



Use of Conformal Mapping in the Field of Flying Vehicle Route Planning

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Kosari A.*¹ PhD,
Kassaei S.I.¹ MSc,
Rostampour A.¹ BSc,
Seyedzamani S.² MSc

How to cite this article

Kosari A, Kassaei S.I, Rostampour A, Seyedzamani S. Use of Conformal Mapping in the Field of Flying Vehicle Route Planning. Modares Mechanical Engineering. 2020;20(5):1187-1197.

¹Aerospace Department, New Sciences & Technologies Faculty, University of Tehran, Tehran, Iran

²Satellite Research Institute, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Aerospace Department, New Sciences & Technologies Faculty, University of Tehran, Tehran, Iran. Postal Code: 1439957131

Phone: -

Fax: -

kosari_a@ut.ac.ir

Article History

Received: May 09, 2018

Accepted: October 15, 2019

ePublished: May 09, 2020

ABSTRACT

In this paper, a novel method for designing the flight paths of an aircraft is presented based on the concept of conformal mapping. Here, a low-altitude route-planning problem has been considered. In this problem, maintaining the control effort to reduce aircraft's altitude and increasing the speed with the limitations of Terrain Following (TF) and Terrain Avoidance (TA) issues, is the main strategy of this performance maneuver. In the proposed approach, attempts are made to convert the real space including terrains and obstacles, in which their data are provided using a digital elevation map, into a pseudo obstacle-free virtual space with no barriers and altitude constraints. In this regard, the concept of conformal mapping has been used as a facilitating mathematical tool for this problem-solving space transformation. The transformation of the problem-solving spaces under the mapping leads to solving the problem of dynamic reflection, the performance criterion, and the real altitude constraints in the virtual space. It is noteworthy that in designing a path in a newly converted space, the effect of barriers on the formation of flight routes is somehow included in the equations expressed in the virtual space. The results of multiple case studies and numerical optimizations performed for 2D geometrical terrains and obstacles show that the proposed approach is more consistent with the basic flight concepts as well as real-world applications.

Keywords Trajectory Planning; Conformal Mapping; Terrain and Obstacle Avoidance Flight; Low Altitude Flight; Optimal Control

CITATION LINKS

- [1] Terrain following for fixed-wing unmanned aerial vehicles using feedback equivalence
[2] Using conformal mapping in developing a novel optimal obstacle-avoidance trajectory-planning for a flying robot [3] Dynamic constrained low altitude flight maneuvers with constant energy [4] A new technique for terrain following/terrain Avoidance guidance command generation [5] Trajectory planning for autonomous aerospace vehicles amid known obstacles and conflicts [6] Optimal trajectory synthesis for terrain-following flight [7] Dynamic based cost functions for TF/TA flights [8] Aircraft route optimization using genetic algorithms [9] Optimal path planning for a mobile robot using cuckoo search algorithm [10] Novel minimum time trajectory planning in terrain following flights [11] Evolutionary algorithm based offline/online path planner for uav navigation [12] Aircraft terrain following flights based on fuzzy logic [13] Optimal online trajectory generation for a flying robot for terrain following purposes using neural network [14] Aircraft trajectory planning with an altitude-bound in terrain-following flight [15] Path generation for flying robots in mountainous regions [16] Aircraft optimal terrain/threat-based trajectory planning and control [17] Optimal three dimensional terrain following/terrain avoidance for aircraft using direct transcription method [18] Airplane flight dynamics and automatic flight controls: Part I (Volume 1) [19] Complex variables: Introduction and applications second edition (Cambridge texts in applied mathematics) [20] Complex variables and Applications, 8th ed [21] Survey of numerical methods for optimal control [22] Survey of numerical methods for trajectory optimization [23] A gauss pseudospectral transcription for optimal control [24] Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems [25] SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization

استفاده از نگاهت همدیس در حوزه برنامه‌ریزی مسیر وسایل پروازی

امیررضا کوثری* PhD

گروه مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

سیدایمان کسائی MSc

گروه مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

علیرضا رستم‌پور BSc

گروه مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

سهیل سیدزمانی MSc

پژوهشکده سامانه‌های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله روشی نوین برای طرح‌ریزی مسیر و تعیین گذرگاه‌های قابل پرواز یک هواپیما براساس راهکار نگاهت همدیس معرفی می‌شود. در اینجا مساله طراحی گذرگاه پروازی ارتفاع پایین برای یک هواپیما مطرح شده است. در این مساله حفظ تلاش کنترلی برای کاهش ارتفاع و افزایش سرعت با محدودیت اجتناب از برخورد با موانع و عوارض زمینی، استراتژی اصلی این مانور عملگری است. در رویکرد ارایه‌شده سعی بر تبدیل فضای واقعی شامل موانع و عوارض زمینی که عموماً اطلاعات آن توسط نقشه‌های دیجیتالی ماهواره‌ای یا هوایی موجود است، به یک فضای مجازی شامل موانع هموارشده یا فاقد ارتفاع است. در این راستا از مفهوم نگاهت‌های همدیس به عنوان یک ابزار ریاضیاتی تسهیل‌کننده برای این تبدیل فضای حل مساله بهره گرفته شده است. تبدیل فضای حل مساله تحت نگاهت یاد شده به گونه‌ای منجر به حل مساله‌ای متاثر از انعکاس دینامیک، معیار عملکرد و محدودیت‌های ارتفاعی حقیقی روی فضای مجازی می‌شود. این نکته قابل توجه است که در طراحی مسیر گذر در فضای تبدیل یافته جدید، تأثیر موانع بر شکل‌دهی مسیر پروازی، به نوعی در معادلات بیان شده در فضای مجازی گنجانده می‌شود. نتایج مطالعات موردی و بهینه‌سازی‌های عددی انجام پذیرفته با لحاظ موانع با اشکال هندسی دو بعدی پایه نشان‌گر تطبیق مناسب نتایج با قواعد عملکردی پروازی است. روش پیشنهادی پتانسیل پیاده‌سازی در هر دو حالت برنامه‌ریزی مسیر به صورت برخط و خارج از خط را داراست.

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی مسیر، نگاهت همدیس، اجتناب از موانع و عوارض زمین، پرواز ارتفاع پایین، کنترل بهینه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۳

*نویسنده مسئول: kosari_a@ut.ac.ir

۱- مقدمه

طرح‌ریزی مسیر ایمن یکی از مهم‌ترین نیازمندی‌های کارکردی در سناریوهای پروازی متاثر از قید یا الزام عملیاتی پرواز در ارتفاع پایین است. این سناریوهای پروازی تعریف‌شده در دو حوزه ماموریت‌های نظامی و غیرنظامی است. به طور نمونه، هواپیماهای نظامی خاص در راستای ارضای الزام اختفای راداری، بسته به توانمندی‌های عملکردی خود مشخصات پرواز در ارتفاع پایین را نیز در پاکت پروازی خود دارا هستند. از جمله کاربردهای غیرنظامی، نیز می‌توان به عملیات شناسایی در مناطق کوهستانی

و یا فرود در فرودگاه‌هایی که در مناطق پرخطر کوهستانی قرار دارند، اشاره کرد.

