌شود که در بخش بعدی به طور کامل شرح داده خواهد شد.

۳- بسط مرتبه بالای برداری

در این بخش ابتدا بسط مرتبه بالا تشریح شده و سپس با توسعه آن روش بسط مرتبه بالای برداری معرفی می‌گردد. با استفاده از روش بسط مرتبه بالای برداری، راهکاری برای حل تحلیلی تقریبی مسائل غیرخطی ارائه خواهد گردید.

۳-۱- بسط مرتبه بالا

فرض کنید دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل n معادله و متغیر حالت وابسته Z_1, \dots, Z_n داده شده است که در آن زمان، t متغیر مستقل است. دستگاه معادلات به شکل معادلات معمولی غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط اولیه می‌توان دستگاه معادلات را با روش‌های عددی مثل رانگ-کوتا حل کرد. اگر فرض شود $Z_1^n(t), \dots, Z_n^n(t)$ مقادیر نامی حل مسئله باشد، مسیر مغشوش شده در نتیجه انحرافات اولیه را می‌توان به شکل $Z_1^p(t), \dots, Z_n^p(t)$ نشان داد. حال با فرض اینکه انحرافات برای شرایط اولیه متغیرهای حالت را می‌توان با $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ نشان داد در نتیجه معادله (۴) رابطه بین مقادیر نامی و مغشوش متغیرهای حالت را بیان می‌کند.

$$Z_i^p(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = Z_i^n(t) + Z_i^d(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

در این رابطه بالانویس d انحرافات را برای متغیرهای حالت نشان می‌دهد. با بررسی این معادله می‌توان دید که فرض شده است متغیرهای اغتشاشات تابعی نامعین از زمان و انحرافات اولیه است. فرم کلی این متغیر را می‌توان به شکل بسط سری تیلور چند متغیره ارائه کرد. در نتیجه:

$$Z_i^d(t, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{j=1}^n S_{\alpha_j}^i \alpha_j + \sum_{j=1, k=1}^n S_{\alpha_j \alpha_k}^i 2\alpha_j \alpha_k + \dots \quad (5)$$

که در آن $S_{\alpha_j}^i$ و $S_{\alpha_j \alpha_k}^i$ به طور عمومی تابعی از زمان هستند که باید تعیین گردند؛ این توابع حساسیت نامیده می‌شوند. در نهایت معادله (۴) را می‌توان به شکل ارائه شده در معادله (۶) بازنویسی کرد.

روش نوآورانه، با عنوان بسط مرتبه بالای برداری، برای حل مسئله فرود بهینه یک پرنده بدون سرنشین پیاده‌سازی شده و نتایج شبیه‌سازی‌ها ارائه خواهند شد.

در ادامه این تحقیق، ابتدا در بخش دوم مسئله فرود یک پرنده بدون سرنشین تعریف شده و معادلات حرکت در صفحه ارائه می‌شود. در ادامه، پس از مرور مختصری بر بسط مرتبه بالا، روش جدید بسط مرتبه بالای برداری به طور کامل در بخش سوم شرح داده خواهد شد. نهایتاً نتایج شبیه‌سازی‌ها و تحلیل کیفی آن در بخش چهارم بیان شده و در پایان دست‌آوردهای این تحقیق آورده شده است.

۲- تعریف مسئله و معادلات دینامیک حرکت

در این بخش، پیش از بیان جزئیات، مسئله مورد نظر و ماموریت آن به طور کامل تشریح می‌گردد و در ادامه معادلات دینامیک حرکت در دو بعد ارائه خواهند شد.

۲-۱- تعریف مسئله

هدف طراحی سازوکاری برای استخراج فرامین شتاب عمود بر بردار سرعت به منظور هدایت بهینه یک پرنده بدون سرنشین برای فرود در یک نقطه از پیش تعیین شده، است. همچنین زمان فرود نیز ثابت در نظر گرفته شده است. فرامین هدایت باید قابلیت به‌روزرسانی در شروع حرکت، نسبت به انحرافات اولیه در ارتفاع و زاویه مسیر را داشته باشند.

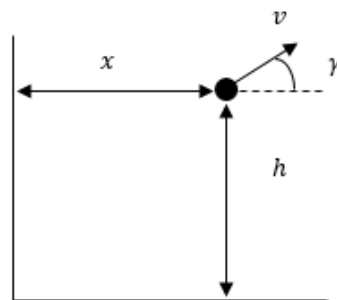
برای این مسئله، ارتفاع نامی اولیه برابر با 500 متر، زاویه مسیر نامی اولیه 10 -درجه، سرعت نامی اولیه 175 متر بر ثانیه بوده و فاصله تا نقطه فرود 1500 متر است. فرآیند فرود در 13 ثانیه انجام خواهد گرفت در حالی که مجموع مربع فرمان شتاب عمود بر بردار سرعت باید کمینه گردد. همچنین سرعت نهایی در لحظه فرود 90 متر بر ثانیه و زاویه مسیر در این حالت 5 -درجه در نظر گرفته شده است.

۲-۲- معادلات حرکت

مدل استفاده شده در این تحقیق بر گرفته از مرجع [14] است. در این مدل فرض می‌شود جاذبه، چگالی و جرم ثابت است و حرکت پرنده در صفحه عمودی اتفاق می‌افتد. به علاوه پرنده بدون سرنشین نوعی، به شکل جسم ذره‌ای در نظر گرفته می‌شود. معادلات ارائه شده در (۱) معادلات حرکت این پرنده بدون سرنشین را بیان می‌کند.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= v \sin \gamma \\ \dot{x} &= v \cos \gamma \\ \dot{v} &= -D' - g \sin \gamma + T' \cos \alpha \\ \dot{\gamma} &= \frac{T' \sin \alpha + L'}{v} + \frac{g \cos \gamma}{v} \end{aligned} \quad (1)$$

در معادله (۱)، x ، h ، v و γ به ترتیب ارتفاع، برد، سرعت و زاویه مسیر هستند. به علاوه، T' شتاب در راستای محور اول بردار بدنی است. در این رابطه D' ، L' به ترتیب پسا و برآ بر واحد جرم هستند و g شتاب جاذبه و برابر با 9.81 متر بر مجذور ثانیه است. شکل ۱ این متغیرهای حالت را به شکل گرافیکی معرفی می‌نماید.



