

روش رهایی پویا برای پیمایش مسیر ایستایی سازه‌های خرابی

محمد رضایی پژند^{۱*} و جواد علامتیان^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: اسفند ۱۳۸۷ پذیرش مقاله: تیر ۱۳۸۸	یکی از روش‌های ارزیابی رفتار سازه‌های غیرخطی، بررسی نمودار بار-تغییر مکان آن‌ها می‌باشد. این نمودار دو بخش دارد. در نخستین قسمت، سختی هندسی سازه مثبت است و سازه در برابر بارها مقاومت می‌کند. در بخش دوم، با منفی شدن سختی هندسی، ظرفیت باربری سازه به شدت کاهش می‌یابد و سبب بازگشت بار و تغییر مکان خواهد شد. مرز بین این دو بخش با نقطه‌های حدی مشخص می‌شوند. در این مقاله، روش رهایی پویا برای به دست آوردن ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییر مکان سازه‌ها به کار می‌رود. چون فن رهایی پویای متداول توانایی پیمایش چنین ناحیه‌هایی را ندارد، رابطه‌سازی‌های نوینی پیشنهاد می‌شود. این رابطه‌سازی‌ها بر کمینه‌کردن نیروی نامیزان و تغییر مکان نامیزان موجود در تکرارهای رهایی پویا استوار می‌باشند. فرایندهای پیشنهادی برای پیمایش ناحیه‌های بازگشتی خودکار است و سازگاری مناسبی با روش رهایی پویا دارند. با استفاده از این رابطه‌سازی‌ها، چند سازه‌ی خرابی تحلیل می‌شوند. این خرابی‌ها دارای رفتار غیرخطی هندسی (تغییر شکل‌های بزرگ) در محدوده کشسانی می‌باشند. نتیجه‌های عددی نشان می‌دهند، فرایندهای پیشنهادی کارایی روش رهایی پویا را افزایش می‌دهند به گونه‌ای که می‌توان با این روش ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییر مکان سازه‌های غیرخطی را به دست آورد.
واژگان کلیدی: روش رهایی پویا بازگشت بار و تغییر مکان نیروی نامیزان تغییر مکان نامیزان تغییر شکل‌های بزرگ	

۱- مقدمه

تکرارهای رهایی پویا، با بهره جستن از روش‌های عددی دینامیک سازه‌ها هموار کردند. برو و برتن رابطه‌های روش رهایی پویا را با کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی تعادل دینامیکی به یک، به دست آوردند و بانوشتن شرط‌های پایداری عددی برای جرم و میرایی، آن را در مسأله‌های خطی و غیرخطی قاب‌ها به کار بردند [۲]. همزمان، وود نشان داد نرخ همگرایی روش رهایی پویا در مسأله‌های خطی بیشتر از راهکارهای نیمه تکراری است [۳]. افزون بر این‌ها، بونس میرایی بحرانی را در تکرارهای رهایی پویا تخمین زد [۴].

روش رهایی پویا، فرایند تکراری حل دستگاه معادله‌های همزمان می‌باشد. این روش از قانون دوم ریچاردسون به دست می‌آید. فرانکل روش مزبور را گسترش داد و آن را در مسأله‌های انتقال حرارت به کاربرد [۱]. ولش و کسل با معرفی نگره‌ی جرم ساختگی، راه را برای بهبود

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mrpajand@yahoo.com

۱. استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه عمران
۲. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، گروه عمران

روش گام زمانی از کمینه کردن نیروی نامیزان سازه حساب می‌شود [۲۲]. همچنین، روش رهایی پویا در تحلیل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها به کار رفته است [۲۳ و ۲۴]. این کار سبب کاهش خطاهای تحلیل دینامیکی می‌گردد. در آخرین پژوهش‌ها، رابطه‌های نوینی برای جرم و میرایی روش رهایی پویا پیشنهاد شده است [۲۵].

آن گونه که پیش از این اشاره شد، روش رهایی یک فرایند تکراری است. بار خارجی در تکرارهای همگرایی ثابت در نظر گرفته می‌شود. در تحلیل‌های نموی، یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌گردد و در هنگام اجرای تکرارهای رهایی پویا، مقدار بار ثابت نگه داشته می‌شود. پس از همگرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌گردد و فرایند مزبور تا کامل شدن تمام بار خارجی تکرار می‌شود. به سخن دیگر، رابطه‌سازی روش رهایی پویا با فرض ثابت بودن بار خارجی انجام می‌پذیرد و در تکرارهای رهایی پویا، بار خارجی سازه تغییر نمی‌کند. این ویژگی سبب می‌شود نتوان روش رهایی پویا را در پاره‌ای مسأله‌های غیرخطی که دارای ناحیه‌های بازگشتی بار یا تغییرمکان می‌باشند، به کار برد. در نتیجه، با رابطه‌سازی‌های متداول رهایی پویا، امکان پیمایش ناحیه‌های بازگشتی وجود ندارد. در این مقاله، با انجام رابطه سازی‌های نوین، این کاستی برطرف می‌شود. روش‌های پیشنهادی برپایه‌ی دو شرط کمینه کردن نیروی نامیزان یا کمینه کردن تغییرمکان نامیزان استوار می‌باشند. همچنین، کارایی راه کارهای پیشنهادی با تحلیل سازه‌های خرابایی که دارای رفتار غیرخطی هندسی در محدوده کشسان می‌باشند، بررسی می‌شود.

۲- رابطه‌سازی روش رهایی پویا

دستگاه معادله‌های ایستایی در روش رهایی پویا به فضای دینامیکی ساختگی منتقل می‌شود. این کار، با افزودن

نخستین تحلیل خطا در روش رهایی پویا را پادراکاکیس انجام داد. وی شیوه‌ای خودکار برای تعیین کمیت‌های ساختگی پیشنهاد کرد [۵]. با وجود این، متداول‌ترین رابطه‌سازی صریح رهایی پویا را آندروود پیشنهاد کرد [۶]. گونه‌ی دیگر رابطه‌سازی رهایی پویا را فلیپا انجام داد. این راهکار در دسته‌بندی روش‌های ضمنی جا دارد و کمیت‌های جرم و میرایی، از تغییر سختی سازه در زمان ساختگی حساب می‌شوند [۷]. در ادامه، زینکوئیز یک راهکار شتاب‌دهنده‌ی همگرایی پیشنهاد کرد [۸]. شاولی و ماردیسون نیز با وزن‌دار کردن جرم و میرایی هر درجه‌ی آزادی، روش رهایی پویا را برای حل اجزای محدود صفحه‌های خمشی استفاده کردند [۹]. سپس، کانگ و زانگ، به ترتیب، رابطه‌هایی برای گام زمانی و میرایی و حدس نخستین پاسخ پایدار یافتند [۱۰ و ۱۱]. با بهره‌جستن همزمان از روش تفاوت‌های محدود و فن رهایی پویا، تروی صفحه‌های قطاعی زیر اثر بار یکنواخت را تحلیل کرد [۱۲]. باردت نیز روش رهایی پویا را برای سنجش ایستایی مواد دانه‌ریز به کار برد [۱۳]. از سوی دیگر، کدخدایان و همکارانش، حدس نخستین پاسخ پایدار را تصحیح کردند و الگوی میرایی گرهی را پیشنهاد دادند [۱۴]. ترکیب فن رهایی پویا با روش‌های تابع اولیه‌گیری عددی مومسانی را نیز این پژوهشگران بررسی کردند [۱۵]. آن‌ها تحلیل کمانشی و پس کمانشی صفحه‌ها را با بهره‌جستن همزمان از معیارهای دینامیکی پایداری و روش رهایی پویا انجام دادند [۱۶]. مونجیزا نگره‌های گوناگون میرایی را در رابطه‌سازی رهایی پویا بررسی کرد [۱۷]. پاسکوالینو و استفان تحلیل غیرخطی گسترش کمانش در خطوط لوله را با فن رهایی پویا انجام دادند [۱۸]. همزمان، وود و هان راهکار رهایی پویا را برای شکل‌یابی و پایداری سازه‌ها به کار بردند [۱۹] و [۲۰]. در پژوهش دیگر، از روش رهایی پویا برای تحلیل خطی و غیرخطی صفحه‌های مرکب استفاده شده است [۲۱]. از سوی دیگر، کدخدایان و همکاران یک گام زمانی بهبود یافته برای روش رهایی پویا ارائه داده‌اند. در این

