

تحلیل خطای عدم انطباق الگوریتم وفقی LMS مبتنی بر برش سه سطحی در کاربرد شناسایی سیستم

مهدی بکرانی^۱، مجتبی لطفی زاد^{۲*}

۱- دکترای مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اهر

۲- استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس

*تهران، صندوق پستی ۱۹۴-۱۴۱۱۵

lotfizad@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: دی ۱۳۸۸، پذیرش مقاله: تیر ۱۳۸۹)

چکیده- یکی از مشکلات فیلترهای FIR وفقی در شناسایی سیستمهای با پاسخ ضربه طولانی، هزینه بسیار بالای محاسباتی است. به تازگی نوع جدیدی از فیلترهای وفقی بر پایه برش سه سطحی سیگنال ورودی برای کاهش پیچیدگی محاسباتی آنها ارائه شده است. در مقاله حاضر تحلیلی نظری برای خطای عدم انطباق فیلتر وفقی LMS مبتنی بر برش سه سطحی سیگنال ارائه شده و به کمک این تحلیل، حداقل میزان متوسط مربع خطا به دست آمده است. این تحلیل می تواند پایه ای برای طراحی دقیقتر این فیلترها با توجه به مقدار مناسب آستانه برش و طول گام باشد.

کلید واژگان: فیلتر وفقی، سرعت همگرایی، عدم انطباق، برش سه سطحی، به هنگام سازی وزن.

۱- مقدمه

فیلتر وفقی یکی از ابزارهای اساسی در پردازش سیگنال محسوب شده و یکی از کاربردهای مهم آن، شناسایی سیستم است که در بسیاری از سیستمهای نوین کنترل کاربرد دارد [۱]. در این کاربرد، فیلتر وفقی با استفاده از سیگنالهای ورودی و خروجی سیستم ناشناخته، سعی در مدل سازی آن دارد.

دسته جدیدی از الگوریتمهای وفقی مورد استفاده در فیلترهای وفقی، الگوریتمهای مبتنی بر برش سه سطحی

سیگنال هستند [۲] و [۳]. فیلترهای وفقی مبتنی بر این نوع الگوریتمها، به دلیل پیچیدگی محاسباتی کم در شناسایی سیستمهای با پاسخ ضربه طولانی - مانند مسیرهای آکوستیکی - بسیار مفیدند. عملکرد این فیلترها در کاربردهای مختلفی مانند حذف پژواک آکوستیکی استریو [۴] و [۵]، ردیابی ویدئویی [۶] مطالعه شده است. در این دسته فیلترها، سیگنال ورودی به سه سطح یک و صفر و منفی یک چندی سازی شده و در به هنگام سازی وزنهای فیلتر وفقی از

و خطای عدم انطباق و MMSE آنها به دست می آید. بخش پنجم شامل شبیه سازی ها و بررسی نتایج حاصل از آن است. بخش ششم به مقایسه عملکرد عدم انطباق در الگوریتم های LMS مبتنی بر برش دو سطحی و سه سطحی و همچنین الگوریتم LMS استاندارد می پردازد. بخش هفتم شامل نتیجه گیری بوده و بخش هشتم به پیوست ها اختصاص دارد.

۲- شناسایی وقتی سیستم

شکل (۱) روش شناسایی سیستم را با استفاده از فیلتر وقتی نشان می دهد. سیگنال $x(n)$ از سیستم ناشناخته (زمان-گسسته) با پاسخ ضربه h ، عبور کرده و سیگنال $y(n) = h^T x(n)$ در خروجی تولید می شود. این سیگنال معمولاً با نویز سیستم $\omega(n)$ آغشته می شود. هدف فیلتر وقتی، یافتن پاسخ ضربه h است. سیگنال خروجی $d(n)$ را که ورودی مطلوب^۶ (مرجع) نامیده می شود، می توان با رابطه زیر نمایش داد [۱۰]:

$$d(n) = y(n) + \omega(n) = h^T x(n) + \omega(n) \quad (1)$$

که در آن $h = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]^T$ بردار شامل ضرایب پاسخ ضربه سیستم ناشناخته با طول مشخص L و $x(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^T$ سیگنال ورودی به طول L است. برای مدل سازی بهینه سیستم لازم است تعداد ضرایب فیلتر وقتی و در نتیجه طول بردار سیگنال ورودی برابر با تعداد ضرایب سیستم ناشناخته یعنی L باشد. خروجی فیلتر وقتی را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\hat{y}(n) = \hat{h}^T(n) x(n) \quad (2)$$

آن استفاده می شود. مزیت اصلی این نوع فیلتر وقتی نسبت به فیلترهای وقتی متعارف، کاهش قابل توجه حجم محاسبات است. در این فیلترها، رفتار همگرایی فیلتر و دقت تخمین ضرایب سیستم ناشناخته، به آستانه برش سیگنال بستگی داشته و بنابراین تحلیل نظری آن می تواند سطح مناسب برش را بر حسب پارامترهای دیگر فیلتر، مانند طول گام به دست دهد؛ این در طراحی بهینه این فیلترها برای کاربرد شناسایی سیستم بسیار مفید است.

خطای تخمین ضرایب سیستم، خطای عدم انطباق^۱ نامیده می شود که خطای ناشی از عدم انطباق بین وزن های فیلتر وقتی و ضرایب سیستم ناشناخته است. این خطا با نرم دوی اختلاف بین بردار وزن فیلتر وقتی و بردار ضرایب سیستم ناشناخته برابر است. در [۷]، [۸] و [۹]، خطای عدم انطباق برای برخی از فیلترهای وقتی، از جمله LMS^۲ استاندارد، LMS مبتنی بر به هنگام سازی جزئی نوع M-Max و RLS تحلیل شده است.

هدف این مقاله، تحلیل خطای عدم انطباق برای فیلترهای وقتی LMS مبتنی بر برش سه سطحی (CLMS^۳) است. این تحلیل، دقت تخمین ضرایب سیستم ناشناخته را بر حسب پارامترهای فیلتر وقتی، از جمله سطح برش آن نشان می دهد. همچنین به کمک این تحلیل حداقل خطای MSE^۴ فیلتر به دست می آید.