شکل ۱ معرفی متغیرهای حالت

۳-۲- بسط مرتبه بالای برداری برای حل تقریبی مسائل غیرخطی

پس از بیان خلاصه روش بسط مرتبه بالا، در این بخش روش بسط مرتبه بالای برداری معرفی می‌گردد. برای این منظور در گام اول مفهوم بسط مرتبه نام یک بردار تشریح شده و در ادامه نگاشت‌های سه‌گانه مورد نیاز برای استخراج این بسطها معرفی خواهند شد.

مثال ۱- فرض کنید اگر $v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ در نتیجه بسط مرتبه دوم به شکل برداری آن به شکل معادله (۱۰) قابل ارائه است:

$$\langle v \rangle^2 = \begin{bmatrix} v_1^2 \\ 2v_1v_2 \\ 2v_1v_3 \\ v_2^2 \\ 2v_2v_3 \\ v_3^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

این مثال بیان کننده عبارت ریاضی $(v_1 + v_2 + v_3)^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + v_2^2 + 2v_2v_3 + v_3^2$ به شکل برداری و تفکیک المان‌های مختلف است. برای بردارهای کوچک و مرتبه‌های پایین، این محاسبات را می‌توان به سادگی انجام داد اما برای مقادیر حتی متوسط این کمیت‌ها، انجام این محاسبات بسیار دشوار و پیچیده خواهد شد. با استفاده از بسط مرتبه بالای برداری می‌توان این محاسبات را سهولت بخشید. در معادله (۱۰)، $\langle v \rangle^2$ بیان کننده بسط برداری مرتبه دوم v است. به طور کلی $\langle v \rangle^i$ بیان کننده بسط مرتبه نام برداری v خواهد بود. برای محاسبه بسط‌های برداری مرتبه بالا از نگاشت‌های سه‌گانه بهره گرفته می‌شود.

تعریف ۱- نگاشت $\Phi_v^{i,j}$ به منظور محاسبه $\langle v \rangle^i$ به کار می‌رود. برای این منظور، این نگاشت که بر مبنای المان‌های بردار $\langle v \rangle^j$ محاسبه می‌گردد. با ضرب ماتریسی $\langle v \rangle^{i-j} = \Phi_v^{i,j} \langle v \rangle^j$ ، بردار بسط مرتبه نام را نتیجه خواهد داد. این نگاشت، بردار مرتبه $(i-j)$ ام را به وسیله داده‌های بردار مرتبه j ام به بردار بسط مرتبه نام مرتبط می‌نماید؛ این کار صرفاً با یک ضرب ماتریس انجام می‌گیرد.

در حقیقت یک الگوی منظم و تکرار شونده برای محاسبه $\Phi_v^{i,j}$ وجود دارد. می‌توان سه گونه متفاوت برای این نگاشت‌ها در نظر گرفت که این سه گونه عبارتند از: نگاشت ساده، نگاشت کاملاً فشرده و نگاشت نیمه‌فشرده.

تعریف ۲- نگاشت $\Phi_v^{i,j}$ یک نگاشت ساده نامیده می‌شود زمانی که $j = 1$ باشد. برای وقتی که $j = i - 1$ این نگاشت، نگاشت کاملاً فشرده نامیده خواهد شد؛ در غیر این صورت نگاشت مورد نظر از نوع نگاشت نیمه‌فشرده است.

در ادامه به کارگیری نگاشت ساده را می‌توان با یک مثال نشان داد.

مثال ۲- بر اساس مثال ۱، نگاشت $\Phi_v^{2,1}$ به شکل زیر محاسبه می‌گردد.

$$\langle v \rangle^2 = \Phi_v^{2,1} \langle v \rangle^1 \rightarrow \begin{bmatrix} v_1^2 \\ 2v_1v_2 \\ 2v_1v_3 \\ v_2^2 \\ 2v_2v_3 \\ v_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 \\ v_3 & 0 & v_1 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & v_3 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$z_i^p(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = z_i^n(t) + S_{\alpha_1}^i \alpha_1 + \dots + S_{\alpha_n}^i \alpha_n + S_{\alpha_1}^i \alpha_1^2 + \dots + S_{\alpha_1, \alpha_2}^i 2\alpha_1 \alpha_2 + \dots + H.O.T \quad (6)$$

اکنون با فرض اینکه دستگاه معادلات دیفرانسیل مسئله را برای متغیرهای انحرافات می‌توان به شکل رابطه (۷) ارائه کرد.

$$\dot{z}^d = f_i(z_1^d, \dots, z_n^d); i = 1 \dots n \quad (7)$$

با قرار دادن معادله (۶) در (۱) و با استفاده از بسط سری تیلور حول مقادیر نامی، مسئله کلی را پس از ساده‌سازی می‌توان در قالب ماتریسی به شکل معادله (۸) ارائه کرد.

$$\begin{bmatrix} S_{\alpha_1}^1 & \dots & S_{\alpha_1}^1 \alpha_2 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ S_{\alpha_1}^n & \dots & S_{\alpha_1}^n \alpha_2 & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^1 & \dots & d_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^n & \dots & d_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{\alpha_1}^1 & \dots & S_{\alpha_1}^1 \alpha_2 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ S_{\alpha_1}^n & \dots & S_{\alpha_1}^n \alpha_2 & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{1,1}^1 & d_{1,2}^1 & \dots & d_{2,2}^1 & d_{2,3}^1 & \dots & d_{n,n}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1,1}^n & d_{1,2}^n & \dots & d_{2,2}^n & d_{2,3}^n & \dots & d_{n,n}^n \end{bmatrix} + H.O.T \quad (8)$$

معادله (۸) رابطه اصلی برای حل مسئله بسط مرتبه بالا است. در سمت چپ این معادله ماتریس حساسیت قرار دارد که هر ستون آن را می‌توان به شکل مستقل حل کرد. البته روند حل باید به ترتیب برای ستون اول تا ستون آخر دنبال گردد. با حل هر ستون، مقادیر حساسیت‌های محاسبه شده برای محاسبه حساسیت‌های ستون‌های بعدی، به شکل عبارت ناهمگنی استفاده می‌گردد. در معادله (۸)، $d_{j,k}^i$ و $d_{j,k}^i$ مقادیر مشتقات مرتبه اول و دوم معادله (۷) حول مسیر نامی هستند.