امروزه با توجه به مزایای بی‌بدیل هواپیماهای بدون سرنشین و ظهور فناوری‌های مرتبط، بهره‌گیری از توانمندی‌های این وسایل پرنده در انجام ماموریت‌های مختلف به امری اجتناب‌ناپذیر تبدیل شده است. ماموریت‌های متعددی از قبیل گشت‌زنی در مرزهای کوهستانی، شناسایی محیط‌های آلوده، کنترل ترافیک شهری، عملیات امدادونجات و غیره، می‌تواند توسط پهبادها نیز به انجام برسد که در بسیاری از سناریوهای یادشده، پرواز ارتفاع پایین به‌عنوان یکی از الزامات عملیاتی مطرح است. به این ترتیب یکی از مهم‌ترین الزامات سیستمی عدم برخورد وسیله پرنده با عوارض زمینی و سایر موانع موجود در محیط پروازی است. از سویی این هواپیماها باید به نوعی قابلیت انجام مانورهای تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی را نیز دارا باشند. برنامه‌ریزی مسیر برای اجرای این مانورها به همراه هشدارهای لازم باید در برنامه خلبان خودکار لحاظ شود. این نکته قابل توجه است که هر چه فرآیند این برنامه‌ریزی به جهت ایجاد مسیر در زمان کوتاه‌تری انجام شود می‌تواند در کاهش بار کاری خلبان خودکار و خطای تعقیب مسیر موثر واقع شود. با توجه به موارد ذکرشده از اهداف مهم مقاله حاضر بررسی و ارایه روشی نوین در طراحی مسیر پروازی، جهت افزایش سرعت حصول به جواب، با حضور موانع محیطی است [1].

[2].

به طور کلی مانور تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی شامل حل همزمان سه مساله زیر است:

- ۱- ایجاد مسیر با هدف تعقیب و اجتناب عوارض زمینی با رعایت ایمنی و اهداف اصلی ماموریت
- ۲- دنبال کردن مسیر ایجاد شده با ارایه فرامین کنترلی مناسب
- ۳- به کارگیری اطلاعات سنسورها برای بروزسانی وضعیت زمین و موانع زمینی و هدایت هواپیما.

مهم‌ترین مساله در اجرای مانور پروازی تعقیب و اجتناب از موانع، تولید مسیر بهینه ایمن است. لذا در پروازهای ارتفاع پایین، مسیر تولیدشده علاوه بر کمینه‌سازی معیارهای عملکردی موردنظر طراح نظیر معیارهای پایه کمترین زمان، کوتاه‌ترین مسیر، کمینه تلاش کنترلی و یا معیارهای ترکیبی، باید با دینامیک پرواز وسیله پرنده و محدودیت‌های محیطی نیز سازگار باشد [3]. به‌علاوه، زمان انجام محاسبات نیز باید به اندازه کافی سریع باشد به طوری که بتواند قابلیت تولید مسیر جدید را با توجه به تغییرات ایجادشده نسبت به مسیر نامی بدهد. به همین دلیل در بسیاری از مطالعات و پژوهش‌های انجام‌شده، معادلات مربوط به دینامیک پرواز هواپیما را به دو بخش عمودی و افقی تقسیم کرده و مورد بررسی قرار می‌دهند و برای ساده‌سازی محاسبات طراحی مسیر از مدل‌های دینامیکی ساده‌شده استفاده می‌شود که در این مقاله نیز از همین رویکرد بهره گرفته شده است.

سال ۲۰۱۷، کوثری و همکاران^[15] روشی دوبعدی در برنامه‌ریزی مسیر برای ایجاد مسیر بهینه جهت پرواز UAV در مناطق کوهستانی ارائه دادند. در این مطالعه متغیرهای حالت و کنترلی با استفاده از روش‌های ذوزنقه‌ای و هرمیت-سیمسون گسسته شده‌اند.

به طور کلی در اکثر مطالعات انجام شده در این زمینه هدف اصلی یافتن مسیر بهینه در محیط‌های با موانع با فرضیات و محدودیت‌های دینامیکی و فیزیکی لحاظ شده است. در برخی از کارهای مرور شده، مسیر بهینه با فرض مشخص بودن موانع و پستی و بلندی‌های زمین، تولید می‌شود^[4-8, 10, 11, 14]. در برخی دیگر از پژوهش‌ها، مدل ریاضی پروفیل موانع و عوارض در معادلات سینماتیک حرکت پرنده وارد می‌شود^[6, 7]. در این میان، پژوهش‌هایی که در آنها اساس کار بر روش‌های هندسی و سینماتیک حرکت است، شروط بهینگی مسیر لزوماً می‌تواند شرط امکان‌پذیری دینامیکی و عملکردی جهت تعقیب مسیر را ارضا نکند.

هدف از پژوهش حاضر، ارائه یک راهکار نوین جهت کمک به رفع برخی از مشکلات اشاره شده یا به نوعی ایجاد بستری جهت بهسازی توانمندی‌های روش‌های پیشین است. در این راستا، ابتدا با استفاده از مدل هندسی پایه موانع ارتفاعی نظیر کوه، نگاهت همدیس متناظر به تبدیل فضای بالای مانع به فضای مجازی بالای محور افق ایجاد می‌شود. در ادامه مسیر بهینه براساس مدل هندسی مانع، برای اجرای مانور تعقیب و اجتناب از مانع، مبتنی بر استفاده از نگاهت همدیس مدل هندسی، استخراج می‌شود. در رویکرد ارائه شده، مساله طراحی مسیر برای عبور از مانع با استفاده از نگاهت‌های همدیس به مساله‌ای با معادلات جدید حرکت ولی در فضای مجازی و بدون مانع تبدیل می‌شود که به مراتب ساده‌تر خواهد بود. نگاهت‌های مورد استفاده در کار حاضر شامل نگاهت ژوکوفسکی و نگاهت‌های شوارتز-کریستوفل است. بنابراین محاسبه نگاهت‌های مورد نظر، یکی از اصلی‌ترین موضوعات این پژوهش به حساب می‌رود.

۲- رویکرد و روش حل مساله

۲-۲- مدل‌سازی ریاضی مساله

معادلات حرکت پرنده با فرض استفاده از مدل جرم نقطه‌ای و فرض دستگاه مختصات زمین تخت و شرایط اتمسفر استاندارد به صورت زیر خواهد بود^[10]:

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (1)$$

$$\dot{y} = V \sin \gamma \quad (2)$$

$$m\dot{V} = T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma \quad (3)$$

$$mV\dot{\gamma} = T \sin \alpha + L - mg \cos \gamma \quad (4)$$

در اینجا پارامترهای V, γ, x و y به ترتیب بیانگر برد افقی، ارتفاع پروازی، سرعت و زاویه مسیر پرواز است. متغیرهای L و D نشان‌دهنده نیروهای برآ و پسای آیرودینامیکی و T نیروی پیشران

