

## مدلسازی توزیع درآمد برای ایران: مقایسه الگوی داگوم با چند مدل منتخب

صادق بختیاری،<sup>۱</sup> سجاد محموداوغلی<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۹۲/۱۱/۲۹ تاریخ پذیرش: ۹۳/۰۳/۲۶

### چکیده

هدف این پژوهش برآورد مدل‌های دوپارامتری وایبل و سه پارامتری بتا، لگ نرمال، گاما و داگوم به روش حداکثر درست‌نمایی (MLE) به صورت سالانه با استفاده از اطلاعات مربوط به هزینه و درآمد خانوارهای ایرانی برای سال‌های ۱۳۶۱-۱۳۹۰ به وسیله زیربرنامه محاسبه‌گر بسته‌ی VGAM در نرم افزار R بوده است. مقایسه برازش مدل‌های یاد شده به وسیله معیار اطلاعات آکائیک (AIC) صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهد. در دوره‌ی ۱۳۶۱-۱۳۹۰ با وجود فراز و نشیب‌های مقادیر این شاخص در میان خانوارهای کشور، میزان ضریب جینی روندی کاهنده داشته یعنی در واقع شدت نسبی نابرابری درآمد در کشور کاهنده، ولی میزان کاهش آن بسیار محدود بود. همچنین براساس معیار اطلاعات آکائیک و همچنین نمودارهای حاصل از توابع چگالی احتمال مشخص شد که تابع توزیع داگوم یک برازش‌گر خوب است. مقادیر برآورد شده پارامترهای بتا و دلتا در طول این سال‌ها روند صعودی و پارامتر آلفا روند نزولی دارد.

طبقه‌بندی JEL: O15, C16, D63

واژگان کلیدی: توزیع درآمد، توزیع داگوم، حداکثر درست‌نمایی.

\*استاد دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوراسگان، گروه اقتصاد، اصفهان، ایران (نویسنده‌ی مسئول)، پست الکترونیکی:

bakhtiari\_sadegh@yahoo.com

\*\*کارشناس ارشد اقتصاد، پست الکترونیکی:

soghli13@gmail.com

## ۱. مقدمه

در سال ۱۹۷۰ کامیلو داگوم<sup>۱</sup> در جستجوی یک مدل آماری دقیق و درخور از توزیع درآمد تجربی و توزیع ثروت، کار خود را آغاز کرد. استفاده از توزیع‌های کلاسیک توزیع پارتو (توسعه یافته توسط اقتصاددان و جامعه‌شناس ایتالیایی ویلفردو پارتو<sup>۲</sup> در اواخر قرن ۱۹ (پارتو، ۱۸۹۵، ۱۸۹۶، ۱۸۹۷) و توزیع لگ نرمال (توسط مهندس فرانسوی رابرت گبرات<sup>۳</sup> (۱۹۳۱) برای چنین داده‌هایی کافی نبود. داگوم در جستجوی یک مدل انعطاف‌پذیر با دم سنگین در توزیع‌های ثروت و درآمد تجربی بود. پژوهش‌هایی با تغییر توزیع لگ-لجستیک (داگوم، ۱۹۹۰) و تعمیم توزیع قبلی به وسیله فیسک<sup>۴</sup> (۱۹۶۱) انجام شده بود، داگوم متوجه شد که یک پارامتر اضافی مورد نیاز است. این موضوع به توزیع داگوم نوع I، یک توزیع سه پارامتری و تعمیم چهار پارامتری منجر شد (داگوم، ۱۹۹۰ و ۱۹۸۰). داگوم در سال ۱۹۸۹، برای واحدهای اقتصادی با ثروت خالص منفی، مدل تک پارامتری لاپلاس را مورد بررسی قرار داد. از تلفیق (ترکیب محدب) مدل نوع دوم داگوم و مدل تک پارامتری لاپلاس، داگوم مدلی به دست آورد که قابلیت کاربرد برای توزیع ثروت خالص با برد  $R = (-\infty, \infty)$  را دارد. این خصوصیتی است که به مدل داگوم برجستگی خاصی می‌دهد زیرا دیگر مدل‌ها عموماً از این قابلیت محروم می‌باشند. در پژوهش حاضر، همانند بسیاری از بررسی‌های توزیع درآمد در کشورهای در حال توسعه، از هزینه‌های مصرفی به جای درآمد استفاده شده است بنابراین با توجه به این موارد این پژوهش درصدد است تا مدل داگوم را با مدل‌های دوپارامتری وایبل و سه پارامتری بتا، لگ‌نرمال، گاما بر اساس معیار اطلاعات آکائیک (AIC) مقایسه و پارامترهای آن را به روش حداکثر درست‌نمایی برآورد کند.

## ۲. ادبیات موضوع

چوتیکی پانیچ<sup>۵</sup> و همکارانش (۲۰۱۰) و سورو<sup>۶</sup> (۱۹۷۰) از مدل‌های سه پارامتری برای بررسی توزیع درآمدی رایج استفاده کردند نتایج نشان داد که توزیع سینگ-مادالا نیز نسبت به توزیع‌های

<sup>1</sup> Camilo Dagum

<sup>2</sup> Vilfredo Pareto

<sup>3</sup> Gibrat

<sup>4</sup> Fisk

<sup>5</sup> Chotikapanich

<sup>6</sup> Thurow

دو پارامتری بهتر بوده و مورد استفاده قرار می‌گیرد. یافته‌های گرتل<sup>۱</sup> و همکاران (۲۰۰۰) نشان داد که تنها ریشه کن کردن بیکاری نمی‌تواند نسبت جینی را بهبود ببخشد، چون تاثیر آن به نسبت ضعیف است. تحقیقات آنها نشان داد که در طول دوره ۲۰۰۰-۱۹۹۲ پارامتر آلفا به میزان ۵۴ درصد افزایش یافته است و پارامتر بتا به میزان ۷۸ درصد کاهش داشته اما پارامتر دلتا ۲۳ درصد افزایش داشته است. در نتیجه نسبت ضریب جینی به میزان  $\frac{4}{3}$  درصد افزایش خالص داشته است. در ایران نیز بررسی اهداف مرتبط با توزیع درآمد بعد از انقلاب اسلامی حاکی از آن است که سیاست‌گذاران و برنامه‌ریزان اقتصادی، در راستای سیاست‌های کلی نظام، سند چشم‌انداز بیست ساله کشور، قوانین برنامه‌های پنج‌ساله توسعه و قوانین سنواتی بودجه، مبنای فعالیت‌های خود را بر پایه رویکرد عمل‌گرایی و در جهت توسعه عدالت اجتماعی و توزیع درآمد و ثروت برای اقشار محروم قرار داده‌اند. از طرفی بیش‌تر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی توزیع درآمد در ایران، بر اساس اطلاعات آماری گروه‌بندی شده است. به عبارتی دیگر، با طبقه‌بندی داده‌های حاصل از نمونه‌گیری در مناطق شهری و روستایی در گروه‌های چندگانه، شاخص‌های نابرابری متفاوتی محاسبه شده است.

بختیاری و همکاران (۱۳۸۰) با ارزیابی وضعیت هزینه‌های مصرفی مناطق شهری و روستایی استان اصفهان در دوره ۷۲-۱۳۳۸ بیان کردند که انواع هزینه‌های مصرفی در طول این دوره افزایش یافته است که این افزایش هزینه، در مناطق شهری با بدتر شدن وضعیت تغذیه‌ای همراه بوده است. نتایج مطالعه ابونوری، خوشکار و حیدری (۱۳۸۵) و خسروی نژاد (۱۳۹۱) حاکی از آن است که نابرابری در مناطق روستایی از مناطق شهری بیش‌تر بوده است. نابرابری در مناطق شهری و روستایی شهرستان بندر لنگه در سال انتهایی اجرای برنامه سوم توسعه اقتصادی- اجتماعی (۱۳۸۳) نسبت به سال ابتدای اجرای این برنامه (۱۳۷۹) افزایش یافته است. هم‌چنین ابونوری (۱۹۸۷) در رساله دکتری خود در دانشگاه کنت انگلستان، تحت عنوان تجزیه و تحلیل ریاضی‌آماري توزیع درآمد و اثر نفت بر نابرابری‌های اقتصادی در کشورهای عضو اوپک به نتایج مشابهی دست یافتند.