معادله (۸) را می‌توان به شکل فشرده‌تر، در قالب برداری معادله (۹) نوشت:

$$\Psi_i = \Delta_1 \Psi_i + \Omega_i; i = 2, \dots, q. \quad (9)$$

$$\Omega_i = \sum_{j=2}^i \Delta_j \Gamma_{j,i}; i > 1$$

که در این رابطه ماتریس Ψ_k در بردارنده حساسیت‌ها، ماتریس Δ_i در بردارنده اطلاعات مشتقات مراتب مختلف، ماتریس $\Gamma_{j,i}$ ترکیب‌های متفاوت حساسیت‌ها تا مرتبه مورد نظر، q بیشینه مرتبه محاسبه حساسیت‌ها و Ω_k عبارت ناهمگنی است.

به منظور حل معادله (۹) می‌توان با بهره‌گیری از نرم‌افزارهای محاسبات ریاضی تحلیلی بخش ناهمگنی مسئله را استخراج نمود و سپس دستگاه معادلات را برای محاسبه حساسیت‌های مرتبه مختلف حل کرد. اما، برای حل مسائل واقعی و حساسیت‌های مرتبه بالا، نرم‌افزارهای این‌چنینی فاقد قابلیت‌های مورد نیاز بوده و بار محاسباتی بسیار زیادی خواهند داشت. برای حل این مشکل، روش بسط مرتبه بالای برداری در ادامه معرفی می‌گردد که روند استخراج عبارت ناهمگنی و محاسبه حساسیت‌ها را تسهیل می‌بخشد.

معادله (۱۵) این رابطه را نشان می‌دهد در حالی که A_i و B ضرایب سری تیلور بوده و $\langle \dots \rangle^i$ بسط مرتبه i ام است. در استخراج این معادله فرض شده است که سری تیلور برای متغیر کنترل تنها تا مرتبه اول بسط داده شده است.

$$\begin{bmatrix} \dot{h}^d \\ \dot{v}^d \\ \dot{\gamma}^d \end{bmatrix} \approx A_1 \left\langle \begin{bmatrix} h^d \\ v^d \\ \gamma^d \end{bmatrix} \right\rangle^1 + \dots + A_6 \left\langle \begin{bmatrix} h^d \\ v^d \\ \gamma^d \end{bmatrix} \right\rangle^6 + B a_N^d \quad (15)$$

در ادامه، تابع هزینه آنچنان که در بخش ۲ بیان شد، به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} a_N^{d2} dt; t_f = 13 s \quad (16)$$

نهایتاً با تشکیل همیلتونین می‌توان متغیرهای شبه حالت و فرمان شتاب بهینه انحرافی را استخراج کرد.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} a_N^{d2} + [\lambda_h \quad \lambda_v \quad \lambda_\gamma] (A_1 \left\langle \begin{bmatrix} h^d \\ v^d \\ \gamma^d \end{bmatrix} \right\rangle^1 + \dots + A_6 \left\langle \begin{bmatrix} h^d \\ v^d \\ \gamma^d \end{bmatrix} \right\rangle^6 + B a_N^d) \quad (17)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \lambda_h &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h^d} \\ \lambda_v &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v^d} \\ \lambda_\gamma &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma^d} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_N^d} = 0 \rightarrow a_N^{d*} = -B^T \begin{bmatrix} \lambda_h \\ \lambda_v \\ \lambda_\gamma \end{bmatrix}$$

با محاسبه a_N^{d*} فرمان شتاب اعمالی در شبیه‌سازی به شکل معادله (۱۹) محاسبه و به‌روزرسانی می‌گردد.

$$a_N^{d*} \approx a_N^n + a_N^{d*} \quad (19)$$

در این رابطه، فرمان شتاب نامی محاسبه شده در گام اول است. باید خاطر نشان کرد که متغیرهای حالت نیز به شکل مشابهی در شبیه‌سازی‌ها به‌روزرسانی خواهند شد. با قرار دادن معادله (۱۵) و (۱۸) در قالب ارائه شده با بسط مرتبه بالای برداری در معادله (۹) استخراج ماتریس حساسیت‌ها، می‌توان به سادگی حساسیت‌های متغیرهای شبه حالت، a_N^{d*} و متغیرهای حالت را نسبت به انحراف اولیه محاسبه کرده و در شبیه‌سازی، فرمان شتاب و مسیر مرجع را به‌روزرسانی کرد.

به منظور ارزیابی عملکرد فرمان هدایت بهینه محاسبه شده بر مبنای حساسیت‌ها، ۳ سناریوی مختلف برای شبیه‌سازی انتخاب شده است:

سناریو اول: انحراف اولیه ارتفاع ۳۰-متر و انحراف اولیه زاویه مسیر ۳ درجه است.

سناریو دوم: انحراف اولیه ارتفاع ۳۰-متر، انحراف اولیه زاویه مسیر ۷-درجه، انحراف اولیه فاصله افقی ۳۰-متر و انحراف اولیه سرعت ۵متر بر ثانیه است.

سناریو سوم: انحراف اولیه ارتفاع ۲۰-متر، انحراف اولیه زاویه مسیر ۱۰-درجه، انحراف اولیه فاصله افقی ۲۰-متر و انحراف اولیه سرعت ۱۵-متر بر ثانیه است.

