



## Thermal Effects on Free Vibration of Functionally Graded Curved Timoshenko Nanobeams Resting on Winkler–Pasternak Elastic Foundation

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Ghoytasi I. <sup>1</sup> BSc,  
Rahmani O.\*<sup>1</sup> PhD

#### How to cite this article

Ghoytasi I, Rahmani O. Thermal Effects on Free Vibration of Functionally Graded Curved Timoshenko Nanobeams Resting on Winkler–Pasternak Elastic Foundation. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(12):2865-2875.

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, University of Zanjan, Zanjan, Iran

#### \*Correspondence

Address: Engineering Faculty, University of Zanjan, Zanjan, Iran  
Phone: -  
Fax: +98 (24) 32283204  
omid.rahmani@znu.ac.ir

#### Article History

Received: November 1, 2018  
Accepted: May 26, 2019  
ePublished: December 21, 2019

### ABSTRACT

In this paper, the effects of unified temperature loading and Winkler-Pasternak elastic foundation on the vibration of functionally graded curved nanobeam have been studied. The proposed model is based on the modified couple stress theory and the Timoshenko beam model. The continuous distribution of material along the thickness of functionally graded curved nanobeam is achieved by changing the gradient index in the volume fraction. The governing equations and related boundary conditions are obtained using the Hamilton principle. By analyzing the quantitative and qualitative results in the tables and figures, influences of geometrical and thermo-physical parameters such as gradient index, aspect ratio, unified temperature difference, the ratio of thickness to length scale parameter and arc angle of functionally graded curved nanobeam on the natural frequency for different vibration mode have been interpreted. There is an excellent agreement between the present results and the results of the previous works. Applied temperature loading increases the sensitivity of the natural frequency to the changes in the aforementioned parameters and also increases the range of its changes. Also, applying the Pasternak elastic foundation changes the behavior of the natural frequency to the temperature changes.

**Keywords** Functionally Graded Curved Nanobeam; Thermal Buckling; Free Vibration; Modified Couple Stress; Winkler–Pasternak Elastic Foundation

### CITATION LINKS

[1] Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS ... [2] Atomic force microscopy as a novel pharmacological ... [3] Role of material microstructure in plate ... [4] Couple stress based strain gradient theory for ... [5] Influence of couple-stresses on stress ... [6] Effects of couple-stresses in linear ... [7] Theories of elasticity with couple-stress. Archive for ... [8] The modified couple stress functionally graded Timoshenko ... [9] Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG ... [10] Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler ... [11] Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order ... [12] Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro ... [13] Dynamic characteristics of curved nanobeams using nonlocal higher-order ... [14] MEMS materials and processes ... [15] Carbon nanoarch encapsulating ... [16] Postbuckling instability of nonlinear nanobeam with geometric imperfection embedded in elastic ... [17] A nonlocal curved beam model based on a modified couple ... [18] Free in-plane vibration of curved beam structures: a ... [19] Size-dependent three-dimensional free vibration of ... [20] Free vibration of deep curved FG nano-beam based on modified couple ... [21] Nonlinear dynamic response of FGM beams with ... [22] Vibration and buckling analysis of double-functionally graded Timoshenko beam ... [23] Investigation of free vibration response of smart sandwich ... [24] The modified couple stress model for bending of normal deformable ... [25] Static and free vibration analyses of functionally graded nano-composite plates reinforced ... [26] Thermomechanical bending response of FGM thick ... [27] Thermally induced vibration of a functionally graded micro-beam ... [28] Vibration analysis of rotating functionally graded Timoshenko ... [29] Effects of thermal and shear deformation on vibration response of ... [30] The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis ... [31] Effect of temperature and porosity on the vibration behavior of two-dimensional ... [32] Buckling and free vibration of shallow curved micro/nano-beam based on strain ... [33] Nonlinear thermal stability and vibration of pre/post-buckled temperature-and ... [34] Thermal effect on free vibration and buckling of size-dependent ... [35] Theory of ... [36] Experiments and theory in strain ... [37] Size-dependent vibration of functionally graded curved ...

## اثرات دمایی بر ارتعاشات آزاد نانوتیرهای خمیده تابعی مدرج تیموشنکو روی بستر کشسان وینکلر- پسترناک

ابراهیم قویطاسی BSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

امید رحمانی PhD\*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

### چکیده

در این مقاله اثرات بارگذاری دمایی و بستر کشسان وینکلر- پسترناک بر ارتعاشات نانوتیر خمیده تابعی مدرج مورد مطالعه قرار گرفته است. فرضیات موجود بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل تیر تیموشنکو توسعه داده شده است. توزیع مواد سازنده در راستای ضخامت پیوسته بوده و به واسطه تغییر شاخص گرا دیان در کسر حجمی، شیب توزیع مواد در این راستا توصیف شده است. به کمک اصل همپلتون معادلات حاکم و شرایط مرزی به دست آمده‌اند. با تحلیل نتایج کمی و کیفی در جداول و شکل‌ها، نحوه اثرات پارامترهای مؤثر هندسی و ترموفیزیکی نظیر شاخص گرا دیان، نسبت بی‌بعد طول به ضخامت، اختلاف دمای یکنواخت، نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طولی و زاویه کمان نانوتیر خمیده تابعی مدرج روی فرکانس طبیعی در مدهای مختلف ارتعاشی تفسیر شده است. با اعتبارسنجی همپوشانی خوبی بین نتایج حاضر و مطالعات قبلی به دست آمد. با بررسی نتایج روشن می‌شود که اعمال بارگذاری دمایی سبب افزایش حساسیت فرکانس طبیعی به تغییرات پارامترهای مذکور و همچنین بزرگتر شدن دامنه تغییرات آن می‌شود. همچنین لحاظ کردن ضریب بستر پسترناک باعث تغییر رفتار فرکانس طبیعی به تغییرات دمایی می‌شود.

**کلیدواژه‌ها:** نانوتیر خمیده تابعی مدرج، کمانش حرارتی، ارتعاشات آزاد، تنش کوپل اصلاح شده، بستر کشسان وینکلر- پسترناک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۳/۵

\* نویسنده مسئول:omid.rahmani@znu.ac.ir

### ۱- مقدمه

تیرها به‌طور گسترده‌ای در دستگاه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به نقش اساسی تیرها در سازه‌های فنی از جمله دستگاه‌های در مقیاس میکرو و نانو، پژوهشگران در تلاش هستند تا روش‌های تولید، قابلیت‌های مکانیکی، هوشمندی و دیگر خواص مورد نیاز این سازه‌ها را بهبود بخشند. با توسعه صنایع جدید و فرآیندهای مدرن بسیاری از سازه‌ها در محیط‌های حرارتی دمابالا مورد استفاده قرار گرفته‌اند و به این ترتیب دسته جدیدی از مواد به نام مواد تابعی مدرج تولید شده‌اند. مواد تابعی مدرج با توجه به خواص متمایزشان در مقیاس میکرو و نانو، یعنی داشتن سختی بالا و مقاومت حرارتی بزرگ نسبت به مواد دیگر در گستره وسیعی از صنایع مختلف از جمله هوافضا، پزشکی، دفاعی و مهندسی به‌عنوان موادی کاربردی مطرح هستند. در سال‌های اخیر، با دسترسی به مواد جدید از جمله مواد تابعی مدرج، تحولات عمده‌ای در صنعت شکل گرفته است. مواد تابعی مدرج به‌طور گسترده در میکرو و نانوسازه‌ها از قبیل فیلم‌های نازک، سامانه‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی [1]، میکروسویچ‌ها، نانوبیوسرگرا، میکروپیچ‌ها و عملگرها و میکروسکوپ‌های نیرویی اتمی [2,3] به‌کار برده می‌شوند. تئوری تنش کوپل اصلاح شده اولین بار توسط یانگ و همکاران [4] از تئوری تنش کوپل کلاسیک [5-7] استنتاج شده است. در نظر گرفتن تانسور تنش کوپل متقارن و فقط یک پارامتر مقیاس طولی ماده که برای لحاظ کردن خواص وابسته به اندازه در نانوسازه‌ها لازم است، منجر به برتری این تئوری نسبت به تئوری تنش کوپل کلاسیک شده است. در نتیجه

اخیراً در مطالعه و بررسی نانوسازه‌های متنوع از قبیل نانوتیرهای اویلر- برنولی و تیموشنکو، میکروصفحات میندلین و کیرشپف و نانوتیرهای تابعی مدرج از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده است. در این خصوص /صغری و همکاران [8] بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده، فرمول‌بندی جدیدی برای تیرهای تیموشنکو ارائه کرده و با آن مشخصه‌های ارتعاشی تیرهای یک سرگیردار و مقید را مورد مطالعه قرار دادند.

سلامت طلب و همکاران [9] با مطالعه ارتعاشات آزاد و خمش میکروتیرهای تابعی مدرج ضعف مدل‌های کلاسیک را در تخمین اثرات اندازه در مقیاس میکرو برجسته‌تر ساختند. آگوز و سولاک [10] با ترکیب مدل تیر اویلر- برنولی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده پاسخ‌های ارتعاشی میکروتیرهای ناهمگن مخروطی را با روش رایلی- ریتز ارزیابی کردند. شیمشک و ردی [11] اثر عوامل مختلف از جمله پارامتر مقیاس طولی و تغییر شکل برشی را بر خمش استاتیکی و ارتعاشات آزاد میکروتیرهای تابعی مدرج، با استفاده از مدل تیرهای مرتبه بالای مختلف و تئوری تنش کوپل اصلاح شده تحلیل کردند. البسیونی و همکاران [12] ضمن متغیر در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی و استفاده از مفهوم تار خنثی، به بررسی رفتار دینامیکی و خمش میکروتیرهای تابعی مدرج پرداختند.