ترتیب مطالب مقاله به صورت زیر است: بخش دوم به معرفی روش شناسایی سیستم به کمک فیلتر وقتی می پردازد. در بخش سوم فیلتر وقتی LMS مبتنی بر برش سه سطحی سیگنال ورودی تشریح می شود. در بخش چهارم تحلیلی برای این دسته از فیلترهای وقتی ارائه شده

5. Plant Noise
6. Desired Input

1. Misalignment
2. Least Mean Square
3. Clipped LMS
4. Minimum Mean Square Error (MMSE)

در شناسایی سیستمهای با پاسخ ضربه طولانی بسیار مفیدند. در این بخش فیلترهای وفقی نوع LMS مبتنی بر برش سه سطحی (CLMS) معرفی می شوند.

الگوریتم وفقی CLMS با رابطه زیر توصیف می شود:

$$\hat{h}(n+1) = \hat{h}(n) + \mu e(n) \hat{x}(n) \quad (3)$$

در این رابطه μ طول گام وفقدهی نامیده می شود که سرعت همگرایی فیلتر وفقی را تنظیم می کند. سیگنال خطای $e(n)$ با توجه به شکل (۱) به صورت زیر محاسبه می شود:

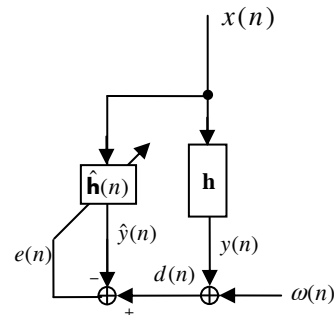
$$e(n) = d(n) - \hat{y}(n) \quad (4)$$

که در آن $\hat{y}(n) = x^T(n) \hat{h}(n)$ سیگنال خروجی فیلتر وفقی در شکل (۱) است. همچنین بردار سیگنال برش یافته ورودی است که عناصر آن از برش سه سطحی سیگنال ورودی، با رابطه زیر به دست می آید:

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} 1, & x(n) > \delta \\ 0, & -\delta < x(n) \leq \delta \\ -1, & x(n) \leq -\delta \end{cases} \quad (5)$$

که در آن δ آستانه برش است [۲]. δ از صفر تا حداکثر دامنه سیگنال ورودی می تواند تغییر کند. با فرض اینکه محدوده چندی ساز یا تبدیل کننده آنالوگ به دیجیتال^۱ در سیستم به گونه ای انتخاب شده باشد که حداکثر دامنه مجاز ورودی آن، چهار برابر انحراف معیار سیگنال ورودی یا σ_x باشد [۱۱]، در این صورت $0 \leq \delta \leq 4\sigma_x$ است. $\delta = 0$ برش دو سطحی یعنی تبدیل تمامی مقادیر ورودی به ± 1 است و $\delta = 4\sigma_x$ تبدیل تمامی مقادیر ورودی به صفر. سایر مقادیر $0 < \delta < 4\sigma_x$ برش سه سطحی سیگنال را ایجاد می کنند.

که در آن $\hat{h}(n) = [\hat{h}_1(n), \hat{h}_2(n), \dots, \hat{h}_{L-1}(n)]^T$ بردار وزن فیلتر وفقی است.



شکل ۱ شناسایی وفقی سیستم

به طور نظری، فیلتر وفقی پس از طی کردن دوره همگرایی به جواب مطلوب $\hat{h}_{opt} = h$ می رسد؛ اما در عمل، در اختیار نمودن همبستگی سیگنال ورودی و همبستگی سیگنال ورودی با ورودی مطلوب $E[d(n)x(n)]$ ، موجب عدم انطباق وزن ها بر پاسخهای ضربه متناظر در سیستم ناشناخته - حتی پس از همگرایی فیلتر وفقی - می شود [۱۰]. خطای عدم انطباق، بستگی به پارامترهای فیلتر وفقی دارد و بنابراین در عمل لازم است این پارامترها به گونه ای تنظیم شوند که خطای تخمین ضرایب، بسته به نوع کاربرد، قابل قبول باشد.

در بخشهای بعدی، فیلترهای مبتنی بر برش سه سطحی را معرفی و تحلیل کرده و عوامل مؤثر بر خطای عدم انطباق و همچنین خطای MMSE بررسی می کنیم.

۳- بررسی فیلتر وفقی CLMS

دسته جدیدی از فیلترهای وفقی، فیلترهای مبتنی بر برش سه سطحی سیگنال است که برای اولین بار در [۲] و [۳] معرفی شد. این فیلترها به دلیل پیچیدگی محاسباتی پایین،

1. Analog to Digital Converter

که در آن $h = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]^T$ بردار شامل ضرایب پاسخ ضربه سیستم با طول L و $\hat{h}(n) = [\hat{h}_0(n), \hat{h}_1(n), \dots, \hat{h}_{L-1}(n)]^T$ بردار وزن فیلتر وقتی است. $\|\cdot\|$ عملگر نرم دو است. رابطه بالا به خوبی می تواند عدم انطباق وزن های فیلتر را در طول دوره همگرایی و پس از رسیدن به همگرایی نشان دهد.

تحلیل مقدار عدم انطباق در حالت کلی بسیار پیچیده بوده و لذا برای ساده سازی تحلیل فرض می کنیم که سیگنال ورودی، ایستاد و دارای توزیع گوسی و i.i.d. باشد. برای تحلیل مقدار عدم انطباق در حالت دائمی^۳، مقدار متوسط (امید ریاضی) کسر رابطه (۶) را در حالت دائمی به دست می آوریم. برای این منظور، ابتدا معیار عدم انطباق حالت دائمی به صورت نرمالیزه نشده را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \|h - \hat{h}(n)\|^2 \right\} \quad (7)$$