شمار درجه‌های آزادی سازه را با q نشان می‌دهند. براساس نگره‌های دینامیک سازه‌ها، اگر میرایی سازه بحرانی باشد، نرخ همگرایی به پاسخ پایدار بیشینه می‌شود. بنابراین، برای تخمین میرایی بحرانی، اصل ریلی به کار می‌رود [۱۴]:

$$c^n = 2 \left\{ \frac{\left(\{D\}^n \right)^T \{f(D^n)\}}{\left(\{D\}^n \right)^T [M] \{D\}^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

در این رابطه، $\{D\}^n$ بردار تغییرمکان در گام n ام می‌باشد. افزون بر این، راهکارهای دیگری نیز برای تعیین عامل میرایی در دست است [۶]. باید دانست، در بسیاری از راهبردهای رهایی پویا، گام زمانی ثابت و برابر یک فرض می‌شود. با وجود این، راهکارهایی برای تعیین این عامل بر اساس اصل ریلی پیشنهاد شده است [۱۰]. همچنین، گام زمانی بهبود یافته را می‌توان با کمینه کردن نیروی نامیزان سازه رابطه‌سازی کرد [۲۲].

۳- عمل کرد روش رهایی پویای متداول در ناحیه‌های بازگشتی

رابطه سازی روش رهایی پویا با فرض ثابت بودن بارهای خارجی در تکرارها انجام می‌شود. در شماری از سازه‌های غیرخطی، نقطه‌های حدی بار یا تغییرمکان وجود دارند که سبب ایجاد ناحیه‌های بازگشتی بار یا تغییرمکان در مسیر ایستایی سازه می‌شوند. رابطه‌سازی‌های متداول روش رهایی پویا توانایی پیمایش ناحیه‌های مزبور را ندارند و با رسیدن به نقطه‌های حدی، پرش‌هایی را در مسیر ایستایی ایجاد می‌کنند. شکل ۱، مسیر ایستایی سازه‌ای را نشان می‌دهد که دارای ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییرمکان می‌باشد. اگر A نقطه‌ی حدی بار باشد، افزایش مقدار کوچک بار، سبب می‌گردد تا فرایند حل روش رهایی پویا به نقطه‌ی B در شاخه مقابل آن منتقل شود. واکنش روش رهایی پویا، در برخورد با نقطه‌های حدی تغییرمکان

نیروهای جرمی و میرایی ساختگی به رابطه‌ی ایستایی سازه، همانند زیر انجام می‌پذیرد [۱۴].

$$[M]^n \{\ddot{D}\}^n + [C]^n \{\dot{D}\}^n + \{f\}^n = \{P\}^n \quad (1)$$

در این رابطه، $[M]^n$ ، $[C]^n$ ، $\{\dot{D}\}^n$ و $\{\ddot{D}\}^n$ ، به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی و بردارهای شتاب و سرعت ساختگی در تکرار n ام می‌باشند. همچنین، $\{f\}^n$ و $\{P\}^n$ ، به ترتیب، بردارهای نیروی داخلی و بار خارجی سازه را در گام n ام مشخص می‌کنند. برای رابطه‌سازی روش رهایی پویا از فن‌های عددی استفاده می‌گردد. با فرض ماتریس جرم قطری و استفاده از تفاوت‌های محدود مرکزی، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید [۱۴].

$$\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2 - \tau^n c^n}{2 + \tau^n c^n} \{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c^n} \left\{ \frac{r_i}{m_{ii}} \right\}^n \quad (2)$$

$$\{D\}^{n+1} = \{D\}^n + \tau^{n+1} \{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

در رابطه‌های کنونی، τ^n ، r_i^n و m_{ii}^n ، به ترتیب، گام زمانی در مرحله‌ی n ام، نیروی نامیزان درجه‌ی آزادی i ام و درایه‌ی قطری i ام از ماتریس جرم می‌باشند. نیروی نامیزان تکرار n ام از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\{R\}^n = \{P\}^n - \{f\}^n = [M]\{\ddot{D}\}^n + [C]\{\dot{D}\}^n \quad (4)$$

افزون بر این، c^n عامل میرایی در گام n ام است که با رابطه‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$[C] = c^n [M] \quad (5)$$

در رابطه‌ی کنونی، ماتریس جرم، عامل میرایی و گام زمانی مجهول می‌باشند. معمول‌ترین راهکار برای تعیین درایه‌های قطری جرم، استفاده از نگره‌ی دایره‌های گرشگورین است. این نگره، مقدارهای جرم را برای تضمین پایداری عددی روش رهایی پویا به صورت زیر ارائه می‌دهد [۲۵]:

$$m_{ii} = \frac{(\tau^n)^2}{4} \text{Max} \left[\sum_{j=1}^q |S_{ij}|, 2S_{ii} \right] \quad (6)$$

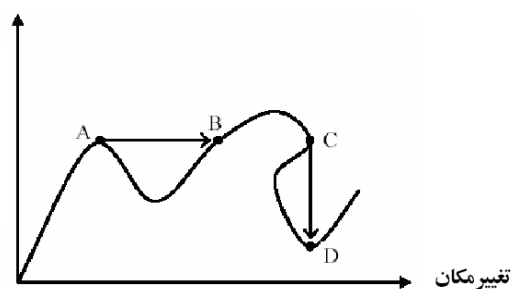
۴- روش رهایی پویا برای پیمایش ناحیه‌های بازگشتی

شرط لازم برای پیمایش ناحیه‌های بازگشتی این است که بار خارجی در تکرارهای روش رهایی تغییر کند. به سخن دیگر، متغیری با نام ضریب بار (λ^n) به فرایند تحلیل افزوده می‌شود. ضریب بار یک کمیت مجهول است و باید فرایندی برای محاسبه و تصحیح آن در هر تکرار رهایی پویا ارائه کرد. شایان توجه است، در روش رهایی پویای متداول بار در تکرارهای پیاپی ثابت می‌ماند. در نتیجه، با معرفی ضریب بار، یک مجهول به دیگر مجهول‌های رهایی پویا ($D_i, i=1,2,\dots,q$) افزوده می‌شود. در این صورت، $q+1$ مجهول در دستگاه معادله‌ها وجود دارد؛ حال آنکه تنها q معادله از تعادل سازه در دسترس می‌باشد (رابطه ۱). به سخن دیگر، برای محاسبه این مجهول اضافی، یک معادله شرط جدید نیاز است. کمینه کردن نیروی نامیزان یا کمینه کردن تغییرمکان نامیزان سازه، معادله مورد نیاز را در دسترس قرار می‌دهد. نخست دلیل انتخاب چنین شرط‌هایی بررسی می‌گردد.