با توجه به ویژگی‌های خاص مواد در مقیاس نانو در فرم‌های مختلف از جمله نانورق‌ها، نانوصفحات، نانوتیرهای خمیده و نانورشته‌ها، این مواد خواستگاه استفاده در زمینه‌های فضایی، مهندسی- زیستی و انرژی [13] از جمله فناوری دستگاه‌های میکروسکوپی و نانوفناوری هستند. نانوسیم‌ها به‌طور گسترده‌ای در زمینه فناوری صفحه‌نمایش [14] و تولید نانو ساختارهای الکترونیکی مانند ال-ای-دی مورد استفاده قرار می‌گیرند. نانوتیرها سازه‌های بسیار قوی هستند که نمونه‌هایی از کاربردهای آن‌ها را می‌توان در حسگرها، عملگرها و سیستم‌های میکرو و نانوالکترومکانیکی، میکروسکوپ‌های نیرویی اتمی و دستگاه‌های اسپینترونیک [15] دید. مشاهده شده است که نانوسازه‌های یک‌بعدی نازک، اغلب در راستای امتداد محور مرکزی خود دارای خمیدگی، انحنای اولیه و ساختاری موجی شکل هستند [16]. تحلیل سازه‌ای نانوتیرهای خمیده از الزامات طراحی سازه‌های مهندسی مدرن است. یک مدل غیرمحملی تیر خمیده تیموشنکو توسط لیو و ردی [17] ارتقا داده شد. آن‌ها اثرات اندازه را در خمش و ارتعاشات آزاد تیر خمیده به کمک تئوری تنش کوپل اصلاح شده نشان دادند. یانگ و همکاران [18] با بررسی ارتعاشات داخل صفحه‌ای مدل‌های مختلفی از تیرهای خمیده نشان دادند که تغییر شکل‌ها در این سازه‌ها نه تنها به جابجایی‌های شعاعی و دورانی بلکه به جابجایی‌های مماسی کوپل ناشی از انحنای سازه‌ها نیز بستگی دارد. فانگ و همکاران [19] یک مدل دینامیکی سه‌بعدی از میکروتیرهای تابعی مدرج دورانی ارائه دادند. رحمانی و همکاران [20] به بررسی اثر پارامتر هندسی  $(I+z/R)$  بر ارتعاشات آزاد نانوتیرهای خمیده تابعی مدرج پرداختند. آن‌ها به کمک مدل تیر تیموشنکو و تئوری تنش کوپل اصلاح شده نشان دادند که حساسیت فرکانس طبیعی به تغییرات اندازه ترم‌های هندسی و فیزیکی با در نظر گرفتن پارامتر  $(I+z/R)$  افزایش می‌یابد.

مدل‌های مختلفی از نحوه ارتباط سازه با بستر در تحقیقات ارائه شده است. مدل وینکلر به دلیل مدل‌سازی بستر به‌صورت فنرهای مستقل از هم یکی از ساده‌ترین مدل‌ها است. بعدها پسترناک با معرفی یک پارامتر وابسته که تعاملات فنرهای جدا را لحاظ می‌کرد، این مدل را بهبود بخشید. در نهایت به دلیل کارایی مدل به‌دست آمده، از آن در تحقیقات زیادی استفاده شده است. نجفی و همکاران [21] یک تیر

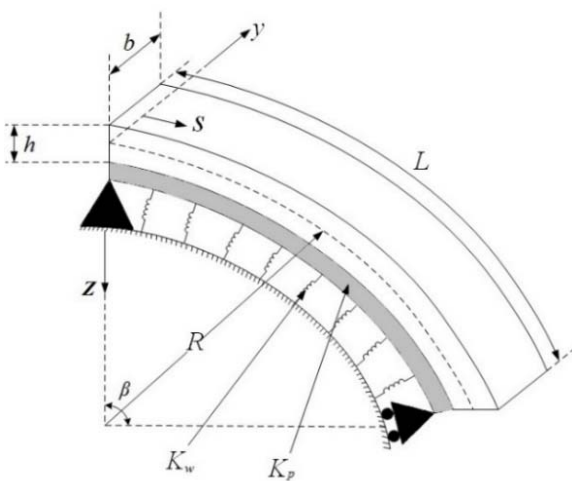
کشسان بر فرکانس طبیعی به دست آمده است. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مربوطه از اصل همپلتون استفاده شده است. در ادامه به کمک روش ناورب معادلات دیفرانسیل به صورت تحلیلی حل شده‌اند. در نهایت تأثیر پارامترهای مؤثر از جمله شاخص گرادیان، نسبت طول به ضخامت، میزان اختلاف دما، پارامترهای طولی بدون بعد و زاویه کمان میکرو- نانو تیر خمیده بر فرکانس طبیعی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. برای اطلاع از صحت مطالعه انجام شده بخشی از داده‌ها با نتایج عددی مطالعات گذشته مقایسه شد.

## ۲- تئوری و فرمولاسیون

برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد نانوتیر خمیده مدرج تابعی، بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده منته‌جه‌های تنش به دست آمده و با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم حرکت و شرایط مرزی مربوطه به شرح زیر استنتاج شده‌اند.

### ۲-۱- پارامترهای هندسی

در شکل ۱ یک نانوتیر خمیده تابعی مدرج متشکل از فلز و سرامیک با ضخامت  $h$ ، عمق  $b$ ، شعاع متوسط  $R$ ، طول  $L$  و زاویه کمان  $\theta$  در نظر گرفته شده است. بدیهی است که مبدأ مختصات در یک طرف نانوتیر قرار دارد. نانوتیر مورد نظر بر بستر کشسان وینکلر- پسترناک و تکیه‌گاه ساده مفید شده است. محور  $s$  در راستای طول خمیده نانوتیر، محور  $z$  در راستای عمود بر صفحه‌ای که تیر در آن واقع شده و محور  $y$  آن در راستای شعاعی قرار گرفته است.



شکل ۱ هندسه نانوتیر خمیده تابعی مدرج

### ۲-۲- نانوتیرهای خمیده تابعی مدرج

مواد تابعی مدرج عمدتاً از ترکیب دو ماده فلزی و سرامیکی تولید می‌شوند. می‌توان وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی هر یک از اجزای تشکیل دهنده نانوتیر خمیده تابعی مدرج را به کمک رابطه (۱) نشان داد [33].

$$G_i(T) = G_0 (G_{-1}T^{-1} + 1 + G_1T + G_2T^2 + G_3T^3) \quad i = c, m \quad (1)$$

در اینجا  $G_0, G_1, G_2, G_3$  و ضرایب درجه حرارت بوده که برای بعضی از مواد تشکیل دهنده مواد تابعی مدرج ثابت هستند. در این مقاله از مواد  $SUS304$  و  $Si_3N_4$  به عنوان مواد سازنده نانوتیر مذکور استفاده شده است. مقادیر ضرایب یادشده در جدول ۱ آورده شده است.

تابعی مدرج واقع بر بستر وینکلر- پسترناک را تحت ضربه کم- سرعت غیرمرکزی آزمایش کردند. دنگ و همکاران [22] ضمن اعمال بار محوری بر دو تیر تابعی مدرج ارتعاشات و کمانش تیر دوپل را مطالعه و رفتار دینامیکی آن را بررسی کردند. پاسخ‌های فرکانسی یک میکروتیر خمیده کامپوزیتی واقع بر بستر کشسان وینکلر- پسترناک به انواع بارگذاری‌های الکترومغناطیسی توسط قربان پور آرنی و همکاران [23] مورد ارزیابی قرار گرفته است. خمش نانوتیرهای دارای خواص ویسکوالاستیک بر بستر ویسکو- پسترناک بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده، توسط سبوحی و زنگور [24] مطالعه شد. رفتار استاتیک و ارتعاش آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌لایه واقع بر بستر کشسان پسترناک توسط مرادی دستجردی و همکاران [25] تحلیل شد. در مطالعه ایشان از روش شبکه‌بندی آزاد و تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده است. آن‌ها نشان دادند که الگوی قرارگیری نانولوله‌های کربنی تأثیر بیشتری نسبت به کسر حجمی آن بر رفتار مکانیکی ورق‌ها دارد.

مقاومت حرارتی مواد تابعی مدرج نسبت به مواد دیگر به‌عنوان یکی از خواص متمایز این مواد در مقیاس میکرو و نانو، سبب وسیع‌تر شدن گستره کاربرد این مواد شده است. از این رو مطالعه عمیق‌تر این ویژگی مواد تابعی مدرج در برخورد با انواع مسائل مختلف مکانیکی مورد توجه پژوهشگران بوده است. بوودریا و همکاران [26] اثرات بستر وینکلر- پسترناک را روی پاسخ‌های خمش ترمومکانیکی ورق‌های تابعی مدرج بررسی کردند. زمان زاده و همکاران [27] ارتعاشات میکروتیرهای تابعی مدرج یک‌سرگردار اویلر- برنولی را در معرض تیر لیزر متحرک مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با بررسی حالت تشدید تحریک، سرعت بحرانی مربوط به منبع حرارت متحرک را به دست آوردند. قدیری و شفیع [28] به تحلیل ارتعاشی میکروتیر تابعی مدرج دوار تیموشنکو، تحت انواع توزیع‌های دمایی پرداختند. آنگوز و سوالک [29] اثرات تغییر شکل برشی دمایی را بر پاسخ ارتعاشی میکروتیرهای تابعی مدرج کامپوزیتی ضخیم بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که لحاظ کردن ضریب تصحیح برشی می‌تواند نتایج را به صورت دقیق‌تر و معتبرتر ارائه دهد. خورشیدی و همکاران [30] به بررسی ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی دوبعدی تابعی مدرج واقع بر بستر پسترناک پرداختند. آن‌ها برای تحلیل مسئله از روش ریلی‌ریتز استفاده کرده، اثرات محیط حرارتی را بر رفتار دینامیکی ورق مورد نظر مورد تحقیق قرار دادند. نحوه اثرگذاری تخلخل و حرارت بر ارتعاشات میکروتیرهای تابعی مدرج دوبعدی تیموشنکو توسط میرجوادی و همکاران [31] بررسی و ارائه شد. رحمانی و همکاران [32] کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد میکروتیرهای خمیده تابعی مدرج تیموشنکو با خواص وابسته به دما را تحت بارگذاری دمایی یکنواخت بر اساس تئوری گرادیان کرنش مورد مطالعه قرار دادند.