برای محاسبه معیار η در رابطه بالا، بردار عدم انطباق را به صورت $v(n) = h - \hat{h}(n)$ تعریف می کنیم. بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} E \left\{ \|h - \hat{h}(n)\|^2 \right\} &= E \left\{ [h - \hat{h}(n)]^T [h - \hat{h}(n)] \right\} \\ &= E \left[v^T(n) v(n) \right] = \text{tr} \left\{ \text{cov} [v(n)] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن $\text{tr}\{\cdot\}$ رد ماتریس و $\text{cov}[\cdot]$ ماتریس کوواریانس است. برای به دست آوردن ماتریس کوواریانس $v(n)$ با توجه به روابط (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{aligned} v(n+1) &= \hat{h}(n+1) - h = \hat{h}(n) + \mu \hat{x}(n) e(n) - h \\ &= \hat{h}(n) + \mu \hat{x}(n) \{y(n) - x^T(n) \hat{h}(n)\} - h \end{aligned} \quad (9)$$

همگرایی این الگوریتم در [۲] اثبات شده و نشان داده شده که شرط همگرایی الگوریتم آن است که $\mu \leq \frac{\alpha}{\sigma_x} \cdot \frac{1}{\lambda_{\max}}$ که در آن λ_{\max} بزرگترین مقدار ویژه^۱ ماتریس خودهمبستگی سیگنال ورودی است و $\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_x^2}\right)$ نویسندهگان [۲] همچنین میزان کاهش حجم محاسبات را به ازای سطوح مختلف آستانه به صورت عددی به دست آورده اند. هدف ما در این مقاله تحلیل دو ویژگی مهم این نوع فیلترهای وقتی، یعنی خطای عدم انطباق وزن ها و مقدار خطای MMSE است. در بخش بعدی این تحلیل را به تفصیل انجام می دهیم.

در اینجا لازم است اشاره شود که از آنجا که برش دوسطحی حالت خاصی از برش سه سطحی به ازای $\delta = 0$ است، لذا تحلیل ارائه شده برای الگوریتم LMS مبتنی بر برش دوسطحی - که در اینجا آن را به اختصار SLMS می نامیم - نیز معتبر است. در حالت کلی الگوریتم CLMS بر SLMS برتری دارد، زیرا کاهش بیشتری در حجم محاسبات دارد و عملکرد همگرایی آن بهتر است [۲]. ما در بخش ششم عملکرد این دو الگوریتم را در کاربرد شناسایی مسیر آکوستیکی ناشناخته، با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد.

۴- تحلیل خطای عدم انطباق الگوریتم وقتی CLMS

برای بررسی عدم انطباق از معیار عدم انطباق وزن ها با تعریف زیر [۱۲]، استفاده می کنیم:

$$\psi(n) = \frac{\|h - \hat{h}(n)\|^2}{\|h\|^2} \quad (10)$$

3. Independent and Identically Distributed
4. Steady-State
5. Trace

1. Eigen-Value
2. Sign LMS

با استفاده از رابطه (۱):

که در آن هم چنان که در ضمیمه (۱) نشان داده ایم:

$$C(n) = \hat{R} \operatorname{tr} \{R_x Q(n)\} \quad (13) \quad (10)$$

در [۲] ثابت شده که برای سیگنال‌های گوسی می‌توان نوشت:

$$E[x(n)\hat{x}^T(n)] = \frac{\alpha}{\sigma_x} E[x(n)x^T(n)] \quad (14)$$

که در آن $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \exp(-\frac{\delta^2}{2\sigma_x^2})$ و δ آستانه برش و σ_x^2 واریانس سیگنال ورودی است. به همین ترتیب $E[\hat{x}(n)x^T(n)] = \frac{\alpha}{\sigma_x} E[x(n)x^T(n)]$ در نتیجه رابطه (۱۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$Q(n+1) = Q(n) + \mu^2 \sigma_\omega^2 \hat{R} - \mu \frac{\alpha}{\sigma_x} Q(n) R_x - \mu \frac{\alpha}{\sigma_x} R_x Q(n) + \mu^2 \hat{R} \operatorname{tr} \{R_x Q(n)\} \quad (15)$$

که در آن $\hat{R} = E[\hat{x}(n)\hat{x}^T(n)]$. اکنون برای به دست آوردن میزان عدم انطباق در حالت دائمی، با توجه به اینکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[v(n+1)v^T(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[v(n)v^T(n)] = E[vv^T] = Q \quad (16)$$

رابطه (۱۵) را می‌توان به صورت زیر برای حالت دائمی بازنویسی کرد:

$$Q = Q + \mu^2 \sigma_\omega^2 \hat{R} - \mu \frac{\alpha}{\sigma_x} Q R_x - \mu \frac{\alpha}{\sigma_x} R_x Q + \mu^2 \hat{R} \operatorname{tr} \{R_x Q\} \quad (17)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} v(n+1) &= \hat{h}(n) - h + \mu \hat{x}(n) \left\{ \omega(n) - \left[x^T(n) [\hat{h}(n) - h] \right] \right\} \\ &= v(n) + \mu \hat{x}(n) [\omega(n) - x^T(n)v(n)] \\ &= v(n) + \mu \hat{x}(n)\omega(n) - \mu \hat{x}(n)x^T(n)v(n) \end{aligned}$$

اکنون ماتریس کوواریانس $v(n+1)$ را به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه نویز $\omega(n)$ به طور طبیعی از سیگنال‌های ورودی $x(n)$ مستقل است و همچنین با فرض مستقل بودن $x(n)$ و $v(n)$ که فرض معمول در تحلیل همگرایی فیلترهای وفقی است - می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E[v(n+1)v^T(n+1)] &= E[v(n)v^T(n)] \\ &+ E\left\{ \mu^2 [\hat{x}(n)\omega(n)][\hat{x}(n)\omega(n)]^T \right\} \\ &- E\left\{ \mu v(n) [\hat{x}(n)x^T(n)v(n)]^T \right\} \\ &- E\left\{ \mu [\hat{x}(n)x^T(n)v(n)] v^T(n) \right\} \\ &+ E\left\{ \mu^2 \hat{x}(n)x^T(n)v(n)v^T(n)x(n)\hat{x}^T(n) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

