فصلنامه مدلسازی اقتصادی (سال پنجم، شماره ۳ «پیاپی ۱۵»، پاییز ۱۳۹۰، صفحات ٦٦-٤٧)

تعادل استراتژی مختلط نش و بازیکنان فوتبال: مطالعه موردی ضربات پنالتی

مرتضی سامتی[*]، *مهدی فتح آبادی*[**]، *کامران کسرایی*[***]

تاریخ دریافت:۹۰/۰۷/۱٦ تاریخ پذیرش:۹۰/۱۰/۰۹

چکیده

تعادل استراتژی مختلط نش یک مفهوم متداول در نظریه بازی بوده که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. بازی میان ضربه‌زننده و دروازه‌بان در یک مسابقه فوتبال، یک بازی واقعی است که با استفاده از آن می‌توان مفهوم تعادل استراتژی مختلط نش یا دقت آن را بررسی نمود. بدین منظور، پیش‌بینی‌های مدل با استفاده از یک مجموعه داده که شامل مسیر ضربات و جهش‌ها در ۱۰٦ ضربه پنالتی گرفته شده از لیگ برتر ایران می‌باشد، آزمون گردید. مشاهدات بیان می‌دارند که با توجه به توزیع احتمال مسیر ضربه، استراتژی بهینه دروازه‌بان این است که در مرکز دروازه باقی بماند؛ اما داده‌ها بیان می‌دارند که دروازه‌بانان تقریباً همیشه به یکی از طرفین جهش می‌کنند. در نهایت، الگوی «چپ- چپ» بیشترین تکرار را به خود اختصاص داده و دارای بیشترین مشاهده در میان الگوها است.

طبقه بندی JEL: C70،C93

واژگان کلیدی: استراتژی مختلط، تعادل نش، نظریه بازی، فوتبال، پنالتی.

[*]استاد، دانشگاه اصفهان،گروه اقتصاد، اصفهان، ایران(نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی: Email:msameti@gmail.com

[**]دانشجوی دکتری اقتصاد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خوراسگان، اصفهان. Email:mehdi_fa88@yahoo.com

[***] دانشجوی دکتری اقتصاد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خوراسگان، اصفهان. Email: kamranne@yahoo.com

Archive of SID
www.SID.ir

۱. مقدمه

نظریه بازی[1] مجموعه‌ای از ابزارهای تحلیلی است که به فهم پدیده‌های به‌وجود آمده در هنگام برهم‌کنش میان تصمیم‌گیرندگان کمک می‌نماید. دو فرض اساسی در این نظریه این است که اولاً تصمیم‌گیرندگان عقلائی می‌باشند و دوم اینکه تصمیم‌گیرندگان استدلال‌های استراتژیک دارند. نظریه بازی به منظور بیان ایده‌هایش به صورت دقیق از ریاضیات استفاده می‌کند. استفاده از ریاضیات این امکان را به وجود می‌آورد که مفاهیم به دقت تعریف و در کنار آن سبب تسهیل آنالیز فرضیه‌ها گردد (جیهل و رینی،[2] ۲۰۰۱).

در این میان "تعادل نش"[3] یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در نظریه بازی است. این مفهوم تعبیری از فضای حالت گونه از یک بازی استراتژیک است که در آن هر بازیگر پیش‌بینی درستی از رفتار سایر بازیگران دارد و بر پایه این پیش‌بینی عمل می‌نماید. اما در تعادل نش، حالتی وجود دارد که در آن حرکت‌ها و اقدامات بازیگران قطعی نمی‌باشد. به این حالت "تعادل استراتژی مختلط نش"[4] گفته می‌شود، که جهت مدل‌سازی فضای نمونه یک بازی (که در آن انتخاب‌های شرکت‌کنندگان غیرقطعی بوده، اما از قانون احتمالات پیروی می‌نماید) طراحی گردیده است. بازیگری که استراتژی مختلط را انتخاب می‌کند، خود را مقید به استفاده ابزاری تصادفی می‌نماید که به کمک احتمال حرکت‌هایی را از مجموعه حرکت‌های بازیگر انتخاب می‌کند. به طور قطع در دنیای واقعی مواردی وجود دارد که بازیگران در رفتار خود ماهیتی تصادفی‌گونه را به وجود می‌آورند(همان مأخذ).

معمولاً یک بازیگر هنگامی تصادفی عمل می‌نماید که قصد تاثیرگذاری بر رفتار سایر بازیگران را داشته باشد و حدس زدن وی روانشناسی بوده و بسیار آگاهانه صورت می‌پذیرد و امری تصادفی نیست(موسکینی[5]، ۲۰۰۴).

1- Game theory
2- Jehle and Reny
3- Nash Equilibrium
4- Mixed Strategy Nash Equilibrium
5- Moschini

www.SID.ir

۲. ادبیات موضوع

هم چنان که مفهوم استراتژی مختلط یکی از اجزاء اصلی تئوری بازی بوده و اهمیت آن غیرقابل انکار است، اما بررسی تجربی آن گاهی اوقات با شک و تردید همراه بوده است. برای اینکه تمایل به یک بازی استراتژی مختلط وجود داشته باشد، هر یک از عاملین بازی می‌بایست بین استراتژی‌های خالص که با احتمال مثبت در استراتژی مختلط بازی شده و هر ترکیبی از آن استراتژی‌ها بی‌تفاوت باشد. هم‌چنین شالوده تفسیر فضای حالت تعادل استراتژی مختلط این است که بازیگر هیچ‌گونه همبستگی میان حرکت‌های دیگر بازیگران و یا حتی بین رفتار خودش و حرکت‌های سایرین نمی‌یابد(بری اونیل،۱۹۸۷[1]، راپورت و بوبل، ۱۹۹۲[2]، موکرجی و سوفر،۱۹۹٤[3]، جک اوچز، ۱۹۹۵[4]، مک کابه و همکاران، ۲۰۰۰[5]).

در ساختار بازی، یک تعادل استراتژی مختلط منحصر به فرد وجود دارد. دو بازیکن (زننده ضربه و دروازه‌بان) در یک بازی مجموع صفر با یک فضای استراتژی کاملاً مشخص مشارکت دارند. فضای استراتژی زننده ضربه این گونه است که وی می‌تواند ضربه را به سمت راست، چپ و یا وسط دروازه شلیک نماید، در حالی که فضای استراتژی دروازه‌بان به این صورت است که او نیز می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش نماید و یا در وسط دروازه باقی بماند. اما یک ابهام کوچک در ترجیحات بازیکنان وجود دارد؛ زننده ضربه قصد دارد احتمال امتیازگیری را حداکثر نماید، در حالی که دروازه‌بان در تلاش است تا احتمال امتیازگیری زننده ضربه را حداقل کند. داده‌ها در دسترس بوده و به طور پیوسته در حال ایجاد می‌باشند؛ واینکه بازیکنان تا حد بسیار زیادی از تاریخچه رفتار رقبا آگاهی دارند، زیرا باشگاه‌های فوتبال در حال حاضر با استخدام آنالیزورهای حرفه‌ای سعی در جمع‌آوری اطلاعات در مورد سایر تیم‌های رقیب دارند.