با توجه به بررسی‌های انجام شده و نتایج قابل دسترسی، می‌توان بیان کرد که هیچ مطالعه کاربردی در مورد بررسی اثرات دمایی بر ارتعاش یک میکرو- نانو تیر خمیده تابعی مدرج تحت بارگذاری ترمومکانیکی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده وجود ندارد. در نتیجه هدف این مقاله مطالعه تعاملات ترموفیزیکی میکرو- نانو تیر خمیده تابعی مدرج واقع بر بستر کشسان وینکلر- پسترناک است.

در مقاله حاضر، میکرو- نانو تیر خمیده تابعی مدرج مورد نظر به کمک تئوری تیر تیموشنکو مدل شده است. سپس فرکانس طبیعی آن تحت بارگذاری دمایی یکنواخت بر اساس تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین اثرات پارامترهای بستر

مواد	ضرایب	خواص			
		$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\nu$	$\alpha$ (K <sup>-1</sup> )	E (Pa)
SUS304	G <sub>-1</sub>	.	.	.	.
	G <sub>0</sub>	۸۱۶۶	۰٫۲۸	$۱۲٫۳۳ \times ۱۰^{-۱}$	$۲۰۱٫۰۴ \times ۱۰^۹$
	G <sub>1</sub>	.	.	$۸٫۰۸۶۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۰۷۹ \times ۱۰^{-۴}$
	G <sub>2</sub>	.	.	.	$-۶٫۵۳ \times ۱۰^{-۷}$
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	G <sub>3</sub>	.	.	.	.
	G <sub>-1</sub>	.	.	.	.
	G <sub>0</sub>	۲۱۷۰	۰٫۲۸	$۵٫۸۷۲۳ \times ۱۰^{-۱}$	$۳۴۸٫۴۳ \times ۱۰^۹$
	G <sub>1</sub>	.	.	$۹٫۰۹۵ \times ۱۰^{-۴}$	$-۳٫۰۷۷ \times ۱۰^{-۴}$
	G <sub>2</sub>	.	.	.	$۲٫۱۶ \times ۱۰^{-۷}$
G <sub>3</sub>	.	.	.	$-۸٫۹۴۶ \times ۱۰^{-۱۰}$	

در اینجا  $u_s, u_y, u_z$  به ترتیب مؤلفه‌های بردار جابجایی  $u$  هستند که تغییرات مکانی سطح میانگین را در امتداد محورهای  $s, y, z$  نشان می‌دهند.  $t$  پارامتر زمان است،  $\varphi$  نیز بیانگر دوران سطح میانگین حول محور  $y$  است.

**۲-۳- تئوری تنش کوپل اصلاح شده**

انرژی کرنشی ذخیره شده در ناحیه  $A$ ، حاصل از تغییر شکل‌های خیلی کوچک در یک ماده الاستیک خطی متشکل از تانسور کرنش و تانسور انحناء، منطبق بر تئوری تنش کوپل اصلاح شده به شکل زیر بیان می‌شود.

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}^s) dV, \quad i, j = s, y, z \quad (۷)$$

که  $\varepsilon_{ij}$  و  $\chi_{ij}^s$  به ترتیب در رابطه (۸الف-ج) آمده است.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = \varepsilon_{ji} \quad (۸- الف)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} (\nabla \times u)_i \quad (۸- ب)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2} (\partial_j \theta_i + \partial_i \theta_j) \quad (۸- ج)$$

در رابطه فوق  $u_i$  و  $\theta_i$  به ترتیب بردار جابجایی  $u$  و بردار دوران خیلی کوچک  $\theta$  هستند. به‌علاوه اجزای تانسور کرنش  $\varepsilon$  و تانسور تغییرات دورانی متقارن  $\chi$  با نمادهای  $\varepsilon_{ij}$  و  $\chi_{ij}^s$  معرفی شده‌اند. پارامترهای مشتق شده از چگالی انرژی کرنشی با توجه به پارامترهای سینماتیکی تعریف شده  $\sigma$  و  $m$  به ترتیب با نمادهای  $\sigma_{ij}$  و  $m_{ij}^s$  نشان داده شده، تانسور تنش کلاسیک و تانسور تنش مرتبه بالا گفته می‌شوند که برای یک ماده الاستیک خطی همسانگرد می‌توان آن‌ها را با پارامترهای سینماتیکی مؤثر بر مسئله به شرح زیر بیان کرد.

$$\sigma_{ij} = \lambda tr(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \nu \frac{tr(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}}{(1-2\nu)} + \varepsilon_{ij} \right)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu(z) l^2 \chi_{ij}^s = \frac{E(z)}{(1+\nu(z))} l^2 \chi_{ij}^s \quad (۹)$$

در اینجا پارامتر مقیاس طولی با علامت  $l$  نشان داده شده که به کمک آن اثرات تانسور تغییرات دورانی متقارن لحاظ شده است.  $\delta$  نیز دلتای کرانکر است.  $\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه هستند و به قرار زیرند.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۰)$$

**۲-۴- معادلات حاکم**

با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه‌های (۸الف) و (۸ب) مؤلفه‌های فیزیکی غیرصفر تانسور کرنش- جابجایی  $\varepsilon$  و بردار دورانی  $\theta$  در نانوتیر خمیده به شکل روابط (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{ss} = \left( u_{s,s} + \frac{u_z}{R} \right) (1+z/R)^{-1} = (\varepsilon_0 - z\varepsilon_1) (1+z/R)^{-1},$$

$$\varepsilon_{sz} = -\frac{1}{2} \left( \frac{u_s}{R} - u_{s,z} - u_{z,s} \right) (1+z/R)^{-1} = \varepsilon_2 (1+z/R)^{-1} = \varepsilon_{zs}$$

$$\varepsilon_0 = u_{s,s} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_1 = \varphi_{,s}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{u}{R} - w_{,s} + \varphi \right) \quad (۱۱)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{ys} = 0$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left( \frac{u_s}{R} + u_{s,z} - u_{z,s} \right) (1+z/R)^{-1} = \frac{1}{2} (\theta_0 (1+z/R)^{-1} - \varphi),$$

حال خواص مؤثر ماده در نانوتیر خمیده تابعی مدرج مثل مدول یانگ  $E$ ، نسبت پواسون  $\nu$ ، چگالی  $\rho$  و ضریب انبساط دمایی  $\alpha$ ، می‌تواند به شکل رابطه (۲) مشخص شود [32].

$$G_i(z, T) = G_m(T) - G_{mc}(T) V_c(z) \quad i = c, m$$

$$G_{mc}(T) = G_m(T) - G_c(T) \quad (۲)$$

که در آن زیروندهای  $m$  و  $c$  به ترتیب بیانگر خواص مربوط به فاز فلز و سرامیک است.

کسر حجمی مواد مورد استفاده با نماد  $V_{fi}$  نشان داده شده است که برای مجموع ترکیب فلز و سرامیک در رابطه (۳) تعریف شده است.

$$V_{fc}(z) + V_{fm}(z) = 1 \quad (۳)$$

با توجه به رابطه (۴) شاخص گرادیان  $p$  در کسر حجمی سبب شده است که در راستای شعاعی نانوتیر خمیده تابعی مدرج، توزیع ماده به شکل تدریجی تغییر کند. تغییر توزیع مواد سازنده به این صورت است که سطح درونی و بیرونی آن به ترتیب کاملاً از جنس سرامیک و فلز است. کسر حجمی هر کدام از فازهای تشکیل‌دهنده نانوتیر خمیده تابعی مدرج، به شرح زیر مطرح می‌شود.

$$V_{fc}(z) = \left( \frac{h+2z}{2h} \right)^p \quad V_{fm}(z) = 1 - \left( \frac{h+2z}{2h} \right)^p \quad (۴)$$

اینجا  $p$  کمیتی غیرمنفی است که به ازای مقادیر مشخصی از بازه  $(0 \leq p < \infty)$  مشخصات درصد تغییر ماده را در امتداد ضخامت نانوتیر خمیده تابعی مدرج تعیین می‌کند. در این صورت می‌توان گفت که خواص ترمومکانیکی نانوتیر خمیده تابعی مدرج به‌صورت رابطه (۵) تعریف می‌گردد.

$$E = E(z) = E_m - E_{mc} \left( \frac{h+2z}{2h} \right)^p \quad (۵- الف)$$

$$\alpha = \alpha(z) = \alpha_m - \alpha_{mc} \left( \frac{h+2z}{2h} \right)^p \quad (۵- ب)$$

$$\rho = \rho(z) = \rho_m - \rho_{mc} \left( \frac{h+2z}{2h} \right)^p \quad (۵- ج)$$

$$\nu = \nu(z) = \nu_m - \nu_{mc} \left( \frac{h+2z}{2h} \right)^p \quad (۵- د)$$

همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، پارامترهای  $h$  و  $z$  به ترتیب راستا و اندازه ضخامت نانوتیر خمیده را نشان می‌دهند.