برای ساده سازی عبارت بالا با توجه به اینکه $\sigma_\omega^2 = E[\omega^2(n)]$ واریانس نویز مربوط به ورودی مطلوب بوده و $R_x = E[x(n)x^T(n)]$ ماتریس خودهمبستگی سیگنال ورودی است و همچنین با تعریف $Q(n) = E[v(n)v^T(n)]$ و $C(n) = E[\hat{x}(n)x^T(n)v(n)v^T(n)x(n)\hat{x}^T(n)]$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q(n+1) &= Q(n) + \mu^2 E[\omega^2(n)\hat{x}(n)\hat{x}^T(n)] \\ &- \mu E[v(n)v^T(n)x(n)\hat{x}^T(n)] \\ &- \mu E[\hat{x}(n)x^T(n)v(n)v^T(n)] \\ &+ \mu^2 E[\hat{x}(n)x^T(n)v(n)v^T(n)x(n)\hat{x}^T(n)] \quad (12) \\ &= Q(n) + \mu^2 \sigma_\omega^2 E[\hat{x}(n)\hat{x}^T(n)] \\ &- \mu Q(n) E[x(n)\hat{x}^T(n)] \\ &- \mu E[\hat{x}(n)x^T(n)] Q(n) + \mu^2 C(n) \end{aligned}$$

مقدار آن برابر است با:

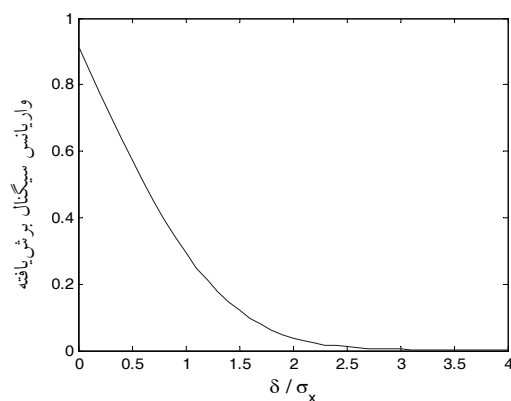
$$MMSE = tr\{R_x Q\} = \sigma_x^2 tr\{Q\} \quad (23)$$

$$= \sigma_x^2 \eta = \frac{\mu \sigma_\omega^2 \sigma_x \hat{\sigma}_x^2 L}{2\alpha - \mu \sigma_x \hat{\sigma}_x^2 L}$$

$\hat{\sigma}_x^2$ بستگی به σ_x^2 و سطح آستانه برش دارد. در پیوست (۲) نشان می‌دهیم که $\hat{\sigma}_x^2$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}_x^2 = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) \quad (24)$$

که در آن $\operatorname{erf}(\cdot)$ تابع خطا^۲ و $\operatorname{erfc}(\cdot)$ تابع خطای مکمل^۳ نامیده می‌شود. این توابع جوابی به شکل بسته^۴ ندارند، اما با استفاده از جدول عددی توابع به ازای مقادیر مختلف آستانه، قابل محاسبه است [۱۳]. بنابراین با توجه به رابطه (۲۴)، با در دست داشتن آستانه برش و واریانس سیگنال ورودی، $\hat{\sigma}_x^2$ را می‌توان به دست آورد. شکل (۲) $\hat{\sigma}_x^2$ را بر حسب مقدار آستانه برش برای نمونه‌ای از سیگنال سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس یک نشان می‌دهد.



شکل ۲ نمودار $\hat{\sigma}_x^2$ بر حسب مقدار آستانه برش برای سیگنال ورودی گوسی با واریانس ۱

$$\mu \sigma_\omega^2 \hat{R} - \frac{\alpha}{\sigma_x} Q R_x - \frac{\alpha}{\sigma_x} R_x Q + \mu tr\{R_x Q\} \hat{R} = 0 \quad (18)$$

اکنون با توجه به اینکه سیگنال ورودی گوسی و i.i.d. فرض شده، $R_x = \sigma_x^2 I$ بوده و در نتیجه با توجه به رابطه (۱۳) می‌توان نتیجه گرفت که $C(n) = \sigma_x^2 tr\{Q(n)\} \hat{R}$. ماتریس \hat{R} نیز در این حالت قطری بوده و می‌توان نوشت،

$$\hat{R} = E[\hat{x}(n)\hat{x}^T(n)] = \hat{\sigma}_x^2 I \quad (19)$$

که در آن $\hat{\sigma}_x^2 = E[\hat{x}^2(n)]$. از طرفی با توجه به روابط (۷) و (۸) و با استفاده از رابطه (۱۶) داریم:

$$\eta = tr\{Q\} \quad (20)$$

بنابراین با محاسبه رد ماتریسی^۱ رابطه (۱۷) و با جایگذاری η از رابطه (۲۰) داریم:

$$\mu \sigma_\omega^2 \hat{\sigma}_x^2 L - 2\alpha \sigma_x \eta + \mu \sigma_x^2 \eta \hat{\sigma}_x^2 L = 0 \quad (21)$$

در نتیجه:

$$\eta = \frac{\mu \sigma_\omega^2 \hat{\sigma}_x^2 L}{2\alpha \sigma_x - \mu \sigma_x^2 \hat{\sigma}_x^2 L} \quad (22)$$

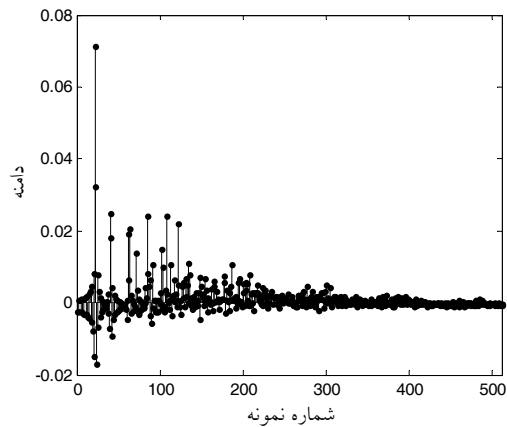
رابطه (۲۲) مقدار عدم انطباق حالت دائمی را - که بیانگر دقت تخمین ضرایب سیستم ناشناخته است - نشان می‌دهد. با توجه به این رابطه می‌توان دریافت که میزان عدم انطباق بستگی به مقدار طول گام μ ، توان نویز σ_ω^2 موجود در ورودی مطلوب، توان σ_x^2 ، انحراف استاندارد سیگنال ورودی σ_x ، توان سیگنال برش یافته $\hat{\sigma}_x^2$ و طول فیلترهای وفقی L دارد.