1- Barry ONeill (1987)
2- Rapoport and Boebel(1992)
3- Mookherjee and Sopher (1994)
4- Jack ochs (1995)
5- McCabe et al(2000)

www.SID.ir

برای بررسی موضوع، یک بازی عمومی تصریح می‌شود که در آن هر بازیکن می‌تواند یکی از سه اقدام زیر را برگزیند (چپ، وسط، راست). هم‌چنین تعدادی فرضیه کلی برای ساختار ماتریس بازدهی (یعنی احتمالات امتیازگیری) طرح می‌شود؛ به این صورت که فرض می‌شود امتیازگیری هنگامی که دروازه‌بان سمت اشتباه را انتخاب می‌کند، محتمل‌تر است؛ یا اینکه ضربه‌زنندگان راست پا هنگامی که به سمت چپ توپ را شلیک می‌کنند، بهتر نتیجه می‌گیرند.

اگر دقیق‌تر به موضوع نگاه شود، ماتریس بازدهی کاملاً دو نفره است، یعنی تغییرات بستگی به خصوصیات دروازه‌بان و ضربه زننده دارد. بنابراین، تعدادی فرضیه تبیین و با استفاده از داده‌هایی که از هر ضربه پنالتی رخ داده در لیگ فوتبال ایران، مورد آزمون قرار گرفتند.

۳. مواد و روش‌ها

۳-۱. ضربات پنالتی در فوتبال

طبق قانون، "یک ضربه پنالتی علیه یک تیم به تیم دیگر پاداش داده می‌شود که در آن تیم برروی یکی از ۱۰ بازیکن مهاجم خطا صورت گرفته است و به آن تیم یک ضربه آزاد مستقیم پاداش داده می‌شود، این خطا در داخل منطقه جریمه در حالی که توپ در جریان است، روی می‌دهد". برای زدن ضربه پنالتی، توپ روی نقطه پنالتی قرار می‌گیرد که در فاصله ۱۱ متری از خط دروازه (ومرکز آن) است. دروازه‌بان مدافع در مواجه با زننده ضربه روی خط دروازه قرار می‌گیرد تا زمانی که توپ شلیک شود. سایر بازیکنان (بجز زننده ضربه) خارج از منطقه جریمه و در فاصله ۹ متر و ۱۵ سانتی‌متری از نقطه پنالتی قرار می‌گیرند و نمی‌توانند مزاحم ضربه شوند. سرعت توپ می‌تواند به بیش از ۲۰۰ کیلومتر در ساعت (۱۲۵ مایل بر ساعت) برسد. در این سرعت، توپ بعد از نواختن ضربه در کمتر از ۰/۲ ثانیه وارد دروازه می‌شود؛ به این معنی است که اگر دروازه‌بان بعد از شلیک توپ جهش نماید، به هیچ عنوان نمی‌تواند ضربه را متوقف کند (مگر اینکه توپ به سمت وی برود). بنابراین، دروازه‌بان می‌بایست سمت جهش را قبل از اینکه وی دقیقاً بداند که ضربه به کدام سمت می‌رود، انتخاب نماید. طبق قانون،

Archive of SID
www.SID.ir

دروازه‌بان اجازه ندارد تا قبل از شلیک ضربه حرکت نماید. این قانون در عمل دروازه‌بان را وادار می‌کند که همیشه قبل از ضربه شروع به حرکت نکند. اما این قانون چند سال پیش اصلاح شد و طبق قانون جدید، دروازه‌بان اجازه ندارد تا قبل از زدن ضربه به سمت جلو حرکت کند ولی، می‌تواند و آزاد است روی خط به طرفین حرکت نماید. به طور کلی، اعتقاد عمومی بر این است که ضربه‌زننده می‌بایست جهت ضربه خود را پیش از اینکه وی بتواند حرکت دروازه‌بان را ببیند، انتخاب نماید. در همه تیم‌های حرفه‌ای، دروازه‌بانان به‌طور ویژه و اختصاصی تمرین می‌کنند تا بتوانند ضربات پنالتی را مهار نمایند و مربی دروازه‌بان پیشینه‌ای از عادات پنالتی زدن ضربه‌زننده‌های معروف سایر تیم‌ها را جمع‌آوری می‌نماید. تجربه گذشته بیان می‌دارد که یک ضربه زننده راست‌پا (حدود ۸۵ درصد از بازیکنان) دریافته است که زدن توپ به سمت چپ خودش (سمت طبیعی خودش) نسبت به سمت راست آسان‌تر است، و برای ضربه‌زننده چپ‌پا این موضوع معکوس است(موسکینی، ۲۰۰٤ و چیاپوری و همکاران[1]، ۲۰۰۲). لازم به ذکر است که داده‌ها نیز این موضوع را تأیید می‌کنند. بنابراین، در سراسر این مقاله روی تفاوت بین "سمت طبیعی"[2] (یعنی سمت چپ برای بازیکن راست‌پا و سمت راست برای بازیکن چپ پا) و سمت غیرطبیعی تمرکز می‌شود. در ادامه برای سهولت از عبارت‌های "راست" و "چپ" استفاده می‌گردد.

۳-۲. مدل

تعداد بسیار زیادی از دروازه‌بان‌ها و ضربه زننده‌ها را در نظر بگیرید. وقتی که زننده ضربه و دروازه‌بان جهت مشابه را انتخاب می‌کنند، S، $(S = R, L)$، در این صورت احتمال به ثمر رسیدن گل، P_s است، در حالی که اگر دروازه‌بان سمت اشتباه را انتخاب کند و یا در وسط دروازه باقی بماند، در این صورت احتمال اینکه ضربه به گل تبدیل شود، $\pi_s > P_S$ است. در اینجا $1-\pi_s$ بعنوان احتمال اینکه ضربه به بیرون برود و یا به تیرک‌های عمودی یا افقی برخورد کند، تفسیر می‌شود. هم‌چنین نابرابری