<sup>1</sup> Gertel

### ۳. روش‌شناسی

برای یافتن توزیع مناسب داده‌های درآمد می‌بایست چند توزیع که شکلی مشابه توزیع تجربی داده‌ها دارند به داده‌ها برازش داده شود و با مقایسه‌ی آن‌ها توزیع مناسب داده‌ها را انتخاب کرد. برای این منظور لازم است با استفاده از روش‌های برآورد پارامترهای توزیع‌ها، مثل روش ماکسیمم درست‌نمایی، پارامترهای این توزیع‌ها را برآورد کرد. در بیش‌تر توزیع‌های متداول یا کلاسیک برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها منحصر به فرد بوده و با مشتق‌گیری معمولی از تابع درست‌نمایی  $L(\theta)$  یا تابع لگاریتم درست‌نمایی  $\ln L(\theta)$  نسبت به پارامتر  $\theta$  به دست می‌آید. برای تحلیل داده‌ها از نرم افزار R استفاده شده است. نرم‌افزار R به واسطه قابلیت‌های بالا، رایگان بودن آن و امکان دسترسی به توابع کتابخانه‌ای سایر محققان اقصی نقاط دنیا، در بین سایر نرم افزارهای برنامه‌نویسی از جایگاه خاصی برخوردار است. (هژبرکیانی و مرادی، ۱۳۸۷) در این قسمت به بررسی پنج تابع توزیع درآمدی داگوم، بتا، گاما، لگ نرمال و وایبل پرداخته می‌شود، و سپس به نحوه برآورد پارامترهای هر یک از توابع به روش حداکثر درست‌نمایی<sup>۱</sup> اشاره می‌شود.

داگوم با ارایه یک توصیف نظری و براساس ویژگی‌های مشاهده شده و برگیری از کشش درآمدی، یک تابع توزیع خاصی معرفی نمود. به طور کلی، کشش درآمدی از تابع توزیع تجمعی (CDF) با توجه به نقطه آلفا ( ) از  $F(x)$ ، به عنوان یک تابع کاهش‌ی یک‌نواخت از  $F(x)$  است. نمایش ریاضی این استدلال، معادله دیفرانسیلی با سه یا چهار پارامتر به صورت زیر است:

$$\frac{d \ln[F(x)-\alpha]}{d \ln x} = \beta_1 \left[ 1 - \left( \frac{F(x)-\alpha}{1-\alpha} \right)^{\beta_2} \right], x > 0, (\beta_1, \beta_2) > 0 \quad (1)$$

با حل این رابطه برای CDF خواهیم داشت

$$F(x) = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{(1+\lambda x^{-\delta})^\beta}, (\beta, \delta, \lambda) > 0, \beta = 1/\beta_2, \delta = \beta_1 \beta_2 \quad (2)$$

که با مشتق‌گیری از  $F(x)$ ، تابع چگالی احتمال (Pdf)،  $f(x)$  به دست می‌آید:

$$F'(x) = f(x)$$

که معادله (۲)، برای های بزرگتر از صفر تعریف شده است (داگوم، ۱۹۷۷).

<sup>۱</sup> Maximum Likelihood Method

سه نسخه از مدل داگوم برای محاسبه مفروضات خاص در مورد جمعیت دریافت کننده درآمد وجود دارد.

داگوم رابطه (۱) از تابع توزیع تجمعی (CDF) مربوط به مبداء زمانی که  $=0$  ، که این حالت نشان دهنده بهترین وجه رفتار دستمزد بگیران (افراد شاغل) است.

$$F(x) = \frac{1}{(1+\lambda x^{-\delta})^\beta} \quad (۳)$$

از آنجا که  $=0$  است داگوم نوع اول شامل سه پارامتر است که توصیف و توزیع با دریافت کنندگان درآمدی که درآمد صفر دارند (هیچ درآمدی دریافت نمی کنند) شروع می شود. پارامترهای و مقیاس های آزاد هستند که مقدار برابری را توضیح می دهد (داگوم، ۱۹۸۳).  
داگوم نوع (۲) و (۳) که شامل پارامتر چهارم است که معنای اقتصادی ویژه ای دارد، پس معادله زیر

$$F(x) = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{(1+\lambda x^{-\delta})^\beta} \quad (۴)$$

شامل چهار پارامتر تابع توزیع تجمعی است. برای داگوم نوع دوم  $0 < \alpha < 1$  ، تعریف می شود که واحد سنجش درآمدی با درآمد صفر یا منفی است. بنابراین پارامتر نابرابری است، در حالی که پارامتر مقیاس است که به زمان و یا مقایسه فاصله توزیع درآمد در واحدهای مختلف پولی بیان شده است. داگوم نوع سوم مختص توزیع درآمد نمونه از دریافت کنندگان کل درآمد (دستمزد بگیران به علاوه کسانی که از اموال خود درآمد به دست می آورند) است. به این دلیل که درآمد جمع آوری شده از جمعیت، با درآمد اولیه مثبت آغاز می شود. بنابراین نسبت جینی مرتبط با مدل داگوم از طریق فرمول زیر محاسبه می شود:

$$G = (2\alpha - 1) + (1 - \alpha) \frac{(\beta)\Gamma(2\beta + \frac{1}{\delta})}{(2\beta)\Gamma(\beta + \frac{1}{\delta})} \quad (۵)$$

که در آن  $\Gamma(0)$  همان تابع گامای کامل مشخص شده در تابع داگوم است. نسبت جینی یک تابع فزاینده از است بنابراین نسبت جینی مربوط به مدل داگوم با افزایش ارزش و به صفر میل می کند که نشان دهنده برابری کامل است و با کاهش و ، تمایل به یک دارد که نشان دهنده نابرابری کامل است. به این معناست زمانی که ارزش و افزایش می یابد، توزیع درآمد بهبود

می‌یابد. (دانچلی، ۱۹۸۶) به طور خاص، با حرکت از قسمت مرکزی نمودار به سمت راست و به سمت انتهای بالایی نمودار، به این مفهوم است که جمعی از افراد طبقه متوسط، درآمد بالاتری را دریافت می‌کنند، که این با افزایش ارزش  $\delta$ ، منعکس می‌شود  $[\frac{\partial Gini}{\partial \delta} < 0]$ . به طور مشابه افزایش ارزش  $\beta$ ، موجب بهبود رفاه مردم کم درآمد می‌شود  $[\frac{\partial Gini}{\partial \beta} < 0]$ . پارامترهای بتا ( ) و دلتا ( ) در معادله (۵)، به طور خلاصه اطلاعاتی در مورد چگالی، یا توزیع فراوانی افراد در نیروی کار در سطوح مختلف درآمدی را نشان می‌دهد. در حقیقت با توجه به معادله (۲)، با تغییر بتا ( ) و دلتا ( ) و ثابت نگه داشتن پارامتر دیگری مشخص می‌شود که:  $i$  هرگونه افزایش (کاهش) در بتا ( ) با ثابت نگه داشتن دلتا ( )، میزان برابری افزایش (کاهش) می‌یابد. هم‌چنین هرگونه افزایش (کاهش) در دلتا ( ) با ثابت نگه داشتن پارامتر بتا ( )، میزان برابری افزایش (کاهش) می‌یابد.  $ii$  زمانی که بتا ( ) و دلتا مخالف علامت هم هستند، اثر مشترک بتا ( ) و دلتا ( ) به طور خلاصه موجب بهبود نسبی (زوال) در میزان برابری خواهد شد وقتی که بتا ( ) افزایش (کاهش) می‌یابد و موجب زوال جزئی (بهبود) می‌شود زمانی که دلتا ( ) کاهش (افزایش) می‌یابد. بنابراین پارامترهای موجود در ضریب جینی به رفتار پارامترهای مهم برابری در اقتصاد، بستگی دارند.

توزیع وایبل یکی از مهم‌ترین توزیع‌ها در مسایل برنامه‌ریزی‌های اقتصادی و هم‌چنین در رشته مهندسی است. تابع تجمعی توزیع وایبل به صورت زیر است:

$$F(x, \mu, \sigma, p) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^p\right] \quad (6)$$

که در آن  $\mu$  پارامتر مکان،  $\sigma$  پارامتر مقیاس و  $p$  پارامتر شکل می‌باشد. هم‌چنین تابع چگالی احتمال توزیع وایبل به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x, \mu, \sigma, p) = \frac{p}{\sigma^p} (x - \mu)^{p-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^p\right] \quad (7)$$

متغیر تصادفی  $x$  دارای توزیع لگ نرمال است اگر  $\log(x)$  دارای توزیع نرمال باشد. تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی از توزیع سه پارامتری لگ نرمال به صورت زیر است

$$f(x, \mu, \sigma, p) = \frac{1}{(x-\mu)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln(x-\mu) - \mu)^2\right] \quad (8)$$

که در آن  $0 < \gamma < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $0 \leq x < x$ , پارامترهای  $\mu$  و  $\gamma$  پارامترهای توزیع هستند. وقتی مقدار پارامتر  $\gamma$  صفر باشد، توزیع سه پارامتری به توزیع دو پارامتری لگ نرمال تبدیل می‌شود. توزیع سه پارامتری لگ نرمال به وسیله یوان (۱۹۳۳)، کوهن (۱۹۵۱)، هیل (۱۹۶۳)، هارتر و موور (۱۹۶۶)، وینگو (۱۹۸۶) و ... مورد مطالعه قرار گرفته است.