برای انجام شبیه‌سازی‌ها، $T' = -10(v - v^n) - 5(x - x^n)$ ، در نظر گرفته شده و تاثیر انحرافات اولیه متغیرهای حالت v و x در محاسبه فرمان هدایت جایگزین و به‌روزرسانی مسیر مرجع به وسیله

برای اطلاع بیشتر در مورد نحوه محاسبات نگاشت‌ها محققان علاقه‌مند می‌توانند به مرجع [15] مراجعه نمایند. در هر صورت، با بهره‌مندی از این نگاشت‌ها، می‌توان بخش ناهمگن معادله (۹) را به سادگی محاسبه کرد. برای این منظور، سمت راست تساوی در عبارت ناهمگن به شکل معادله (۱۲) بازنویسی می‌گردد.

$$\sum_{i=2}^q \Delta_i \left\langle \sum_{j=1}^q \Psi_j \langle \alpha \rangle^j \right\rangle^i \triangleq \sum_{i=2}^q \sum_{j=2}^i \Delta_j \Gamma_{j,i} \langle \alpha \rangle^i + H.O.T. \quad (12)$$

که در آن $\langle \alpha \rangle^i$ بسط برداری مرتبه i ام انحرافات اولیه است. در نتیجه:

$$\Omega_i = \sum_{j=2}^i \Delta_j \Gamma_{j,i}; i > 1 \quad (13)$$

که در این رابطه، $\Gamma_{j,i}$ داده‌های مربوط به حساسیت‌ها تا مرتبه i ام را در بر دارد. پس از مقایسه معادله (۱۲) و (۱۳)، برای محاسبه عبارت ناهمگنی Ω_i به تعریف دو اپراتور نیاز است: $\mathcal{G}_M^{i,j}$ و \mathcal{F}_M^i .

تعریف ۳- اپراتور \mathcal{F}_M^i در هر گام i امین ستون ماتریس M را در فرمت داده شده با $\Phi_{M(\dots,j)}^{i,1}$ قرار داده؛ این کار برای تمام ستون‌های ماتریس M انجام شده و نتایج به شکل ستونی الحاق شده و خروجی اپراتور را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۴- اپراتور $\mathcal{G}_M^{i,j}$ ترانزاده ماتریسی را باز می‌گرداند که بر مبنای $\Phi_m^{i,j}$ تشکیل شده است. در $\Phi_m^{i,j}$ بردار m اشاره به برداری ستونی دارد که هر المان آن یک ردیف از ماتریس M است.

با توجه به تعریف این دو اپراتور، در عمل می‌توان گفت که $\Gamma_{j,i}$ در بردارنده اطلاعات حساسیت‌های مختلف تا مرتبه i ام است. در نتیجه برای بردار انحرافات مرتبه i ام، $i - 1$ عبارت در زیر علامت سیگما وجود خواهد داشت و برای محاسبه هر عبارت $\Gamma_{j,i}$ حاصل جمع $i - 1 + j$ عبارت منتج از به‌کارگیری دو اپراتور یاد شده، محاسبه خواهد شد؛ برای این منظور از معادله (۱۴) بهره گرفته می‌شود.

$$\Gamma_{j,i} \triangleq \sum_{k=1}^{i-j+1} \mathcal{F}_{\Gamma_{1,k}}^{j-1} \mathcal{G}_{\Gamma_{j-1,i-k}}^{i-1,i-k}; \quad (14)$$

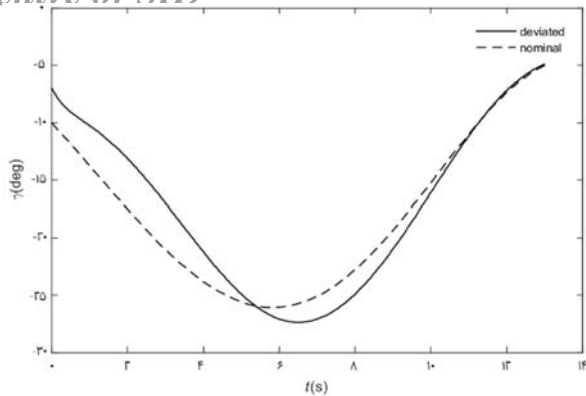
$$i \geq 2, j \geq 2, \Gamma_{1,l} = \Psi_l \text{ for } l = 1, \dots, q.$$

بدین ترتیب، با توجه به معادله (۱۴)، ترم ناهمگنی برای محاسبه حساسیت‌ها به سادگی محاسبه خواهد شد و پس از آن می‌توان با حل معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگنی ارائه شده در معادله (۹) مقادیر حساسیت‌ها را استخراج نمود.

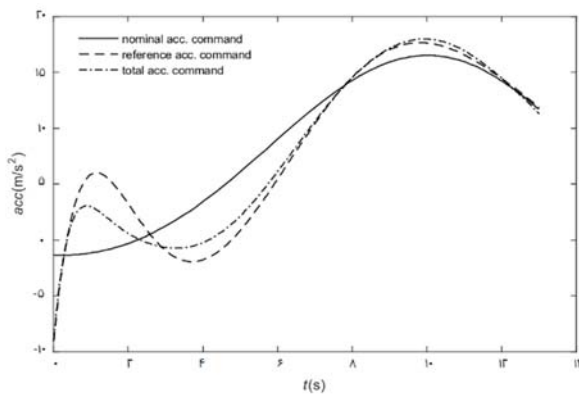
۴- حل مسئله، شبیه‌سازی پرواز و تحلیل نتایج

در بخش ۲ معادلات دینامیکی مسئله فرود یک پرنده بدون سرنشین استخراج شد و پس از آن در بخش ۳ تئوری بسط مرتبه بالای برداری تبیین گردید. در این بخش ابتدا در گام اول با در نظر گرفتن معادلات ارائه شده و همچنین تعریف مسئله، مسیر نامی فرود با استفاده از روش عددی شبه طیفی استخراج می‌گردد. برای بررسی بیشتر در مورد نحوه حل معادلات غیرخطی با بهره‌گیری از روش شبه طیفی علاقه‌مندان می‌توانند به مرجع [16] رجوع کنند. در این گام مقادیر نامی متغیرهای حالت، x^n, h^n, v^n و γ^d استخراج شده و همچنین مقدار نامی فرمان شتاب a_N^n محاسبه می‌گردد.