1- Chiappori et al
2- Natural Side

www.SID.ir

$\pi_s > P_S$ بیانگر این موضوع است که وقتی دروازه‌بان انتخاب درستی انجام می‌دهد، نه تنها می‌تواند توپ را به سمت بیرون هدایت کند، بلکه وی می‌تواند توپ را کاملاً مهار نماید. سرانجام، ضربه‌ای که به سمت مرکز دروازه می‌رود، احتمال اینکه به گل تبدیل شود برابر μ است و این زمانی است که دروازه‌بان به یکی از دو سمت جهش نماید و اگر در مرکز دروازه باقی بماند همواره می‌تواند توپ را مهار کند. از نظر تکنیکی، زننده ضربه و دروازه‌بان یک "بازی مجموع صفر"[1] را بازی می‌کنند، که در آن فضای استراتژی $\{R, C, L\}$ است. بنابراین ماتریس بازدهی یا پاداش به صورت زیر است:

ضربه‌زننده (K_i)	دروازه بان (G_i)		
	L	C	R
L (چپ)	P_L	π_L	π_L
C (وسط)	μ	0	μ
R (راست)	π_R	π_R	P_R

فرض می‌شود که این ماتریس به وسیله بازی دو بازیکن و قبل از شلیک ضربه کاملاً معلوم شده است و این یک فرض کاملاً قابل آزمون است و ملاحظه خواهد شد که این فرض توسط داده‌ها نیز رد نخواهد شد. سرانجام، فرض می‌شود که هر دو بازیکن به طور هم زمان حرکت می‌کنند، که این فرض نیز قابل آزمون است و رد نمی‌شود. حال این سه فرضیه به صورت زیر مطرح می‌شود؛

فرض SC (طرفین و مرکز) $\quad \pi_L > P_R \qquad \pi_R > P_L$

فرض (SC') $\quad \pi_L > \mu \qquad \pi_R > \mu$

فرض NC (سمت طبیعی) $\quad P_L \geq P_R \qquad \pi_L \geq \pi_R$

فرض KS (سمت ضربه‌زننده) $\quad \pi_R - P_R \geq \pi_L - P_L$

فرض (SC) بیان می‌دارد که اگر زننده ضربه با اطمینان بداند که مسیر جهش

1- Zero Sum Game

www.SID.ir

دروازه‌بان به کدام طرف است، در این صورت وی حتماً ضربه را به سمت دیگر شلیک خواهد کرد. هم‌چنین اگر دروازه‌بان به سمت چپ زننده ضربه برود (به عنوان مثال)، در این صورت احتمال امتیازگیری برای ضربه‌ای که به سمت راست شلیک می‌شود بیش از مرکز دروازه است. فرض سمت طبیعی (NS) الزام می‌دارد که زننده ضربه بهتر است توپ را به سمت طبیعی خود شوت نماید، خواه اینکه دروازه‌بان مسیر توپ را درست حدس بزند یا خیر. سرانجام،فرضیه (KS) بیان می‌کند که نه تنها ضربه‌هایی که به سمت طبیعی راهی می‌شوند احتمال بسیار کمتری دارند که بیرون بروند، بلکه آنها را به آسانی نمی‌توان مهار کرد.[1] این فرضیه‌ها کاملاً توسط داده‌ها اثبات شده‌اند، همان طور که در جدول شماره ی (۱) (بر اساس اطلاعات جدول شماره ی ٤) نشان داده شده است.

جدول ۱: احتمالات امتیازگری مشاهده شده

زننده ضربه	دروازه‌بان	
	مسیر درست	وسط یا مسیر غلط
سمت طبیعی (چپ)	۵۰ درصد	۱۰۰درصد
سمت مخالف (راست)	٤۲ درصد	۹۵ درصد

همان طور که ملاحظه می‌شود، احتمال امتیازگیری وقتی که دروازه‌بان مسیر اشتباه را انتخاب می‌کند بین ۹۵ تا ۱۰۰ درصد تغییر می‌کند (البته بستگی به پای ضربه‌زننده و مسیر ضربه دارد)؛ در حالی که وقتی دروازه‌بان انتخاب درست انجام می‌دهد این دامنه

۱- اگر دروازه‌بان انتخاب اشتباه داشته باشد، در این صورت توپ گل خواهد شد، مگر اینکه ضربه به بیرون برود، که برای سمت $X(X=L,R)$ با احتمال $1-\pi_x$ اتفاق خواهد افتاد. اگر دروازه‌بان مسیر توپ را درست حدس بزند، در این صورت ضربه با شکست مواجه خواهد شد که بازهم (به دلیل مستقل بودن) با احتمال $1-\pi_x$ رخ می‌دهد (یعنی یا توپ به بیرون می‌رود یا توسط دروازه‌بان مهار می‌شود.) با معرفی S_x بعنوان احتمال اخیر، می‌توان دید که $P_x=\pi_x-s_x$ بنابراین (KS') برابر با $S_R \geq S_L$ است.

www.SID.ir

بین ٤۲ و ۵۰ درصد است (با توجه به فرضیه SC). هم‌چنین احتمال امتیازگیری همواره برای سمت طبیعی زننده ضربه بالاتر است (فرض NS)، و هنگامی که دروازه‌بان مسیر را درست انتخاب می‌کند، اختلاف بزرگ‌تر است (فرض KS). با توجه به فرض (SC')، داده‌ها نشان می‌دهند که احتمال امتیازگیری (البته با توجه به انتخاب اشتباه دروازه‌بان) برای اینکه ضربه به یکی از دو سمت برود، ۹۷ درصد و برای وسط دروازه ۸۳ درصد است.

۳-۳. بررسی تعادل نش

بازی مطرح شده در بالا، هیچ‌گونه تعادل استراتژی خالص ندارد، اما همواره یک تعادل استراتژی مختلط منحصر به فرد را تأیید می‌نماید، همان طور که در قضیه اول نشان داده شده است؛ **قضیه ۱:** همواره یک تعادل استراتژی مختلط منحصر به فرد وجود دارد، اگر

$$\mu \le \frac{\pi_L \pi_R - P_L P_R}{\pi_R + \pi_L - P_L - P_R} \qquad (C\mu)$$

پس هر دو بازیکن برای سمت $\{L,R\}$ تصادفی سازی می‌نمایند (البته تصادفی‌سازی مقید)، در غیراین صورت هر دو بازیکن برای سمت $\{L,C,R\}$ تصادفی‌سازی می‌کنند (تصادفی‌سازی عمومی). اثبات این قضیه با محاسبات آسانی صورت می‌پذیرد.[۱]

در تعادل تصادفی‌سازی مقید[۲] (RR)، زننده ضربه هرگز مرکز دروازه را برای شلیک توپ انتخاب نمی‌کند و دروازه‌بان هرگز در وسط دروازه نمی‌ایستد. تعادلی به این شکل وقتی حاصل می‌شود که احتمال امتیازگیری μ وقتی ضربه در وسط دروازه است، به اندازه کافی کوچک باشد. احتمال امتیازگیری برای هر دو سمت یکسان است، یعنی