تابع چگالی احتمال گاما با پارامترهای  $\alpha$ ,  $\beta$  و  $\gamma$  به صورت زیر است:

$$F(x, \mu, \sigma, p) = \frac{1}{\gamma \Gamma(\beta)} \left(\frac{x-\alpha}{\gamma}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\gamma}\right)\right], (x \geq \alpha, \beta > 0, \gamma > 0) \quad (9)$$

که در آن  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  به ترتیب پارامترهای مکان، شکل و مقیاس هستند. در صورتی که تابع چگالی احتمال سه پارامتری گاما به صورت اریب منفی باشد در این صورت تابع چگالی احتمال را برای این توزیع می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{\alpha \lambda \Gamma(\lambda-2)} \left[1 - \lambda \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\lambda-2} \exp\left[-\lambda \left\{1 + \lambda \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right], (\sigma > 0, \lambda \neq 0) \quad (10)$$

که در آن  $\gamma = \sigma|\lambda|$ ,  $\alpha = \mu - \sigma\lambda^{-1}$ ,  $\beta = \lambda^{-2}$  می‌باشد. بنابراین پارامترهای  $\mu$ ,  $\sigma$  و  $\lambda$  به ترتیب پارامتر مقیاس، مکان و شکل هستند.

و در نهایت تابع چگالی احتمال توزیع بتای نوع دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$f(y; a, b, a_1, a_2) = \frac{|a|y^{a_1}a_2^{-1}(1-(y/b)^{a_1})^{a_2-1}}{b^{a_1}a_2B(a_1, a_2)} \quad (11)$$

که در آن  $b, a_1, a_2 > 0$  می‌باشد.

برآورد به روش حداکثر درست‌نمایی

داگوم (۱۹۷۷) در یک دوره زمانی وقتی اطلاعات فردی به ندرت در دسترس بودند، به صورت زیر حداقل سازی کرد:

$$\sum_{i=1}^n \{F_n(x_i) - [1 + (x_i/b)^{-a}]^{-p}\}^2 \quad (12)$$

معیار حداقل مربعات غیرخطی در فاصله بین تابع توزیع تجمعی  $F_n$  (CDF) تجربی و CDF تقریب زده شده از توزیع داگوم مبنای قرار گرفت. علاوه بر این نوع رگرسیون برآورد شده با استفاده

از کشش رابطه (۱) به بعد، توسط استوپا (۱۹۹۵) بررسی شد. امروزه اکثر محققان از برآورد حداکثر احتمال (ML) استفاده می‌کنند. دو مورد برجسته، داده‌های گروه‌بندی شده و داده‌های فردی مورد نیاز است. تا همین اواخر، تنها داده‌های گروه‌بندی شده در دسترس بود و احتمال  $L(\theta)$  که در آن  $(a, b, p) =$  یک احتمال چندجمله‌ای است با (فرض داده‌های مستقل):

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^m \{F(x_j) - F(x_{j-1})\}, \quad x_0 = 0, x_m = \infty \quad (13)$$

بنا به ساختار این احتمال همیشه از بالا کراندار است.

در نگاهی به سی‌امین سالگرد کمک‌های داگوم به نظر می‌رسد او دوباره یکی از نمونه‌های اولیه تجربی خود را برای درآمد خانوارهای آمریکایی در سال ۱۹۶۹ به خود اختصاص می‌دهد. نمودار هیستوگرام استخراجی کریستین کلیبر از طریق برآورد تقریبی داگوم نوع یک به وسیله گروه‌بندی حداکثر احتمال را نشان می‌دهد. نتایج برآورد  $\hat{a} = 4/273$ ،  $\hat{b} = 14/48$  و  $\hat{p} = 0/36$  است و این مقادیر سازگار با مقادیر برآورد شده به وسیله داگوم از طریق حداقل مربعات غیر خطی است.

با افزایش ریز داده‌های در دسترس، برآورد احتمال برای مشاهدات فردی توجه بیشتری را جلب می‌کند، و این وضعیت بیشتر مستلزم: لگ احتمال  $l(\theta) = \text{Log } L(\theta)$  یک نمونه کامل تصادفی از اندازه  $n$  هست:

$$l(a, b, p) = n \log a + r \log p + (ap - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - nap \log b - (p + 1) \sum_{i=1}^n \log \{1 + (x_i/b)^a\} \quad (14)$$

بازده معادلات احتمال

$$\frac{n}{a} + p \sum_{i=1}^n \log(x_i/b) = (p + 1) \sum_{i=1}^n \frac{\log(x_i/b)}{1 + (x_i/b)^a} \quad (15)$$

$$np = (p + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (b/x_i)^a} \quad (16)$$

$$\frac{n}{a} + a \sum_{i=1}^n \log(x_i/b) = \sum_{i=1}^n \log \{1 + (x_i/b)^a\} \quad (17)$$

که باید عددی محاسبه شوند.



با این حال، برآورد احتمال این خانواده بدون مشکلات نیست: با توجه به توزیع  $\log X$  توزیع لجستیک تعمیم یافته، شائو<sup>۱</sup> (۲۰۰۲) نشان می‌دهد که ممکن است MLE وجود داشته باشد و اگر نداشته باشد، به اصطلاح مشکل مدل تعبیه شده رخ می‌دهد. اجازه دادن به پارامترهای خاص، که به مقادیر مرزی خود تمایل دارند، یک توزیع با پارامتر جزئی را به وجود می‌آورد. مفاهیمی هستند که رفتار احتمال باید برای آن‌ها به دقت در کار تجربی بررسی شوند. این امر می‌تواند جالب باشد که برای تعیین این که تا چه حد این اشکال، در برنامه‌های کاربردی از داده‌های درآمد که در آن انعطاف پذیری کامل خانواده داگوم مورد نیاز نیست، به وجود می‌آید.

ظاهراً غافل از این مشکلات، دومانسکی و یژیچاک<sup>۲</sup> (۱۹۹۸) یک مطالعه مشابه عملکرد MLE را ارزیابی کردند. به نظر می‌رسد که نمونه نسبتاً بزرگ برای برآورد پارامترهای شکل  $a, p$  مورد نیاز بود، در حالی که برآورد قابل اعتماد از پارامتر مقیاس به نظر می‌رسد نیاز به نمونه‌های حتی بزرگ‌تر دارد.

روش‌های برآورد حداکثر درست‌نمایی برای تابع توزیع سه پارامتری گاما به وسیله جانسون و کوتز (۱۹۷۰)، کوهن و نورگارد (۱۹۷۷)، هارتر و موور (۱۹۶۵)، بوومن و شنتون (۱۹۸۸) و ... بیان شده است. بنابراین برای معادله احتمال گاما داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{1-z_i^2}{1+\lambda z_i} = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda - z_i}{1+\lambda z_i} = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= n \left\{ \frac{2}{\lambda^3} \Psi \left( \frac{1}{\lambda} \right) + 2 \log \lambda \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{2}{\lambda^3} \log(1+\lambda z_i) + \frac{\lambda(1+z_i^2+2z_i)}{\lambda^2(1+\lambda z_i)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن  $z_i = (x_i - \mu)/\sigma$  و  $\psi$  تابع سای است.

اگر  $Y_1 \dots Y_n$  متغیرهای تصادفی از توزیع بتا باشند در این صورت تابع لگاریتم احتمال برای این مشاهدات به صورت زیر خواهد بود:

<sup>1</sup> Shao

<sup>2</sup> Domanski and Jedrzejczak

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_1, \alpha_2, a, b) &= \sum_{i=1}^N \ln L_i(\alpha_1, \alpha_2, a, b) = \sum_{i=1}^N \ln f(Y_i; \alpha_1, \alpha_2, a, b) \\ &= \sum_{i=1}^N \ln \frac{(Y_i - a)^{\alpha_1 - 1} (b - Y_i)^{\alpha_2 - 1}}{(b - a)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} B(\alpha_1, \alpha_2)} \\ &= (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^N \ln(Y_i - a) + (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^N \ln(b - Y_i) \\ &\quad - N \ln B(\alpha_1, \alpha_2) - N(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) \ln(b - a) \end{aligned} \quad (19)$$

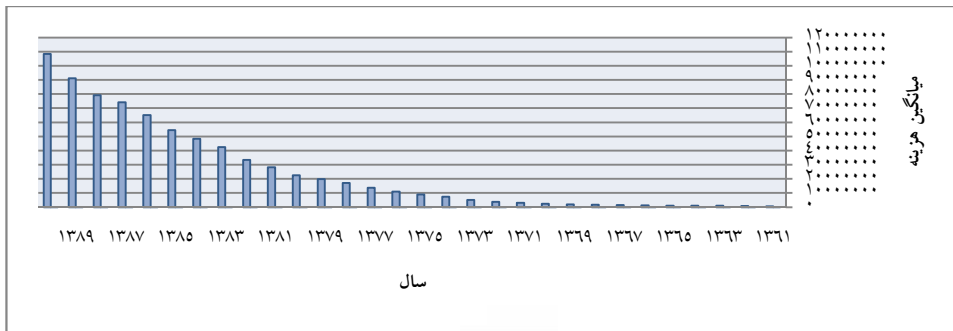
با مشتق‌گیری نسبت به پارامترهای توزیع و برابر صفر قرار دادن این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, a, b|Y)}{\partial \alpha_1} &= \sum_{i=1}^N \ln(Y_i - a) - N(-\Psi(\alpha_1 + \alpha_2) + \Psi(\alpha_1)) - N \ln(b - a) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, a, b|Y)}{\partial \alpha_2} &= \sum_{i=1}^N \ln(b - Y_i) - N(-\Psi(\alpha_1 + \alpha_2) + \Psi(\alpha_2)) - N \ln(b - a) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, a, b|Y)}{\partial a} &= -(\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^N \frac{1}{(Y_i - a)} + N(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) \frac{1}{b - a} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, a, b|Y)}{\partial b} &= -(\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^N \frac{1}{(b - Y_i)} - N(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) \frac{1}{b - a} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