سنجش فرایند حل در روش رهایی پویا، با دو عامل نیروی نامیزان و کارمایه‌ی جنبشی دستگاه انجام می‌پذیرد. با صفر شدن هر یک از این عامل‌ها، پاسخ به دست می‌آید. کارمایه‌ی جنبشی به سرعت‌های گرهی وابسته است. سرعت‌های گرهی نیز سبب ایجاد نمو تغییرمکان می‌شوند. با صفر شدن نمو‌های تغییرمکان، کارمایه‌ی جنبشی سازه صفر می‌گردد و پاسخ به دست می‌آید. در نتیجه، نمو تغییرمکان (سرعت‌های گرهی) را می‌توان تغییر مکان نامیزان نامید. در این مقاله، با کمینه کردن نیروی نامیزان و تغییرمکان نامیزان، معادله لازم برای تصحیح بار (ضریب بار)، در تکرارهای رهایی پویا به دست می‌آید. این کار سبب، افزایش سرعت همگرایی و جلوگیری از ایجاد پرش در نمودار بار- تغییرمکان می‌گردد؛ زیرا با کمینه کردن نیرو یا تغییرمکان نامیزان، تحلیل به نقطه‌های تعادلی نزدیک همگرا خواهد شد. باید

نیز همین گونه می‌باشد. چنانچه، نمو تغییرمکان جایگزین نمو بار گردد، روش رهایی پویا تنها شاخه‌های افزایشی تغییرمکان را پیمایش می‌کند. نقطه‌های C و D چنین رفتاری را نشان می‌دهند. بنابراین، رابطه‌سازی‌های متداول رهایی پویا توانایی پیمایش ناحیه‌های بازگشتی بار (شاخه‌ی A تا B) و تغییرمکان (C تا D) را ندارند. در نتیجه، لازم است راهکاری برای اثر دادن ضریب بار متغیر در روش رهایی پویا پیشنهاد شود. در این راه، رامش و کریشنامورتی روش رهایی پویا را با راهکار طول قوس ترکیب کردند و مسیرهای ایستایی خرابی‌های کشسان و مومسان را به دست آوردند [۲۶ و ۲۷]. این روش خودکار نمی‌باشد و لازم است طول قوس مناسب برای هر سازه به صورت جداگانه تخمین زده شود. همچنین، احتمال کاهش نرخ همگرایی روش رهایی پویا نیز وجود دارد. زیرا، رابطه‌های تکراری فن رهایی پویا با فرض ثابت بودن بار در نموها برپا شده‌اند. بنابراین، ارائه‌ی روشی خودکار و سازگار با تکرارهای رهایی پویا، برای پیمایش ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییرمکان ضروری می‌باشد. به سخن دیگر، لازم است راه کارهای پیشنهادی توانایی پیمایش همه ناحیه‌های مسیر ایستایی را داشته باشند و فرایند تحلیل در آن‌ها خودکار انجام پذیرد. برای دستیابی به این هدف‌ها، از فرایند تصحیح بار سازه در تکرارهای رهایی پویا استفاده می‌شود.

بار خارجی



شکل ۱- عملکرد روش رهایی پویای متداول در ناحیه‌های بازگشتی بار یا تغییرمکان

کمینه کردن نیروی نامیزان است. برای انجام این کار، عامل کاهنده‌ی نیروی نامیزان (Z_R) کمینه می‌شود. برای انجام این کار، مشتق یکم Z_R نسبت به ضریب بار از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda^n} = \frac{\{P\}_{ref}^T \{P\}_{ref} \lambda^n - (\{f\}^n)^T \{P\}_{ref}}{\left(\{R\}^{n-1}\right)^T \{R\}^{n-1}} \quad (11)$$

شرط لازم برای کمینه شدن عامل کاهنده‌ی نیروی نامیزان این است که مشتق یکم آن صفر گردد. پس از انجام این کار، ضریب بار n ام به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda^n} = 0 \Rightarrow \lambda^n = \frac{(\{f\}^n)^T \{P\}_{ref}}{\{P\}_{ref}^T \{P\}_{ref}} \quad (12)$$

رابطه‌ی کنونی، مقدار فرین ضریب بار را مشخص می‌کند. بر اساس آزمون مشتق دوم، عامل کاهنده‌ی نیروی نامیزان هنگامی کمینه می‌گردد، که مشتق دوم آن بزرگ‌تر از صفر شود:

$$\frac{\partial^2 Z_R}{\partial (\lambda^n)^2} = 2 \frac{\{P\}_{ref}^T \{P\}_{ref}}{\left(\{R\}^{n-1}\right)^T \{R\}^{n-1}} \geq 0 \quad (13)$$

این رابطه همواره بزرگ‌تر از صفر می‌باشد. بنابراین، ضریب بار رابطه‌ی (۱۲)، نیروی نامیزان سازه را کمینه می‌کند. در حالت خاص و برای دستگاه یک درجه آزادی، رابطه‌ی ساده‌ی زیر برای ضریب بار به دست می‌آید:

$$\lambda^n = \frac{f^n}{P_{ref}} \quad (14)$$

۴-۲- کمینه کردن تغییرمکان نامیزان

یکی از معمول‌ترین روش‌های تحلیل پیشرفته، کمینه کردن نمو تغییرمکان می‌باشد. راهکار مزبور، ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییرمکان را با دقتی مناسب، پیمایش می‌کند. با وجود این، تاکنون این شیوه‌ها در روش‌هایی پویا به کار نرفته‌اند. دلیل این ویژگی را می‌توان در صریح بودن رابطه‌های رهایی پویا و نیز انجام شدن آن‌ها در سطح بار ثابت جستجو کرد. بنابراین، استفاده از این راهکارها در روش‌هایی پویا، نیازمند

دانست، پرش در نمودار بار- تغییرمکان نشانگر همگرایی به نقطه‌های تعادلی دور می‌باشد. در ادامه، هر یک از این روش‌های کمینه کردن نیرو و تغییرمکان نامیزان سازه معرفی می‌گردند.

۴-۱- کمینه کردن نیروی نامیزان

چنانچه سطح بار در هر گام متغیر فرض گردد؛ می‌توان با کمینه کردن نیروی نامیزان، ضریب بار را تصحیح کرد. برای انجام این کار، گام n ام از فرایند رهایی پویا در نظر گرفته می‌شود. هدف، تعیین ضریب بار، به گونه‌ای است که نیروی نامیزان در گام مزبور کمینه گردد. برای انجام این کار، نسبت نیروی نامیزان دو گام پیاپی با Z_R نشان داده می‌شود:

$$Z_R = \frac{\left(\{R\}^n\right)^T \{R\}^n}{\left(\{R\}^{n-1}\right)^T \{R\}^{n-1}} \quad (8)$$