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بردار تغییر مکان دینامیکی که شامل تغییرات مکانی و زمانی نانوتیر خمیده است، در رابطه (۶) تعریف شده است.

$$u = u_s \hat{e}_s + u_y \hat{e}_y + u_z \hat{e}_z, \quad (۶)$$

$$u_s = u(t, s) - z\varphi(t, s), \quad u_y = 0, \quad u_z = w(t, s)$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \left\{ F_1 \left( (\dot{u})^2 + (\dot{w})^2 \right) - 2F_2 (\dot{u} \cdot \dot{\varphi}) + F_3 (\dot{\varphi})^2 \right\} dA \quad (۱۸)$$

در آن چگالی جرمی و  $A$  ناحیه اشغال شده به واسطه سطح میانگین در نانوتیر خمیده تابعی مدرج است. پارامترهای  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_3$  به ترتیب در رابطه (۱۹) تعریف شده‌اند.

$$\{F_1, F_2, F_3\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (۱۹)$$

انرژی پتانسیل ناشی از اعمال بار عرضی  $q$  و تنش حرارتی محیطی را می‌توان برای نانوتیر خمیده با توجه به مرجع [32] به شکلی که در رابطه (۲۰) آمده است، تعریف کرد.

$$W_p = \frac{1}{2} \int_A [qw + N^T (w_{,s} + u)^2] dA \quad (۲۰)$$

که اینجا  $N^T$  منتهجه تنش حرارتی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود [34].

$$N^T = \int_{-h/2}^{h/2} (\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \alpha \Delta T dz \quad (۲۱)$$

همچنین تعریف انرژی کرنشی ناشی از بستر کشسان وینکلر-پسترناک در ادامه در رابطه (۲۲) آورده شده است.

$$U_F = \frac{1}{2} \int_A [K_w w^2 + K_p (w_{,s})^2] dA \quad (۲۲)$$

پارامترهای  $K_w$  و  $K_p$  به ترتیب بیانگر ضرایب برشی پسترناک و فنرهای وینکلر هستند.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، استفاده از روابط (۱۱) و (۱۳) در رابطه (۹) تانسورهای تنش کلاسیک و مرتبه بالا را نتیجه می‌دهد. از جاسازی این تانسورها و رابطه (۸) در رابطه (۷)، انرژی کرنشی کل به شرح زیر نتیجه می‌شود.

$$U_m = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ss} \varepsilon_{ss} + 2\sigma_{sz} \varepsilon_{sz} + 2m_{sy} \chi_{sy} + 2m_{yz} \chi_{yz}) dz dA$$

$$U_m = U_C + U_{HO} \quad (۲۳-الف)$$

$$U_C = \frac{1}{2} \int_A \left[ N_{ss} \left( u_{,s} + \frac{w}{R} \right) - M_{ss} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - Q \left( \frac{u}{R} - w_{,s} + \varphi \right) \right] dA, \quad (۲۳-ب)$$

$$U_{HO} = \frac{1}{2} \int_A \left[ \frac{Y_{sy}}{2} \left( \frac{u_{,s}}{R} - w_{,ss} - \varphi_{,s} \right) - \frac{Y_{yz}}{2} \left( \frac{u}{R^2} - \frac{w_{,s}}{R} + \frac{\varphi}{R} \right) \right] dA \quad (۲۳-ج)$$

اینجا  $U_C$  و  $U_{HO}$  به ترتیب انرژی‌های کرنشی ناشی از تانسور تنش کلاسیک و تانسورهای تنش مرتبه بالا هستند.

پس از اعمال اصل همپلتون با استفاده از روابط (۱۷-۲۳)، معادلات حاکم مطابق آنچه که در رابطه (۲۴) ارائه شده، حاصل می‌گردد.

$$N_{ss,s} + \frac{Q}{R} + \frac{Y_{sy,s}}{2R} + \frac{Y_{yz}}{2R^2} + N^T (u + w_{,s}) = F_1 \ddot{u} - F_2 \ddot{\varphi} \quad (۲۴-الف)$$

$$-\frac{N_{ss}}{R} + Q_{,s} + \frac{Y_{sy,ss}}{2} + \frac{Y_{yz,s}}{2R} + q - N^T (u_{,s} + w_{,ss}) + K_w w - K_p w_{,ss} = F_1 \ddot{w} \quad (۲۴-ب)$$

$$\theta_0 = \left( \frac{u}{R} - w_{,s} \right), \quad \theta_s = \theta_z = 0 \quad (۱۲)$$

با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲)، ترم هندسی  $(1+z/R)$  در رابطه کرنش-جایابی و بردار دورانی ظاهر شده است. وقتی که شعاع انحنای نانوتیر خمیده  $R$ ، در مقایسه با ضخامت آن  $h$ ، خیلی بزرگ‌تر است، یعنی  $h/R \leq 1$  پس  $|z/R| \leq 1$  و در نتیجه مقدار  $(1+z/R)$  تقریباً برابر با ۱ خواهد بود. در ادامه با لحاظ کردن این فرض روابط محاسبه می‌گردند. با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۸-ج) مؤلفه مربوط به تانسور تغییرات دورانی متقارن غیرصفر متناسب با رابطه (۱۳) به دست می‌آید.

$$\chi_{sy}^s = \frac{1}{4} \left[ \frac{u_{,s}}{R} - w_{,ss} - \varphi_{,s} \right], \quad \chi_{yz}^s = -\frac{1}{4} \left[ \frac{u}{R^2} - \frac{w_{,s}}{R} + \frac{\varphi}{R} \right] \quad (۱۳)$$

در ادامه، تانسورهای تنش کلاسیک و مرتبه بالا از قرار دادن روابط (۱۱) و (۱۳) در معادله (۹) به دست می‌آیند. نحوه تعریف منتهجه‌های تنش در رابطه (۱۴) آمده است.

$$\begin{Bmatrix} N_{ss} \\ M_{ss} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ss} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Y_{ij} \\ Q \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} m_{ij}^s \\ K_s \sigma_{sz} \end{Bmatrix} dz \quad (۱۴)$$

اگر تنش‌های کلاسیک و مرتبه بالای به دست آمده در رابطه (۱۴) قرار داده شود، منتهجه‌های تنش به شکلی که در رابطه (۱۵-الف و ب) ذکر شده است، حاصل می‌گردد.

$$N_{ss} = A_{11} \left( u_{,s} + \frac{w}{R} \right) - B_{11} \varphi_{,s}, \quad (۱۵-الف)$$

$$M_{ss} = B_{11} \left( u_{,s} + \frac{w}{R} \right) - D_{11} \varphi_{,s},$$

$$Q = -K_s A_{55} \left( \frac{u}{R} - w_{,s} + \varphi \right)$$

$$Y_{sy} = \frac{A_{55} I^2}{2} \left( \frac{u_{,s}}{R} - w_{,ss} - \varphi_{,s} \right), \quad (۱۵-ب)$$

$$Y_{yz} = -\frac{A_{55} I^2}{2} \left( \frac{u}{R^2} - \frac{w_{,s}}{R} + \frac{\varphi}{R} \right)$$

در اینجا تعریف ضرایب سفتی ظاهر شده، در رابطه (۱۶) آمده است.

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ B_{11} \\ D_{11} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)(1-\nu(z))}{(1+\nu(z))(1-2\nu(z))} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad (۱۶-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{55} \\ B_{55} \\ D_{55} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (۱۶-ب)$$

اصل همپلتون که حالتی از صورت کلی اصل کار مجازی در دینامیک است، به وسیله رابطه (۱۷) مشخص می‌شود.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K_T + W_p - U_F - U_m] dt = 0 \quad (۱۷)$$

که در آن  $U_F$ ،  $W_p$ ،  $K_T$  و  $U_m$  به ترتیب انرژی‌های جنبشی، پتانسیل، بستر کشسان و کرنشی هستند. با استفاده از رابطه (۶) تعریف انرژی جنبشی در رابطه (۱۸) ارائه شده است.

$$K_T = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \{u_{,s,t}^2 + u_{,y,t}^2 + u_{,z,t}^2\} dz dA$$

$$u_{,s}(0) = u_{,s}(L) = \varphi_{,s}(0) = \varphi_{,s}(L) = w(0) = w(L) = 0 \quad (۲۸)$$

بر اساس روش حل ناپیر، اجزای جابجایی قابل قبول که به طور یکسان معادلات حاکم و شرایط تکیه‌گاهی مقید گفته شده را ارضا می‌کند، متناسب با رابطه (۲۹) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} u(t,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) e^{i\omega_n t} \\ w(t,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi s}{L}\right) e^{i\omega_n t} \\ \varphi(t,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (۲۹)$$

که اینجا  $\omega_n$  فرکانس طبیعی نانو تیر خمیده تابعی مدرج و عدد صحیح  $n$ ، شکل مُد مرتبه  $n$ ام را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه (۲۹) در رابطه (۲۶) سه معادله جبری به دست خواهد آمد که در رابطه (۳۰) به صورت ماتریسی ارائه شده است.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} F_1 & 0 & -F_2 \\ 0 & F_1 & 0 \\ -F_2 & 0 & F_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ W_n \\ \Psi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳۰)$$

$$K_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

که مقادیر  $K_{ij}$  به شرح زیر است.

$$\begin{aligned} K_{11} &= N^T - \frac{K_s A_{55}}{R^2} - \frac{SA_{55}}{R^4} - \left(A_{11} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ K_{12} &= \left(N^T + \frac{A_{11} + K_s A_{55} + SA_{55}}{R}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right) + \frac{SA_{55}}{R} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 = K_{21} \\ K_{13} &= -\frac{K_s A_{55}}{R} - \frac{SA_{55}}{R^3} + \left(\frac{SA_{55}}{R} + B_{11}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = K_{31} \\ K_{22} &= -\frac{A_{11}}{R^2} + K_w - \left(K_s A_{55} + \frac{SA_{55}}{R^2} - N^T - K_p\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - SA_{55} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \\ K_{23} &= \left(K_s A_{55} + \frac{SA_{55}}{R^2} - \frac{B_{11}}{R}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right) - SA_{55} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 = K_{32} \\ K_{33} &= -K_s A_{55} - \frac{SA_{55}}{R^2} - (SA_{55} + D_{11}) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \end{aligned} \quad (۳۱)$$

با حل مسئله مقدار ویژه به دست آمده در رابطه (۳۰) فرکانس طبیعی نانو تیر خمیده تابعی مدرج به آسانی مشخص می‌شود.