#### ۴. یافته‌های تحقیق

در سال‌های ۱۳۶۱ تا ۱۳۹۰ بررسی هزینه و درآمد خانوارهای ایرانی در شهرهای مختلف و با مراجعه به خانوارهای نمونه‌گیری شده، انجام شده است. در سال ۱۳۹۰، متوسط هزینه ناخالص سالانه یک خانوار ایرانی برابر ۱۰۸۳۴۴۵۹۴ ریال گزارش شده است که نسبت به سال مبدا این پژوهش یعنی سال ۱۳۶۱ (متوسط هزینه ناخالص سالانه یک خانوار ایرانی برای این سال برابر ۶۹۴۴۲۸ ریال است) به میزان ۱۰۷۶۵۰۱۶۶ ریال افزایش داشته است هم‌چنین متوسط تعداد افراد خانوار برای سال ابتدا این تحقیق کاهش ۱/۶۹ نفری نسبت به سال ۱۳۹۰ داشته است. شکل زیر روند حرکت مقادیر متوسط هزینه ناخالص سالانه یک خانوار ایرانی از سال ۱۳۶۱ تا سال ۱۳۹۰ را نشان می‌دهد.

شکل ۱. میانگین هزینه متوسط هر خانوار



در مدل توزیع داگوم مقادیر پارامترهای  $(\alpha, \beta, \delta)$  از روش حداکثر درست‌نمایی با استفاده از زیربرنامه محاسبه‌گر بسته‌ی  $VGAM^1$  در نرم افزار  $R^2$  به دست آمده است.

جدول (۲) برآورد مقادیر  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$  را با استفاده از معادله (۴) برای نمونه‌ای از هزینه خانوار ایرانی برای سال‌های ۱۳۶۱-۱۳۹۰ و با استفاده از معادله پارامتری (۵)، نسبت جینی به روش ماکسیمم درست‌نمایی را نشان می‌دهد.

در جدول (۲) مقادیر مربوط به پارامترها و ضریب جینی برآورد شده که مقادیر مربوط به پارامتر  $\alpha$  بیانگر میزان نابرابری در بین سال‌های مورد مطالعه دارد، که در بین سال‌های ۱۳۶۱ و ۱۳۹۰ کم‌ترین میزان نابرابری مربوط به سال ۱۳۶۱ می‌باشد، همان‌طور که مشاهده می‌شود برای این سال‌ها ضریب جینی نیز به ترتیب کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار را داراست و این حاکی از وجود رابطه مستقیم بین پارامتر  $\alpha$  و ضریب جینی دارد. همچنین مقادیر مربوط به  $\beta$  که نشان دهنده میزان برابری است برای سال ۱۳۶۱ کم‌ترین و برای سال ۱۳۹۰ بیش‌ترین مقدار را داراست بنابراین از برآورد پارامترهای یاد شده مشخص می‌شود که توزیع درآمد در سال ۱۳۶۱ بسیار نابرابرتر از سال ۱۳۹۰ است که این نابرابری تقریباً به میزان ۱۰ درصد در فاصله سال‌های مذکور کاهش داشته است. همچنین مقادیر حاصل از  $\delta\beta$ ، چون از عدد یک بزرگ‌تر هستند  $\delta\beta > 1$ ، پس یک تابع توزیع حاصل تک‌نمایی خواهد بود.

<sup>1</sup> Vector Generalized Linear and Additive Models (VGAM)

<sup>2</sup> بنیان‌گذاران پروژه R آقایان Ross Ihaka و Robert Gentleman بودند. وجه تسمیه این زبان نیز ابتدای نام این دو نفر است.

جدول ۲. برآورد پارامترهای مدل داگوم نوع دوم و ضریب جینی به روش ماکسیمم درست‌نمایی برای

ایران در سال‌های ۱۳۶۱-۱۳۹۰

سال	برآورد پارامترها			نسبت جینی (Gini ratio)	مجموع مربعات خطا (SSE(Pdf))	آماره Kolmogorov-smirnov	
	Alpha	Beta	Delta			P-Value	K-S
۱۳۶۱	۰/۰۵۸۸۱	۰/۵۸۹۵۳	۵/۳۴۶۷۰	۲/۹۶۴۶	۰/۰۶۷	۰/۰۰۴	۰/۹۲۸
۱۳۶۲	۰/۰۵۱۱۹۲	۰/۸۱۴۳۸	۳/۴۹۳۹۹	۲/۸۴۵۴	۰/۱۷۸	۰/۰۳۲	۰/۱۵۹
۱۳۶۳	۰/۰۴۷۹۸	۱/۵۸۷۹۹	۳/۸۲۰۷۳	۶/۰۶۷۲	۰/۲۹۱	۰/۰۰۷	۰/۳۵۶
۱۳۶۴	۰/۰۴۹۳۲	۱/۱۸۳۸۵	۲/۱۹۴۴۱	۲/۵۹۷۸	۰/۰۱۷	۰/۰۰۹	۰/۰۹۸
۱۳۶۵	۰/۰۴۶۳۸	۱/۰۵۸۹۰	۱/۰۸۸۱۶	۱/۱۵۲۲	۰/۳۶۸	۰/۰۶۵	۰/۲۴۱
۱۳۶۶	۰/۰۴۵۶۵	۱/۸۲۸۲۴	۲/۹۳۱۷۱	۵/۳۵۹۸	۰/۱۵۶	۰/۰۱۶	۰/۱۹۸
۱۳۶۷	۰/۰۴۲۴۸	۲/۴۴۲۵۷	۴/۵۴۵۰۶	۱۱/۱۰۱۱	۰/۰۷۹	۰/۰۰۴	۰/۷۸۷
۱۳۶۸	۰/۰۴۶۰۶	۱/۶۸۹۱۳	۲/۵۱۷۳۷	۴/۲۵۲۱	۰/۱۶۹	۰/۰۰۳	۰/۰۸۶
۱۳۶۹	۰/۰۴۳۵۸	۲/۰۲۸۹۵	۱/۱۰۳۰۹	۲/۲۳۸۱	۰/۱۵۴	۰/۰۳۲	۰/۲۵۶
۱۳۷۰	۰/۰۴۱۵۶	۱/۹۲۸۸۵	۲/۱۷۳۲۸	۴/۱۹۱۹	۰/۲۳۴	۰/۰۶۱	۰/۳۱۶
۱۳۷۱	۰/۰۴۰۱۲	۲/۵۰۰۲۹	۳/۸۳۲۰۹	۹/۷۷۲۹	۰/۰۹۸	۰/۰۰۸	۰/۱۴۷
۱۳۷۲	۰/۰۳۹۸۵	۲/۶۱۲۴۰	۴/۵۶۴۱۷	۱۱/۹۲۳	۰/۰۵۴	۰/۰۰۱	۰/۱۵۸
۱۳۷۳	۰/۰۴۳۸۴	۲/۳۱۴۹۸	۱/۰۲۷۵۴	۲/۳۷۸۷	۰/۰۶۶	۰/۰۱۳	۰/۲۷۹
۱۳۷۴	۰/۰۴۷۵۹	۱/۷۴۶۲۳	۱/۴۸۰۰۶	۲/۵۸۴۵	۰/۱۱۹	۰/۰۷۷	۰/۳۵۶
۱۳۷۵	۰/۰۴۱۰۲	۲/۵۹۶۱۲	۴/۹۱۲۸۸	۱۲/۷۵۴۴	۰/۲۵۶	۰/۰۰۲	۰/۷۸۴
۱۳۷۶	۰/۰۴۵۲۳	۲/۰۰۲۸۱	۱/۵۱۰۹۹	۳/۰۲۶۲	۰/۱۹۸	۰/۰۵۶	۰/۹۸۱
۱۳۷۷	۰/۰۴۲۱۸	۲/۴۹۷۱۷	۱/۴۴۰۲۶	۳/۵۹۶۵	۰/۴۱۸۵	۰/۲۲۴	۰/۱۱۲
۱۳۷۸	۰/۰۴۸۵۴	۱/۶۸۲۷۹	۱/۲۳۰۹۲	۲/۰۷۱۳	۰/۴۳۱۲	۰/۱۲۵	۰/۰۷۵
۱۳۷۹	۰/۰۴۱۱۲	۲/۸۶۱۸۰	۴/۲۷۹۰۱	۱۲/۲۴۵	۰/۴۰۱	۰/۰۲۳	۰/۰۶۱
۱۳۸۰	۰/۰۴۳۹۸	۲/۴۵۲۸۳	۱/۴۲۱۴۸	۳/۴۸۶۶	۰/۴۱۴۹	۰/۱۱۴	۰/۸۷۶
۱۳۸۱	۰/۰۴۶۸۷	۱/۸۸۸۴۷	۶/۱۱۹۸۱	۱۱/۵۵۷۸	۰/۴۲۰۸	۰/۰۷۴	۰/۴۸۹
۱۳۸۲	۰/۰۳۹۷۹	۲/۷۳۹۸۱	۰/۸۷۱۸۸	۲/۳۸۸۷	۰/۴۰۶۵	۰/۲۲۳	۰/۳۲۴
۱۳۸۳	۰/۰۴۲۲۶	۲/۶۰۰۲۱	۵/۷۹۰۷۵	۱۵/۰۵۷۷	۰/۴۱۱۳	۰/۱۹۷	۰/۳۰۷
۱۳۸۴	۰/۰۴۰۰۲	۲/۷۷۶۴۲	۲/۲۷۹۶۶	۶/۳۲۹۲	۰/۴۰۸۷	۰/۳۷۵	۰/۰۶۹
۱۳۸۵	۰/۰۴۵۱۲	۲/۴۵۶۴۹	۱/۴۴۰۸۹	۳/۵۳۹۵	۰/۴۱۱۹	۰/۱۹۵	۰/۴۵۱
۱۳۸۶	۰/۰۳۹۷۴	۲/۸۵۴۱۳	۱/۷۲۳۵۴	۴/۹۱۹۲	۰/۴۰۵۷	۰/۱۷۱	۰/۳۷۸
۱۳۸۷	۰/۰۳۸۹۵	۲/۹۰۲۱۶	۳/۶۰۹۲۳	۱۰/۴۷۴۵	۰/۳۹۹۵	۰/۰۲۷	۰/۳۲۰
۱۳۸۸	۰/۰۴۱۲۷	۲/۷۵۴۲۵	۳/۰۹۴۹۶	۸/۵۲۴۲	۰/۴۰۷۳	۰/۰۳۰	۰/۲۲۱
۱۳۸۹	۰/۰۳۸۴۲	۲/۹۷۵۴۴	۲/۶۸۸۹۸	۸/۰۰۰۸	۰/۳۹۴۱	۰/۱۸۸	۰/۱۷۳
۱۳۹۰	۰/۰۳۷۹۹	۳/۰۹۸۵۴	۵/۱۲۰۷۳	۱۵/۸۶۶۸	۰/۳۹۰۷	۰/۱۶۴	۰/۸۷۴