۱- برای جزئیات بیشتر مراجعه شود به چیاپوری و همکاران (۲۰۰۲)

2- Restricted Randomization (RR).

www.SID.ir

$$\Pr(Score \mid S = L) = \Pr(Score \mid S = R) = \frac{\pi_L \pi_R - P_L P_R}{\pi_L + \pi_R - P_L - P_R}$$

در حقیقت توپی که به سمت مرکز دروازه شلیک می‌شود با احتمال μ به گل تبدیل می‌شود.[۱] از سوی دیگر، در تعادل "تصادفی‌سازی گسترش‌یافته"[۲] (GR)، هم دروازه‌بان و هم زننده ضربه با یک احتمال مثبت سمت راست، چپ یا وسط را انتخاب می‌کند و احتمالات امتیازگیری تعادلی برابر هستند. بنابراین، ضربه‌زننده‌ها هرگز توپ را به مرکز دروازه شلیک نمی‌کنند، مگر اینکه احتمال امتیازگیری به اندازه کافی بزرگ باشد؛ البته با توجه به این موضوع که آنها همواره با یک احتمال مثبت ضربه را به طرفین دروازه روانه می‌کنند. در مسابقات ناهمگن، این موضوع یک" تورش انتخاب"[۳] ایجاد می‌کند و نتیجه این است که احتمال امتیازگیری مجموع (یعنی نسبتی از ضربه‌ها که واقعاً به گل تبدیل شده) می‌بایست برای ضربه‌هایی که به سمت مرکز دروازه می‌رود بزرگ‌تر باشد. ملاحظه خواهد شد که این الگو دقیقاً در داده‌های مقاله مشاهده شده است. حال چندین ویژگی از تعادل نشان داده می‌شود که در معرفی آزمون‌های تجربی بسیار تعیین‌کننده خواهند بود.

قضیه ۲: در تعادل منحصر به فرد بازی، خصوصیات زیر برقرار هستند:

ـ تصادفی سازی دروازه‌بان و ضربه‌زننده مستقل از هم هستند.

ـ تحت فرضیه (SC)، زننده ضربه همواره احتمال بیشتری دارد که در مقایسه با دروازه‌بان مرکز (C) را انتخاب نماید.

ـ تحت فرضیه (SC)، زننده ضربه همواره سمت طبیعی‌اش را انتخاب می‌کند که اغلب کمتر از دروازه‌بان است.

ـ تحت فرضیه (SC) و (NS)، دروازه‌بان سمت طبیعی ضربه زننده (L) را بیشتر از سمت مخالف (R) انتخاب می‌کند.

۱- هم‌چنین اگر $\pi_R = \pi_L$ باشد، در اینصورت دروازه‌بان و ضربه‌زننده با یک استراتژی مختلط بازی می‌کنند.

2- Generalized Randomization

3- Selection bias

www.SID.ir

ـ تحت فرض (SC) و (KS)، ضربه‌زننده سمت طبیعی خودش را (L) بیشتر از سمت مخالف (R) انتخاب می‌کند.

ـ تحت فرض (SC) و (NS) و (KS)، الگوی (L,L) (یعنی زننده ضربه چپ را انتخاب می‌کند و دروازه‌بان هم چپ وی را انتخاب می‌کند) احتمال بیشتری نسبت به (L,R) و (R,L) دارد، که آنها به ترتیب هر دو محتمل‌تر از (R,R) هستند.

ویژگی اول خصوصیات استاندارد یک تعادل استراتژی مختلط است. ویژگی‌های سوم و چهارم نتایج مستقیم از فرم ماتریس و فرض (SC) هستند و نمونه‌های قوی از منطق تعادل استراتژی مختلط می‌باشند. برای مثال، احتمال زدن توپ به مرکز دروازه، توسط ضربه‌زننده می‌بایست دروازه‌بان را بین جهش یا ایستادن بی‌تفاوت سازد (و به‌طور معکوس برای دروازه‌بان). حال، زدن توپ به سمت مرکز دروازه هنگامی که دروازه‌بان در جای خود می‌ایستد، به طرفین جهش نمی‌کند، برای زننده ضربه بسیار زیان‌آور است (یعنی احتمال امتیازگیری صفر است)، که این حالت در وضعیت تعادل بسیار نادر است (چرا که دروازه‌بان به ندرت در جای خود می‌ایستد و جهش نمی‌کند). به‌طور معکوس، از دید دروازه‌بان شلیک توپ به مرکز دروازه چندان بد نیست، حتی اگر وی جهش نماید (حتی بهتر از این است که توپ به سمت مخالف شلیک شود با فرض (SC))، لذا احتمال تعادلی آنها بزرگ‌تر است.

سرانجام ویژگی‌های پنجم، ششم، هفتم همگی بیان‌کننده یک نوع استدلال هستند. فرض کنید دروازه‌بان با احتمالات شرطی برابر بین R و L تصادفی‌سازی انجام می‌دهد. بنابراین، با فرض (NS)، زننده ضربه می‌بایست بسیار آسوده‌تر باشد وقتی ضربه را به سمت چپ (L) می‌زند، که با نقض شرط بی‌تفاوتی در تعادل، دروازه‌بان می‌بایست بیشتر اوقات سمت L را انتخاب نماید. به‌طور مشابه، فرض (KS) بیان می‌دارد که ضربه‌زننده می‌بایست به‌طور مساوی بین L و R تصادفی‌سازی نماید، و از دیدگاه دروازه‌بان جهش به سمت راست می‌بایست بسیار موثر باشد. دوباره بی‌تفاوتی ملزم می‌کند که توپ‌های شلیک شده به سمت چپ بیشتر تکرار شوند. در همه موارد، نکته کلیدی این است که احتمالات امتیازگیری زننده ضربه به استراتژی دروازه‌بان مربوط هستند (و بالعکس) و نتیجه یک تعادل استراتژی مختلط است.