در زمینه طراحی و برنامه‌ریزی مسیر برای انجام مانور تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی کارهای متنوعی انجام شده و روش‌های مختلفی ارائه شده است. نتون و همکاران^[4] از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای طراحی مسیر بهینه استفاده کردند که اساس آن بر گسسته‌سازی عوارض زمینی است. یانگ و ژائو^[5] در کاری مشابه پژوهش قبل، پس از گسسته‌سازی عوارض زمینی از تکنیک جستجوی A^* استفاده نمودند. منون و همکاران^[6] روشی جدید برای برنامه‌ریزی مسیر بهینه سه‌بعدی ارائه کرده‌اند که در آن تاثیر پروفیل عوارض زمینی در معادلات حرکت، لحاظ و یک شاخص بهینگی مرکب از زمان پرواز و پوشش زمینی کمینه شده است. فرض اساسی در نظر گرفته شده این است که پروفیل عوارض زمینی هموار و حداقل دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد. در کاری مشابه و در جهت بهبود نتایج، ملائک و کوثری با یک روش ابتکاری و از طریق تابع هزینه قابلیت‌های دینامیکی وسیله پرنده را نیز در مساله برنامه‌ریزی مسیر وارد کردند^[7]. کینگ^[8] از الگوریتم ژنتیک برای بررسی پرواز در ارتفاع پایین در حضور موانع استفاده کرده است و در آن از سری‌های فوریه برای مدل‌سازی عوارض زمینی استفاده نموده است. در پژوهش دیگری از الگوریتم کوکو برای برنامه‌ریزی مسیر بهینه ربات در محیط با حضور موانع ناشناخته استفاده شده است^[9]. الگوریتم کوکو از رفتار پروازی پرنده فاخته الهام گرفته و در طراحی مسیر ربات‌ها کاربرد دارد. ملائک و کوثری در سال ۲۰۰۷^[10]، روش دینامیک معکوس برای بهینه‌سازی مسیر در مانور تعقیب عوارض زمینی را ارائه دادند که در آن از چند جمله‌ای چبیشف برای مدل‌سازی عوارض استفاده کردند. نیکولاس و همکاران^[11]، یک روش ترکیبی برخط و خارج از خط برای برنامه‌ریزی مسیر با استفاده از الگوریتم ژنتیک به عنوان الگوریتم بهینه‌سازی ارائه دادند. در این مقاله، برنامه‌ریزی خارج از خط برای ایجاد مسیر در محیط شناخته شده و برنامه‌ریزی برخط برای تولید مسیر هموار به مقصد مشخص در محیط ناشناخته، با به‌کارگیری اطلاعات برنامه‌ریزی خارج از خط انجام می‌شود. در مطالعه‌ای، برنامه‌ریزی مسیر شبه‌بهینه بر مبنای منطق فازی ارائه شده است که در آن قوانین فازی براساس سه‌دسته داده ورودی اعم از شیب زمین، تغییرات شیب و ارتفاع پروازی ایجاد می‌شوند^[12]. کوثری و همکاران^[13]، برنامه‌ریزی برخط مانور تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی را با استفاده از شبکه عصبی نشان دادند. در روش ارائه شده، آموزش شبکه عصبی براساس مسیرهای خارج از خط به عنوان اطلاعات مرجع انجام می‌شود. در مطالعه کسایی و کوثری^[14]، برنامه‌ریزی مسیر برای انجام مانور تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی با روش شبه‌طیفی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله مسیر بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی لژاندر-گاوس-رادو که یک روش حل عددی مستقیم مسائل کنترل بهینه است، به دست آمده است. همچنین روش‌های مختلف برنامه‌ریزی مانور تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی که اساس کار بر برنامه‌ریزی غیرخطی است، ارائه شده است^[15, 17]. در

در تابع هزینه گنجانده شده است. به این ترتیب معیار عملکرد به صورت ذیل قابل تعریف خواهد بود.

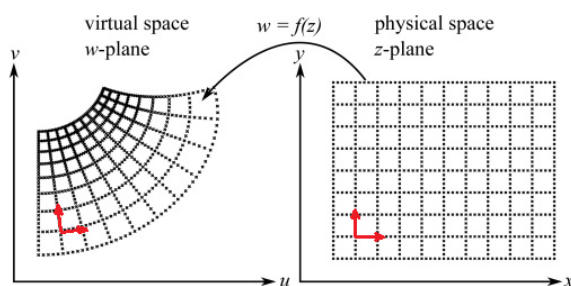
$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(1-K) + K(y - h_{tr}(x))^2 + \alpha^2] dt, \quad (10)$$

$$0 \leq K \leq 1$$

در رابطه (۱۰)، $h_{tr}(x)$ تابعی ریاضیاتی مبین پروفیل ارتفاعی زمین (مانع) است که با یک ارتفاع ایمن از سطح پروفیل جمع شده است. از آنجا که زمان پرواز و اختفا زمینی دو معیار متقابل هستند، به طوری که با کاهش زمان عملیات، میزان اختفا زمینی نیز کاهش می‌یابد، لذا ثابت K برای برقراری تعادل میان دو معیار بهینگی توسط طراح قابل انتخاب است.

۲-۲- روش حل مساله با مفهوم نگاشت‌های همدیس

بحث نگاشت‌های مربوط به بخشی از علم ریاضیات در حوزه اعداد مختلط است که می‌تواند طبق قاعده‌ای ریاضیاتی اثر مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط را در صفحه مختلط دیگر ترسیم کند. قاعده ریاضی نگاشت‌های مختلط همانند توابع در حوزه اعداد حقیقی است و کلیه خواص تابع برای نگاشت نیز می‌تواند تعریف شود. از مجموعه نگاشت‌های مختلف، نگاشت‌های همدیس به دلیل ویژگی‌هایی خاصی که دارند در علوم مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند و در حوزه‌های مختلف مانند مهندسی برق، مکانیک و هوافضا کاربردهای متعددی دارند. سه ویژگی اصلی این نگاشت‌ها تحلیلی بودن، معکوس‌پذیری محلی و خاصیت حفظ زوایا است که به دلیل ویژگی اخیر به این نگاشت‌ها، نگاشت‌های حافظ زوایا نیز گفته می‌شود [18-20]. فرض کنید $z = x + iy$ و $w = u + iv$ ، دو عدد در دو صفحه مختلط z و w باشند و رابطه این دو به صورت $w = f(z)$ باشد که f یک تابع مختلط است؛ در صورتی که $f'(z)$ در تمامی نقاط دامنه تعریف خود موجود و غیرصفر باشد f یک نگاشت همدیس خواهد بود. در این صورت زاویه بین دو خط در صفحه z با زاویه این دو خط تحت نگاشت f در صفحه w برابر است که این ویژگی در نمودار ۱ نشان داده شده است.



نمودار ۱) ویژگی حفظ زوایا در نگاشت‌های همدیس

معکوس‌پذیری محلی، خاصیت مهم دیگر نگاشت‌های همدیس است. برای نگاشت f ، تابع $z = F(w)$ نگاشت معکوس است و با توجه به اینکه رابطه $f(z)F(w) = 1$ بین دو نگاشت برقرار است، نگاشت معکوس نیز همدیس خواهد بود. اهمیت این

موتور است. نیروهای L و D به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} C_L \quad (5)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} C_D$$

که S_{ref} سطح مقطع مرجع هواپیما و C_L و C_D ضرایب آیرودینامیکی برآ و پسای بوده و تابعی از زاویه حمله (α) ، عدماخ (M) و چگالی هوا (ρ) است. رابطه‌ای که برای محاسبه ضرایب برآ و پسای آیرودینامیکی استفاده می‌شود در زیر آمده است.

$$C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha} \alpha \quad (6)$$

$$C_D = C_{D_0} + K C_L^2$$

در رابطه (۶) C_{D_0} و C_{L_0} ضرایب برآ و پسا در زاویه حمله صفر و $C_{L\alpha}$ شیب ضریب برآ ناشی از زاویه حمله هواپیما هستند، همچنین K ثابت پسای قطبی است. نیروی تراست هواپیما به صورت زیر تعریف می‌شود [4, 7]:

$$T = T_{max}(h, M)g(\eta) \quad (7)$$

در رابطه (۷)، T_{max} بیشینه نیروی تراست بوده که تابعی از ارتفاع و عدد ماخ پروازی است. η بیانگر وضعیت دسته گاز $0 \leq \eta \leq 1$ است و $g(\eta)$ یک تابع غیرخطی متناسب با حجم و توان موتور است. با توجه به روابط (۶) و (۷) می‌توان α و η را به عنوان متغیرهای کنترلی مساله طراحی مسیر در نظر گرفت. دامنه محدودیت‌های فیزیکی متغیرها نیز که تابعی از عملکرد هواپیما است به صورت زیر لحاظ می‌شود:

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \quad (8)$$

$$V_{min} \leq V \leq V_{max}$$

$$0 \leq \eta \leq 1$$

یکی دیگر از پارامترهای مهم که در مانور تعقیب و اجتناب از عوارض زمینی باید در نظر گرفته شود نرخ اوج‌گیری و نرخ کاهش ارتفاع هواپیما است که این معیار به صورت یک محدودیت در مساله اعمال می‌شود.