منبع: یافته‌های محقق

بعد از برآورد ضریب جینی و پارامترهای فرم تابعی داگوم به معیارهایی برای تشخیص این که آیا مدل ما یک مدل مناسب برای برازش بوده یا نه، نیاز داریم، برای این منظور از دو آزمون مجموع مربعات خطا (SSE) و آزمون کلموگروف - اسمیرونوف (K-S) استفاده کردیم، در این تحقیق چون مقادیر مربوط به آماره K-S کم تر از آماره SSE است بنابراین آماره K-S یک انتخاب عالی برای تشخیص خوبی برازش برای مدل داگوم می باشد لازم به توضیح است منظور از مجموع مربعات خطا همان رابطه  $SSE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  است که در آن  $y_i$  مقادیر مشاهده شده و  $\hat{y}_i$  مقادیر برآورد شده هستند. هم چنین آزمون کلموگروف - اسمیرونوف برای تطابق توزیع، احتمال های تجمعی مقادیر در مجموعه داده ها را با احتمال های تجمعی همان مقادیر در یک توزیع نظری خاص مقایسه می کند. اگر اختلاف آن به قدر کافی بزرگ باشد، این آزمون نشان خواهد داد که داده ها با یکی از توزیع های نظری مورد نظر تطابق ندارد. در این آزمون اگر معیار تصمیم (P-value) کم تر از ۵ درصد باشد فرض صفر رد می شود یعنی داده ها نمی توانند از یک توزیع خاص باشند همان طور که در جدول (۲) مشاهده می کنیم مقادیر مربوط به این آماره نشان از این دارد که مدل پیشنهادی داگوم در این تحقیق یک برازش گر خوب است.

برای یافتن توزیع مناسب داده های درآمد می بایست چند توزیع که شکلی مشابه توزیع تجربی داده ها دارند به داده ها برازش داده شود و با مقایسه ی آنها توزیع مناسب داده ها را انتخاب کرد. برای این منظور لازم است با استفاده از روش های برآورد پارامترهای توزیع ها، مثل روش ماکسیمم درست نمایی، پارامترهای این توزیع ها را برآورد کرد. در بیش تر توزیع های متداول یا کلاسیک برآوردگر ماکسیمم درست نمایی پارامترها منحصر به فرد بوده و با مشتق گیری معمولی از تابع درست نمایی یا تابع لگاریتم درست نمایی نسبت به پارامترهای مورد نظر به دست می آید. لازم به ذکر است که برآورد پارامترهای خانواده ی توزیع گاما و بتا با استفاده از مشتق گیری معمولی قابل محاسبه نیست و باید با روش های عددی محاسبه شود، که از فرمان optim در نرم افزار R استفاده می کنیم. بنابراین در این پژوهش توزیع داگوم را با چهار توزیع وایبل، بتا، گاما و لگ نرمال مقایسه می کنیم، با توجه به این که پارامترهای مدل داگوم در قسمت اول برآورد شده اند در اینجا ما به برآورد پارامترهای چهار تابع توزیع دیگر با استفاده از روش حداکثر درست نمایی می پردازیم، سپس برای مقایسه پنج تابع توزیع با یکدیگر از معیار آکائیک استفاده می کنیم.