#### ۴- بحث و نتایج

در این مطالعه پارامتری، مدلی از یک نانو تیر خمیده تابعی مدرج، بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل تیر تیموشنکو ارائه شده است. نانو تیر خمیده مذکور بر یک بستر کشسان وینکلر- پسترناک قرار گرفته و در معرض بارگذاری دمایی یکنواخت قرار دارد. برای نیل به هدف مشخص شده، با فرض  $b=h$  و بارگذاری حرارتی با دمای اولیه  $T_0 = 300^\circ\text{C}$  اثرات پارامتر مقیاس طولی بی بعد  $h/l$ ، نسبت بی بعد طول به ضخامت  $L/h$ ، اختلاف دمای  $\Delta T$ ، زاویه کمان نانو تیر خمیده تابعی مدرج  $\beta$ ، شاخص گرادیان  $p$  و ضرایب مربوط به بستر کشسان وینکلر- پسترناک بر فرکانس طبیعی حاصل از ارتعاش آزاد نانو تیر خمیده تابعی مدرج بررسی شده و نتایج آن برای مقایسه با مطالعات دیگر محققان ارائه شده است.

$$Q - M_{,ss} + \frac{Y_{sy,s}}{2} + \frac{Y_{yz}}{2R} = F_3 \ddot{\varphi} - F_2 \ddot{u} \quad (۲۴-ج)$$

به علاوه شرایط مرزی مربوطه نیز به شکل زیر استخراج می‌شود.

$$\delta u = 0 \quad \text{or} \quad \left\{ -N_{,ss} - \frac{Y_{sy}}{2R} \right\} = 0 \quad (۲۵-الف)$$

$$\delta w = 0 \quad \text{or} \quad \left\{ -Q - \frac{Y_{sy,s}}{2} - \frac{Y_{yz}}{2R} + N^T (u + w_{,s}) + K_p w_{,s} \right\} = 0, \quad (۲۵-ب)$$

$$\delta (w_{,s}) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} Y_{sy} = 0 \quad (۲۵-ج)$$

$$\delta \varphi = 0 \quad \text{or} \quad \left\{ M_{,ss} - \frac{Y_{sy}}{2} \right\} = 0 \quad (۲۵-د)$$

برای رسیدن به فرم نهایی معادلات حاکم رابطه (۱۵) در رابطه (۲۴) جایگذاری می‌شود و در نهایت به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\left(A_{11} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) u_{,ss} - \left(\frac{K_s A_{55}}{R^2} + \frac{SA_{55}}{R^4}\right) u + \left(\frac{A_{11} + K_s A_{55} + SA_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^3}\right) w_{,s} \\ &- \frac{SA_{55}}{R} w_{,sss} + \left(\frac{SA_{55}}{R} - B_{11}\right) \varphi_{,ss} - \left(\frac{K_s A_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^3}\right) \varphi \\ &+ N^T (u + w_{,s}) = F_1 \ddot{u} - F_2 \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (۲۶-الف)$$

$$\begin{aligned} &\frac{SA_{55}}{R} u_{,sss} - \left(\frac{A_{11} + K_s A_{55} + SA_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^3}\right) u_{,s} + \left(K_s A_{55} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) w_{,ss} \\ &- SA_{55} w_{,sss} - SA_{55} \varphi_{,sss} - \frac{A_{11}}{R^2} w - \left(K_s A_{55} + \frac{SA_{55}}{R^2} - \frac{B_{11}}{R}\right) \varphi_{,s} \\ &+ q - N^T (u_{,s} + w_{,ss}) + K_w w - K_p w_{,ss} = F_1 \ddot{w} \end{aligned} \quad (۲۶-ب)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{SA_{55}}{R} - B_{11}\right) u_{,ss} - \left(\frac{K_s A_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^3}\right) u + \left(K_s A_{55} + \frac{SA_{55}}{R^2} - \frac{B_{11}}{R}\right) w_{,s} \\ &- SA_{55} w_{,sss} + (SA_{55} + D_{11}) \varphi_{,ss} - \left(K_s A_{55} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) \varphi = F_3 \ddot{\varphi} - F_2 \ddot{u} \end{aligned} \quad (۲۶-ج)$$

همچنین برای رسیدن به فرم نهایی شرایط مرزی، رابطه (۱۵) در رابطه (۲۵) وارد می‌شوند.

$$-\left(A_{11} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) u_{,s} + \frac{SA_{55}}{R} w_{,ss} - \frac{A_{11}}{R} w - \left(\frac{SA_{55}}{R} - B_{11}\right) \varphi_{,s} = 0 \quad (۲۷-الف)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{SA_{55}}{R} u_{,ss} + \left(\frac{K_s A_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) \frac{u}{R} + SA_{55} w_{,sss} - \left(\frac{K_s A_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) w_{,s} \\ &+ SA_{55} \varphi_{,ss} + \left(\frac{K_s A_{55}}{R} + \frac{SA_{55}}{R^2}\right) \varphi + N^T (u + w_{,s}) + K_p w_{,s} = 0 \end{aligned} \quad (۲۷-ب)$$

$$-\left(\frac{SA_{55}}{R} - B_{11}\right) u_{,s} + SA_{55} w_{,ss} + \frac{B_{11}}{R} w - (SA_{55} + D_{11}) \varphi_{,s} = 0 \quad (۲۷-ج)$$

که در آن ضریب استفاده شده به صورت  $S=l^2/4$  تعریف شده است.

#### ۳- روش حل

به عنوان یک مطالعه موردی، از روش نویر جهت حل مسئله ارتعاشات آزاد یک نانو تیر خمیده تابعی مدرج با فرض  $q=0$ ، استفاده شده است. شرایط تکیه‌گاهی مقید در لبه‌های  $s=0, L$  می‌تواند به شکل زیر بیان شود.

#### ۴-۱- اعتبارسنجی

خواص مکانیکی میکرو- نانوتیر مذکور در راستای ضخامت متغیر بوده و مواد تشکیل دهنده آن برای اعتبارسنجی نتایج به ترتیب آلومینیم با مشخصات  $\rho_m=2702\text{Kg/m}^3$ ,  $v_m=0.3$ ,  $E_m=70\text{GPa}$  و  $\alpha_m=23\times 10^{-6}\text{K}^{-1}$  و سرامیک با مشخصات  $E_c=427\text{GPa}$ ,  $\rho_c=3100\text{Kg/m}^3$ ,  $v_c=0.17$  و  $\alpha_c=4\times 10^{-6}\text{K}^{-1}$  در نظر گرفته شده است [35]. پارامتر مقیاس طولی برای نانوتیر همگن ایزوتروپیک در مقیاس آزمایشگاهی توسط لام و همکاران [36] برابر  $l=17.6\mu\text{m}$  به دست آمد. اما مقدار کمی این پارامتر برای نانوتیر خمیده تابعی مدرج که حاصل از تست آزمایشگاهی باشد وجود ندارد. برای حل مسئله احراز شده، مقدار تقریبی پارامتر مقیاس طولی با توجه به آنچه در ادبیات موضوع آمده،  $l=15\mu\text{m}$  فرض شده است. این فرض را به طور مشابه می‌توان در مراجع دیگر نیز دید. برای تایید اعتبار داده‌های به‌دست آمده، نتایج عددی ارائه شده ضمن صرف نظر از اثرات تنش حرارتی و بستر کشسان، با یکی از کارهای قبلی مقایسه شد.

در جدول ۲ تأثیر شمار مدها و پارامتر مقیاس طولی بی‌بعد  $h/l$  بر فرکانس طبیعی به‌صورت کمی ارائه شده است. در این جدول مقادیر پارامترهای درگیر در مسئله  $\beta=\pi/4$ ,  $p=1.2$ ,  $L=20h$ ,  $l=15\mu\text{m}$  و  $R=L/\beta$  فرض شده است. با توجه به این جدول می‌توان دید که داده‌های به‌دست آمده با نتایج انصاری و همکاران [37] همپوشانی بسیار خوبی دارند. بر این مبنا می‌توان گفت که مدل ارتقا داده شده رفتار ارتعاشی نانوتیر خمیده تابعی مدرج را بدون اثرات دمایی و بستر الاستیک، به‌درستی توصیف می‌کند.

#### ۴-۲- مطالعات پارامتری

با جایگذاری در ادامه برای ارائه نتایج فرضیات لحاظ شده، مواد تشکیل دهنده نانوتیر خمیده تابعی مدرج به ترتیب  $SUS304$  به‌عنوان فلز و  $Si_3N_4$  به‌عنوان سرامیک در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی وابسته به دما مواد نام‌برده در جدول ۱ ارائه شده است. به‌منظور ملموس‌تر شدن نتایج، در ادامه فرکانس طبیعی نانوتیر خمیده تابعی مدرج به‌طوری‌که در رابطه (۳۲) نشان داده شده است، به‌صورت بی‌بعد ارائه می‌گردد.

$$\Omega^* = \omega_n L^2 \sqrt{\frac{\rho_c A}{E_c F_1}} \quad (32)$$

که در اینجا  $A$  و  $F_1$  به ترتیب مساحت و ممان اینرسی سطح مقطع عرضی نانوتیر خمیده تابعی مدرج و همچنین  $E_c$  و  $\rho_c$  به ترتیب مدول یانگ و چگالی مربوط به سرامیک است.