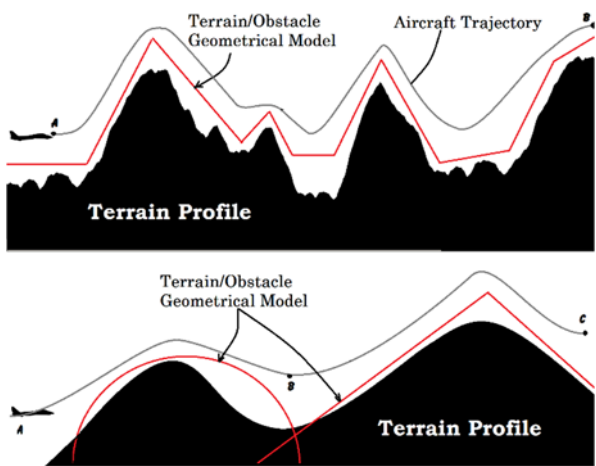
$$-RoD_{max} \leq \dot{y} \leq RoC_{max} \quad (9)$$

در رابطه (۹) RoC_{max} حداکثر نرخ اوج‌گیری و RoD_{max} حداکثری نرخ کاهش ارتفاع هواپیما است.

برای تعیین مسیر مطلوب در فضای مجاز پروازی باید به گونه‌ای شرایط ویژگی‌های مسیر مطلوب را در مساله وارد کرد. یک راهکار برای این مهم بهره‌گیری از تعریف معیار عملکرد یا تابع هزینه مناسب مساله است که با توجه به نیازهای ماموریتی و عملیاتی می‌تواند تعیین شود. در حقیقت یکی از ابزارهای طراحی در تعیین مسیر بهینه، انتخاب یک تابع هزینه مناسب است. در مطالعه حاضر یک معیار بهینگی مرکب از زمان پرواز و پوشش زمینی در نظر گرفته شده است. به منظور جلوگیری از تغییرات ناگهانی در زاویه حمله که می‌توان آن را به تغییرات سطح کنترلی الویتور مرتبط کرد، در اینجا مجذور زاویه حمله که ترم کاهنده تلاش کنترلی است، نیز در کنار دو معیار زمان عملیات و ارتفاع پروازی

در رابطه (۱۲)، a_1, a_2, \dots, a_n نقاط معادل گوشه‌های A_1, A_2, \dots, A_n است. باید توجه داشت که در نگاشت شوارتز-کریستوفل، ضابطه نگاشت نقاط را از فضای مجازی (بدون مانع چندضلعی) به فضای اصلی تصویر می‌کند، برعکس آنچه نگاشت ژوکوفسکی انجام می‌داد.

با توجه به امکان محاسبه این نگاشت‌ها برای اشکال هندسی ساده و چندضلعی‌های پیچیده‌تر، می‌توان موانع طبیعی، کوه‌ها و عوارض زمین را با اشکال هندسی مدل کرد و سپس با استفاده از نگاشت متناسب با شکل مدل هندسی مانع، معادلات حرکت وسیله پرنده در محیط دارای مانع را به یک محیط مجازی بدون قید ارتفاع تبدیل و منتقل نمود. شکل ۱ مفهوم مدل هندسی موانع و پستی‌وبلندی‌های زمین را به خوبی به نمایش می‌گذارد. با انجام این ترفند، قید ارتفاع ناشی از موانع و عوارض زمینی در معادلات حرکت گنجانده می‌شود و حل مساله جدید در محیط مجازی، که بازسازی شده مساله اصلی در محیط حقیقی با اعمال نگاشت است، ذاتا منجر به استخراج مسیر بهینه عبور از مانع می‌شود. به بیان دیگر، در این رویکرد، وسیله پرنده به جای مانع حقیقی، سعی می‌کند از مدل هندسی مانع اجتناب کند؛ طراحی مسیر ممکن است در یک سناریو به صورت سراسری یا به صورت محلی و مرحله‌به‌مرحله انجام شود.



شکل ۱ مفهوم مدل هندسی موانع و عوارض زمین

اگر فضای حقیقی مساله در صفحه Z که بصورت $Z = x + iy$ تعریف می‌شود و فضای حل مساله (فضای مجازی) در صفحه w که این صفحه نیز به صورت $w = u + iv$ تعریف می‌شود، در نظر گرفته شوند، در این صورت می‌توان در صفحه حقیقی معادلات (۱)

و (۲) را به صورت رابطه (۱۳) و به صورت یکپارچه نوشت:

$$z = \dot{x} + i\dot{y} = V \cos \gamma + iV \sin \gamma \quad (13)$$

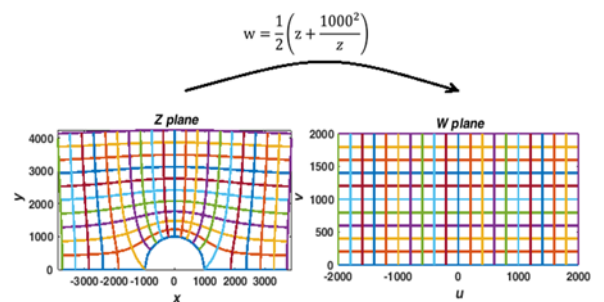
و اگر نگاشت از صفحه Z به w موجود و برابر با نگاشت f باشد، رابطه دیفرانسیلی حرکت در فضای جدید با اعمال نگاشت، برابر خواهد بود با:

ویژگی در مواردی که رابطه مستقیم نگاشت به طور صریح قابل محاسبه نیست بیشتر مشخص می‌شود [19].

در پژوهش حاضر، از دسته خاصی از نگاشت‌های همدیس استفاده می‌شود که مرز یک شکل هندسی را روی محور حقیقی و بیرون شکل را به بالای محور حقیقی تصویر کند. در بین نگاشت‌های همدیس، دو نگاشت ژوکوفسکی و نگاشت‌های شوارتز-کریستوفل این ویژگی را دارند. نگاشت ژوکوفسکی در آیرودینامیک به طور گسترده در تحلیل عملکرد آیرودینامیکی ایرفویل‌ها استفاده می‌شود؛ این نگاشت مرز نیم‌دایره را بر روی محور حقیقی و فضای بالای آن را به بالای محور حقیقی تصویر می‌کند. رابطه نگاشت ژوکوفسکی به صورت زیر بیان می‌شود [20].

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{R_{obs}^2}{z} \right) \quad (11)$$

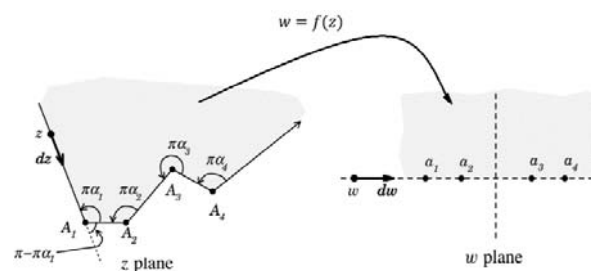
که در آن R_{obs} شعاع نیم‌دایره مورد نظر است. در نمودار ۲ این نگاشت برای $R_{obs} = 1000$ رسم شده است. در اینجا نگاشت ژوکوفسکی، فضای اصلی بالای مانع دایروی را به فضای بالای محورهای موهومی منتقل می‌کند.



نمودار ۲ نگاشت ژوکوفسکی برای $R_{obs} = 1000$

نگاشت شوارتز-کریستوفل، مجموعه نقاط روی محور حقیقی و مجموعه نقاط فضای بالایی آن را بر نقاط مرزی و بالای یک چندضلعی تصویر می‌کند. اگر زوایای داخلی چندضلعی مربوط به رئوس A_1, A_2, \dots, A_n به ترتیب $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ باشد (نمودار ۳)، طبق قضیه شوارتز-کریستوفل نگاشت، رابطه دیفرانسیلی این نگاشت به صورت رابطه (۱۲) خواهد بود [16, 17].

$$\frac{dz}{dw} = \gamma (w - a_1)^{\alpha_1 - 1} (w - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (w - a_n)^{\alpha_n - 1} \quad (12)$$



نمودار ۳ نگاشت شوارتز-کریستوفل

روش، دقت بالای حل و اطمینان از ارضاشدن شرایط بهینگی است. در عین حال این روشها معایبی نیز دارند که مهمترین آنها سخت و وقتگیر بودن استخراج شرایط و معادلات بهینگی است. همچنین در این روشها، شعاع همگرایی جواب کوچک بوده و وابستگی زیادی به حدس اولیه دارد [22, 24].