همچنین با توجه به تعریف خطای MMSE [۱]،

2. Error Function
3. Complementary Error Function
4. Closed Form

1. Trace

ورودی در پاسخ ضربه کانالو شد تا سیگنال خروجی $y(n)$ به دست آید.



شکل ۳ پاسخ ضربه مسیر آکوستیکی مورد استفاده برای ارزیابی فیلتر فوقی

۵-۱- رابطه عدم انطباق و آستانه برش

در این آزمایش به منظور بررسی عدم انطباق فیلتر فوقی، سیگنال $y(n)$ با نویز سفید گوسی $\omega(n)$ با نسبت سیگنال به نویز (SNR)^۲ برابر ۳۰ دسی بل آغشته شد تا ورودی مطلوب $d(n)$ با نسبت SNR مذکور حاصل شود. شکل (۴) مقدار عدم انطباق CLMS را برای چند مقدار آستانه برش نشان می‌دهد. همان‌چنان که در بخش سوم گفته شد، به منظور برش سه سطحی سیگنال باید $0 < \delta < 4\sigma_x$ باشد. بنابراین مقادیر آستانه برش را بر حسب انحراف استاندارد سیگنال ورودی تعیین می‌کنیم. در این آزمایش آستانه‌های برش برابر ۰٫۶، ۰٫۸، ۱، ۱٫۲ و ۱٫۴ برابر انحراف معیار در نظر گرفته شد. همچنین طول گام برابر $\mu = 0.02$ است. منحنی‌های این شکل مقدار عدم انطباق (رابطه ۶) را نشان می‌دهد و خطوط افقی ترسیم شده در

هم‌چنان که از شکل فوق ملاحظه می‌شود، هر چه مقدار آستانه برش بیشتر شود، واریانس $\hat{\sigma}_x^2$ کمتر شده و برای $\delta \approx 4\sigma_x$ مقدار $\hat{\sigma}_x^2$ به صفر می‌رسد که علت آن صفر شدن تمامی نمونه‌های ورودی، پس از برش سه سطحی با حداکثر مقدار سطح برش است.

در بخش بعدی رابطه نظری (۲۲)، به‌طور عملی ارزیابی شده و با مقادیر عملی به دست آمده از شبیه‌سازی مقایسه می‌شود. همچنین اثر آستانه برش، نویز محیطی و مقدار طول گام بر میزان عدم انطباق بررسی می‌شود.

از آنجا که سطح خطای MMSE رابطه‌ای مستقیم با سطح عدم انطباق دارد (رابطه ۲۳)، بنابراین در بررسی‌ها فقط معیار عدم انطباق را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که تغییر (کاهش یا افزایش) عدم انطباق در اثر تغییر پارامترها و شرایط سیستم، تغییر متناسبی را در میزان خطای MMSE ایجاد می‌کند.

۵- نتایج شبیه‌سازی

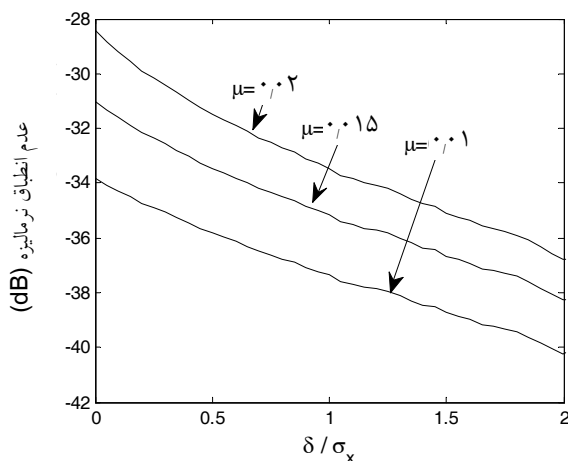
به منظور شبیه‌سازی، مسیر کوتاه آکوستیکی بین بلندگو و میکروفون در یک حذف کننده پژواک آکوستیکی را به عنوان سیستم ناشناخته در نظر گرفته و به کمک فیلتر فوقی CLMS ضرایب پاسخ ضربه آن را تخمین می‌زنیم. مختصات مکان بلندگو (۲، ۱، ۰٫۵) متر و مختصات مکان میکروفون (۲، ۰٫۵، ۳) متر و ابعاد اتاق $4 \times 5 \times 5$ متر در نظر گرفته شد. سیگنال ورودی سیگنالی گوسی سفید و ایستاد با میانگین صفر و واریانس ۰٫۱ در نظر گرفته شد. شکل (۳) پاسخ ضربه مسیر آکوستیکی بین بلندگو و میکروفون را که به روش تصویری [۱۴] با استفاده از نرم افزار متلب^۱ به دست آمده نشان می‌دهد. طول مؤثر پاسخ ضربه L برابر ۵۱۲ نمونه در نظر گرفته و سپس سیگنال

2. Signal to Noise Ratio (SNR)

1. MATLAB

بده-بستان^۱ بین سرعت همگرایی و میزان عدم انطباق حالت دائمی وجود دارد.

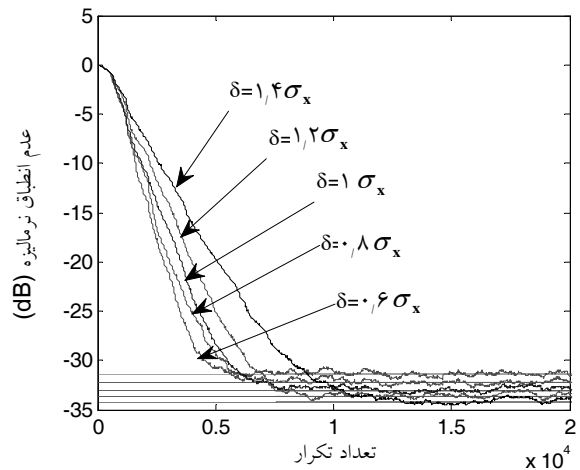
به منظور بررسی اثر آستانه برش بر عدم انطباق حالت دائمی و وزن‌ها، شکل (۵) نتایج نظری حاصل برای پاسخ ضربه شکل (۳) را برای SNR ورودی مطلوب برابر ۳۰ دسی‌بل به‌ازای سه مقدار طول گام $\mu=0,01$ ، $\mu=0,015$ و $\mu=0,02$ ترسیم کرده است. آستانه برش در این آزمایش در بازه $0 \leq \delta \leq 2\sigma_x$ در نظر گرفته شد. هم‌چنان‌که از شکل دیده می‌شود، نتایج حاصل نشان می‌دهند که با افزایش سطح برش، مقدار نهایی عدم انطباق به تدریج کاهش می‌یابد که مقدار آن به طور مستقیم به طول گام نیز بستگی دارد. این نمودار همچنین نشان می‌دهد که بیشترین مقدار خطا مربوط به حالت $\delta=0$ یعنی برش دو سطحی سیگنال است. بنابراین یکی دیگر از مزایای برش سه سطحی نسبت به برش دو سطحی - علاوه بر حجم محاسبات کمتر - دقت بهتر تخمین ضرایب سیستم ناشناخته است.