در این رابطه، $\{R\}^n$ و $\{R\}^{n-1}$ ، به ترتیب، بردارهای نیروی نامیزان در تکرارهای n و $n-1$ ام، می‌باشند. کمیت Z_R نیز عامل کاهنده‌ی نیروی نامیزان است. از سوی دیگر، نیروی نامیزان گام n ام بر حسب ضریب بار نوشته می‌شود:

$$\{R\}^n = \lambda^n \{P\}_{ref} - \{f\}^n \quad (9)$$

در اینجا، $\{P\}_{ref}$ بردار بار مبنا، و λ^n ضریب بار در تکرار n ام می‌باشند. چنانچه، رابطه‌ی (۹) در (۸) جایگزین شود، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$Z_R = \frac{\left(\{P\}_{ref}^T \{P\}_{ref} (\lambda^n)^2 - 2(\{f\}^n)^T \{P\}_{ref} \lambda^n + (\{f\}^n)^T \{f\}^n\right)}{\left(\left(\{R\}^{n-1}\right)^T \{R\}^{n-1}\right)} \quad (10)$$

در رابطه‌ی کنونی، ضریب بار و عامل کاهنده‌ی نیروی نامیزان مجهول می‌باشند. باید افزود، هدف اصلی

در رابطه‌ی کنونی، تنها نیروی نامیزان به ضریب بار وابسته است؛ و دیگر عامل‌ها معلوم می‌باشند. با قراردادن رابطه‌ی (۹) در (۱۷) و سپس جای گذاری رابطه (۱۷) در (۱۶)، عامل کاهنده سرعت به صورت یک معادله درجه‌ی دوم برحسب ضریب بار در دسترس قرار می‌گیرد:

$$Z_V = \left(\left[\sum_{i=1}^q (A_i^n)^2 \right] (\lambda^n)^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^q A_i^n B_i^n \right] \lambda^n + \sum_{i=1}^q (B_i^n)^2 \right) / \sum_{i=1}^q \left(\dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (18)$$

کمیت‌های A_i^n و B_i^n به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_i^n = \frac{2\tau^n P_{i,ref}}{2 + c^n \tau^n m_{ii}} \quad (19)$$

$$B_i^n = \frac{2 - c^n \tau^n}{2 + c^n \tau^n} \dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}} - \frac{2\tau^n P_{i,ref}}{2 + c^n \tau^n m_{ii}} \quad (20)$$

در رابطه (۱۸)، عامل کاهنده‌ی سرعت‌های گره‌ی و ضریب بار مجهول می‌باشند. برپایه رابطه (۱۶)، Z_V با بردار سرعت‌های گره‌ی گام $\frac{1}{2}n + 1$ ، نسبت مستقیم دارد. بنابراین، می‌توان با کمینه کردن Z_V ، تغییرمکان نامیزان سازه را کمینه نمود. برای انجام این کار، مشتق یکم Z_V از رابطه (۱۸)، بر حسب ضریب بار حساب می‌شود:

$$\frac{\partial Z_V}{\partial \lambda^n} = 2 \frac{\left[\sum_{i=1}^q (A_i^n)^2 \right] \lambda^n + \left[\sum_{i=1}^q A_i^n B_i^n \right]}{\sum_{i=1}^q \left(\dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (21)$$

شرط لازم برای کمینه‌شدن عامل کاهنده سرعت این است که مشتق یکم آن صفر گردد. بنابراین، ضریب بار n ام، به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial Z_V}{\partial \lambda^n} = 0 \Rightarrow \lambda^n = - \frac{\sum_{i=1}^q A_i^n B_i^n}{\sum_{i=1}^q (A_i^n)^2} \quad (22)$$

رابطه‌سازی مستقل می‌باشد. در ادامه، رابطه‌سازی نوینی برای ضریب بار روش رهایی پویا با استفاده از عامل‌های تغییرمکان ارائه می‌شود. نمو تغییرمکان در تکرار $(n+1)$ ام روش رهایی پویا به صورت زیر است:

$$\{\delta D\}^{n+1} = \tau^{n+1} \{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (15)$$

در این رابطه، τ^{n+1} ، گام زمانی در مرحله‌ی $n+1$ ام و $\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}}$ ، بردار سرعت‌های گره‌ی در میان گام می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۱۷)، می‌توان دریافت، نمو تغییرمکان در روش رهایی پویا، به سرعت‌های گره‌ی و گام زمانی وابسته است. از این رو، کمینه‌شدن هر یک از این مقادارها، نمو تغییرمکان را به کم‌ترین مقدار خود کاهش می‌دهد. چون گام زمانی ضریب نمو تغییرمکان می‌باشد و این کمیت همواره بزرگ‌تر از صفر است؛ بنابراین، در رابطه‌ی (۱۷) گام زمانی ثابت فرض می‌گردد و از فرایند کمینه‌سازی نمو تغییرمکان خارج می‌شود. به سخن دیگر، برای کمینه‌کردن نمو تغییرمکان، از بردار سرعت‌های گره‌ی میان گام، استفاده می‌شود. برای این پایه، نسبت تغییرمکان نامیزان دو گام پیاپی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Z_V = \frac{\sum_{i=1}^q \left(\dot{D}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2}{\sum_{i=1}^q \left(\dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (16)$$

در اینجا، Z_V عامل کاهنده‌ی سرعت نام دارد. در این رابطه، سرعت‌های گره‌ی گام $\frac{1}{2}n - 1$ معلوم می‌باشند و سرعت گره I در گام $\frac{1}{2}n + 1$ از رابطه‌ی ۲ به دست می‌آیند:

$$\dot{D}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2 - c^n \tau^n}{2 + c^n \tau^n} \dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{(2 + c^n \tau^n) m_{ii}} \Gamma_i^n \quad (17)$$

حساب می‌گردد؛ و هیچگونه شرطی در روند تحلیل وارد نمی‌شود. ویژگی مزبور، از این جهت مفید است که تحلیل با کمترین داده‌های ورودی انجام می‌گیرد. افزون بر این، نیازی به تعریف مقدارهای طلایی، برای سنجش همگرایی نمی‌باشد.

رابطه‌سازی‌های کنونی در دو سطح بار و تغییرمکان انجام پذیرفت. این کار با کمینه‌کردن عامل‌های نامیزان انجام شد و شیوه‌های نوینی برای روش‌های پویا در بار متغیر پیشنهاد گردید. در این فرایندها، کمینه‌کردن نسبت به گام پیشین انجام می‌گیرد. همچنین، کمیتی با نام عامل کاهنده تعریف شد که سنجش فرایند حل را به‌عهده دارد. باید دانست، رامش و کریشنامورتی، فن طول قوس را با روش‌های پویا ترکیب کردند. در فرایندهای مزبور، معادله‌ی درجه‌ی دومی برحسب عامل بار به دست می‌آید که با حل آن ضریب بار در گام جاری حساب می‌شود [۲۶ و ۲۷]. روشن است، تنها ریشه‌های حقیقی این معادله قابل قبول می‌باشند. بنابراین، تحلیل هنگامی همگرا می‌شود که مشخصه‌ی این معادله‌ی درجه‌ی دوم، بزرگ‌تر یا برابر صفر باشد. به‌سختن دیگر، لازم است طول قوس به‌گونه‌ای انتخاب شود که شرط نامنفی بودن مشخصه‌ی معادله برقرار گردد. در غیر این صورت، فرایند حل واگرا می‌شود. بنابراین، کارایی روش آن پژوهشگران به انتخاب مقدارهای مناسب برای طول قوس وابسته است. بر خلاف آن‌ها، رابطه‌سازی پیشنهادی این کاستی را برطرف می‌کند. دلیل این ویژگی، استفاده از شرط‌های کمینه‌سازی در رابطه‌های رهایی پویا می‌باشد. بنابراین، نوع مسأله و نیز قضاوت‌های شخصی اثری در شیوه‌ی پیشنهادی ندارند. باید افزود، فرایندهای کمینه‌سازی در روش‌های نیوتن-رافسونی نیز به‌کار رفته‌اند و کارایی آن‌ها ثابت شده است.