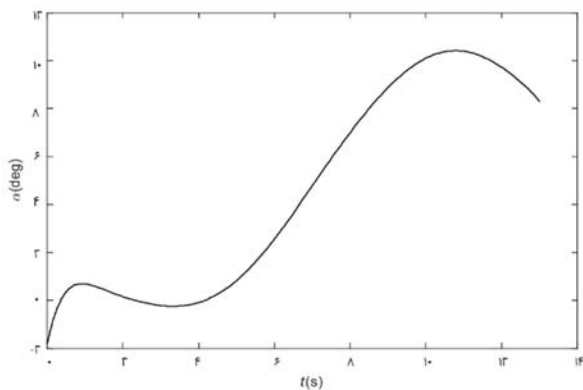
در ادامه، در گام بعدی حساسیت‌ها تا مرتبه ۶ام با بهره‌مندی از روش بسط مرتبه بالای برداری استخراج می‌گردد. برای این منظور معادله (۱) با استفاده از سری تیلور حول مسیر نامی تعیین شده در گام قبل بسط داده می‌شود و معادلات دینامیکی انحرافات استخراج می‌گردد.



نمودار (۳) تاریخچه زمانی زاویه مسیر: سناریو اول



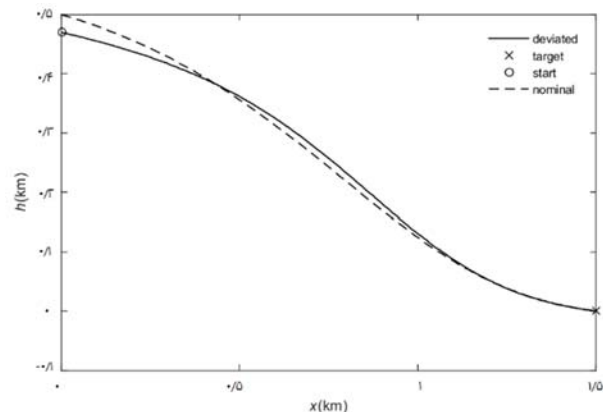
نمودار (۴) تاریخچه زمانی فرمان شتاب: سناریو اول



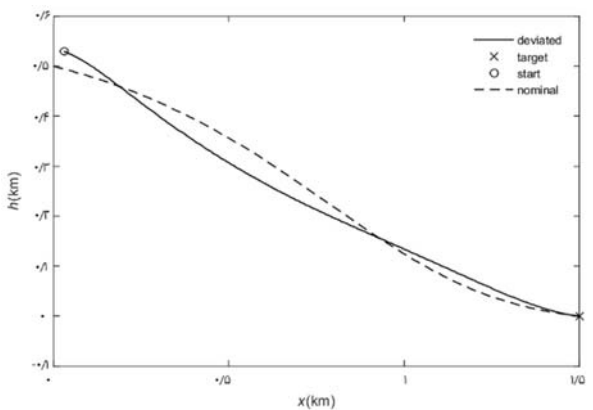
نمودار (۵) تاریخچه زمانی زاویه حمله: سناریو اول

این دو متغیر حالت لحاظ نشده است. دلیل این امر، امکان جبران این انحرافات با استفاده از شتاب پیشران است. از آنجا که دو کانال (شتاب عمود بر محور اول بدنی و در راستای آن) برای جبران انحرافات در دسترس هستند، فرض شده است که قانون هدایت مرتبه بالای پیشنهادی مستقیماً با انحرافات در ارتفاع و زاویه مسیر اقدام به به‌روزرسانی فرامین شتاب نرمال نموده و برای جبران انحرافات در برد و سرعت نسبت به مقادیر نامی، از شتاب ناشی از نیروی پیشران بهره گرفته می‌شود. برای این منظور، فرض شده است که صرفاً از یک کنترل تناسبی ساده با ضرایب ثابت، برای جبران انحرافات در برد و سرعت استفاده گردد.

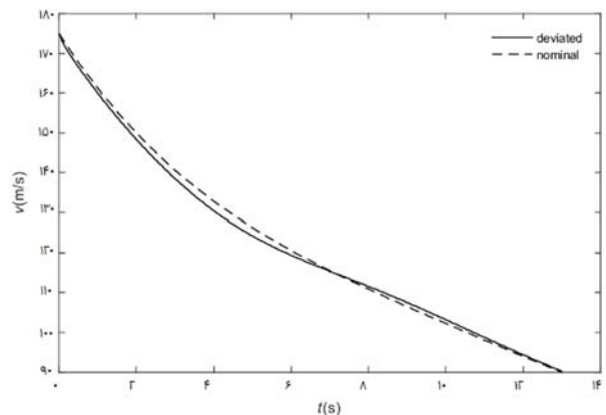
همچنین به منظور حداقل کردن اثر نامعینی‌ها و خطاهای محاسباتی عددی، از یک قانون کنترل پیروی از مسیر مرجع بر مبنای تئوری LQR نیز در شبیه‌سازی‌ها بهره گرفته شده است. برای این منظور، خطی‌سازی روی مسیر به‌روز شده انجام شده و ماتریس وزنی متغیرهای حالت برابر با ماتریس واحد و ماتریس وزنی فرمان اصلاحی کنترل برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شده است. پس از محاسبه مقادیر انحراف نسبت به مسیر به‌روز شده و محاسبه فرمان شتاب اصلاحی، برای اعمال خروجی LQR، مقدار اصلاحی با فرمان شتاب به‌روز شده توسط بسط مرتبه بالا جمع شده و به شکل فرمان شتاب کل به پرنده بدون سرنشین اعمال می‌گردد. نمودارهای ۱ تا ۵، نتایج شبیه‌سازی را برای سناریوی اول، و به طور مشابه نمودارهای ۶ تا ۱۰ و نمودارهای ۱۱ تا ۱۵، به ترتیب نتایج شبیه‌سازی را برای سناریوهای دوم و سوم نمایش می‌دهند.