روشهای مستقیم با گسسته‌سازی متغیرهای حالت و کنترلی، مساله کنترل بهینه را به مساله بهینه‌سازی یا برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنند. در روشهای مستقیم برخلاف روشهای غیرمستقیم نیازی به مشخص بودن شرایط بهینگی نیست. همچنین این روشها شعاع همگرایی بزرگ بوده و به همین دلیل نیازی به حدس اولیه دقیق ندارند [23, 24].

در این مقاله از روش شبه‌طیفی لژاندر- گاوس- رادو که یک روش مستقیم است برای حل مساله استفاده شده است. در روش مورد استفاده هر دودسته متغیرهای حالت و کنترلی گسسته شده‌اند. در این روش از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برای تخمین متغیرهای حالت و کنترل در مجموعه گره‌های لژاندر- گاوس- رادو استفاده شده است. این گره‌ها ریشه‌های حاصل جمع چندجمله‌ای‌های درجه n م و درجه $(n-1)$ م است [21, 22]. با مشتق‌گیری از چندجمله‌ای‌های تخمینی متغیرهای حالت و جایگذاری آن در معادلات حرکت، معادلات پیوسته به دسته‌ای از معادلات جبری در گره‌های محاسباتی تبدیل می‌شوند. همچنین از تقریب یک‌چهارم لژاندر- گاوس برای تخمین بخش انتگرالی تابع هزینه استفاده شده است [24]. در نهایت برای حل مساله بهینه‌سازی غیرخطی استخراج شده، از الگوریتم‌های عددی بهینه‌سازی استفاده می‌شود که در این مقاله، با حل‌کننده‌ی اسنایپت بهینه‌سازی انجام شده است [25].

۳- مطالعات موردی و تحلیل نتایج

مسیر بهینه در مانورهای تعقیب و اجتناب از موانع و عوارض زمینی معمولاً در یک بازه زمانی تعریف می‌شود که در آن وضعیت اولیه هواپیما شامل زمان شروع، موقعیت، سرعت پرواز و زاویه مسیر مشخص است و وضعیت نهایی هواپیما، ممکن است مشخص بوده یا آزاد گذاشته شود تا با توجه به نیازمندی‌های مساله در الگوریتم حل محاسبه شوند. مدل ریاضی آیرودینامیک هواپیمای مورد مطالعه براساس اطلاعات مرجع به صورت روابط (۱۹) و (۲۰) است [17].

$$C_L = 0.0174 + 4.3329\alpha - 1.3048\alpha^2 + 2.2442\alpha^3 - 5.8417\alpha^4 \quad (19)$$

$$C_D = 0.0476 - 0.1462\alpha + 0.0491\alpha^2 + 12.8046\alpha^3 - 12.6985\alpha^4 \quad (20)$$

قیود مساوی و نامساوی اولیه و نهایی برای یک سناریوی مانور تعقیب و اجتناب از موانع به صورت رابطه (۲۱) در نظر گرفته می‌شود. مقادیر متغیرها به جز سرعت نهایی که در فرآیند بهینه‌سازی تعیین می‌شود، در ابتدا و انتهای مسیر معلوم است.

$$\dot{w} = \left(\frac{dw}{dz}\right) \dot{z} \quad (14)$$

در نگاشت ژوکوفسکی، با توجه به اینکه رابطه مستقیم دو صفحه وجود دارد، در طرف دوم معادله (۱۴) عبارت dw/dz برحسب z خواهد بود. لذا برای به دست آوردن طرف دوم معادله برحسب w (مختصات مجازی)، با توجه به معکوس‌پذیر بودن f می‌توان $f(z)$ را به صورت $f(F(w))$ نوشت که در این صورت رابطه (۱۴) به شکل رابطه (۱۵) بیان می‌شود:

$$\dot{w} = f'(F(w))(V\cos\gamma + iV\sin\gamma) \quad (15)$$

در مورد نگاشت شوارتز- کریستوفل، برعکس، رابطه نگاشت از صفحه w به z یعنی $z = F(w)$ موجود است. لذا معادلات حرکت را به فرم رابطه (۱۶) می‌توان استخراج کرد:

$$\dot{w} = \frac{1}{F'(w)} \dot{z} = \frac{1}{F'(w)} (V\cos\gamma + iV\sin\gamma) \quad (16)$$

با توجه به فرآیند اعمال نگاشت و انتقال فضای مساله برنامه‌ریزی مسیر پرواز، تنها محدودیت مربوط به موانع در فضای مجازی، محدودیت حداقل ارتفاع خواهد بود که به صورت رابطه (۱۷) خواهد بود:

$$v = \text{imag}(w) \geq H_{min} \quad (17)$$

پارامتر H_{min} در رابطه (۱۷) با توجه به الزامات مساله تعیین و توسط طراح قابل تنظیم است. در حالت کلی $H_{min} \geq 0$ در نظر گرفته می‌شود.

براساس رویکرد حل مساله که تا به این جا ارایه شد، مساله برنامه‌ریزی مسیر بهینه بازسازی شده در فضای جدید شامل معادلات دینامیکی مطابق روابط (۳)، (۴) و (۱۵) یا (۱۶)، قیود نامساوی متغیرهای کنترل، متغیرهای حالت و قیود مسیر مطابق معادلات (۸)، (۹) و (۱۷) است. با اعمال نگاشت بر روی معادلات، معیار عملکرد رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۸) باید بازنویسی شود.

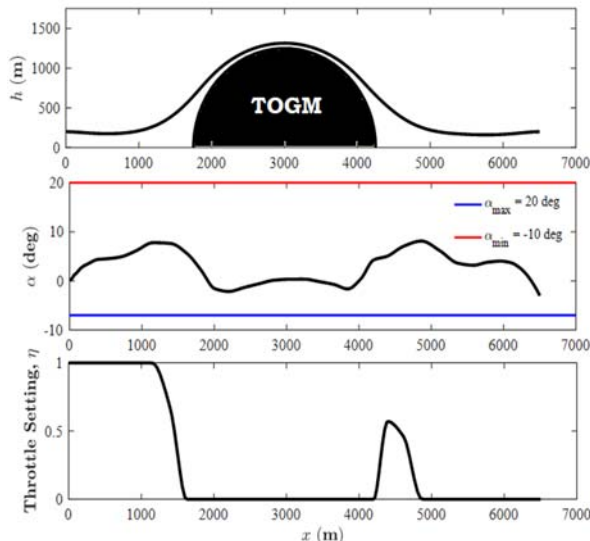
$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(1-K) + K(v - v_{min})^2 + \alpha^2] dt, \quad 0 \leq K \leq 1 \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)، v_{min} یک ارتفاع مجازی در محیط نگاشت یافته است که معیار بهینگی سعی می‌کند، ارتفاع پرنده را نزدیک به آن حفظ کند. بنابراین می‌توان با انتخاب مقدار مناسب v_{min} ارتفاع وسیله پرنده را از مانع کنترل کرد. پارامتر K نیز یک پارامتر طراحی برای تعیین اهمیت هر کدام از معیارهای بهینگی است.