جدول ۳. برآورد پارامترهای مدل‌های مختلف از روش حداکثر درست‌نمایی

توزیع پارامتر	توزیع بتا				توزیع گاما				توزیع لگ نرمال				توزیع وایبل	
	b	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\lambda$	$\mu$	$\sigma$	$\tau$	$\theta$	$\phi$	$\psi$	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
۱۳۶۱	۱/۲۰	۰/۰۱	۱/۱۰	۱/۴۰	۱/۱۰	۱/۴۰	۰/۰۱	۰/۸۰	۰/۱۲	-۰/۰۶	۱/۴۰	۱/۵۰		
۱۳۶۲	۱/۰۱	۰/۰۳	۱/۴۱	۱/۸۱	۰/۷۳	۱/۷۲	۰/۰۳	۰/۷۱	۰/۰۱	-۰/۰۳	۱/۷۱	۱/۴۱		
۱۳۶۳	۱/۹۰	۰/۰۹	۲/۷۰	۱/۷۰	۰/۶۴	۱/۹۱	۰/۰۸	۰/۶۳	۰/۰۸	-۰/۰۷	۱/۴۳	۱/۸۰		
۱۳۶۴	۱/۳۰	۰/۰۴	۲/۰۱	۱/۸۳	۰/۷۲	۱/۷۳	۰/۰۵	۰/۶۷	۰/۰۸	-۰/۰۸	۱/۷۲	۱/۴۱		
۱۳۶۵	۱/۲۰	۰/۰۱	۲/۱۰	۲/۰۱	۰/۵۶	۲/۰۰	۰/۱۲	۰/۵۹	۰/۰۷	-۰/۰۸	۱/۹۰	۱/۳۰		
۱۳۶۶	۱/۱۰	۰/۰۴	۱/۷۰	۱/۸۴	۰/۷۱	۱/۸۰	۰/۰۴	۰/۶۸	۰/۰۴	-۰/۰۴	۱/۷۱	۱/۴۳		
۱۳۶۷	۱/۷۰	۰/۰۳	۲/۴۰	۱/۸۰	۰/۷۹	۱/۶۰	۰/۰۳	۰/۷۱	۰/۰۵	-۰/۰۵	۱/۶۰	۱/۴۱		
۱۳۶۸	۱/۶۰	۰/۱۳	۲/۳۰	۱/۸۷	۰/۸۹	۱/۵۷	۰/۰۱	۰/۷۵	۰/۰۳	۰/۰۲	۱/۷۵	۱/۵۰		
۱۳۶۹	۱/۴۰	۰/۰۵	۲/۲۰	۱/۹۲	۰/۶۶	۱/۹۱	۰/۰۶	۰/۶۳	۰/۱۲	۰/۰۹	۱/۸۱	۱/۴۰		
۱۳۷۰	۸/۹۰	۰/۱۲	۱/۶۰	۲/۰۱	۰/۵۳	۲/۱۰	۰/۱۱	۰/۶۳	۰/۰۳	۰/۰۲	۲/۰۱	۱/۳۱		
۱۳۷۱	۱/۲۰	۰/۰۹	۱/۹۰	۱/۹۰	۰/۵۷	۲/۰۱	۰/۰۸	۰/۵۹	۰/۱۰	-۰/۰۱	۱/۹۰	۱/۳۲		
۱۳۷۲	۱/۱۰	۰/۱۱	۱/۲۰	۲/۰۱	۰/۸۸	۲/۱۳	۰/۱۱	۰/۶۳	۰/۰۵	۰/۰۵	۲/۱۰	۱/۹۰		
۱۳۷۳	۳/۵۰	۰/۰۶	۳/۴۰	۱/۴۴	۰/۹۷	۱/۵۲	۰/۰۶	۰/۷۷	۰/۱۲	-۰/۰۱	۱/۶۰	۱/۶۴		
۱۳۷۴	۷/۲۰	۰/۰۳	۱/۲۰	۲/۲۰	۰/۵۵	۲/۳۰	۰/۰۲	۰/۵۸	۰/۲۰	-۰/۱۴	۱/۸۰	۱/۴۰		
۱۳۷۵	۱/۴۰	۰/۰۷	۱/۱۰	۱/۳۱	۱/۲۰	۱/۴۴	۰/۰۷	۰/۶۸	۰/۱۸	-۰/۰۳	۱/۵۰	۱/۷۰		
۱۳۷۶	۱/۳۰	۰/۰۹	۱/۸۰	۱/۸۰	۰/۷۴	۱/۷۶	۰/۰۹	۰/۷۱	۰/۰۵	۰/۰۱	۱/۸۲	۱/۵۲		
۱۳۷۷	۱/۴۰	۰/۰۶	۲/۳۰	۲/۰۰	۰/۶۴	۱/۹۲	۰/۰۶	۰/۶۴	۰/۰۶	-۰/۰۶	۱/۸۵	۱/۴۰		
۱۳۷۸	۱/۱۰	۰/۰۷	۱/۵۰	۱/۹۳	۰/۷۵	۱/۸۷	۰/۰۷	۰/۶۵	۰/۱۸	-۰/۰۸	۱/۷۴	۱/۵۳		
۱۳۷۹	۴/۸۰	۰/۰۶	۷/۹	۱/۲۰	۰/۵۹	۲/۲۰	۰/۰۶	۰/۵۸	۰/۲۲	-۰/۱۲	۱/۹	۱/۵۰		
۱۳۸۰	۱/۳۰	۰/۱۱	۲/۲۰	۲/۰	۰/۷۲	۱/۷۰	۰/۱۲	۰/۶۶	۰/۱۰	-۰/۰۴	۱/۸۰	۱/۵۰		
۱۳۸۱	۵/۶۰	۰/۰۸	۱/۹۰	۲/۰۲	۰/۵۹	۲/۰۰	۰/۰۷	۰/۵۸	۰/۱۸	-۰/۱۴	۱/۸۶	۱/۴۱		
۱۳۸۲	۶/۴۰	۰/۰۶	۱/۲۰	۲/۴۰	۰/۵۴	۲/۴	۰/۰۶	۰/۵۹	۰/۱۸۲	-۰/۰۷	۲/۰۰	۱/۴۹		
۱۳۸۳	۱/۳۰	۰/۱۳	۲/۴	۲/۲۰	۰/۶۱	۲/۰۳	۰/۱۴	۰/۶۲	۰/۱۱	-۰/۰۱	۲/۰۳	۱/۵۰		
۱۳۸۴	۱/۱۰	۰/۰۴	۱/۷۰	۲/۰۵	۰/۵۷	۲/۳	۰/۰۳	۰/۵۸	۰/۱۹	-۰/۱۲	۱/۹۰	۱/۴۰		
۱۳۸۵	۱/۲۰	۰/۰۷	۱/۷۰	۲/۰۴	۰/۷۱	۱/۹	۰/۰۷	۰/۶۶	۰/۱۵	-۰/۰۲	۱/۹۳	۱/۵۲		
۱۳۸۶	۱/۳۰	۰/۰۵	۲/۴۰	۲/۴۱	۰/۵۹	۲/۲۰	۰/۰۶	۰/۵۹	۰/۲۱	-۱/۰	۱/۹۰	۱/۵۵		
۱۳۸۷	۱/۳۳	۰/۱۲	۱/۰۳	۱/۹۰	۰/۶۳	۲/۰۴	۰/۱۲	۰/۶۰	۰/۱۷	-۰/۰۴	۲/۰۱	۱/۵۰		
۱۳۸۸	۸/۴۰	۰/۰۸	۱/۳۰	۲/۰۱	۰/۶۱	۲/۱۰	۰/۰۸	۰/۶۱	۰/۱۵	-۰/۰۵	۲/۹۶	۱/۵۰		
۱۳۸۹	۱/۱۰	۰/۱۷	۱/۶۰	۱/۸۰	۰/۶۳	۱/۹۰	۰/۱۷	۰/۶۳	۰/۰۷	-۰/۰۱	۲/۰۲	۱/۴۲		
۱۳۹۰	۷/۷۰	۰/۰۹	۱/۹۰	۲/۷۰	۰/۳۹	۲/۸۰	۰/۰۹	۰/۵۲	۰/۰۹	-۰/۰۷	۲/۲۰	۱/۳۰		