شکل ۵ نمودار مقدار نظری حالت دائمی عدم انطباق الگوریتم CLMS بر حسب مقدار آستانه برش برای مقادیر طول گام ۰,۰۱، ۰,۰۱۵ و ۰,۰۲ و SNR=۳۰ dB

1. Trade-off

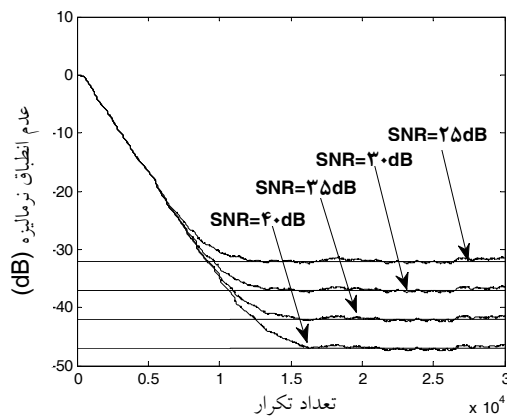
این شکلها بیانگر مقدار نظری عدم انطباق (رابطه ۲۲) است که نظیر رابطه ۶ با $\|h\|^2$ نرمالیزه شده است.



شکل ۴ نمودار عدم انطباق برای الگوریتم CLMS برای مقادیر مختلف آستانه برش و SNR=۳۰ dB و $\mu=0,02$. خطوط افقی سطح نظری عدم انطباق حالت دائمی را نشان می‌دهد.

هم‌چنان‌که دیده می‌شود، رابطه تئوری به خوبی می‌تواند سطح واقعی عدم انطباق حالت دائمی را نشان دهد. این نمودار همچنین نشان می‌دهد که هر چه آستانه برش بیشتر شود، مقدار حالت دائمی عدم انطباق کمتر (بهتر) می‌شود؛ اما از سرعت همگرایی نیز کاسته می‌شود. علت کاهش سرعت همگرایی، صفر شدن تعداد بیشتری از داده‌های ورودی است که برای به‌هنگام‌سازی و وزن‌ها استفاده می‌شوند که به نوبه خود سبب به‌هنگام‌سازی کمتر وزن‌ها در هر تکرار شده و لذا سرعت همگرایی کاهش می‌یابد. به بیانی دیگر از دید نظری، با افزایش سطح برش، دقت تخمین ضرایب پاسخ ضربه بهتر می‌شود، اما فیلتر وفقی به زمان بیشتری برای تخمین نیاز خواهد داشت. بنابراین نوعی

می‌دهد. در این شکل‌ها محدوده SNR بین ۲۵ تا ۴۰ دسی‌بل که محدوده‌ای عملی است، در نظر گرفته شده. در این شکل طول گام برابر $\mu = 0.01$ و آستانه برش $\delta = \sigma_x$ در نظر گرفته شد. همان‌گونه که دیده می‌شود، روش تحلیلی به‌ازای مقادیر مختلف SNR دقت خوبی در مقایسه با نتایج عملی دارد. نکته قابل توجه در این نمودارها، عدم وابستگی سرعت همگرایی وزن‌ها نسبت به SNR ورودی مطلوب و از طرفی بستگی مستقیم سطح عدم انطباق به آن است؛ به‌طوری‌که برای مثال به‌ازای هر ۵ دسی‌بل افزایش در SNR، ۵ دسی‌بل کاهش در عدم انطباق حاصل می‌شود. بنابراین اعمال روشهای کاهش نویز می‌تواند به عملکرد فیلتر وقتی برای تخمین پاسخ ضربه سیستم ناشناخته به خوبی کمک کند.



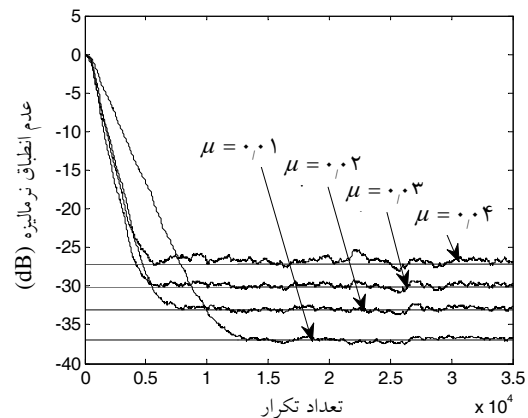
شکل ۶ مقایسه الگوریتم CLMS با SLMS و LMS
همان‌طور که در بخش سوم گفته شد، الگوریتم SLMS حالت خاصی از الگوریتم CLMS با $\delta = 0$ است. در این شکل ۷ نمودارهای نظری و عملی عدم انطباق نهایی الگوریتم CLMS بر حسب مقدار SNR برای $\delta = \sigma_x$ و $\mu = 0.01$

۶- مقایسه الگوریتم CLMS با SLMS و LMS

همان‌طور که در بخش سوم گفته شد، الگوریتم SLMS حالت خاصی از الگوریتم CLMS با $\delta = 0$ است. در این

۵-۲- رابطه عدم انطباق و طول گام

در این آزمایش به‌منظور بررسی عدم انطباق فیلتر وقتی، ورودی مطلوب $d(n)$ را آغشته به نویز گوسی با نسبت SNR برابر ۳۰ دسی‌بل در نظر گرفته‌ایم. شکل (۶) مقدار عدم انطباق نرمالیزه شده را برای الگوریتم CLMS نشان می‌دهد. سطح برش، یک برابر واریانس ورودی در نظر گرفته شد. منحنی‌های این شکل، مقدار عدم انطباق (رابطه ۶) را نشان می‌دهد و خطوط افقی ترسیم شده در این شکل‌ها بیانگر مقدار نظری عدم انطباق رابطه (۲۲) - نظیر رابطه ۶ با $\|h\|^2$ نرمالیزه شده - است.