Archive of SID
www.SID.ir

٤. ناهمسانی[1] و تجمیع[2]

همسانی یک فرض بسیار محدود کننده است که داده‌ها را به خوبی برازش نمی‌کند. اگر بازیکنان دارای توانایی‌ها یا خصوصیات در حال تغییر باشند، (یعنی به وسیله زمان بازی، شرایط زمین، استرس، خستگی و... تحت تأثیر قرار گیرند) در این صورت ناهمسانی رخ خواهد داد. بنابراین، یک سوال به وجود می‌آید، به این صورت که آیا پیش‌بینی‌های فوق به وسیله تجمیع حفظ خواهند شد، حتی در حضور "ناهمسانی قراردادی"[3] ؟ قضیه زیر پیش‌بینی‌هایی از مدل را که به وسیله تجمیع حفظ گردیده است، نشان می‌دهد؛

قضیه ۳: موارد زیر تحت فرض (SC) کاملاً صحیح خواهند بود:

ـ تعداد ضرباتی که به مرکز دروازه روانه می‌شود، بیشتر از ضرباتی است که دروازه‌بان برای آنها در مرکز دروازه می‌ایستد؛

ـ تعداد ضرباتی که به سمت چپ زننده ضربه راهی می‌شود، کوچک‌تر از تمامی جهش‌هایی است که دروازه‌بان به سمت چپ زننده ضربه انجام خواهد داد؛

ـ اگر فرضیه (KS) برای همه مسابقات برقرار باشد، پس تعداد ضربه‌هایی که به سمت چپ می‌رود، از تعداد ضربه‌هایی به سمت راست می‌رود، بیشتر هستند؛

ـ اگر فرضیه (NS) برای تمامی مسابقات برقرار باشد، پس تعداد جهش‌های به سمت چپ از تعداد جهش‌های به سمت راست بیشتر است؛

ـ اگر فروض (NS) و (KS) برای همه مسابقات برقرار باشند، پس الگوی (L,L) (یعنی ضربه‌زننده L را انتخاب می‌کند و دروازه‌بان نیز L را انتخاب می‌کند)، نسبت به الگوهای (L,R) و (R,L) بیشتر تکرار می‌شود، که هم‌چنین این دو الگو از الگوی (R,R) بیشتر تکرار می‌شوند.

از این‌رو، سایر نتایج می‌توانند برای هر مسابقه‌ای حفظ شوند، اما در رابطه با مسأله تجمیع با شکست مواجه خواهند شد. برای مثال، پیش‌بینی تساوی احتمال امتیازگیری

1- Heterogeneity
2- Aggregation
3- Arbitrary Heterogeneity

www.SID.ir

برای هر طرف در رابطه با مسأله تجمیع برقرار نیست؛ به عنوان مثال، فرض کنید که دو نوع بازیکن وجود دارد که در توانایی و سمت تعادلی با یکدیگر متفاوت هستند و اینکه بهترین بازیکنان تقریباً بیشتر اوقات در تعادل، توپ را به سمت چپ شلیک می‌نمایند. بنابراین، یک ضربه سمت چپ به احتمال زیاد از یک بازیکن قوی‌تر صادر خواهد شد و در این صورت شانس بیشتری برای به ثمر رسیدن خواهد داشت. از نظر اقتصاد سنجی، این موضوع مترادف با تورش انتخاب است، که این تورش هنگامی که جهت ضربه با احتمالات امتیازگیری هم بسته هستند، رخ خواهد داد و تئوری تأیید می‌کند که می‌بایست برقرار باشد. مسأله ناهمسانی حتی می‌تواند وقتی یک دروازه‌بان و ضربه‌زننده مشابه، به طور مکرر رو در رو می‌شوند، نیز رخ دهد؛ البته زمانی که احتمالات امتیازگیری به وسیله متغیرهای برونزای گوناگون تحت تأثیر قرار می‌گیرند.[۱] بنابراین، ویژگی احتمال امتیازگیری برابر نمی‌بایست برای داده‌های خام و اولیه مورد آزمون قرار گیرند، اما در مقابل، مشروط بر رفتارهای قابل مشاهده هستند. به عبارت دیگر، دریافتیم در حالی که احتمالات امتیازگیری در طول زمان بازی تغییر می‌کنند، احتمالات زدن ضربه به سمت راست یا چپ به طور معناداری تحت تأثیر قرار نگرفته‌اند. این موضوع بیان می‌دارد که تورش ایجاد شده به وسیله تجمیع در سراسر بازی نمی‌تواند خیلی شدید باشد. از این رو پیش‌بینی‌های بازی دو نفره برای آزمون بسیار مشکل هستند. اما دو راه‌حل برای این موضوع وجود دارد: ابتدا این امکان وجود دارد که پیش‌بینی‌های حفظ شده به وسیله تجمیع مورد آزمون قرار گیرند. دوم، فرضیه‌های موجود در مورد شکل توزیع، امکان آزمون تعداد بیشتری پیش‌بینی را خواهد داد. البته موضوع حیاتی این است که این فرضیه‌ها قابل آزمون می‌باشند و به وسیله داده‌ها رد نخواهد شد(چیاپوری و همکاران، ۲۰۰۲).

۵. نتایج تجربی

در این قسمت فرضیه‌ها و پیش‌بینی‌های مدل در قسمت‌های قبلی با استفاده از یک

۱- برای مثال چیاپوری و همکاران در مطالعه لیگ فرانسه به این نتیجه رسیدند که احتمال امتیازگیری برای یک ضربه پنالتی در ۱۵ دقیقه اول بازی بیشتر است، اما در ۳۰ دقیقه آخر کمتر است.

Archive of SID
www.SID.ir

مجموعه داده (شامل ۱۰۶ ضربه پنالتی) آزمون می‌شود. این ضربه‌ها دربرگیرنده همه ضربه‌های پنالتی گرفته شده در لیگ برتر ایران می‌باشد. مجموعه داده به وسیله تماشای مسابقات جمع‌آوری شده است. در هر ضربه، مشخصات ضربه‌زننده و دروازه‌بان و هم‌چنین عمل صورت گرفته به وسیله هر دو (یعنی راست، چپ یا وسط) شناسایی و ثبت گردیده است، و اینکه کدام پای ضربه‌زننده برای شوت مورد استفاده قرار گرفته است و اطلاعات مربوط به وضعیت بازی نظیر امتیاز جاری، دقیقه بازی و تیم میزبان بررسی شده است. در این مجموعه ۳۹ ضربه زننده و ۳۳ دروازه‌بان وجود دارند. نتیجه تعداد نسبتاً کم مشاهدات در مجموعه داده این بود که آزمون‌ها قدرت نسبتاً کمی برای تبعیض بین فرضیه‌های در حال رقابت داشته باشند. به دلیل اینکه قدرت برخی آزمون‌های مدل با تعداد مشاهدات برای هر بازیکن افزایش می‌یابد، بنابراین، در برخی موارد، ما در نمونه‌هایی به ۲۱ ضربه‌زننده محدود شدیم که حداقل سه ضربه را به سمت دروزاه راهی کرده بودند.