ویژگی دیگر رابطه‌سازی پیشنهادی، تعیین پاسخ یگانه در جریان حل می‌باشد. به سخن بهتر، در روش رامش و کریشنامورتی، با فرض نامنفی بودن مشخصه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم، دو مقدار برای ضریب بار به دست می‌آید.

با جایگذاری عامل‌های A_i^n و B_i^n از رابطه‌های (۱۹) و (۲۰)، ضریب بار به دست می‌آید:

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^q \left[\frac{P_{i,ref} f_i^n}{m_{ii}^2} \right] - (2 - c^n \tau^n) \sum_{i=1}^q \left[\frac{P_{i,ref} \dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}}}{m_{ii}} \right]}{\sum_{i=1}^q \left[\left(\frac{P_{i,ref}}{m_{ii}} \right)^2 \right]} \quad (22)$$

این رابطه فرین مقدار ضریب بار را در گام n مشخص می‌کند. برای اطمینان از کمینه‌شدن سرعت‌های گره‌ی، لازم است، مشتق مرتبه‌ی دوم عامل کاهنده سرعت نسبت به ضریب بار بررسی شود. با مشتق‌گیری دوباره از رابطه‌ی (۲۱)، نتیجه‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial^2 Z_V}{\partial (\lambda^n)^2} = 2 \times \frac{\sum_{i=1}^q (A_i^n)^2}{\sum_{i=1}^q \left(\dot{D}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^2} \geq 0 \quad (24)$$

رابطه‌ی کنونی، همواره بزرگ‌تر از صفر است. بنابراین، طبق آزمون مشتق دوم، مقدار ضریب بار رابطه‌ی (۲۳)، نمو تغییرمکان را کمینه می‌کند. در حالت خاص و برای سازه یک درجه آزادی، رابطه‌ی زیر برای ضریب بار در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\lambda^n = \frac{2\tau^n f^n - (2 - c^n \tau^n) \dot{D}^{n-\frac{1}{2}} m}{2\tau^n P_{ref}} \quad (25)$$

۵- ویژگی‌های رابطه‌سازی پیشنهادی

در این مقاله، دو دسته رابطه‌سازی برای بهبود ضریب بار پیشنهاد گردید. فرایندهای مزبور، از نظر عددی پایدار می‌باشند. از سوی دیگر، بررسی راهکارهای پیشنهادی مشخص می‌کند که تعیین ضریب بار در این فن‌ها، مستقل از دخالت تحلیلگر و خودکار می‌باشد. به سخن بهتر، ضریب بار، تنها با توجه به ویژگی‌های هر سازه

می‌شود. همچنین، در تمامی روش‌ها، جرم از نگره‌ی گرشگورین (رابطه (۶)) و میرایی از اصل ریلی (رابطه (۷))، به دست می‌آیند. گام زمانی نیز یک فرض می‌گردد. روش‌هایی پویا یک فن تکراری می‌باشد. بنابراین، فرایند حل با یک حدس نخستین آغاز می‌گردد. راهکارهای گوناگونی برای تعیین این مقدار پیشنهاد شده است [۱۵] و [۱۶]. در اینجا، حدس نخستین تغییرمکان در نمو آغازین صفر پنداشته می‌شود. در نمونه‌های بعدی نیز از نقطه‌ی تعادلی گام پیشین برای حدس نخستین بهره‌جویی می‌گردد. برای ارزیابی همگرایی، از دو عامل نیروی نامیزان و بیشینه تکرارهای مجاز استفاده می‌شود. در این راهبرد، نخست خارج قسمت نیروی نامیزان بر بارهای گرهی حساب می‌گردد. چنانچه مقدار به دست آمده از خطای مجاز نیروی نامیزان (e_R)، کوچک‌تر باشد، فرایند حل پایان می‌یابد. در غیر این صورت، تکرارها تا همگرایی به پاسخ دنبال می‌شوند. چنانچه شمار تکرارها از بیشینه مقدار مجاز آن‌ها بیشتر شود، فرایند به پایان می‌رسد و پاسخ نقطه‌ی واگرا فرض می‌گردد. خاطر نشان می‌کند، در روش‌های پیشنهادی، نمو ضریب بار، عامل سنجش شمار نقطه‌های مسیر ایستایی می‌باشد. به سخن بهتر، با کوچک‌شدن این نمو، نمودار بار-تغییرمکان با شمار نقطه‌های بیشتری پیمایش می‌شود. این ویژگی سبب شناخت هر چه بهتر رفتار سازه می‌گردد. در ادامه، چهار سازه‌ی خرابی با روش‌های پیشنهادی تحلیل می‌شوند. هدف از این تحلیل‌ها، بررسی توانایی راهکارهای پیشنهادی برای پیمایش کامل مسیر ایستایی می‌باشد. همچنین، درجه‌ی آزادی مبنا در این سازه‌ها با نشانه‌ی D مشخص شده است.

۱-۶- خرابی مستوی ۵ عضوی

این سازه خرابی، چهار درجه‌ی آزادی دارد. شکل ۲ مشخصه‌های هندسی سازه‌ی مزبور را نشان می‌دهد [۲۹].

روشن است، تنها یکی از این دو مقدار پاسخ مناسب می‌باشد. برای تشخیص پاسخ حقیقی، راهکارهای سنجشی گوناگونی پیشنهاد شده است [۲۶ و ۲۷]. این فرایندها وقت‌گیر می‌باشند و زمان تحلیل را افزایش می‌دهند. در هر گام از رابطه‌سازهای پیشنهادی تنها یک پاسخ یگانه به دست می‌آید و نیازی به شرط‌های اضافی نیست. در ادامه، کارایی رابطه‌سازهای پیشنهادی با نمونه‌های عددی بررسی می‌شوند.

۶- نمونه‌های عددی

بر اساس رابطه‌سازهای پیشنهادی، یک برنامه رایانه‌ای نوشته شده است. این برنامه برای تحلیل رفتار بازگشتی بار و تغییرمکان سازه‌های خرابی به کار می‌رود. معادله‌های تعادل سازه‌های خرابی از رابطه‌سازهای اجزای محدود با فرض رفتار غیرخطی هندسی (تغییرشکل‌های بزرگ)، در محدوده کشسان به دست می‌آیند [۲۸]. هر سازه با چهار شیوه تحلیل می‌شود:

۱- در نخستین روش، ضریب بار از کمینه‌کردن نیروی نامیزان کل سازه، رابطه (۱۲)، حساب خواهد شد. نشانه‌ی MTRF این فرایند را مشخص می‌کند.
۲- در راهکار دوم، از یک درجه‌ی آزادی مبنا برای کمینه‌کردن نیروی نامیزان بهره‌جویی خواهد شد. در این صورت، ضریب بار از رابطه (۱۴) به دست می‌آید. علامت MJRF، این فن را نشان می‌دهد.
۳- در راهکار سوم، ضریب بار از کمینه‌کردن تغییرمکان نامیزان کل سازه، رابطه (۲۳)، به دست می‌آید. نشانه‌ی این روش MTRD می‌باشد.