تابعیت فرکانس طبیعی بی‌بعد به تغییرات اختلاف دمای یکنواخت در نمودار ۱ ارائه شده است. در این نمودار به منظور بررسی اثرات اندازه زاویه کمان و پارامتر مقیاس طولی ماده بر روند یاد شده، سایر پارامترهای هندسی و فیزیکی ثابت در نظر گرفته شده و مقادیر هر یک مشخص شده است. از این نمودار می‌توان فهمید که افزایش

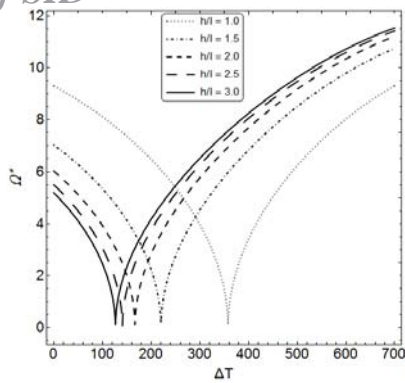
نتایج کمی موجود در جدول ۳ مربوط به فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد، متأثر از تغییرات برخی از پارامترهای هندسی و ترموفیزیکی است. برای استخراج این داده‌ها مقادیر  $n=1$ ,  $L=20h$ ,  $b=2h$  و  $p=1$  و  $\beta=\pi/2$  لحاظ شده است. می‌توان دید که افزایش خطی مقدار اختلاف دما سبب افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده است. افزایش ضرایب سختی بستر کشسان سبب افزایش سختی کل تیر می‌شود. لذا با توجه به رابطه مستقیم فرکانس طبیعی با سختی کل تیر، بیشتر شدن مقدار کمی پارامترهای مربوط به بستر کشسان افزایش فرکانس طبیعی را در پی دارد، البته تأثیر تغییرات ضریب بستر پسترناک بر  $\Omega^*$  بیشتر از ضریب بستر وینکلر است. در این بین پرواضح است که بیشتر شدن نسبت ضخامت نانوتیر به پارامتر مقیاس طولی، سبب تقویت خاصیت کشسانی نانوتیر، کاسته شدن سختی آن و در کل کاهش چشمگیر فرکانس طبیعی بی‌بعد را به دنبال دارد. لازم به ذکر است که افزایش اختلاف دما از حساسیت  $\Omega^*$  به تغییرات این پارامتر می‌کاهد.

در نمودار ۲ مقادیر دمای بحرانی متناظر با دمای کمانش حرارتی نانوتیر به‌صورت تابعی از شاخص گرادیان ارائه شده است. افزایش خطی مقدار شاخص گرادیان سبب کاهش نمایی دمای بحرانی شده است. این رفتار به ازای مقادیر صفر تا یک شاخص گرادیان بیشتر بروز می‌کند، اما رفته‌رفته وابستگی دمای بحرانی به پارامتر مذکور از بین می‌رود. از نمودار ۲- الف آشکار است که افزایش زاویه کمان نانوتیر خمیده هم مقادیر دمای بحرانی و هم وابستگی آن را به شاخص گرادیان کاهش می‌دهد. رفتار مشابهی را در اثر افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طولی در نمودار ۲- ب می‌توان دید.

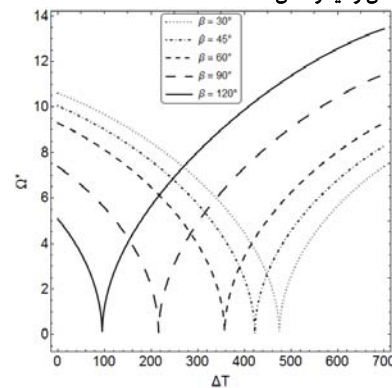
در جدول ۴ برای بررسی مستقیم اثرات پارامترهای هندسی و فیزیکی مقادیر ضرایب بستر کشسان و اختلاف دمای صفر و نیز  $h=l$  و  $h=b$  لحاظ شده است. از تفسیر داده‌های موجود در این جدول برمی‌آید که افزایش مقدار کمی زاویه کمان نانوتیر خمیده تابعی مدرج و شاخص گرادیان هر دو سبب کاهش مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شوند. ولی بالارفتن شمار مدها و نیز بیشتر شدن نسبت بی‌بعد طول نانوتیر خمیده به ضخامت آن از یک طرف مستقیماً باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده و از طرف دیگر از حساسیت آن به تغییرات پارامترهای مذکور می‌کاهند.

جدول ۲) مقایسه نتایج حاضر با داده‌های مرجع [37]

n	نتایج	h/l			
		۱	۲	۳	۴
۱	مدل حاضر	۱/۴۷۰۷۸	۰/۴۵۲۱۸۶	۰/۲۵۰۹۴۳	۰/۱۷۲۹۷۱
	مرجع [37]	۱/۴۷۱۱۶	۰/۴۵۲۲۴	۰/۲۵۱	۰/۱۷۲۹۹
۲	مدل حاضر	۶/۱۹۰۱۲	۱/۹۱۶۳۳	۱/۰۶۴۵۲	۰/۷۳۳۹۵۲
	مرجع [37]	۶/۱۹۱۴	۱/۹۱۶۷	۱/۰۶۴۴	۰/۷۳۳۳۷
۳	مدل حاضر	۱۳/۶۸۵۱	۴/۲۷۸۵۹	۲/۳۷۹۹۵	۱/۶۴۱۳۲
	مرجع [37]	۱۳/۶۸۳۵	۴/۲۷۸۴	۲/۳۷۹۳	۱/۶۴۰۶



ب-  $b=h, L=20h, n=1, \beta=\pi/3, p=5, K_p=0, K_w=0$

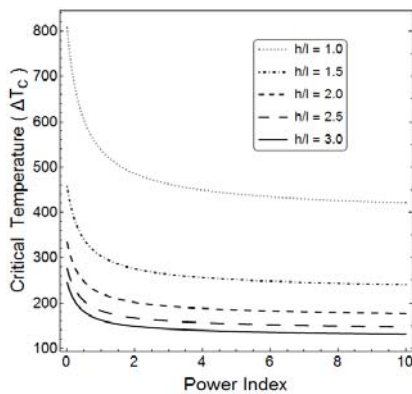


الف-  $b=h, L=20h, n=1, h=l, p=5, K_p=0, K_w=0$

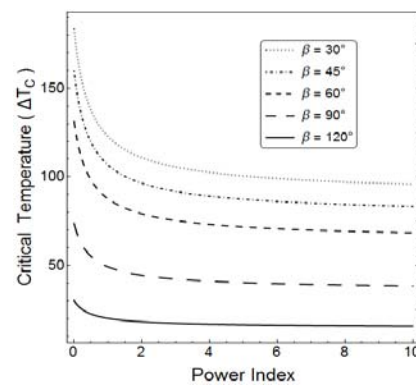
نمودار (۱) فرکانس بی بعد به تغییرات اختلاف دمایی یکنواخت

جدول (۳) فرکانس طبیعی بی بعد  $\Omega_c^*$  متاثر از پارامترهای ضرایب بستر کشسان و اختلاف دمایی یکنواخت

$\Delta T = 50(^\circ C)$			$\Delta T = 0(^\circ C)$			$\Delta T = -50(^\circ C)$			$K_p$	$h/l$
$K_w$			$K_w$			$K_w$				
۱۵۰	۱۰۰	۵۰	۱۵۰	۱۰۰	۵۰	۱۵۰	۱۰۰	۵۰		
۲۵/۰۳۴۱	۲۴/۰۰۷۸	۲۲/۹۳۶۷	۲۴/۵۸۷۷	۲۳/۵۵۳۴	۲۲/۴۷۲۶	۲۴/۱۵۰۴	۲۳/۱۰۸۸	۲۲/۰۱۸۹	۵	۱
۴۱/۷۳۶۳	۴۱/۱۱۷۱	۴۰/۴۸۸۹	۴۱/۳۲۵۲	۴۰/۷۰۶۶	۴۰/۰۷۸۸	۴۰/۹۱۳۶	۴۰/۲۹۵۸	۳۹/۴۴۸۹	۱۵	
۵۳/۶۴۳۲	۵۳/۱۵۴۴	۵۲/۶۶۱۵	۵۳/۲۰۸۱	۵۲/۷۲۰۷	۵۲/۲۲۹۱	۵۲/۷۶۷۱	۵۲/۲۸۱۲	۵۱/۷۹۱۲	۲۵	
۱۶/۳۰۶۷	۱۴/۶۹۱۷	۱۲/۸۷۷۵	۱۵/۷۴۹۵	۱۴/۰۸۹۵	۱۲/۲۰۷۸	۱۵/۲۰۳۷	۱۳/۱۴۹۷۳	۱۱/۵۴۳۳	۵	۲
۲۳/۲۶۴۹	۲۲/۱۵۷	۲۰/۹۹۱۹	۲۲/۸۱۳۷	۲۱/۶۹۵۱	۲۰/۵۱۶۷	۲۲/۳۷۱۸	۲۱/۲۴۳۲	۲۰/۰۵۲۳	۱۵	
۲۸/۶۰۰۹	۲۷/۷۰۲۶	۲۶/۷۷۵۱	۲۸/۱۸۲۶	۲۷/۲۸۰۵	۲۶/۳۴۸۳	۲۷/۷۷۰۵	۲۶/۸۶۵	۲۵/۹۲۸۸	۲۵	
۱۳/۲۶۷۹	۱۱/۲۶۸۸	۸/۷۲۳۱۷	۱۲/۶۱۹	۱۰/۴۷۷۳	۷/۷۶۸۸۷	۱۱/۹۷۶۷	۹/۷۲۲۷۹	۶/۷۵۷۹۲	۵	۴
۱۵/۶۴۱۲	۱۳/۹۴۹۴	۱۲/۰۲۳۸	۱۵/۰۷۰۶	۱۳/۳۲۶۴	۱۱/۳۱۸۵	۱۴/۵۱۰۸	۱۲/۷۱۱۸	۱۰/۶۱۴۲	۱۵	
۱۷/۷۰۱۷	۱۶/۲۲۴۱	۱۴/۵۹۹۴	۱۷/۱۷۸۳	۱۵/۶۶۸۴	۱۳/۹۹۸۳	۱۶/۶۶۶۴	۱۵/۱۲۳۹	۱۳/۴۰۶۸	۲۵	