۵-۱. آزمون فرض حرکت همزمان ضربه‌زننده‌ها و دروازه‌بان‌ها

پیش از بررسی و آزمون پیش‌بینی‌های مدل، ابتدا فرض اساسی مدل یعنی ضربه‌زننده و دروازه‌بان به صورت هم زمان حرکت می‌کند، آزمون می‌گردد. بدین منظور، اگر دو بازیکن به طور هم زمان حرکت نمایند، در اینصورت با توجه به سابقه رقیب و بازیکن، عمل انتخاب شده به وسیله رقیب در این ضربه پنالتی نبایستی عمل بازیکن دیگر را پیش‌بینی نماید. فقط اگر یک بازیکن فرض حرکت همزمان بازی را نقض کرده و اول حرکت کند، در این صورت بازیکن دیگر می‌بایست قادر باشد تا حرکت خود را با توجه به انتخاب واقعی رقیب شکل دهد. بنابراین، آزمون فوق در یک رگرسیون احتمال خطی به شکل زیر انجام می‌گیرد:

$$(SM)\ R_i^K = X_i x + \beta R_i^G + \delta \overline{R}_i^K + \delta \overline{R}_i^G + \varepsilon_i \qquad (۱)$$

که در آن R_i^K متغیر مجازی برای ضربه‌های زننده ضربه به سمت راست، R_i^G متغیر مجازی برای جهش دروازه‌بان به سمت راست، $\overline{R}_i^K$ درصدی از ضربه‌های یک ضربه زننده که از میان تمامی ضربه‌هایش به سمت راست می‌رود، $\overline{R}_i^G$ درصدی از جهش‌های یک دروازه‌بان که از میان تمامی جهش‌هایش به سمت راست می‌رود و X برداری از تغییرات همگام است که شامل مجموعه‌ای از متغیرهای کنترل برای

Archive of SID
www.SID.ir

وضعیت‌های خاص بازی در زمان زدن ضربه پنالتی است. به عبارت دیگر، آن شامل ۵ شاخص مطابق با دقیقه بازی است که در آن ضربه زده می‌شود. پارامتر کلیدی در مدل فوق، β است که بیانگر این است که آیا دروازه‌بان در این ضربه به سمت راست جهش می‌نماید. در یک بازی حرکت همزمان، β بایستی برابر با صفر باشد. نتایج برآورد معادله (SM) در جدول (۲) نشان داده شده است. در این جدول ستون اول شامل تمامی ضربه‌زننده‌ها است؛ اما ستون دوم فقط شامل ضربه‌زننده‌هایی است ۳ پنالتی یا بیشتر را در نمونه دارا هستند.نتایج جدول (۲) با فرض حرکت همزمان دروازه‌بان و ضربه‌زننده سازگار هستند. در ستون دوم نمی‌توان فرضیه صفر یعنی اینکه β می‌بایست صفر باشد را رد کرد. در نمونه تمامی ضربه‌زننده‌ها، (ستون اول جدول ۲)، جهش دروازه‌بان به همان مسیر (سمت راست) ۱۷ درصد بیش از آن چیزی است که ضربه‌زننده می‌بایست انتظار داشته باشد؛ که در نمونه ضربه‌زننده‌های دارای حداقل سه ضربه پنالتی نیز تقریباً همین میزان (۱۶ درصد) است که نشان از پایداری ضرایب به دست آمده دارد.

جدول۲: آزمون فرضیه حرکت همزمان دروازه‌بان و ضربه‌زننده (متغیر وابسته: شوت به سمت راست)

متغیر	(۱)	(۲)
عرض از مبداء	۰/۰۴۷	۰/۰۱
جهش به سمت راست	۰/۱۷*	۰/۱۶
درصد شوت‌های به سمت راست یک بازیکن	۰/۹*	۰/۹۱*
درصد جهش‌های به سمت راست یک دروازه بان	-۰/۲۰۲	-۰/۰۸
نمونه محدود به ضربه زننده با ۳ ضربه و بیشتر	خیر	بله
R^2	۰/۲۶	۰/۱۹
آماره F	۱۲/۰۶	۵/۲
تعداد مشاهده	۱۰۶	۷۰
* بیانگر معناداری در سطح معنای ۵ درصد است.		

منبع: محاسبات مقاله

دومین مشاهده‌ای که از جدول (۲) پدیدار می‌شود این است که استراتژی‌ها به طور سیستماتیک در میان ضربه‌زننده‌ها متفاوت هستند، به این صورت که آن ضربه‌زننده‌هایی که در سایر مشاهدات بیشتر اوقات به سمت راست شلیک می‌کنند، به احتمال زیاد در

Archive of SID
www.SID.ir

مجموعه داده‌ها نیز به سمت راست شلیک می‌نمایند. در ادامه نشان داده می‌شود که هم‌چنانکه تمامی دروازه‌بان‌ها یکسان هستند، ضربه‌زننده‌ها نیز این گونه رفتار خواهند کرد.

۵-۲. آزمون ثبات پیش‌بینی‌های مدل در مسئله تجمیع

از قبل مفروض است که دروازه‌بان و ضربه‌زننده به طور هم زمان حرکت می‌کنند، حال تمرکز خود را به سمت آزمون پیش‌بینی‌های مدل سوق می‌دهیم. بدین منظور با پیش-بینی‌هایی شروع می‌شود که در مسأله تجمیع میان بازیکنان ناهمگن وجود دارد. شاید اساسی‌ترین پیش‌بینی مدل این باشد که همه ضربه‌زننده‌ها و دروازه‌بان‌ها می‌بایست با استراتژی‌های مختلط بازی کنند؛ آزمون این پیش‌بینی به دو دلیل بسیار پیچیده است. در ابتدا با توجه به اینکه تعداد بسیار کمی مسابقه برای تعدادی ضربه‌زننده و دروازه‌بان مشاهده گردیده، در این صورت این امکان وجود دارد که اگر بازیکن یک استراتژی مختلط را بکار می‌گیرد، در این صورت فقط یکی از اقدامات تصادفی واقعاً در داده‌ها مشاهده می‌شود.[۱] از سوی دیگر، اگر بازیکنان استراتژی‌های متفاوت را در برابر رقیب‌های مختلف استفاده نمایند، در اینصورت مشاهدات متعدد در مورد یک بازیکن معین در حال رقابت با رقیب‌های مختلف می‌توانند بیان نمایند که بازیکن در حال استفاده یک استراتژی مختلط است (حتی اگر این حالت به واقع درست نباشد).