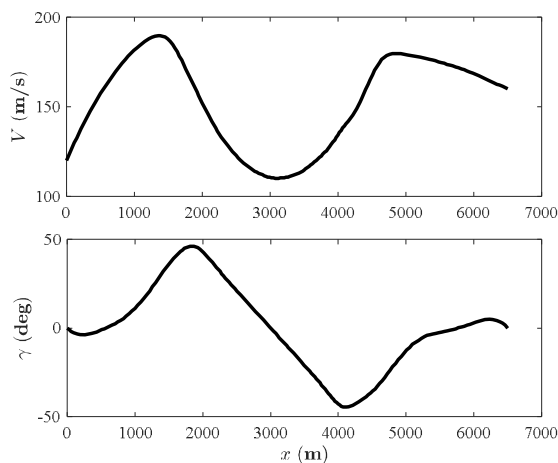
۳-۲- الگوریتم حل مساله کنترل بهینه

پس از اینکه مساله برنامه‌ریزی مسیر بهینه به صورت یک مساله کنترل بهینه استاندارد نوشته شد، بایستی با استفاده از یک الگوریتم به حل مساله پرداخت. به طور کلی روش‌های حل مسائل کنترل بهینه به دودسته کلی روش‌های مستقیم و غیرمستقیم تقسیم می‌شوند [21].

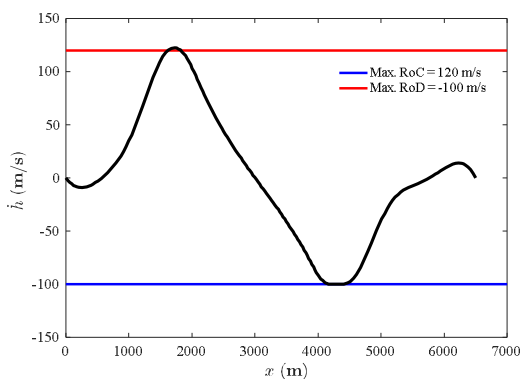
در روش‌های غیرمستقیم، از حساب تغییرات و اصل کمینه‌سازی پونتریاگین و استخراج شرایط بهینگی مرتبه اول، مساله کنترل بهینه به یک مساله مقدار مرزی تبدیل می‌شود. مزیت اصلی این



نمودار ۴) مسیر پرواز بهینه، تاریخچه زاویه حمله و دریچه گاز برای مدل مانع دایروی



نمودار ۵) تاریخچه تغییرات سرعت و زاویه مسیر هواپیما برای مدل مانع دایروی



نمودار ۶) نرخ تغییرات ارتفاع هواپیما برای مدل مانع دایروی

۲-۳- طراحی مسیر بهینه با حضور مانع مثلث‌شکل

مثلث یکی از ساده‌ترین شکل‌های هندسی است که می‌تواند برای مدل‌سازی موانع و عوارض زمینی مورد استفاده قرار بگیرد. در این بخش با در نظر گرفتن مدل هندسی مانع به صورت مثلث، قضیه

$$X_i = \begin{cases} x_i = \text{معین} \\ y_i = \text{معین} \\ V_i = \text{معین} \\ \gamma_i = \text{معین} \end{cases}, X_f = \begin{cases} x_f = \text{معین} \\ y_f = \text{معین} \\ V_f = \text{مقید} \\ \gamma_f = \text{معین} \end{cases} \quad (21)$$

مشخصات فنی و محدودیت‌های متغیرهای حالت و کنترلی و قیود مسیر مربوط به هواپیمای مورد مطالعه در جدول ۱ آورده شده است. این محدودیت‌ها، به صورت قیود نامساوی در مساله وارد می‌شود.

جدول ۱) مشخصات فنی و قیود فیزیکی هواپیما

ردیف	پارامتر	نماد	مقدار
۱	حداقل زاویه حمله	α_{min}	-9°
۲	حداکثر زاویه حمله	α_{max}	$+9.5^\circ$
۳	حداقل زاویه مسیر پرواز	γ_{min}	-9°
۴	حداکثر زاویه مسیر پرواز	γ_{max}	$+9^\circ$
۵	حداکثر نرخ فرود	\dot{h}_{min}	$-m/s^{100}$
۶	حداکثر نرخ اوج‌گیری	\dot{h}_{max}	$+m/s^{120}$
۷	حداقل سرعت هواپیما	V_{min}	$+m/s^{70}$
۸	حداکثر سرعت هواپیما	V_{max}	$+m/s^{320}$

۲-۳- طراحی مسیر بهینه با حضور مانع دایروی

اگر مانع یا پستی و بلندی زمین به صورت نیم‌دایره مدل شود در این صورت با توجه به رابطه نگاشت ژوکوفسکی (۱۱) و رابطه (۱۵)، معادلات حرکت در صفحه جدید به شکل رابطه (۲۲) خواهد بود:

$$\dot{w} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{G^2(w)} \right) (V \cos \gamma + i V \sin \gamma) \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲) تابع G ، نگاشت معکوس ژوکوفسکی است. این نگاشت با رابطه (۲۳) قابل محاسبه است.

$$G(w) = \begin{cases} w - \sqrt{w^2 - R_{obs}^2}, & \text{Real}(w) \leq 0 \\ w + \sqrt{w^2 - R_{obs}^2}, & \text{Real}(w) > 0 \end{cases} \quad (23)$$

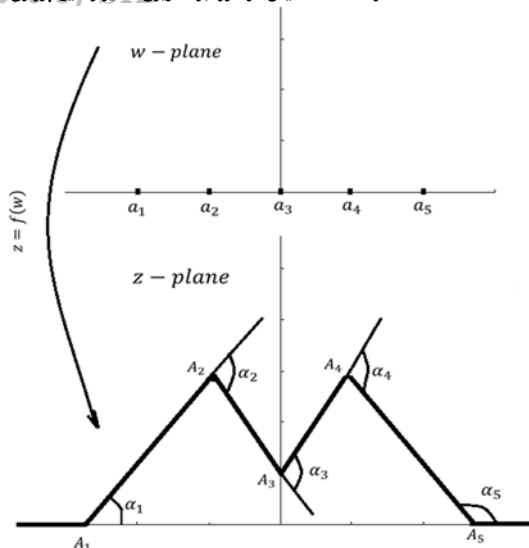
به این ترتیب معادلات (۳)، (۴) و (۲۱) روابط دینامیک حرکت را برای حالت مدل مانع دایروی تشکیل می‌دهند. همان‌طور که بیان شد، روابط (۸)، (۹) و (۱۷) بیان‌کننده قیود مسیر است. رابطه (۱۸) نیز بیان‌کننده تابع هزینه است.

نمودار ۴ مسیر بهینه هواپیما برای عبور از مانع دایروی به همراه تاریخچه تغییرات زاویه حمله و دریچه گاز را بر حسب برد افقی نمایش می‌دهد. مقدار K در تابع هزینه در این سناریو برابر ۰/۷ در نظر گرفته شده است. زمان پرواز برای سناریوی نمایش داده شده ۴۸/۳ ثانیه به دست می‌آید.

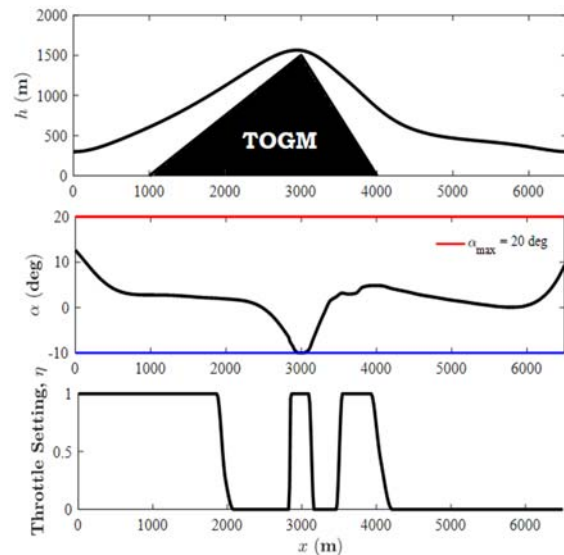
نمودار ۵ نحوه تغییرات سرعت و زاویه مسیر حرکت هواپیما بر حسب برد افقی هواپیما را نمایش می‌دهد.