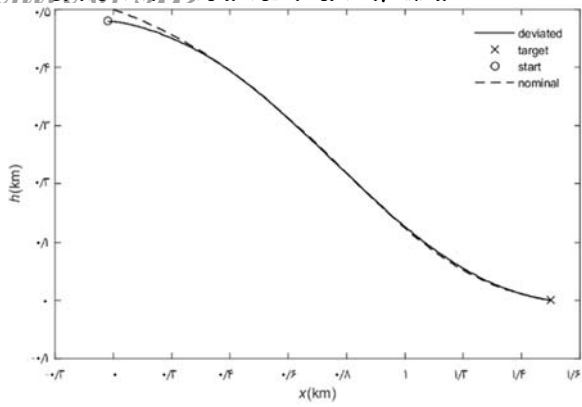
نمودار (۱) مسیر حرکت: سناریو اول



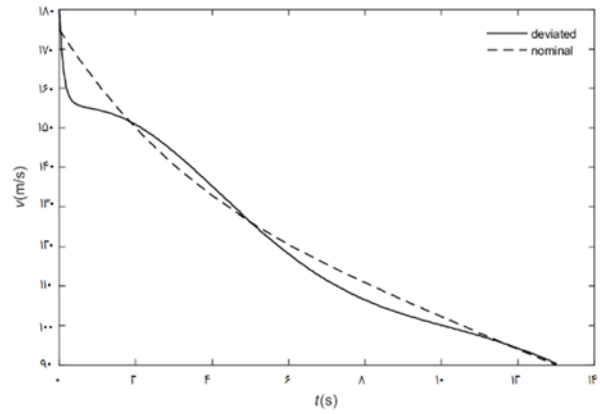
نمودار (۲) مسیر حرکت: سناریو دوم



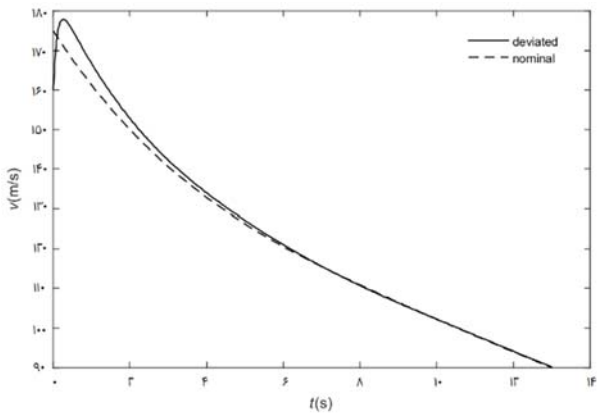
نمودار (۳) تاریخچه زمانی سرعت: سناریو اول



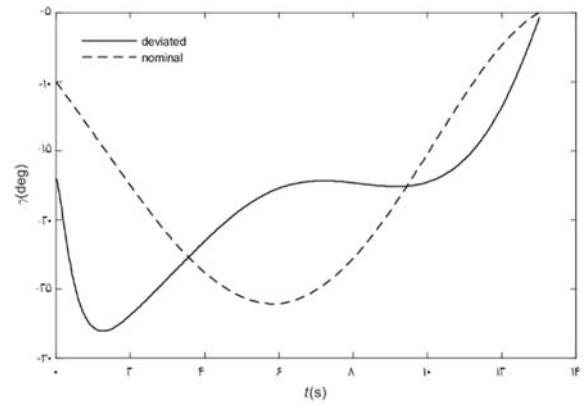
نمودار ۱۱) مسیر حرکت: سناریو سوم



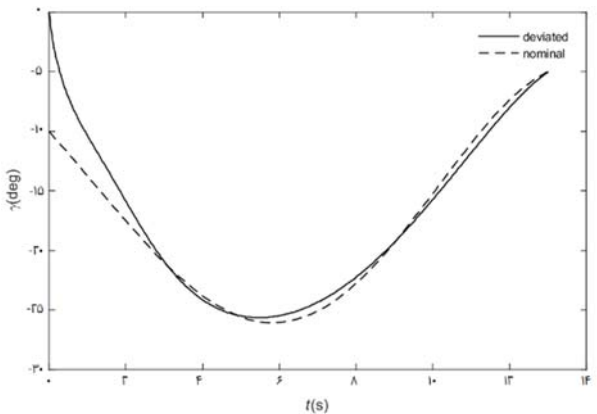
نمودار ۷) تاریخچه زمانی سرعت: سناریو دوم



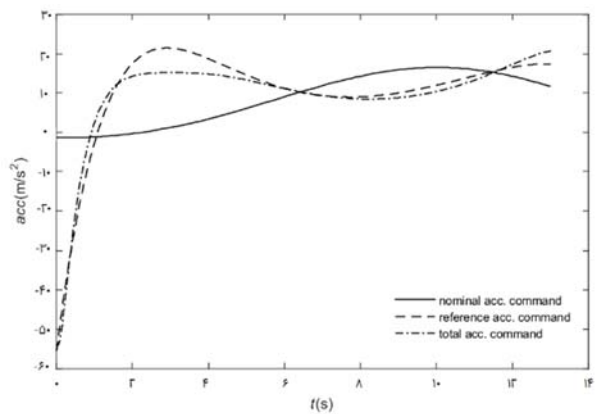
نمودار ۱۲) تاریخچه زمانی سرعت: سناریو سوم



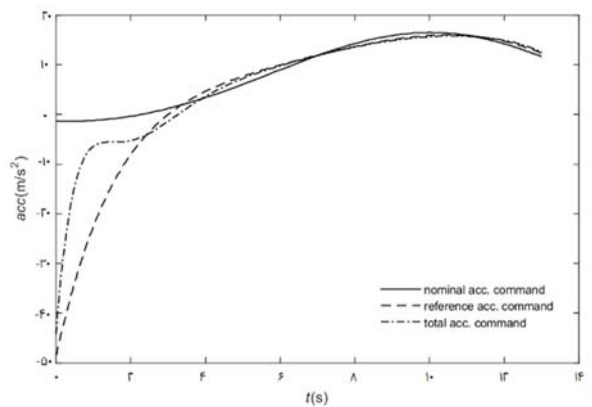
نمودار ۸) تاریخچه زاویه مسیر: سناریو دوم



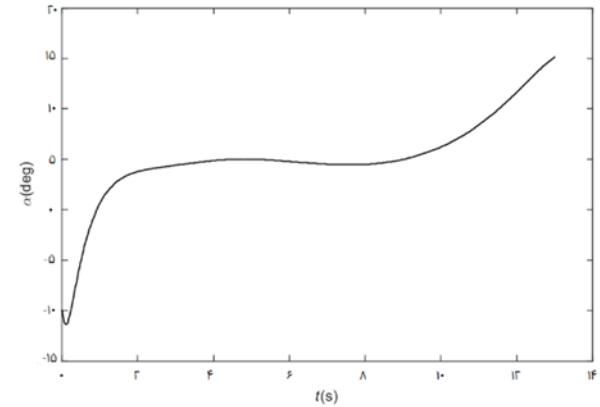
نمودار ۱۳) تاریخچه زمانی زاویه مسیر: سناریو سوم