۴- چهارمین راهکار، کمینه‌کردن تغییرمکان نامیزان یک درجه‌ی آزادی مبنا، با رابطه (۲۵) می‌باشد. نشانه‌ی MJRD، این شیوه را مشخص می‌کند.
باید دانست، در راهکارهای MJRF و MJRD، یکی از درجه‌های آزادی باردار سازه به عنوان مرجع انتخاب

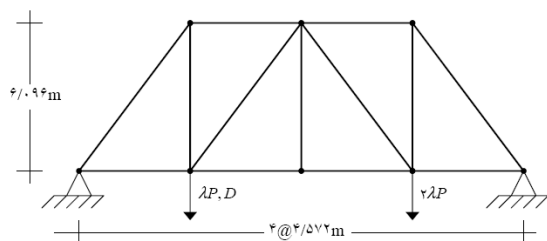
نیروی (MJRF و MTRF) می‌باشند. در نتیجه، شیوه‌های نیرویی سریع‌تر از فن‌های تغییرمکانی انجام می‌شوند.

جدول ۱- پاسخ‌های خرابی مستوی ۵ عضوی

روش	کل نموها	تعداد واگرایی	میانگین تکرارها	
			کل نموها	نموی همگرا شده
MTRF	۲۵۱	-	۲۶/۰۴	۲۶/۰۴
MJRF	۲۵۱	-	۲۶/۷۸	۲۶/۷۸
MTRD	۴۲۰	۶	۳۵/۶۷	۲۸/۹۴
MJRD	۴۲۰	۶	۳۵/۷۴	۲۹/۰۱

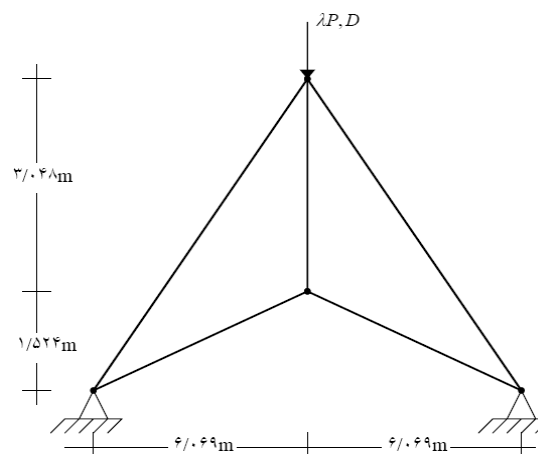
۲-۶- خرابی سقفی

این سازه‌ی خرابی ۱۲ درجه آزادی دارد و همانند شکل ۴، به صورت نامتقارن بارگذاری شده است [۲۹].



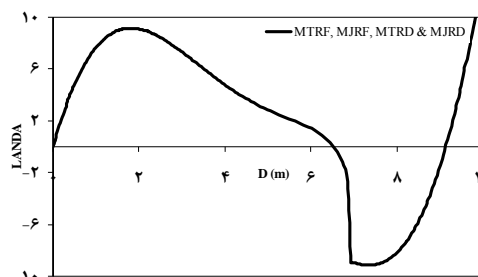
شکل ۴- خرابی سقفی

سطح مقطع تخت بالا و پایین و عضوهای عمودی متصل به آن‌ها، ۳۲/۲۶ سانتیمتر مربع، بازوهای کناری ۴۰/۳۲ سانتی‌متر مربع و دیگر اعضا ۱۶/۱۳ سانتی‌متر مربع است. دیگر مشخصه‌های این سازه برابر با: $P=53380/8$ نیوتن، $E=20685/1$ نیوتن بر سانتی‌متر مربع، $e_R = 10^{-5}$ و $e_K = 10^{-12}$ می‌باشند. نمو ضریب بار در هر مرحله از بارگذاری، $\delta\lambda = 0/25$ انتخاب می‌گردد. مسیرهای ایستایی به دست آمده از شیوه‌های پیشنهادی در شکل ۵ و ۶ رسم شده‌اند. جدول ۲ تکرارهای همگرایی کلیه روش‌ها را نشان می‌دهد.



شکل ۲- خرابی مستوی ۵ عضوی

سطح مقطع تخت بالا، ۴۸/۳۹ سانتی‌متر مربع، تخت پایین ۲۵/۸۱ سانتی‌متر مربع و عضو عمودی ۱۹/۳۵ سانتی‌متر مربع است. دیگر مشخصه‌های این سازه به صورت: $P=8896/8$ نیوتن، $E=20685/1$ نیوتن بر سانتی‌متر مربع، $e_R = 10^{-5}$ و $e_K = 10^{-11}$ می‌باشند. افزون بر این‌ها، نمو ضریب بار در هر مرحله از بارگذاری، $\delta\lambda = 0/25$ انتخاب می‌گردد. جدول ۱ نتیجه‌های تحلیل سازه‌ی مزبور را با روش‌های پیشنهادی نشان می‌دهد. نمودار بار- تغییرمکان برای درجه‌ی آزادی مبنا نیز در شکل ۳ رسم شده است.

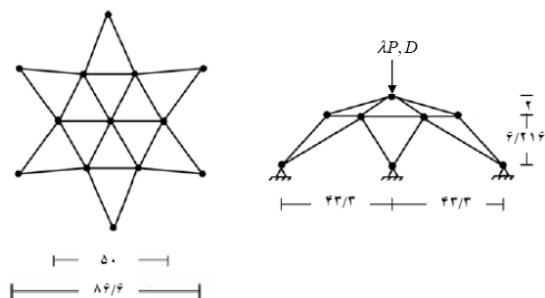


شکل ۳- مسیر ایستایی خرابی مستوی ۵ عضوی

در این خرابی، مسیر ایستایی به دست آمده از چهار راهکار یکسان است؛ و تنها شمار نقطه‌های پیمایشی در روش‌های مختلف، متفاوت می‌باشد. بررسی جدول ۱ نشان می‌دهد، شمار نموی بارگذاری در روش‌های تغییرمکانی (MJRD و MTRD)، بیشتر از فرایندهای

۳-۶- خرابی ستاره‌ای

خرپای فضایی که ۲۱ درجه‌ی آزادی دارد، در شکل ۷ نشان داده شده است [۲۶]. گره‌های تراز صفر بسته می‌باشند. همچنین، طول‌ها و نیروها، به ترتیب، با یک‌های سانتیمتر و نیوتن مشخص می‌شوند. دیگر مشخصه‌های این سازه برابر با: $P=۶۵$ نیوتن، $AE=۹۶۰۵۱۰$ نیوتن، $e_R = ۴ \times 10^{-۴}$ و $e_K = 10^{-1۰}$ می‌باشند. افزون بر این‌ها، نمو ضریب بار در هر مرحله از بارگذاری، $\delta\lambda = 1$ انتخاب می‌گردد.