شکل ۷ نمودار عدم انطباق برای الگوریتم CLMS برای مقادیر مختلف طول گام و $\text{SNR}=30\text{ dB}$ و $\delta = \sigma_x$. خطوط افقی، سطح نظری عدم انطباق نهایی را نشان می‌دهد.

هم‌چنان‌که دیده می‌شود، مقدار نظری به‌خوبی می‌تواند سطح واقعی عدم انطباق را نشان دهد.

۵-۳- رابطه عدم انطباق و نسبت سیگنال به نویز ورودی مطلوب

شکل (۷) مقدار عدم انطباق نرمالیزه شده را بر حسب مقادیر مختلف SNR ورودی مطلوب در CLMS نشان

با توجه به شکل بالا دیده می‌شود که خطای عدم انطباق در روش CLMS حدود ۲,۲ دسی‌بل بیشتر از LMS و حدود ۵,۷ دسی‌بل کمتر از SLMS است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم CLMS علی‌رغم پیچیدگی کمتر نسبت به SLMS، عملکرد همگرایی وزن بسیار بهتری دارد؛ عملکرد آن در مقایسه با الگوریتم LMS کمی ضعیفتر است، که علت آن، به‌هنگام نشدن برخی از وزن‌ها در طول دوره همگرایی است. در ازای این افت عملکرد، کاهش چشمگیری در حجم محاسبات CLMS در مقایسه با LMS فراهم می‌آید که در کاربرد شناسایی سیستم‌های طولانی، مانند مسیرهای آکوستیکی اهمیت بالایی دارد.

۷- نتیجه‌گیری

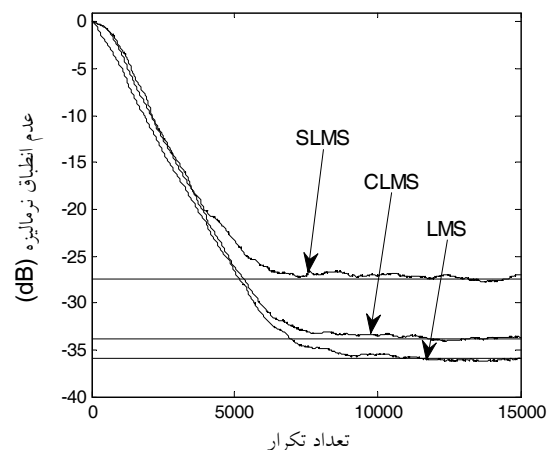
در این مقاله عدم انطباق وزن‌ها در فیلترهای وفقی نوع CLMS برای ورودی‌های گوسی به صورت تئوری به‌دست آمده و با نتایج آزمایش‌های عملی مقایسه شده است. آزمایش‌های انجام شده، نشان‌دهنده دقت بالای تحلیل ارائه شده برای گستره وسیعی از طول گام و فوق‌دهی، SNR ورودی موردنظر و همچنین سطح برش است. بر پایه این تحلیل، مقدار عدم انطباق وزن‌ها و در نتیجه خطای تخمین ضرایب، با افزایش آستانه برش یا کاهش مقدار طول گام یا کاهش SNR مطلوب، کاهش می‌یابد و به‌عکس. همچنین آزمایش نشان می‌دهد که افزایش آستانه برش یا کاهش طول گام، سرعت همگرایی الگوریتم را کاهش می‌دهد، اما SNR مطلوب، تأثیر چندانی بر سرعت همگرایی الگوریتم ندارد.

یافته‌های تحلیلی این مقاله می‌تواند به‌عنوان پایه‌ای برای طراحی فیلترهای وفقی با سطح برش وابسته به طول گام، برای رسیدن به میزان انطباق مطلوب، استفاده شود.

بخش عملکرد این دو الگوریتم را با یکدیگر و با الگوریتم LMS مقایسه می‌کنیم. در [۸] نشان داده شده که خطای عدم انطباق در الگوریتم LMS از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\eta = \frac{\mu \sigma_w^2 L}{1 - 2\mu \sigma_x^2 (1 + 0.5L)} \quad (25)$$

در شکل (۸) خطای عدم انطباق الگوریتم‌های LMS، CLMS و SLMS مقایسه شده است. در این آزمایش، طول گام به‌گونه‌ای انتخاب شده که سرعت همگرایی سه الگوریتم یکسان باشد. به این منظور، طول گام در الگوریتم LMS برابر $\mu = 0.04$ ، در الگوریتم CLMS برابر $\mu = 0.018$ و در الگوریتم SLMS برابر $\mu = 0.02$ ، SNR برابر ۳۰ دسی‌بل و مقدار آستانه برش CLMS برابر $\delta = \sigma_x$ در نظر گرفته شد. نمودارهای شکل (۸) از میانگین‌گیری پنج اجرای مستقل هر الگوریتم به‌دست آمده است.



شکل ۸ نمودار عدم انطباق برای الگوریتم‌های CLMS، SLMS و LMS. خطوط افقی سطح نظری عدم انطباق نهایی را نشان می‌دهد.