منبع: یافته‌های محقق

جدول ۴. مقایسه برازش مدل‌ها

$\overline{W} = (G, B)$		$\overline{LN} = (G, Y)$		$\overline{G} = (G, B, Y)$		$\overline{B} = (G, G, G, B)$		$\overline{D} = (G, B, S)$		توزیع
AIC	LLK	AIC	LLK	AIC	LLK	AIC	LLK	AIC	LLK*	سال
۱۰۵/۸	-۵۲/۸۰	۱۰۵/۵۴	-۵۲/۷۷	۱۰۵/۶۵	-۵۲/۷۸	۱۰۵/۶۳	-۵۲/۷۷	۱۰۵/۳۴	-۵۲/۶۰	۱۳۶۱
۱۳۷/۵	-۶۸/۷۹	۱۳۷/۴	-۶۸/۷۰	۱۳۷/۲۸	-۶۸/۱۴	۱۳۵/۶	-۶۷/۸۰	۱۳۴/۶۴	-۶۷/۳۲	۱۳۶۲
۱۴۴/۷	-۷۲/۳۷	۱۴۵/۰۸	-۷۲/۵۴	۱۴۴/۲۲	-۷۲/۱۱	۱۴۳/۹۶	-۷۱/۹۸	۱۴۳/۳۲	-۷۱/۶۰	۱۳۶۳
۱۷۷/۸	-۸۸/۹۰	۱۷۷/۱	-۸۸/۵۵	۱۷۷/۴۶	-۸۸/۳	۱۷۷/۳۴	-۸۸/۶۷	۱۸۳/۰۴	-۸۸/۴۱	۱۳۶۴
۱۸۹/۴	-۹۴/۷۰	۱۸۷/۶	-۹۳/۸۰	۱۸۸/۳۸	-۹۴/۱۹	۱۸۶/۷۸	-۹۳/۳۹	۱۸۶/۴۴	-۹۳/۲۰	۱۳۶۵
۱۹۸/۵	-۹۹/۲۸	۱۹۷/۳۶	-۹۸/۶۸	۱۹۸/۱۴	-۹۹/۰۷	۱۹۷/۰۲	-۹۸/۵۱	۱۹۶/۲۲	-۹۸/۱۰	۱۳۶۶
۲۰۶/۰	-۱۰۳/۴۵	۲۰۸/۱۶	-۱۰۴/۰۸	۲۰۸/۴۲	-۱۰۴/۲۱	۲۰۴/۹۸	-۱۰۳/۴۹	۲۰۴/۴۲	-۱۰۳/۲۱	۱۳۶۷
۲۲۱/۶	-۱۱۰/۸۲	۲۲۰/۴	-۱۱۰/۲۰	۲۲۰/۸۶	-۱۱۰/۴۳	۲۱۹/۹۴	-۱۰۹/۹۷	۲۱۹/۲۸	-۱۰۹/۶۴	۱۳۶۸
۲۴۰/۴	-۱۲۰/۲۴	۲۳۹/۶۶	-۱۱۹/۸۳	۲۳۹/۱	-۱۱۹/۵۵	۲۳۸/۱۲	-۱۱۹/۰۶	۲۳۷/۴	-۱۱۸/۷۰	۱۳۶۹
۲۵۷/۴	-۱۲۸/۷۰	۲۵۶/۹	-۱۲۸/۴۵	۲۵۶/۰۸	-۱۲۸/۰۴	۲۵۵/۹	-۱۲۷/۹۵	۲۵۴/۶۸	-۱۲۷/۳۴	۱۳۷۰
۲۷۰/۳	-۱۳۵/۱۹	۲۷۰/۱۸	-۱۳۵/۰۹	۲۷۱/۳۴	-۱۳۵/۶۷	۲۶۹/۶۶	-۱۳۴/۸۳	۲۶۹/۲	-۱۳۴/۶۰	۱۳۷۱
۲۸۷/۳	-۱۴۳/۶۶	۲۷۶/۷۶	-۱۴۳/۳۸	۲۸۶/۹	-۱۴۳/۴۵	۲۸۵/۹۸	-۱۴۲/۹۹	۲۸۵/۶۲	-۱۴۲/۸۱	۱۳۷۲
۳۰۶/۱	-۱۵۳/۰۷	۳۰۵/۳	-۱۵۲/۶۵	۳۰۴/۴۶	-۱۵۲/۲۳	۳۰۳/۶	-۱۵۱/۸۰	۳۰۲/۶۴	-۱۵۲/۳۲	۱۳۷۳
۳۳۵/۷	-۱۶۷/۸۶	۳۳۴/۸۸	-۱۶۷/۴۴	۳۳۴/۴۸	-۱۶۷/۲۴	۳۳۳/۴۴	-۱۶۶/۷۲	۳۳۲/۸۲	-۱۶۶/۴۱	۱۳۷۴
۳۵۸/۰	-۱۷۹/۰۳	۳۵۷/۵۴	-۱۷۸/۷۷	۳۵۷/۶	-۱۷۸/۸۰	۳۵۷/۳۸	-۱۷۷/۶۹	۳۵۷/۳	-۱۷۷/۶۵	۱۳۷۵
۳۷۹/۱	-۱۸۹/۵۵	۳۷۹/۸۲	-۱۸۹/۹۱	۳۸۰/۱۴	-۱۹۰/۰۷	۳۷۹/۵	-۱۸۹/۷۵	۳۷۸/۴۸	-۱۸۹/۲۴	۱۳۷۶
۳۹۷/۵	-۱۹۷/۷۶	۳۹۷/۱	-۱۹۸/۵۵	۳۹۰/۶۸	-۱۹۸/۸۴	۳۹۶/۱۶	-۱۹۸/۰۸	۳۹۵/۴۶	-۱۹۷/۸۳	۱۳۷۷
۴۱۸/۲	-۲۰۹/۱۱	۴۱۷/۵۸	-۲۰۸/۷۹	۴۱۸/۱۶	-۲۰۹/۰۸	۴۱۷/۲۲	-۲۰۸/۶۱	۴۱۶/۴۴	-۲۰۸/۲۲	۱۳۷۸
۴۴۴/۰	-۲۲۲/۰۴	۴۴۳/۹۴	-۲۲۱/۹۷	۴۴۵/۴۸	-۲۲۲/۷۴	۴۴۳/۷۲	-۲۲۱/۸۶	۴۴۲/۶۸	-۲۲۱/۳۴	۱۳۷۹
۴۷۶/۹	-۲۳۸/۴۷	۴۷۶/۱۸	-۲۳۸/۰۹	۴۷۶/۸۴	-۲۳۸/۴۲	۴۷۵/۷۶	-۲۳۷/۸۸	۴۷۵/۳	-۲۳۷/۶۵	۱۳۸۰
۵۸۹/۵	-۲۴۴/۷۵	۴۸۹/۰۲	-۲۴۴/۵۱	۴۸۹/۷۴	-۲۴۴/۸۷	۴۸۹/۱۲	-۲۴۴/۵۶	۴۸۸/۶۲	-۲۴۴/۳۱	۱۳۸۱
۵۱۹/۳	-۲۵۹/۶۶	۵۱۸/۸۴	-۲۵۹/۴۲	۵۱۹/۴۸	-۲۵۹/۷۴	۵۱۸/۲۲	-۲۵۹/۱۱	۵۱۷/۸۲	-۲۵۸/۹۱	۱۳۸۲
۵۴۸/۰	-۲۷۴/۰۱	۵۴۷	-۲۷۳/۵۰	۵۴۷/۸۶	-۲۷۳/۸۸	۵۴۶/۴	-۲۷۳/۲۰	۵۴۶/۲۴	-۲۷۳/۱۲	۱۳۸۳
۵۸۱/۰	-۲۹۹/۵۳	۵۸۰/۲۴	-۲۹۹/۱۲	۵۸۰/۵۴	-۲۹۹/۲۷	۵۷۹/۶۲	-۲۸۹/۸۱	۵۷۹/۵	-۲۸۹/۷۵	۱۳۸۴
۶۱۶/۲	-۳۰۷/۱۰	۶۱۵/۶۴	-۳۰۷/۸۲	۶۱۵/۸۸	-۳۰۷/۹۴	۶۱۵/۷	-۳۰۷/۸۵	۶۱۴/۸۸	-۳۰۷/۴۴	۱۳۸۵
۶۳۵/۲	-۳۱۷/۶۱	۶۳۴/۱۶	-۳۱۷/۰۸	۶۳۴/۴۶	-۳۱۷/۲۳	۶۳۳/۵۸	-۳۱۶/۷۹	۶۳۶/۰۴	-۳۱۶/۵۲	۱۳۸۶
۶۵۸/۱	-۳۲۹/۰۶	۶۲۷/۶۸	-۳۲۸/۸۴	۶۵۸/۲۶	-۳۲۹/۱۳	۶۵۷/۱۴	-۳۲۸/۵۷	۶۵۶/۴۴	-۳۲۸/۲۲	۱۳۸۷
۶۸۵/۱	-۳۴۲/۵۵	۶۸۴/۲۴	-۳۴۲/۱۲	۶۸۴/۵۶	-۳۴۲/۲۸	۶۸۳/۶۴	-۳۴۱/۸۲	۶۸۲/۷۴	-۳۴۱/۳۷	۱۳۸۸
۷۳۶/۳	-۳۶۷/۱۹	۷۳۶/۵۴	-۳۶۷/۲۷	۷۳۶/۱۸	-۳۶۷/۰۹	۷۳۵/۵۴	-۳۶۷/۷۷	۷۳۴/۸۲	-۳۶۷/۴۱	۱۳۸۹
۷۷۳/۵	-۳۸۶/۷۵	۷۷۳/۱۸	-۳۸۶/۵۹	۷۷۳/۴۲	-۳۸۶/۷۱	۷۷۲/۰۴	-۳۸۶/۰۲	۷۷۱/۴۴	-۳۸۵/۷۲	۱۳۹۰

منبع: یافته‌های محقق. \* منظور از LLK همان loglikelihood است.

جدول (۴) شامل مقادیر توابع احتمال لگاریتمی (عنوان loglikelihood در جدول (۴) برای تمام سال‌ها و تمام توزیع‌های مورد بررسی همراه با ارزش آمار معیار آکائیک (AIC) که به صورت زیر تعریف شده است:

$$(\text{مقدار LLK}) * 2 - (\text{تعداد پارامترها}) * 2 = \text{معیار آکائیک (AIC)}$$

با توجه به جدول برازش مدل‌ها مشاهده می‌شود که تمامی مقادیر AIC تقریباً مشابه هستند ولی ارزش تابع توزیع داگوم در تمام سال‌های مورد تجزیه و تحلیل، کمتر از بقیه توابع توزیع است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تابع توزیع داگوم به عنوان بهترین برازش‌گر در بین توابع مختلف توزیع برای ایران است.

می‌توان به این نتیجه دست یافت که تابع توزیع داگوم برای همه سال‌های مورد بررسی مقدار بزرگ‌تری از تابع چگالی احتمال را نسبت به توابع توزیع بتا، گاما، لگ نرمال و وایبل نشان می‌دهد بنابراین این موضوع که مدل داگوم مقدار بزرگ‌تری برای ضریب جینی در همه سال‌ها نسبت به سایر مدل‌ها نشان می‌دهد با استفاده از این نتایج مورد تایید قرار می‌گیرد، هم‌چنین همان طور که از شکل‌های بالا قابل مشاهده است هم‌چنین نتایج نشان داد که نابرابری درآمدی در سال ۱۳۶۱ به مراتب بیش‌تر از سال ۱۳۹۰ بوده است. بنابراین تابع چگالی احتمال داگوم برای همه سال‌ها بالاتر از تابع چگالی احتمال بتا، گاما، لگ نرمال و وایبل است.