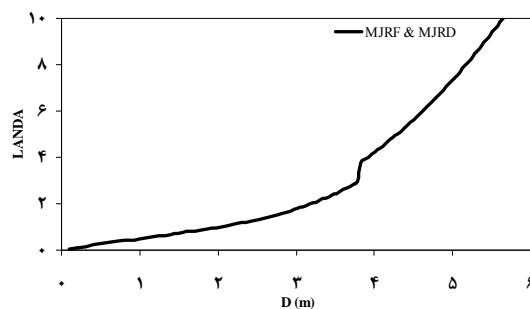


شکل ۷- خرابی ستاره‌ای

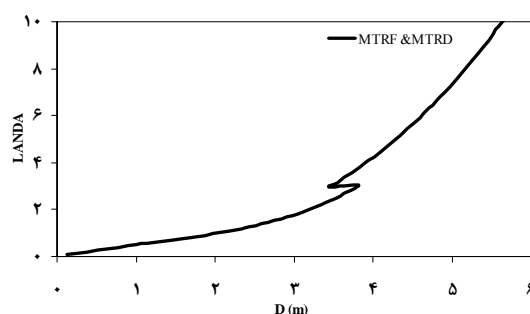
تکرارهای همگرایی با روش‌های پیشنهادی در جدول ۳ درج شده‌اند. شمار نمونه‌های بارگذاری در روش‌های تغییرمکانی (MTRD و MJRD)، بیشتر از فرایندهای نیرویی (MTRF و MJRF) می‌باشد. به سخن بهتر، نرخ همگرایی روش‌های نیرویی بیشتر از فرایندهای تغییرمکانی است. همچنین، مسیر ایستایی درجه‌ی آزادی مینا، به‌دست آمده از چهار روش، یکسان می‌باشد و در شکل ۸ نشان داده شده است.

جدول ۳- پاسخ‌های خرابی ستاره‌ای

روش	کل نمونه‌ها	تعداد واگرایی	میانگین تکرارها	
			کل نمونه‌ها	نمونه‌های همگرا شده
MTRF	۱۹۷	۳۶	۱۲۷/۸۲	۴۴/۶
MJRF	۱۹۷	۳۳	۱۲۴/۷۲	۴۹/۲۱
MTRD	۴۷۶	۱۲۰	۱۶۶/۰۶	۵۳/۵
MJRD	۴۷۶	۱۱۹	۱۶۶/۴۲	۵۵/۲۳



شکل ۵- مسیر ایستایی خرابی سقفی با روش‌های MJRF و MJRD



شکل ۶- مسیر ایستایی خرابی سقفی با روش‌های MTRF و MTRD

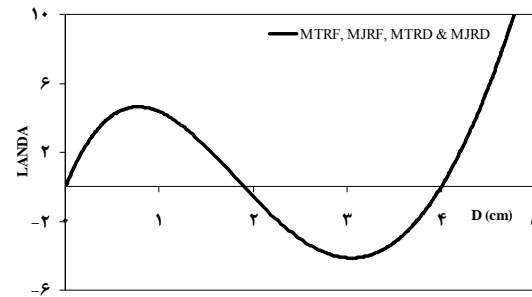
جدول ۲- پاسخ‌های خرابی سقفی

روش	کل نمونه‌ها	تعداد واگرایی	میانگین تکرارها	
			کل نمونه‌ها	نمونه‌های همگرا شده
MTRF	۴۴	-	۲۷/۸۹	۲۷/۸۹
MJRF	۶۳	-	۲۹/۸۹	۲۹/۸۹
MTRD	۷۱	-	۳۳/۰۶	۳۳/۰۶
MJRD	۱۰۲	-	۲۹/۵۱	۲۹/۵۱

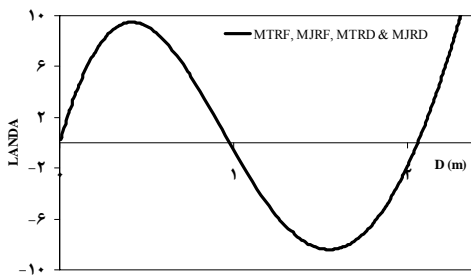
بررسی شکل‌های ۵ و ۶ نشان می‌دهد، این خرپا دارای رفتار بازگشتی تغییرمکان می‌باشد. روش‌های MTRD و MTRF چنین رفتاری را به طور کامل مشخص می‌کنند. با وجود این، فرایندهای استفاده از یک درجه‌ی آزادی مینا (MJRF و MJRD)، توانایی پیمایش این ناحیه‌ی بازگشتی را ندارند و در نمودار بار- تغییرمکان وابسته، پرش ایجاد شده است.

جدول ۴- پاسخ‌های خرپای فضایی سقفی

روش	کل نموها	تعداد واگرایی	میانگین تکرارها	
			کل نموها	نمویهای همگرا شده
MTRF	۱۳۶	۱۶	۸۶/۲۷	۳۱/۱۱
MJRF	۱۳۶	۱۷	۸۷/۴۹	۲۸/۵۵
MTRD	۲۶۴	۴۵	۱۱۲/۳۱	۳۲/۶۵
MJRD	۲۶۴	۴۴	۱۱۲/۶۳	۳۵/۱۶



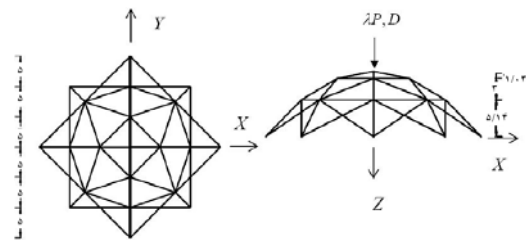
شکل ۸- مسیر ایستایی خرپای ستاره‌ای



شکل ۱۰- مسیر ایستایی خرپای سقفی

۴-۶- خرپای فضایی سقفی

شکل ۹ یک خرپای فضایی را نشان می‌دهد که گره‌های تراز صفر آن تکیه‌گاه مفصلی می‌باشند [۲۷]. این خرپا سی و نه، درجه‌ی آزادی دارد و یکای طول‌ها متر اختیار شد. در این سازه، $P=900$ کیلو نیوتن، 21×10^5 $AE=$ کیلو نیوتن، $e_R = 10^{-4}$ و $e_K = 10^{-12}$ می‌باشند. همچنین، نمو ضریب بار در هر مرحله از بارگذاری، $\delta\lambda = 1$ انتخاب می‌گردد.



شکل ۹- خرپای فضایی سقفی

۷- نتیجه‌گیری

رابطه‌سازی نوینی برای پیمایش مسیر ایستایی با فن‌رهای پویا در این مقاله پیشنهاد شد. پایه‌های این رابطه‌سازی، بر کمینه‌کردن نیروی نامیزان و تغییرمکان نامیزان سازه استوار است. نبودن احتمال واگرایی عددی و نیز به‌دست‌آمدن پاسخ یگانه، از ویژگی‌های ریاضی فن‌های نویسنده‌گان می‌باشد. از سوی دیگر، تعدادی سازه‌ی خرپایی با رفتار غیرخطی هندسی تحلیل شدند. تحلیل‌های مزبور، توانایی روش‌های پیشنهادی را در پیمایش ناحیه‌های بازگشتی آشکار می‌کند. بر این اساس، پاره‌ای از ویژگی‌های فن‌های پیشنهادی ارائه می‌گردد.

نخست، واگرایی در روش‌های حل بررسی می‌گردد. یکی از عوامل سنجش فرایند حل، استفاده از شمار بیشینه تکرارهای مجاز می‌باشد. چنانچه، تعداد چرخه‌ها از مقدار تعریف‌شده توسط کاربر بیشتر شود؛ تکرارها پایان می‌یابند و آخرین تقریب به عنوان پاسخ انتخاب می‌گردد. واگرایی‌های جدول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، از این گونه

نمویهای بارگذاری سازه در روش‌های مختلف را جدول ۴ نشان می‌دهد. روشن است، شمار نمویهای روش‌های تغییرمکانی (MTRD و MJRD)، بیشتر از فرایندهای نیرویی (MTRF و MJRF) می‌باشد. در نتیجه، زمان لازم برای پیمایش مسیر ایستایی با روش‌های نیرویی کمتر از فن‌های تغییرمکانی می‌باشد. از سوی دیگر، مسیر ایستایی درجه‌ی آزادی مبنا در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. این مسیر برای چهار روش یکسان می‌باشد. از این‌رو، تمام روش‌های پیشنهادی، مسیر ایستایی را به‌طور کامل پیموده‌اند.