۸- پیوست‌ها

۸-۱- پیوست ۱: اثبات رابطه ۱۳

ماتریس $C(n)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$C(n) = E[\hat{x}(n)x^T(n)Q(n)x(n)\hat{x}^T(n)] \quad (26)$$

بنابراین اگر $c_{pq}(n)$ عنصر سطر p -ام و ستون q -ام ماتریس $C(n)$ و $r_{ij}(n)$ عنصر سطر i -ام و ستون j -ام ماتریس $Q(n)$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} c_{pq}(n) &= \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{L-1} E[\hat{x}_p(n)\hat{x}_q(n)x_i(n)x_j(n)]r_{ij}(n) \\ &= E[\hat{x}_p(n)\hat{x}_q(n)] \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{L-1} E[x_i(n)x_j(n)]r_{ij}(n) \end{aligned} \quad (27)$$

با محاسبه ساده‌ای می‌توان دید که $\sum_i \sum_j E[x_i(n)x_j(n)]r_{ij}(n)$ برابر با حاصل ضرب ماتریسی عبارت $E[x^T(n)Q(n)x(n)]$ است و از طرفی $E[\hat{x}_p(n)\hat{x}_q(n)]$ عنصر سطر p -ام و ستون q -ام ماتریس \hat{R} است. بنابراین:

$$C(n) = \hat{R} E[x^T(n)Q(n)x(n)] \quad (28)$$

همچنین عبارت عددی $E[x^T(n)Q(n)x(n)]$ برابر است با $tr\{R_x Q(n)\}$. بنابراین:

$$C(n) = \hat{R} tr\{R_x Q(n)\} \quad (29)$$

۸-۲- پیوست ۲: اثبات رابطه ۲۴

با توجه به تعریف برش سه‌سطحی (رابطه ۵) داریم:

$$\hat{x}^\gamma(n) = \begin{cases} 1, & |x(n)| > \delta, \\ 0, & |x(n)| \leq \delta \end{cases} \quad (30)$$

احتمال اینکه سیگنال در لحظه n یعنی $x(n)$ در بازه

$[-\delta, \delta]$ قرار گیرد، برابر است با:

$$P(-\delta < x(n) < \delta) = \int_{-\delta}^{\delta} f_x(\tau) d\tau \quad (31)$$

که در آن $f_x(\tau)$ تابع چگالی احتمال $x(n)$ در لحظه n -ام بوده و برای توزیع گوسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_x(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < \tau < +\infty \quad (32)$$

بنابراین احتمال اینکه $|x(n)| > \delta$ برابر است با:

$$P(|x(n)| > \delta) = 1 - \int_{-\delta}^{\delta} f_x(\tau) d\tau = 2 \int_{\delta}^{\infty} f_x(\tau) d\tau \quad (33)$$

که برابر است با احتمال اینکه $\hat{x}(n)$ برابر ± 1 باشد که این برابر است با احتمال اینکه $\hat{x}^2(n)$ برابر 1 باشد؛ یعنی:

$$P(\hat{x}^\gamma(n) = 1) = P(|x(n)| > \delta) = 2 \int_{\delta}^{\infty} f_x(\tau) d\tau \quad (34)$$

از طرفی با توجه به تعریف امید ریاضی $E[\cdot]$ داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^\gamma &= E[\hat{x}^\gamma(n)] \\ &= 1 \times P(\hat{x}^\gamma(n) = 1) + 0 \times P(\hat{x}^\gamma(n) = 0) \\ &= 2 \int_{\delta}^{\infty} f_x(\tau) d\tau = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

بنابراین رابطه (۲۴) اثبات شد.

۹- سپاسگزاری

این پژوهش با پشتیبانی مالی مرکز تحقیقات مخابرات ایران، مطابق قرارداد شماره ۱۷۵۷۹/۵۰۰/ت مورخ ۸۸/۱۲/۰۳ انجام شده است.

۱۰ - منابع

- [7] Naylor, P.A., Khong, A.W.H., Brookes, M., "Misalignment Performance of Selective Tap Adaptive Algorithms for System Identification of Time-varying Unknown Systems", IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing; 2007, pp 97-100.
- [8] Khong, A.W.H., Naylor, P.A., "Selective-Tap Adaptive Filtering with Performance Analysis for Identification of Time-varying Systems", IEEE Trans. Audio Speech Language Processing; Vol. 15, No. 5, 2007, pp 1681-1695.
- [9] Khong, A.W.H., Benesty, J., Naylor, P.A.; "Stereophonic Acoustic Echo Cancellation: Analysis of the Misalignment in the Frequency Domain" IEEE Signal Processing Letters; Vol. 13, No. 1, 2006, pp 33-36.
- [10] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 2001.
- [11] Rabiner, L.R., Schafer, R.W., *Digital Processing of Speech Signals*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.
- [12] Benesty, J., Morgan, D. R., Sondhi, M.M.; "A Better Understanding and an Improved Solution to the Specific Problems of Stereophonic Acoustic Echo Cancellation", IEEE Trans. Speech Audio Processing; Vol. 6, No. 2, 1998, pp 156-165.
- [1] Farhang-Boroujeny, B., *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
- [2] Lotfizad, M., Sadoghi Yazdi, H.; "Modified Clipped LMS Aalgorithm", EURASIP Journal on Applied Signal Processing; Vol. 8, 2005, pp. 1229-1234.
- [3] Lotfizad, M., Sadoghi Yazdi, H.; "Clipped Input RLS Applied to Vehicle Tracking", EURASIP Journal on Applied Signal Processing; Vol. 8, 2005, pp. 1221-1228.
- [4] Bekrani, M., Lotfizad, M.; "A Hybrid Clipped/Unclipped Input Adaptive Filtering Scheme for Stereophonic Acoustic Echo Cancellation", 17th Iranian Conference on Electrical Engineering; 2009, pp 559-563.
- [5] Bekrani, M., Lotfizad, M.; "A Modified NLMS Adaptive Algorithm for Stereophonic Acoustic Echo Cancellation", 1st National Conference on Acoustic; 2009.
- [6] Sadoghi Yazdi, H., Lotfizad, M., Fathy, M.; "Car Tracking by Quantised Input LMS, QX-LMS Algorithm in Traffic Scenes", IEE Proc.-Vis. Image Signal Processing; Vol. 153, No. 1, 2006, pp 37-45.

[14] Allen, J.B., Berkley, D.A.; “Image Method for Efficiently Simulating Small-room Acoustics”, J. Acoust. Soc. Amer.; Vol. 65, No. 4, 1979, pp 943–950.

[13] Abramowitz, M., Segun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, USA, 1972.