با وجود این دو پیش‌بینی، در ابتدا دریافتیم که هیچ ضربه‌زننده‌ای با حداقل سه ضربه در نمونه وجود ندارد که همواره در یک مسیر توپ را شلیک نماید. فقط چهار نفر از ۲۱ ضربه‌زننده با حداقل سه شوت، سه ضربه پنالتی را همیشه در یک مسیر مشابه شلیک نموده‌اند. حتی میان ضربه‌زننده‌هایی که دو ضربه را زده‌اند، استراتژی مشابه در هر دوبار به کار گرفته شده است. در کل ۳۹ ضربه‌زننده در نمونه وجود دارند که حداقل ۲ ضربه را شلیک نموده‌اند. تحت این فرض که هر یک از این ضربه‌زننده‌ها میان سه استراتژی ممکن (چپ، وسط، راست) تصادفی‌سازی می‌نمایند، در این صورت

۱- حالت حدی این است که وقتی فقط یک مشاهده برای یک بازیکن وجود دارد، بنابراین نمی‌توان به صراحت بیان داشت که وی یک استراتژی مختلط استفاده کرده باشد.

Archive of SID
www.SID.ir

محاسبه تعداد پیش‌بینی شده ضربه‌زننده‌هایی که می‌بایست در مسیر مشابه ضربه بزنند بسیار ساده است. ما پیش‌بینی نمودیم که ۱۷ ضربه‌زننده ($SE = ۰/۴۲$) می‌بایست فقط با یک استراتژی بازی نمایند.

نتایج در مورد دروازه‌بان‌ها نیز کاملاً مشابه هستند. بیشتر دروازه‌بان‌ها استراتژی‌های مختلط را به کار می‌گیرند. بنابراین، دو دروازه‌بان در نمونه وجود دارند که در پنج ضربه‌ای که با آن روبرو هستند، به سمت چپ جهش می‌نماید (که فقط چهار ضربه از ضربات شلیک شده به سمت دروازه، به سمت چپ رفته است و بیان‌کننده این موضوع است که تمایل دروازه‌بان برای جهش به سمت چپ هم‌چنان باقی است).

سرانجام، یک پیش‌بینی قابل آزمون از رفتار تصادفی‌سازی این است که می‌بایست هیچ‌گونه هم بستگی سریالی در استراتژی بازی شده وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، مشروط به احتمال کلی انتخاب چپ، راست یا وسط، استراتژی واقعی بازی شده در ضربه پنالتی قبلی می‌بایست استراتژی بازی شده در ضربه جاری را پیش‌بینی نکند. در رگرسیون‌هایی که جهت شلیک ضربه‌زننده یا جهش دروازه‌بان را پیش‌بینی می‌کند، جهت بازی شده در ضربه پنالتی قبلی توسط دروازه‌بان یا ضربه‌زننده هرگز یک پیش‌بینی کننده معنادار آماری از جهت ضربه پنالتی جاری نخواهد بود. جدول (۳) ماتریس اقدامات انجام یافته به وسیله ضربه‌زننده‌ها و دروازه‌بانان را نشان می‌دهد. پنج پیش‌بینی از مدل وجود دارد که می‌توانند با استفاده از اطلاعات جدول (۳) مورد آزمون قرار گیرند. در ابتدا مدل پیش‌بینی می‌کند که ضربه‌زننده مرکز دروازه بسیار بیشتر از دروازه‌بان انتخاب خواهد کرد. نتیجه به صورت بسیار شفاف در داده‌ها وجود دارد، به این صورت که ضربه‌زننده‌ها ٦ بار مرکز دروازه را برای شلیک ضربه انتخاب نموده‌اند در حالی که دروازه‌بان‌ها فقط ۳ بار مرکز را انتخاب کرده‌اند.

Archive of SID

www.SID.ir

جدول۳: ماتریس ضربات مشاهده شده

دروازه بان	ضربه زننده			کل
	چپ	وسط	راست	
چپ	۳۸	۵	۲۲	۶۵
وسط	۲	۰	۱	۳
راست	۱۶	۱	۲۱	۳۸
کل	۵۶	۶	۴۴	۱۰۶

منبع: محاسبات مقاله

دومین پیش‌بینی مدل این است که دروازه‌بان‌ها بایستی سمت چپ (سمت طبیعی ضربه‌زننده) را بسیار بیشتر از ضربه‌زننده‌ها انتخاب نمایند، که در نمونه دروازه‌بان‌ها ۶۵ بار سمت چپ (۶۱/۳ درصد از ضربه‌ها) را انتخاب کرده‌اند، اما ضربه‌زننده‌ها ۵۶ بار سمت چپ (۵۲/۸ درصد) را انتخاب نموده‌اند. بنابراین فرضیه صفر مبنی بر اینکه دروازه‌بان‌ها سمت چپ را اغلب اوقات بیش از ضربه‌زننده‌ها انتخاب می‌نمایند، نمی‌تواند رد شده باشد.

سومین و چهارمین پیش‌بینی مدل عبارت اند از اینکه تحت فرضیه‌های (NS) و (KS) ضربه‌زننده و دروازه‌بان به احتمال زیاد هر دو به سمت چپ (نسبت به سمت راست) بیشتر تمایل دارند. این پیش‌بینی تأیید شده است، به این صورت که در داده‌ها، ۶۵ جهش به سمت چپ صورت گرفته است (البته سمت چپ ضربه‌زننده) و فقط ۳۸ جهش به سمت راست بوده است. همین الگو برای ضربه‌زننده صادق است، که ۵۶ ضربه به سمت چپ و ۴۴ ضربه به راست شلیک شده است.

سرانجام پنجمین پیش‌بینی تئوری این است که الگوی "چپ چپ" در جدول (۳) بایستی تعداد بیشتری از مشاهدات را در اختیار داشته باشد. این پیش‌بینی نیز به وسیله داده‌ها تأیید شده است که در آن ضربه‌زننده و دروازه‌بان هر دو سمت چپ را بیش از ۳۵ درصد انتخاب کرده‌اند، در حالی که رایج‌ترین پیامد بعد از آن حدود ۲۰ درصد است (یعنی دروازه‌بان به سمت چپ و ضربه‌زننده به سمت راست). اما در نهایت،

Archive of SID
www.SID.ir

الگوی "راست ـ راست" دارای کمترین تکرار نیست و این پیش‌بینی توسط داده‌ها تأیید نمی‌شود. برای تکمیل بحث، جدول (٤) نشان دهنده ماتریس احتمالات امتیازگیری بوده که تابعی از رفتارهای صورت گرفته به وسیله ضربه‌زننده‌ها و دروازه-بان‌ها است. همان طور که در تئوری نشان داده شد، همراه با ضربه‌زننده‌ها و دروازه-بان‌های همگن، مدل هیچ‌گونه پیش‌بینی روشنی در خصوص درست نمایی کل از موفقیت ارائه نمی‌دهد.