نمودار ۶ میزان نرخ تغییر ارتفاع هواپیما را نمایش می‌دهد که نشان می‌دهد این نمودار بین دو مقدار نرخ صعود و نزول بیشینه هواپیما قرار گرفته است.

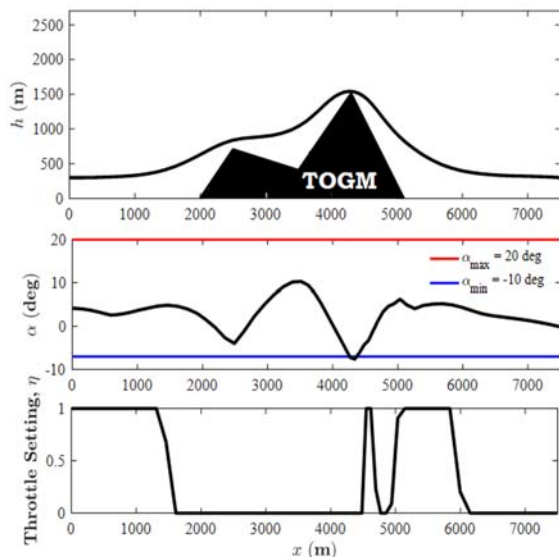
همان‌طور که مشاهده می‌شود، هواپیما یک فاصله عمودی نسبتاً ثابتی را از مانع حفظ می‌کند که این مهم به دلیل تعریف عبارت دوم در تابع هزینه است.



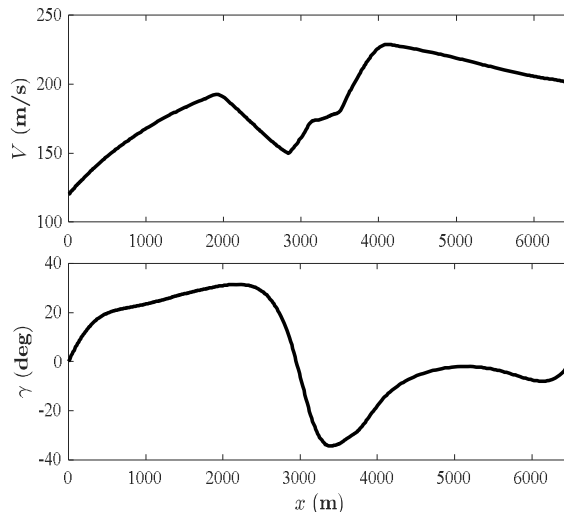
نمودار (۱۲) نگاهت شوارتز- کریستوفل برای تبدیل به ناحیه بالای یک پنج‌ضلعی



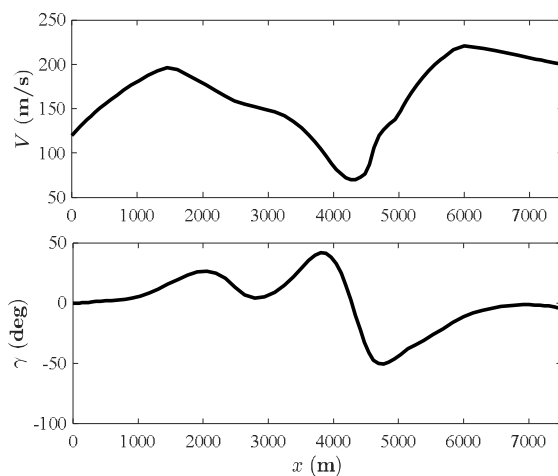
نمودار (۹) مسیر پرواز بهینه، تاریخچه زاویه حمله و دریچه گاز برای مدل مانع مثلی



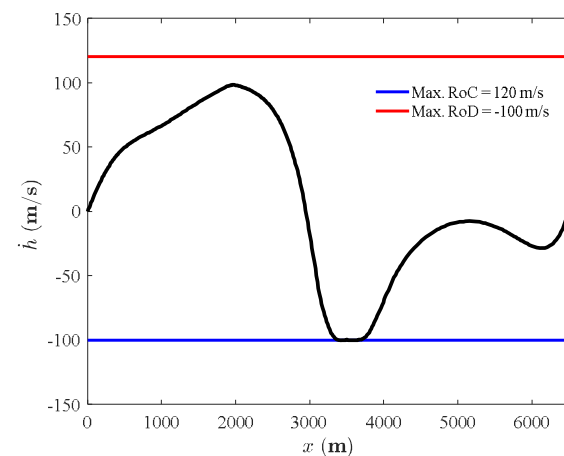
نمودار (۱۳) مسیر پرواز بهینه، تاریخچه زاویه حمله و دریچه گاز برای موانع پیچیده



نمودار (۱۰) تاریخچه تغییرات سرعت و زاویه مسیر هواپیما برای مدل مانع مثلی



نمودار (۱۴) تاریخچه تغییرات سرعت و زاویه مسیر هواپیما برای موانع پیچیده



نمودار (۱۱) نرخ تغییرات ارتفاع هواپیما برای مدل مانع مثلی

شبیه‌سازی‌ها برای سناریوهای متعدد نشان می‌دهد که سرعت همگرایی حل می‌تواند با انتخاب یک حدس اولیه مناسب افزایش یافته و در نتیجه زمان محاسبات نیز کاهش پیدا کند.

جدول ۲) زمان محاسبات برای استخراج مسیر بهینه

ردیف	نوع مانع	زمان محاسبات (ثانیه)
۱	دایروی	۲/۵
۲	مثلث	۴/۰
۳	پنج‌ضلعی	۵/۵

۴- نتیجه‌گیری

در توسعه سامانه‌های هدایت و کنترل پروازی، یکی از مهم‌ترین مسائل چگونگی ایجاد مسیره‌های قابل پرواز توسط رایانه پرواز هواپیما است، به نحوی که مسیر ایجاد شده با دینامیک و قابلیت‌های هواپیما سازگار باشد و در عین حال ملاحظات ایمنی نیز در آن رعایت شده باشد.

در پژوهش حاضر، یک راهکار جدید برای تسهیل تولید مسیر بهینه پروازی برای یک هواپیما در حضور موانع و پستی و بلندی‌های زمین با استفاده از مفاهیم نگاشت‌های همدیس پیشنهاد شده است. در این رویکرد، موانع و عوارض زمینی با استفاده از شکل‌های هندسی (دایره، مثلث و غیره) مدل‌سازی می‌شود و سپس نگاشت متناظر با مدل هندسی انتخاب شده، به عنوان ابزاری برای تبدیل معادلات حرکت وسیله پرنده به معادلات حرکتی در محیط مجازی، استفاده می‌شود. سپس مساله تبدیل یافته با استفاده از الگوریتم‌های حل مساله کنترل بهینه در فضای جدید حل خواهد شد. در این مقاله از روش حل مستقیم شبه‌طیفی که دارای شعاع همگرایی بالای هستند، برای استخراج مسیر بهینه استفاده شده است. با توجه به زمان لازم برای تولید مسیر در سناریوهای مختلف، با استفاده از این روش، تولید مسیر در زمان نسبتاً کوتاه‌تری حتی برای حدس‌های اولیه غیردقیق نیز امکان‌پذیر است. این زمان می‌تواند با استفاده از حدس اولیه بهتر کاهش چشمگیری پیدا کند.