ب-  $b=h, L=20h, n=1, \beta=\pi/3, K_p=0, K_w=0$



الف-  $b=h, L=50h, n=1, h=l, K_p=0, K_w=0$

نمودار (۲) وابستگی دمایی بحرانی به تغییرات شاخص گرادیان

جدول (۴) اثر پارامترهای هندسی و فیزیکی بر فرکانسهای طبیعی بی بعد  $\Omega_c^*$

$L/h=۶۰$			$L/h=۳۰$			$L/h=۱۰$			$\beta$	$p$
$n$			$n$			$n$				
۳	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۲	۱		
۲۱۴/۲۵۵	۹۵/۰۸۶۲	۲۳/۰۹۶۷	۲۰۹/۴۷۲	۹۴/۰۹۵۹	۲۳/۰۳۲۶	۱۷۶/۱۴۴	۸۵/۶۵۶۹	۲۲/۳۹۱۲	$\pi/۶$	۰
۲۱۱/۲۶۱	۹۲/۱۳۰۴	۲۰/۳۰۷۴	۲۰۶/۴۵۸	۹۱/۱۳۳۴	۲۰/۲۴۴۳	۱۷۲/۹۱۹	۸۲/۶۲۵۶	۱۳/۶۱۳۳	$\pi/۳$	
۲۰۶/۳۴۶	۸۷/۳۵۸۴	۱۶/۱۵۲۵	۲۰۱/۵۲۱	۸۶/۳۶۰۸	۱۶/۰۹۶۶	۱۶۷/۷۷۷	۷۷/۸۵۲۶	۱۵/۵۴۰۱	$\pi/۲$	
۱۸۸/۱۱۵	۸۳/۴۸۶۹	۲۰/۲۷۹۸	۱۸۳/۸۰۷	۸۲/۵۷۰۳	۲۰/۲۱۲۷	۱۵۴/۳۷۳	۷۵/۰۲۲۹	۱۹/۶۰۹۶	$\pi/۶$	۰.۱
۱۸۵/۳۸۹	۸۰/۸۵۰۸	۱۷/۸۲۳۸	۱۸۰/۹۷۹	۷۹/۸۹۱۸	۱۷/۷۵۲۳	۱۵۱/۲۱۹	۷۲/۱۹۱۷	۱۷/۱۴۱۷	$\pi/۳$	
۱۸۰/۹۸۸	۷۶/۶۳۰۲	۱۴/۱۷۴۷	۱۷۶/۴۸۶	۷۵/۶۴۵۳	۱۴/۱۱۰۷	۱۴۶/۴۶۳	۶۷/۸۹۶۹	۱۳/۵۷۲۲	$\pi/۲$	
۱۲۵/۵۰۵	۵۵/۷۰۰۷	۱۳/۵۳۰۶	۱۲۲/۵۲۲	۵۵/۰۴	۱۳/۴۷۴۱	۱۰۲/۶۶۲	۴۹/۸۶۰۱	۱۳/۰۲۹۳	$\pi/۶$	۱
۱۲۳/۵۷۹	۵۳/۸۹۶۵	۱۱/۸۸۳۹	۱۲۰/۴۳۶	۵۳/۱۶۷۲	۱۱/۸۱۸۱	۱۰۰/۲۲۴	۴۷/۷۸۹۷	۱۱/۳۴۸۷	$\pi/۳$	
۱۲۰/۵۴۶	۵۱/۰۴۵۳	۹/۴۴۷۴	۱۱۷/۲۶۴	۵۰/۲۶۹۷	۹/۳۸۷	۹۷/۷۹۶۱	۴۴/۸۰۷۷	۸/۹۶۹۱۹	$\pi/۲$	
۹۴/۵۱۲۸	۴۱/۹۴۷۲	۱۰/۱۸۹۶	۹۲/۳۲۲۶	۴۱/۴۸۰۳	۱۰/۱۵۵۱	۷۷/۳۳۲۶	۳۷/۶۳۹۲	۹/۸۴۷۰۹	$\pi/۶$	۱۰
۹۳/۱۳۸	۴۰/۶۲۰۳	۸/۹۵۴۹۳	۹۰/۸۹۱۷	۴۰/۱۲۹۷	۸/۹۱۷۵۵	۷۵/۷۴۲۳	۳۶/۲۰۷۵	۸/۶۰۳۴۲	$\pi/۳$	
۹۰/۹۲۰۸	۳۸/۴۹۷۱	۷/۱۲۰۸۹	۸۸/۶۲۳۸	۳۷/۹۹۰۹	۷/۰۸۶۸۱	۷۳/۳۴۴۸	۳۴/۰۳۹۴	۶/۸۰۷۲۷	$\pi/۲$	



## ۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه که بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل تیر تیموشنکو انجام شده است، نحوه تغییرات و شدت حساسیت فرکانس طبیعی بی‌بعد به تغییرات اندازه پارامترهای مؤثر بر مسئله ارتعاش آزاد مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این بین نانوتیر خمیده روی بستر کشسان وینکلر-پسترناک قرار گرفته و تحت بارگذاری دمایی یکنواخت است. خواص مواد در راستای ضخامت نانوتیر خمیده تابعی مدرج به صورت کاملاً پیوسته توزیع شده است. از فرمول‌های توسعه‌یافته بر مبنای تئوری مذکور به وسیله اصل همپیتون، معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوطه منتج شده‌اند. با فرض شرایط تکیه‌گاهی مقید ساده، از روش حل نویر برای نیل به نتایج عددی استفاده شده است. در یک مطالعه پارامتری میزان شدت اثر تغییرات انواع پارامترهای هندسی و ترموفیزیکی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور تأیید صحت مطالعه انجام شده، برخی از داده‌ها برای حالتی که اثرات دمایی و بستر کشسان در آن‌ها وارد نشده، با نتایج یکی از کارهای قبلی مقایسه شد. برخی از نتایج مطالعه انجام شده به شرح زیر است:

۱- صرف نظر از اثرات ضرایب بستر کشسان، لحاظ کردن اثرات دمایی و قراردادن نانوتیر خمیده تابعی مدرج تحت بارگذاری ترمومکانیکی از یک طرف سبب کاهش مستقیم فرکانس طبیعی بی‌بعد و از طرف دیگر موجب افزایش حساسیت آن به تغییرات دیگر پارامترها می‌شود. اضافه شدن اثرات ضرایب بستر کشسان خصوصاً ضریب بستر پسترناک سبب تغییر رفتار یاد شده می‌گردد، به طوری که عکس آن رخ می‌دهد. این مورد را می‌توان با مقایسه نتایج نمودار ۲ و جدول ۳ تحقیق نمود.

۲- افزایش اختلاف دما ابتدا به دلیل نوع شرایط استاتیکی و قیود تکیه‌گاهی، منجر به ایجاد کماتش حرارتی در نانوتیر خمیده تابعی مدرج می‌شود. کاهش استحکام سازه ناشی از کماتش حرارتی در نهایت باعث می‌شود که به ازای یک دمای بحرانی مقدار کمی فرکانس طبیعی صفر شود.

۳- لحاظ کردن اثرات بستر وینکلر-پسترناک سبب افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد و تغییر رفتار آن نسبت به تغییرات دمایی می‌شود. شایان ذکر است که نقش ضریب بستر پسترناک نسبت به ضریب بستر وینکلر برجسته‌تر است.

۴- مطالعه پارامتری این موضوع را روشن می‌سازد که در حالت کلی با صرف نظر از اثرات ضرایب بستر کشسان، افزایش مقدار کمی پارامترهای  $\beta$ ،  $\Delta T$ ،  $h/l$  و  $p$  و نیز کاهش مقدار کمی پارامترهای  $L/h$  و  $n$  به طور مستقیم کاهش فرکانس طبیعی را به دنبال دارد.

۵- با صرف نظر از بارگذاری ترمومکانیکی و اثرات بستر کشسان وینکلر-پسترناک بر میکرو-نانوتیر خمیده تابعی مدرج، نتایج این مطالعه و کارهای قبلی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل تیر تیموشنکو، یکی خواهند شد. به علاوه بیشتر شدن اندازه شعاع نانوتیر خمیده تا بی‌نهایت سبب همپوشانی نتایج این کار و کارهای قبلی بر میکرو-نانوتیر راست می‌شود.