جدول٤: ماتریس پیامدها: درصد ضربه‌هایی که به گل تبدیل شده (درصد)

دروازه بان	ضربه زننده			کل
	چپ	وسط	راست	
چپ	۵۰	۸۰	۹۵	۳۷/۲
وسط	۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰
راست	۱۰۰	۱۰۰	٤۲	۷٦/۳
کل	٦٦/۱	۸۳/۳	۳۱/۸	۵۲/۸

منبع: محاسبات مقاله

اگر ضربه‌زننده‌ها و دروازه‌بان‌ها همگی یکسان باشند، در این صورت می‌بایست انتظار داشت که نرخ متوسط موفقیت برای ضربه‌زننده‌ها بایستی در میان تمامی رفتارها مشابه باشد و به طور مشابه این موضوع برای دروازه‌بان‌ها هم صادق است. در عمل، احتمال موفقیت در میان رفتارهای مختلف چندان نزدیک نیست (به خصوص برای دروازه‌بان‌ها)، به‌گونه‌ای که میزان گل‌های به ثمر رسیده بین ۳۷/۲ و ۱۰۰ درصد در میان سه رفتار تغییر می‌کند. به طور قابل توجهی برای ضربه‌زننده‌ها، انتخاب مرکز دروازه بالاترین متوسط بازدهی را به دنبال دارد و حدود ۸۳ درصد به گل تبدیل شده است، که این موضوع دقیقاً آن چیزی است که به وسیله "تورش انتخاب" (که قبل از این اشاره گردید) بیان شده بود. هم‌چنین شلیک توپ به سمت راست کمترین بازدهی را به دنبال دارد و به طور متوسط فقط ۳۲ درصد به گل تبدیل شده‌اند.

Archive of SID
www.SID.ir

٦. جمع‌بندی

در این مقاله از طریق نظریه بازی، یک مدل از ضربات پنالتی در مسابقه فوتبال ارائـه و فرضیه‌ها و پیش‌بینی‌های مدل با استفاده از داده‌های لیگ برتر ایران(١٠٦ ضـربه پنـالتی) مورد آزمون قرار گرفت. نتایج تجربی با پیش‌بینـی‌هـای مـدل سـازگار هـستند و بیـان می‌دارند می‌توان پذیرفت که بازیکنان مشروط به رفتار رقیب، به طور بهینه استراتژی‌ها را انتخاب می‌نمایند.

در ابتدا مدل پیش‌بینی می‌کند که ضربه‌زننده مرکز دروازه بسیار بیـشتر از دروازه‌بـان انتخاب خواهد کرد. نتیجـه ایـن فـرض در داده‌هـا وجـود دارد، بـه ایـن صـورت کـه ضربه‌زننده‌ها ٦ بار مرکز دروازه را برای شلیک ضربه و دروازه‌بان‌ها فقط ٣ بار مرکـز را انتخاب کرده‌اند. دومین پیش‌بینی مدل این است که دروازه‌بان‌هـا بایـستی سـمت چـپ (سمت طبیعی ضربه‌زننده) را بسیار بیشتر از ضربه‌زننده‌ها انتخاب نمایند، که این فرضیه نیز رد نشده است. سومین و چهارمین پیش‌بینی مدل عبارت اند از اینکه ضـربه‌زننـده و دروازه‌بان هر دو تمایل بیشتری به سمت چپ (نسبت به سمت راست) دارند که مـورد تأیید قرار گرفته است. درنهایت، پنجمین پیش‌بینی تئوری این است که الگـوی "چـپ چپ" بایستی تعداد بیشتری از مشاهدات را در اختیار داشـته باشـد کـه تأییـد شـده و ضربه‌زننده و دروازه‌بان بیش از ٣٥ درصد آن را انتخاب کرده‌اند. اگر ضـربه‌زننـده‌هـا و دروازه‌بان‌ها همگی یکسان باشند، در این صورت مـی‌بایـست انتظـار داشـت کـه نـرخ متوسط موفقیت برای ضربه‌زننده‌ها در میان تمامی رفتارها مشابه باشد و به طور مـشابه این موضوع برای دروازه‌بان‌ها هم صادق است.

منابع

- Azar, O.H, Bar-Eli, M. (2010). Do soccer players play the mixed-strategy Nash equilibrium? Journal of Applied Economics. Vol (no):pages
- Bar-Eli et al (2007). Action bias among elite soccer goalkeepers: The case of penalty kick. Journal of Economic Psychology 28(5): 606-621.
- Brown, J. N. & Rosenthal, R. W. (1990). Testing the minimax hypothesis: A Reexamination of O'Neill's Game Experiment, Econometrica, 58(5): 1065–81.
- Chiappori, P.A., Levitt, S., Groseclose, T. (2002). Testing mixed strategy equilibrium when players are heterogeneous: the case of penalty kicks in soccer. Working Paper,

Archive of SID
www.SID.ir

University of Chicago and American Economic Review 92 (4): 1138–1151.

- Harsanyi, J. C. (1973). Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. International Journal of Game Theory, 2(1):1–23.
- Jehle & reny. (2001). Advanced microeconomic theory. Second edition. The Addison-Wesley Series in Economic.
- McCabe et al. (2000). An Experimental Study of Information and Mixed Strategy Play in the Three-Person Matching-Pennies Game. Economic Theory, 15(2):421–62.
- Mookherjee, D& Sopher, B. (1994). Learning behavior in an experimental matching pennies game. Games and Economic Behavior, 7(1) :62–91.
- Moschini, G., (2004). Nash equilibrium in strictly competitive games: live play in soccer, Economics Letters 85: 365–371.
- Nash, J.1950. Equilibrium points in n person games. Proceedings of the National Academy of Sciences 36: 48-49.
- Ochs, J. (1995). games with unique, mixed strategy equilibrium: an experimental study. Games and Economic Behavior, 10(1): 202–17.
- O'Neill, B. (1987). Nonnumeric Test of the Minimax Theory of Two-Person Zero-sum Games. Proceedings of the National Academy of Sciences, 84(7):2106– 09.
- Palacios-Huerta, I. (2003). Professionals play minimax. Review of Economic Studies 70 (2): 395–415.
- Rapoport, A. & Boebel, R. B. (1992). Mixed strategies in strictly competitive games: a further test of the minimax hypothesis. Games and Economic Behavior, 4(2):261–83.
- Reny, Ph. & Robson, A. J. (2001). Reinterpreting mixed strategy equilibrium: A Uni-action of the Classical and Bayesian Views. Working paper, University of Chicago.

Archive of SID

www.SID.ir