مطالعات موردی متعدد و شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد که راهبرد ارائه شده قابلیت تولید مسیر پروازی سریع و از نظر دینامیکی امکان‌پذیر را دارد. ورودی‌های مورد نیاز برای پیاده‌سازی مسیر بهینه می‌تواند توسط سنسورهای تشخیص مانع و یا نقشه‌های عوارض زمینی تامین شود.

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

تاییدیه اخلاقی: موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

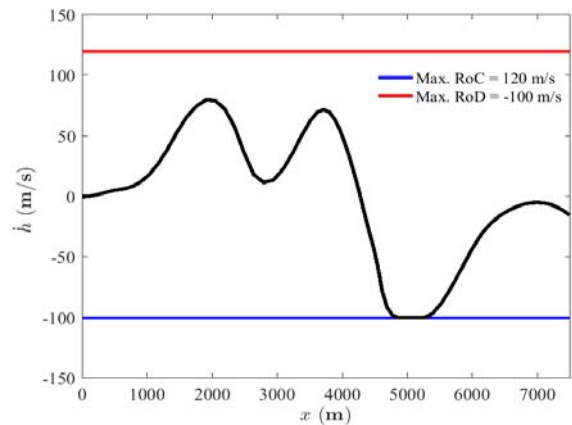
تعارض منافع: موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

سهم نویسندگان: موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

منابع مالی: موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

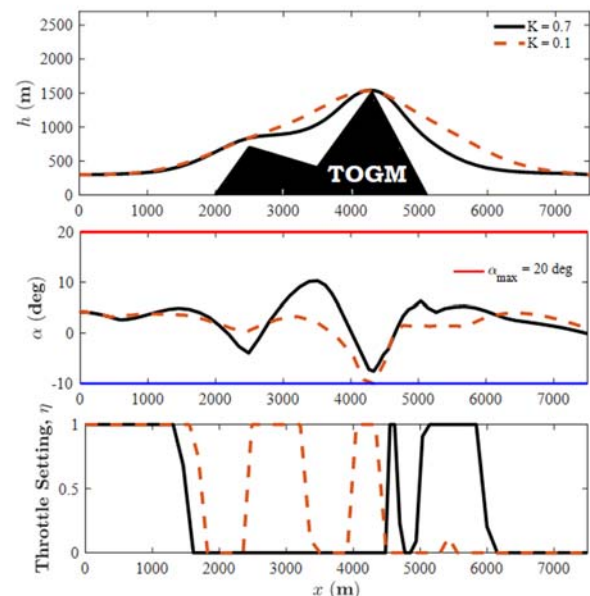
منابع

1- Kyriakis P, Moustris G. Terrain following for fixed-wing unmanned aerial vehicles using feedback



نمودار ۱۰) نرخ تغییرات ارتفاع هواپیما برای موانع پیچیده

نمودار ۱۶) مسیر بهینه عبور از مانع را برای سناریوی مطرح شده و برای دو مقدار $k=0.7$ و $k=0.1$ را نمایش می‌دهد که زمان پرواز به ترتیب برابر با $55/1$ و $42/4$ است. همان طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار K الگوریتم حل مسیر نزدیک به مدل عوارض زمین و پرواز ارتفاع پایین را انتخاب می‌کند و با کاهش مقدار K وسیله پرنده مسیر مستقیم را می‌پیماید تا زمان پرواز را کاهش دهد.



نمودار ۱۶) مقایسه مسیر بهینه برای دو معیار عملکرد $k=0.7$ و $k=0.1$

۴-۳) بحثی در مورد زمان محاسبات

یکی از الزامات اساسی برنامه‌ریزی مسیر پرواز این است که رایانه پرواز مجهز به نرم‌افزار طراحی مسیر با قابلیت تولید مسیر به صورت برخط باشد. جدول ۲ زمان محاسبات میانگین برای یک سناریوی پروازی معمول در مانور اجتناب از موانع را نشان می‌دهد که زمان متوسط پرواز در حدود ۵۰ ثانیه است. کد بهینه‌سازی طراحی مسیر در نرم‌افزار متلب و در یک رایانه شخصی معمولی با مشخصات پنتیوم دو هسته‌ای و پردازشگر با فرکانس $2/1$ گیگاهرتز اجرا شده است.

- 13- Kosari A, Maghsoudi H, Lavaei A, Ahmadi R. Optimal online trajectory generation for a flying robot for terrain following purposes using neural network. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2015;229(6):1124-1141.
- 14- Kassaei SI, Kosari A. Aircraft trajectory planning with an altitude-bound in terrain-following flight. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(12):135-144. [Persian]
- 15- Kosari A, Maghsoudi H, Lavaei A. Path generation for flying robots in mountainous regions. International Journal of Micro Air Vehicles. 2017;9(1):44-60.
- 16- Kamyar R, Taheri E. Aircraft optimal terrain/threat-based trajectory planning and control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2014;37(2):466-483.
- 17- Khademi I, Maleki B, Nasseri Mood A. Optimal three dimensional terrain following/terrain avoidance for aircraft using direct transcription method. 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED). Corfu, Greece: IEEE; 2011. pp. 254-258.
- 18- Roskam J. Airplane flight dynamics and automatic flight controls: Part I (Volume 1). United States: DARcorporation; Reprint edition; 2001.
- 19- Abolwitz MJ, Fokas Athanassios S. Complex variables: Introduction and applications second edition (Cambridge texts in applied mathematics). 2nd Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- 20- Brown Ch. Complex variables and Applications, 8th ed. India: Mc Graw Hill India; 2008.
- 21- Rao AV. Survey of numerical methods for optimal control. Advances in the Astronautical Sciences. 2009;135(1):497-528.
- 22- Betts JT. Survey of numerical methods for trajectory optimization. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1998;21(2):193-207.
- 23- Benson DA. A gauss pseudospectral transcription for optimal control [Dissertation]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- 24- Huntington GT. Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems [Dissertation]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology; 2007.
- 25- Gill PE, Murray W, Saunders MA. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. 2005;47(1):99-131.
- equivalence. IEEE Control Systems Letters. 2019;3(1):150-155.
- 2- Kosari A, Kassaei SI. Using conformal mapping in developing a novel optimal obstacle-avoidance trajectory-planning for a flying robot. IEEE International Conference on Power, Control, Signals and Instrumentation Engineering. Chennai, India: IEEE; 2017.
- 3- Kosari A, Kassaei SI. Dynamic constrained low altitude flight maneuvers with constant energy. IEEE International Conference on Power, Control, Signals and Instrumentation Engineering. Chennai, India: IEEE; 2017.
- 4- Denton PL, Jones JE, Froeberg RV. A new technique for terrain following/terrain avoidance guidance command generation. AGARD Conference Proceedings [Issue 138]. Tokyo: J Global; 1986.
- 5- Yang H, Zhao Y. Trajectory planning for autonomous aerospace vehicles amid known obstacles and conflicts. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004;27(6):997-1008.
- 6- Menon PK, Cheng VH, Kim E. Optimal trajectory synthesis for terrain-following flight. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1991;14(4):807-813.
- 7- Malaek SM, Kosari A. Dynamic based cost functions for TF/TA flights. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2012;48(1):44-63.
- 8- Qing L. Aircraft route optimization using genetic algorithms. Second International Conference on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations And Applications. Glasgow, UK: IET; 1997.
- 9- Mohanty PK, Parhi DR. Optimal path planning for a mobile robot using cuckoo search algorithm. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence. 2016;28(1-2):35-52.
- 10- Malaek SM, Kosari A. Novel minimum time trajectory planning in terrain following flights. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2007;43(1):2-12.
- 11- Nikolos IK, Valavanis KP, Tsourveloudis NC, Kostaras AN. Evolutionary algorithm based offline/online path planner for uav navigation. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics). 2003;33(6):898-912.
- 12- Rahim M, Móhammad-Bagher Malaek S. Aircraft terrain following flights based on fuzzy logic. Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 2011;83(2):94-