## ۶- فهرست علائم

ممان اینرسی مرتبه سوم	$F_3$
نماینده ضرایب درجه حرارت وابسته به دمای مواد	$G$
انرژی جنبشی	$K_T$
ضریب سختی بستر پسترناک	$K_p$
ضریب تصحیح برشی مدل تیر تیموشنکو	$K_s$
ضریب سختی بستر وینکلر	$K_w$
ضرایب ماتریس سختی حاصل از مشتقات مکانی	$K_{ij}$
طول نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$L$
منتجه گشتاوری تنش کلاسیک	$M_{SS}$
منتجه نیرویی تنش کلاسیک	$N_{SS}$
منتجه دمایی	$NT$
منتجه نیروی برشی تنش کلاسیک	$Q$
شعاع نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$R$
پارامتر کمکی وابسته به پارامتر مقیاس طولی ( $l$ )	$S$
دما	$T$
دمای اولیه ( $300^\circ C$ )	$T_0$
انرژی کرنشی ناشی از ترم‌های تنش کلاسیک	$U_C$
انرژی ناشی از بستر کشسان	$U_F$
انرژی کرنشی ناشی از ترم‌های تنش مرتبه بالا	$U_{OH}$
کل انرژی کرنشی	$U_m$
ترم مجهول جابجایی راستای $s$ در حل نویر	$U_n$
حجم نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$V$
انرژی پتانسیل	$W_p$
ترم مجهول جابجایی راستای $l$ در حل نویر	$W_n$
منتجه نیرویی تنش‌های مرتبه بالا	$Y$
عرض نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$b$
ترم نمایانگر مشتق در انتگرال‌گیری‌ها	$d$
ترم نمایی در حل نویر	$e$
ضخامت نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$h$
پارامتر مقیاس طولی	$l$
تانسور تنش مرتبه بالا	$m$
شمار مدهای ارتعاشی	$n$
بار عرضی خارجی وارد بر نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$q$
متغیر مکانی محور $s$ در مختصات کارتزین	$s$
زمان	$t$
جابجایی مکانی در راستای محور $s$	$u$
جابجایی مکانی در راستای محور $l$	$w$
از محورهای مختصات کارتزین	$y$
از محورهای مختصات کارتزین	$z$
<b>علائم یونانی</b>	
ترم مجهول دوران حول محور عمود بر صفحه $s-l$ در حل نویر	$\Psi_n$
فرکانس طبیعی بی‌بعد	$\Omega^*$
اختلاف دمایی	$\Delta T$
ضریب انبساط دمایی	$\alpha$
زاویه کمان نانوتیر خمیده تابعی مدرج	$\beta$
دلتهای کرانکر	$\delta$
چگالی ( $kgm^{-3}$ )	$\rho$
تانسور تنش نرمال	$\sigma$
تانسور تنش برشی	$\tau$
تانسور کرنش نرمال	$\varepsilon$
تانسور تغییرات دورانی متقارن	$\chi$
بردار دوران	$\vartheta$
دوران حول محور عمود بر صفحه $s-l$	$\varphi$
ضرایب لامه	$\lambda, \mu$
نسبت پواسن	$\nu$
فرکانس طبیعی	$\omega_n$
<b>بالانویس‌ها</b>	
عملگر مشتق‌گیری مکانی	$()_0$
عملگر مشتق‌گیری زمانی اول و دوم	$()', ()''$
شاخص گردان	$p$

- 13- Ganapathi M, Polit O. Dynamic characteristics of curved nanobeams using nonlocal higher-order curved beam theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2017;91:190-202.
- 14- Ghodssi R, Lin P, editors. MEMS materials and processes handbook. Volume 1. New York: Springer; 2011.
- 15- David M, Kishi T, Kisaku M, Nakanishi H, Kasai H. Carbon nanoarch encapsulating Fe nanowire on Ni (111). *Japanese Journal of Applied Physics*. 2006;45(4A):2869.
- 16- Mohammadi H, Mahzoon M, Mohammadi M, Mohammadi M. Postbuckling instability of nonlinear nanobeam with geometric imperfection embedded in elastic foundation. *Nonlinear Dynamics*. 2014;76(4):2005-16.
- 17- Liu Y, Reddy J. A nonlocal curved beam model based on a modified couple stress theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2011;11(3):495-512.
- 18- Yang F, Sedaghati R, Esmailzadeh E. Free in-plane vibration of curved beam structures: a tutorial and the state of the art. *Journal of Vibration and Control*. 2018;24(12):2400-17.
- 19- Fang J, Gu J, Wang H. Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018;136:188-99.
- 20- Rahmani O, Hosseini SAH, Ghoytasi I, Golmohammadi H. Free vibration of deep curved FG nano-beam based on modified couple stress theory. *Steel and Composite Structures*. 2018;26(5):607-20.
- 21- Najafi F, Shojaeefard MH, Gogarchin HS. Nonlinear dynamic response of FGM beams with Winkler-Pasternak foundation subject to noncentral low velocity impact in thermal field. *Composite Structures*. 2017;167:132-43.
- 22- Deng H, Chen K, Cheng W, Zhao S. Vibration and buckling analysis of double-functionally graded Timoshenko beam system on Winkler-Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*. 2017;160:152-68.
- 23- Ghorbanpour Arani A, BabaAkbar-Zarei H, Pourmousa P, Eskandari M. Investigation of free vibration response of smart sandwich micro-beam on Winkler-Pasternak substrate exposed to multi physical fields. *Microsystem Technologies*. 2018;24(7):3045-60.
- 24- Sobhy M, Zenkour AM. The modified couple stress model for bending of normal deformable viscoelastic nanobeams resting on visco-Pasternak foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2018;1-14.
- 25- Moradi Dastjerdi R, Payganeh G, Rajabzadeh Mirakabad S, Jafari Mofrad-Taheri M. Static and free vibration analyses of functionally graded nano-composite plates reinforced by wavy carbon nanotubes resting on a Pasternak elastic foundation. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2016;3(2):123-35.
- 26- Boudierba B, Houari MSA, Tounsi A. Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Steel and Composite Structures*. 2013;14(1):85-104.
- 27- Zamanzadeh M, Rezazadeh G, Jafarsadeghi Pournaki I, Shabani R. Thermally induced vibration of a functionally graded micro-beam subjected to a moving laser beam. *International Journal of Applied Mechanics*. 2014;6(6):1450066.
- 28- Ghadiri M, Shafiei N. Vibration analysis of rotating functionally graded Timoshenko microbeam based on

$i$	نماد عدد موهومی ( $\sqrt{-1}$ )
زیر نویس‌ها	
$m$	فاز فلز خواص نانوتیر خمیده تابعی مدرج
$c$	فاز سرامیک خواص نانوتیر خمیده تابعی مدرج
$fm$	کسر حجمی فاز فلز
$fc$	کسر حجمی فاز سرامیک

**تشکر و قدردانی:** نویسندگان موردی بیان نکردند.

**تاییدیه اخلاقی:** نویسندگان متعهد می‌شوند که نتایج این مقاله در مجله دیگری چاپ نشده است یا در حال داوری نیست.

**تعارض منافع:** هر دو نویسنده منافع یکسانی از این مقاله دارند.

**سهام نویسندگان:** ابراهیم قویطاسی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۸۰٪): امید رحمانی (نویسنده دوم)، روش‌شناس/پژوهشگر کمکی (۲۰٪)

**منابع مالی:** نویسندگان موردی بیان نکردند.

### منابع

- Li X, Bhushan B, Takashima K, Baek CW, Kim YK. Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques. *Ultramicroscopy*. 2003;97(1-4):481-94.
- de Souza Pereira R. Atomic force microscopy as a novel pharmacological tool. *Biochemical Pharmacology*. 2001;62(8):975-83.
- McFarland AW, Colton JS. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2005;15(5):1060-7.
- Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39(10):2731-43.
- Mindlin RD. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*. 1963;3(1):1-7.
- Mindlin RD, Tiersten HF. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962;11(1):415-48.
- Toupin RA. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964;17(2):85-112.
- Asghari M, Rahaeifard M, Kahrobaiyan MH, Ahmadian MT. The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation. *Materials & Design*. 2011;32(3):1435-43.
- Salamat-talab M, Nateghi A, Torabi J. Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012;57(1):63-73.
- Akgöz B, Civalek Ö. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory. *Composite Structures*. 2013;98:314-22.
- Şimşek M, Reddy JN. Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*. 2013;64:37-53.
- Al-Basyouni KS, Tounsi A, Mahmoud SR. Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position. *Composite Structures*. 2015;125:621-30.

thermal loading with temperature-dependent properties. *Applied Physics A*. 2017;123(1):4.

33- Komijani M, Esfahani SE, Reddy JN, Liu YP, Eslami MR. Nonlinear thermal stability and vibration of pre/post-buckled temperature-and microstructure-dependent functionally graded beams resting on elastic foundation. *Composite Structures*. 2014;112:292-307.

34- Ke LL, Wang YS, Wang ZD. Thermal effect on free vibration and buckling of size-dependent microbeams. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2011;43(7):1387-93.

35- Timoshenko S, Goodier JN. *Theory of elasticity*. New York: McGraw-Hill; 1970.

36- Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003;51(8):1477-508.

37- Ansari R, Gholami R, Sahmani S. Size-dependent vibration of functionally graded curved microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory. *Archive of Applied Mechanics*. 2013;83(10):1439-49.

modified couple stress theory under different temperature distributions. *Acta Astronautica*. 2016;121:221-40.

29- Akgöz B, Civalek Ö. Effects of thermal and shear deformation on vibration response of functionally graded thick composite microbeams. *Composites Part B: Engineering*. 2017;129:77-87.

30- Khorshidi K, Bakhsheshi A, Ghadirian H. The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two dimensional functionally graded rectangular plates on Pasternak elastic foundation. *Journal of solid and fluid mechanics*. 2016;6(3):137-47. [Persian]

31- Mirjavadi SS, Mohasel afshari B, Shafiei N, Rabby S, Kazemi M. Effect of temperature and porosity on the vibration behavior of two-dimensional functionally graded micro-scale Timoshenko beam. *Journal of Vibration and Control*. 2018;24(18):1-15.

32- Rahmani O, Hosseini SAH, Ghoytasi I, Golmohammadi H. Buckling and free vibration of shallow curved micro/nano-beam based on strain gradient theory under