نمودار ۹) تاریخچه زمانی فرمان شتاب: سناریو دوم



نمودار ۱۴) تاریخچه زمانی فرمان شتاب: سناریو سوم



نمودار ۱۰) تاریخچه زمانی زاویه حمله: سناریو دوم

۵- دست‌آورد‌های پژوهش و سخن پایانی

در این پژوهش، طراحی قانون هدایت بهینه برای فرود یک پرنده بدون سرنشین با در نظر گرفتن اغتشاشات اولیه مد نظر قرار گرفت. بدین منظور پس از استخراج معادلات حرکت، تئوری بسط مرتبه بالا شرح داده شد و با توسعه آن روش نوآورانه بسط مرتبه بالای برداری معرفی گردید. این روش به منظور حل مسائل بسط مرتبه بالا در قالب محاسبات ماتریسی ارائه شده است و مزیت اصلی آن کاهش بار و زمان محاسبات است. بدین ترتیب، با پیاده‌سازی روش بسط مرتبه بالای برداری در فرمولاسیون مسئله هدایت بهینه یک پرنده بدون سرنشین به منظور فرود، حساسیت‌ها تا مرتبه ۱۶م مسئله استخراج شد؛ در حالی که استخراج این حساسیت به دلیل بار محاسباتی زیاد، با استفاده از نرم‌افزارهای محاسبات ریاضی تحلیلی امکان‌پذیر نیست. در ادامه، با بهره‌مندی از حساسیت‌ها به منظور به‌روزرسانی مسیر حرکت و فرمان شتاب بهینه، سه سناریوی مختلف برای فرود پرنده بدون سرنشین شبیه‌سازی گردید. با بررسی نتایج شبیه‌سازی، می‌توان انعطاف‌پذیری و قابلیت‌های چشم‌گیر طراحی قانون هدایت بر مبنای حساسیت‌های محاسبه شده به وسیله بسط مرتبه بالای برداری را ارزیابی و مشاهده کرد. شایان ذکر است که، روش بسط مرتبه بالای برداری علاوه بر مسئله مورد بررسی در این تحقیق، در شبیه‌سازی‌های مونت کارلو، طراحی کنترلر مرتبه بالا با ضرایب ثابت، طراحی فیلتر کالمن مرتبه بالا و غیره قابل پیاده‌سازی و به‌کارگیری است.

تشکر و قدردانی: بدین وسیله نویسندگان کمال قدردانی و تشکر را از داوران و سردبیر مجله اعلام می‌نمایند.

تاییدیه اخلاقی: نویسندگان این مقاله، به طور کامل تلاش خود را در راستای رعایت اصول و چارچوب اخلاق علمی انجام داده‌اند.

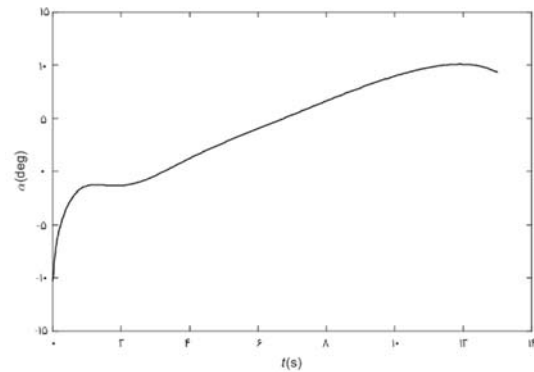
تعارض منافع: در این تحقیق نام و میزان مشارکت تمامی افراد سهیم به طور کامل ذکر گردیده است؛ همچنین مراجع مورد استفاده در این تحقیق، به طور کامل بر اساس چارچوب اخلاق علمی ذکر شده‌اند.

سهم نویسندگان: مهدی مقدسیان (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۵۰٪)؛ جعفر روشنیان (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی (۵۰٪)

منابع مالی: این تحقیق تحت پوشش مالی نهاد یا سازمانی نبوده است.

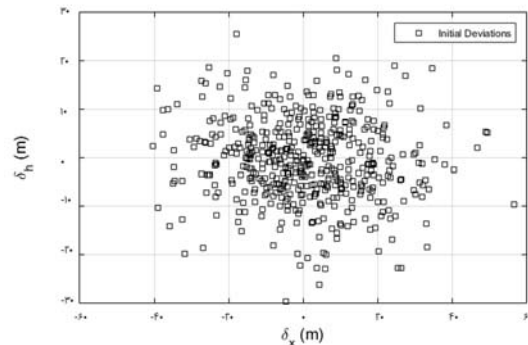
۶- فهرست علائم

a_N	فرمان درخواستی شتاب ($\frac{m}{s^2}$)
d_j^i	مشتقات مرتبه اول مربوط به متغیر z
$d_{j,k}^i$	مشتقات مرتبه دوم مربوط به متغیر z
g	شتاب جاذبه ($\frac{m}{s^2}$)
h	ارتفاع (متر)
h^d	انحرافات ارتفاع (متر)
h^n	ارتفاع نامی (متر)
h^p	ارتفاع مغشوش (متر)
p	بردار متغیر شبه‌حالت
r	فاصله تا هدف (متر)
s_j^i	حساسیت‌های مرتبه اول مربوط به متغیر z
$s_{j,k}^i$	حساسیت‌های مرتبه دوم مربوط به متغیر z
t	زمان (s)
u	فرمان کنترل یا نسبت ضریب برآ بیشینه
v	سرعت ($\frac{m}{s}$)
v^d	انحرافات سرعت ($\frac{m}{s}$)
v^n	سرعت نامی ($\frac{m}{s}$)