##### ۵. نتیجه‌گیری

با توجه به این که آمار یکی از مهم‌ترین علوم کاربردی است که با سایر رشته‌های علمی از جمله اقتصاد مرتبط می‌باشد. از این رو، در سال‌های اخیر، علاقه زیادی برای تحقیقات در زمینه مدل‌های پارامتری توزیع درآمد به وجود آمده است. مدل‌های احتمال مربوط به توزیع درآمد، برای ارزیابی استانداردهای سطح زندگی کل مردم یک کشور و هم‌چنین برای مقایسه استاندارد سطح زندگی طبقات اجتماعی و یا مناطق مختلف یک کشور ارائه شده‌اند. بنابراین برای ایجاد یک مدل احتمال ارائه یک تابع توزیع نظری با مشخصه توزیع فراوانی تجربی برای انتخاب روش مناسب تخمین پارامترهای مدل، ضروری است. بنابراین تجزیه و تحلیل آماری توزیع درآمد جمعیت نشان دهنده زمینه لازم برای تصمیم‌گیری در مورد بودجه و سیاست‌های اجتماعی است (باستوروف ۲۰۰۶) با



توجه به این موارد مدل پیشنهاد شده داگوم بسیاری از خواص مربوط به توزیع درآمد همانند خصوصیات رفتاری مدل در چارچوب اقتصادی، هم‌گرایی به قانون پارتو و اهمیت اقتصادی پارامترها، را برآورد می‌کند. (لاتوره ۱۹۸۹) از این مدل هم چنین برای تشریح توزیع اندازه مشارکت در کسب و کار نیز به صورت کاملاً موفق استفاده شده است. مدل داگوم موفقیت‌های زیادی را در مطالعات انجام شده بر روی توزیع درآمد و دستمزد و هم‌چنین توزیع ثروت به دست آورده است که مشخصات و ویژگی‌های این مدل به طور گسترده‌ای توسط نویسندگان مختلف تجزیه و تحلیل شده است. (کلیر و کوتز ۲۰۰۳). بنابراین در دنیای برابری کامل، هر یک درصد افزایش در جمعیت انباشته، سبب افزایش یک درصد درآمد انباشته می‌شود. تجزیه و تحلیل نظری و تجربی بر روی توزیع درآمد نشان داده‌اند که نرخ رشد درآمد حاصل از درآمد تجمعی سریع‌تر از نرخ رشد جمعیت دریافت‌کننده درآمد افزایش می‌یابند. و این بدان معناست که کشش درآمد تجمعی کاهش می‌یابد (داگوم ۱۹۹۰).

هدف از این پژوهش تحلیل نابرابری درآمد برای ایران به روش پارامتریک با استفاده از مدل داگوم و مقایسه تابع توزیع داگوم با توابع توزیعی چون بتا، گاما، لگ نرمال، و وایبل بود. نتایج حاصل از این پژوهش بر اساس برآورد ضریب جینی و پارامترهای توابع توزیع با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی در بین سال‌های ۱۳۶۱ تا ۱۳۹۰ نشان دادند که نابرابری درآمدی در ایران در بین سال‌های ۱۳۶۱ و ۱۳۹۰ در حال نوسان بوده است. در یک نتیجه‌گیری کلی از مقادیر ضریب جینی در کشور نتیجه گرفته می‌شود که در دوره‌ی ۱۳۶۱-۱۳۹۰ با وجود فراز و نشیب‌های مقادیر این شاخص در میان خانوارهای کشور، میزان ضریب جینی روندی کاهنده داشته یعنی در واقع شدت نسبی نابرابری درآمد در کشور کاهنده، ولی میزان کاهش آن بسیار محدود بود. هم‌چنین براساس معیار اطلاعات آکائیک و هم‌چنین نمودارهای حاصل از توابع چگالی احتمال مشخص شد که تابع توزیع داگوم یک برازش‌گر خوب است. مقادیر برآورد شده پارامترهای بتا و دلتا در طول این سال‌ها روند صعودی و پارامتر آلفا روند نزولی دارد.

### منابع

- ابونوری، اسمعیل، خوشکار، آرش، حیدری، حسین (۱۳۸۵). بررسی تحولات توزیع درآمد در شهرستان بندر لنگه طی برنامه سوم توسعه اقتصادی- اجتماعی. مجموعه مقالات اولین همایش توسعه شهرستان بندر لنگه قابلیت و راهکارها، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندر لنگه.
- بختیاری، صادق، نصراللهی، خدیجه، عمادزاده، مصطفی (۱۳۸۰). تحلیلی از وضعیت توزیع درآمد (هزینه) در استان اصفهان (۷۲-۱۳۶۸). برنامه و بودجه، ۶ (۹ و ۱۰): ۸۱-۵۱.
- خسروی‌نژاد، علی اکبر (۱۳۹۱). برآورد فقر و شاخص‌های فقر در مناطق شهری و روستایی، فصلنامه مدل‌سازی اقتصادی، ۶ (۲): ۳۹-۶۰.
- هژبرکیانی، کامبیز، مرادی، علیرضا (۱۳۸۷). نرم افزار R: محیط برنامه‌نویسی برای تحلیل‌های اقتصادسنجی و سری‌های زمانی، فصلنامه مدل‌سازی اقتصادی، ۲ (۵): ۱۶۳-۱۸۶.
- Abounoori, E. (1987). Mathematico-statistical analysis of distribution of income and effect of oil on economic inequality within OPEC countries.
- Bartosova, J. (2006). Logarithmic-normal model of household income distribution in the Czech Republic after 1990. Forum statisticum slovacum, Slovak Statistical and Demographical Society, Bratislava, 3: 3-10.
- Chotikapanich, D. W. E., & Griffiths, D. S. P., & Valencia V. (2010). Global income distributions and inequality, 1993 and 2000: Incorporating country-level inequality modeled with beta distributions. Forthcoming in the review of economics and statistics.
- Cohen, A. (1951). Estimating parameters of logarithmic normal distributions by maximum likelihood, *Journal of the American Statistical Association*, 46: 206-212..
- Dagum, C. (1983). Income distribution models, in S. Kotz, N. L. Johnson and C. Read (eds.) *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 4, JohnWiley, New York.
- Dagum, C. (1990). Generation and properties of income distribution functions. In C. Dagum and Zenga, Eds. *Income and wealth distribution, inequality and poverty*, Heildeberg, Springer Verlag.
- Dancelli, L. (1986). Tendenza alla massima ed alla minima concentrazione nel modelo di distribuzione del reddito di Dagum. *In Scritti in Honore di Francesco Brambilla*, 1: 249-267.
- Domanski, C., & Jedrzejczak, A. (1998). Maximum likelihood estimation of the dagum model parameters. *International Advances in Economic Research*, 4: 243-252.
- Fisk, P. R. (1961). The graduation of income distributions. *Econometrica*, 29:171-185.

- Gertel, H. R., & Giuliadori, R. F., & Rodríguez, A., & Paula F. A. (2001). Unemployment and income distribution analysis: New evidences using a agum Parametric income distribution model, facultad de ciencias económicas, reunión annual de la aaep, buenos aires.
- Gibrat, R. (1931). Les inegalites économiques, Paris, librairie du recueil sirey.
- Harter, H.L., & Moore, A.L. (1966). Local-maximum-likelihood estimation of the parameter of three-parameter lognormal population from complete and censored samples, *Journal of the American Statistical Society*, 61: 842—851.
- Hill, M.B. (1963). The three-parameter log-normal distribution and bayesian analysis of a point-source epidemic. *Journal of the American Statistical Association*, 58: 112-120.
- Kleiber, C. & Kotz, S. (2003). Statistical size distribution in economics and actuarial sciences, London: Cambridge University Press.
- Kotz, S., & Johnson, N. L., & Read, C. (1983). Encyclopedia of statistical sciences, John Wiley, New York.
- Latorre, G. (1989). Asymptotic distributions of indices of concentration: Empirical erification and application, in: Studies in contemporary economics. income and wealth istribution, inequality and poverty, C. Dagum, M. Zenga (Eds), Springer-Verlag, Berlin.
- Latorre, G. (1988). Propriet`a campionarie del modello di dagum per la distribuzione dei redditi, *Statistica*, 48: 15–27.
- Majumder, A., & Chakravarty, S. R. (1990). Distribution of personal income: Development of a New Model and Its Application to US Income Data. *Journal of Applied Econometrics*, 5: 189–196.
- Pareto, V. (1895). La legge Della domanda, giornale degli economisti, 10: 59-68. English translation in rivista di politica economica, 87: 691–700.
- Pareto, V. (1897) Cour's d'Economie Politique, Rouge, Lausanne.
- Shao, Q. (2002). Maximum likelihood estimation for generalised logistic distributions, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 31:1687–1700.
- Stoppa, G. (1995) Explicit Estimators for income distributions, in c. dagum and a. lemmi (eds.) research on economic inequality, 6: Income Distribution, Social Welfare, Inequality and Poverty, Greenwich, CT: JAI Press.
- Thurow, L. C. (1970). Analyzing the American income distribution. *American Economic Review*, 48: 261-269.
- Wingo, D. R. (1984). Fitting Three-parameter log-normal models by numerical global optimization – an improved algorithm, *Computation Statistical Data Analysis*.

- Yuan, P. (1933). On the logarithmic frequency distribution and semi-logarithmic correlation surface, *annals of mathematical statistics*.
- Zelterman, D. (1987). Parameter estimation in the generalized logistic distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, 5: 177–184.

Archive of SID