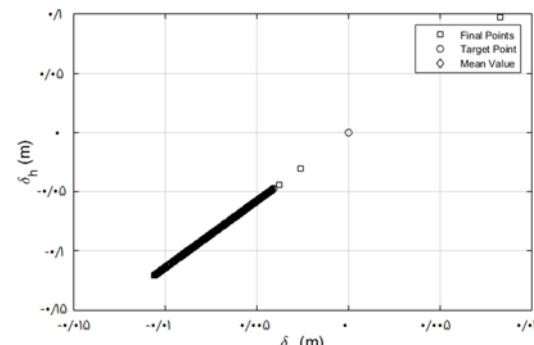


نمودار ۱۵) تاریخچه زمانی زاویه حمله: سناریو سوم

در نمودارهای ارائه شده، مسیر نامی و فرمان شتاب نامی نیز به عنوان مرجع مقایسه آورده شده است. در حقیقت، هدف نمایش اختلاف دو مسیر نامی و مغشوش بوده و بازگشت به مسیر نامی مد نظر نیست. عملاً در شروع شبیه‌سازی، با توجه به اندازه انحرافات اولیه مسیر مرجع و فرمان شتاب جدید محاسبه می‌گردد. پس از آن در زمان شبیه‌سازی، قانون کنترل LQR در نظر گرفته شده، مسیر مرجع جدید را دنبال خواهد کرد. در نتیجه، با وجود انحرافات اولیه، پرنده بدون سرنشین مسیری بهینه را برای انجام مانور فرود طی خواهد کرد. با بررسی دقیق نمودارها، مشاهده می‌گردد که تمامی شرایط نهایی در زمان نهایی از پیش تعیین شده، برآورده شده‌اند. علاوه بر سه سناریوی فوق، یک شبیه‌سازی مونت کارلو بر مبنای انحرافات اولیه در مقدار برد و ارتفاع انجام شده که در مجموع مشتمل بر ۵۰۰ شبیه‌سازی مستقل است. نمودار ۱۶ انحرافات اولیه با توزیع نرمال و نمودار ۱۷ نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو را نمایش می‌دهند. با بررسی نتایج، مشاهده می‌گردد که انحراف از مقادیر نهایی برد و ارتفاع بسیار کوچک هستند و قانون هدایت طراحی شده به خوبی انحرافات اولیه را جبران می‌نمایند.



نمودار ۱۶) توزیع انحرافات اولیه در شبیه‌سازی مونت کارلو



نمودار ۱۷) انحرافات نهایی در شبیه‌سازی مونت کارلو

4- Poorjanshidian M, Mahjoob Moghadas S, Mottalebi AA, Sheikhi J. Forced vibration analysis of a nonlinear marine riser using homotopy analysis method. Journal of Marine Engineering. 2014;10(19):67-74. [Persian]

5- Zamani E, Nazif HR. A novel semi analytical solution for the dynamic and heat transfer analysis of stagnation point flow using BK-HAM method. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(3):270-280. [Persian]

6- Di Lizia P, Armellin R, Lavagna M. Application of high order expansions of two-point boundary value problems to astrodynamics. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008;102(4):355-375.

7- Armellin R, Di Lizia P, Topputo F, Lavagna M, Bernelli-Zazzera F, Berz M. Gravity assist space pruning based on differential algebra. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2010;106:1.

8- Di Lizia P, Armellin R, Bernelli-Zazzera F, Berz M. High order optimal control of space trajectories with uncertain boundary conditions. Acta Astronautica. 2014;93:217-229.

9- Di Lizia P, Armellin R, Morselli A, Bernelli-Zazzera F. High order optimal feedback control of space trajectories with bounded control. Acta Astronautica. 2014;94(1):383-394.

10- Morselli A, Armellin R, De Lizia P, Bernelli-Zazzera F. A high order method for orbital conjunctions analysis: Monte Carlo collision probability computation. Advances in Space Research. 2015;55(1):311-333.

11- Witting A, Colombo C, Armellin R. Long-term density evolution through semi-analytical and differential algebra techniques. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2017;128(4):435-452.

12- Moghadasian M, Roshanian J. Continuous maneuver of unmanned aerial vehicle using high order expansions method for optimal control problem. Modares Mechanical Engineering. 2018;17(12):382-390. [Persian]

13- Moghadasian M, Roshanian J. Semi-feedback optimal control design for nonlinear problems. Optimal Control Applications and Methods. 2018;39(2):549-562.

14- Pierson BL, Chen I. Minimum landing-approach distance for a sailplane. Journal of Aircraft. 1979;16(4):287-288.

15- Moghadasian M, Roshanian J. Approximately optimal manoeuvre strategy for aero-assisted space mission. Advances in Space Research. 2019;64(2):436-450.

16- Mason JC, Handscomb DC. Chebyshev Polynomials. 1st Edition. New York: CRC Press; 2002. pp. 237-267.

سرعت مغشوش $(\frac{m}{s})$	v^p
برد (متر)	x
متغیر حالت عمومی	z_i
متغیر حالت عمومی مغشوش	z_i^p
متغیر حالت عمومی انحراف (اغتاشات)	z_i^d
ماتریس عمومی ضرایب فضای حالت	A_i
ماتریس عمومی ضرایب کنترل	B
ضریب پسا برآ صفر	C_{d0}
ضریب پسا اول	C_{d1}
ضریب پسا دوم	C_{d2}
ضریب برآ	C_l
ضریب برآ بیشینه	C_{lmax}
پسا بر واحد جرم $(\frac{m}{s^2})$	D'
تابع هزینه	J
برآ بر واحد جرم $(\frac{m}{s^2})$	L'
شتاب در راستای محور اول دستگاه بدنی $(\frac{m}{s^2})$	T'
علامه یونانی	
زاویه حمله (درجه)	α
انحراف اولیه متغیر نام	α_i
زاویه مسیر (درجه)	γ
انحرافات زاویه مسیر (درجه)	γ^d
زاویه مسیر نامی (درجه)	γ^n
زاویه مسیر مغشوش (درجه)	γ^p
نصف چگالی در سطح مشخصه آیرودینامیک	η
ضرایب محاسبه شده از سری تیلور برای مرتبه نام	Δ_i
ماتریس حساسیت‌های مرتبه نام	Ψ_i
عبارت ناهمگنی نام	Ω_i

منابع

1- Liao SJ. An approximate solution technique not dependent on small parameters: A special example. International Journal of Non Linear Mechanics. 1995;30(3):371-380.

2- Liao Sh. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method. Applied Mathematics and Computation. 2005;169(2):1186-1194.

3- Motsa SS, Sibanda P, Shateyi S. A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010;15(9):2293-2302.