تغییر مکان این ویژگی را نشان می‌دهند. همچنین، با افزایش نمو ضریب بار، شمار این نقطه‌ها کاهش می‌یابد. مقایسه‌ی روش‌های نیرویی (MJRF و MTRF) با فن‌های تغییر مکانی (MJRD و MTRD) نشان می‌دهد، نمو‌های همگرایی در شیوه‌های تغییر مکانی بیشتر از فرایندهای نیرویی می‌باشد. به سخن دیگر، زمان تحلیل در روش‌های نیرویی کمتر است. با این حال، فرایندهای تغییر مکانی نسبت به شیوه‌های نیرویی کارایی بالاتری در پیمایش مسیرهای ایستایی دارند و دقیق‌تر می‌باشند. از سوی دیگر، بررسی نتیجه‌های تحلیل روش‌هایی که با یک درجه‌ی آزادی مبنا کار می‌کنند (MJRD و MJRF)، نشان می‌دهند، شیوه‌های مزبور در سازه‌هایی به پاسخ‌های مناسب همگرا می‌شوند که تنها یک بار گرهی به آن وارد شده باشد. استفاده از این فرایندها در دیگر سازه‌ها، سبب پدید آمدن پرش‌هایی در مسیر ایستایی می‌گردد.

می‌باشند. به سخن دیگر، در نقطه‌های مزبور با رسیدن به مرز پانصد چرخه، فرایند به پایان می‌رسد. بررسی نمو‌ها نشان می‌دهد، تمام واگرایی‌ها در نزدیکی بار صفر ایجاد می‌گردند. این ناحیه‌ها شامل مرحله‌های آغازین بارگذاری و نیز نمو‌های بازگشتی مجاور بار صفر می‌باشند. یادآوری می‌کند، خطا کمیتی بدون بعد است. بر این پایه، نیروی نامیزان نسبت به بارهای گرهی سنجیده می‌شود. با کوچک شدن بارهای گرهی سازه، کمیت خطا افزایش می‌یابد. زیرا، عامل مزبور از تقسیم نیروی نامیزان بر بار گرهی به دست می‌آید. این نکته دلیل پدید آمدن نقطه‌های واگرایی می‌باشد. خاطر نشان می‌کند، مرز مشخصی برای تعیین این منطقه‌ها وجود ندارد؛ و طول ناحیه‌ی مزبور به رفتار سازه وابسته است. با توجه به این نکته، می‌توان دریافت، نمو‌های واگرایی مشکلی برای فرایند حل ایجاد نمی‌کنند. به سخن بهتر، نقطه‌های مزبور بر مسیر ایستایی منطبق می‌باشند. نمودارهای بار-

مراجع:

1. Frankel, S.P., "Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations", *Mathl. Tabl. Natn. Coun.*, Washington, 4, pp. 65-75, (1950).
2. Brew, J.S. and Brotton, M., "Non-Linear Structural Analysis by Dynamic Relaxation Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 3; pp. 463-483, (1971).
3. Wood, W.L., "Note on Dynamic Relaxation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 3, pp. 145-147, (1971).
4. Bunce, J.W., "A Note on Estimation of Critical Damping in Dynamic Relaxation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 4, pp. 301-304, (1972).
5. Papadrakakis, M., "A Method for Automatic Evaluation of the Dynamic Relaxation Parameters", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 25, pp. 35-48, (1981).
6. Undewood, P., "Dynamic Relaxation", *Computational Method for Transient Analysis*, Chapter 5, pp. 245-256, (1983).
7. Felippa, C.A., "Dynamic Relaxation under General Increment Control", *Math. Prog.*, 24, pp. 103-133, (1982).
8. Zienkiewicz, O.C. and Lohner, R., "Accelerated Relaxation or Direct Solution Future Prospects for FEM", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21, pp. 1-11, (1985).
9. Shawi, F.A.N., and Mardirosion, A.H., "An Improved Dynamic Relaxation Method for the Analysis of Plate Bending Problems", *Comput. Struc.*, 27, pp. 237-240, (1987).
10. Qiang, S., "An Adaptive Dynamic Relaxation Method for Non-Linear Problems", *Comput. Struc.*, 30, pp. 855-859, (1988).

11. Zhang, L.C. and Yu, T.X., "Modified Adaptive Dynamic Relaxation Method and its Application to Elastic-Plastic Bending and Wrinkling of Circular Plates", *Comput. Struc.*, 34, pp. 609-614, (1989).
12. Turvey, G.J. and Salehi, M., "DR Large Deflection Analysis of Sector Plates", *Comput. Struc.*, 34, pp. 101-112, (1990).
13. Bardet, J.P. and Proubet, J., "Adaptive Dynamic Relaxation for Statics of Granular Materials", *Comput. Struc.*, 39, pp. 221-229, (1991).
14. Zhang, L.C., Kadkhodayan, M. and Mai, Y.W., "Development of the MADR Method", *Comput. Struc.*, 52, pp. 1-8, (1994).
15. Kadkhodayan, M. and Zhang, L.C., "A Consistent DXDR Method for Elastic-Plastic Problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 38, pp. 2413-2431, (1995).
16. Kadkhodayan, M., Zhang, L.C. and Swerby, R., "Analysis of Wrinkling and Buckling of Elastic Plates by DXDR Method", *Comput. Struc.*, 65, pp. 561-574, (1997).
17. Munjiza, A., "A K^m Proportional Damping for Dynamic Relaxation", *Int. J. Eng. Model.*, 9, pp. 1-9, (1996).
18. Pasqualino, I.P. and Estefan, S.F., "A Nonlinear Analysis of The Buckle Propagation Problem in Deepwater Pipelines", *Int. J. Solids Struc.*, 38, pp. 8481-8502, (2001).
19. Wood, R.D., "A Simple Technique for Controlling Element Distortion in Dynamic Relaxation Form-Finding of Tension Membranes", *Comput. Struc.*, 80, pp. 2115-2120, (2002).
20. Han, S.E. and Lee, K.S., "A Study on Stabilizing Process of Unstable Structures by Dynamic Relaxation Method", *Comput. Struc.*, 80, pp. 1677-1688, (2003).
21. Turvey, G.J. and Salehi, M., "Annular Sector Plates: Comparison of Full-Section and Layer Yield Prediction", *Comput. Struc.*, 83, pp. 2431-2441, (2005).
22. Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Turvey, G.J., "A New Fictitious Time for the Dynamic Relaxation (DXDR) Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 74, pp. 996-1018, (2008).
23. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "Implicit Higher Order Accuracy Method for Numerical Integration in Dynamic Analysis", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 134(6), pp. 973-985, (2008).
24. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "Nonlinear Dynamic Analysis by Dynamic Relaxation Method", *Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 28(5), pp. 549-570, (2008).
25. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "The Dynamic Relaxation Method Using New Formulation for Fictitious Mass and Damping", *Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 34(1), pp. 658-667, (2010).
26. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S., "Post-Buckling Analysis of Structures by Dynamic Relaxation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36, pp. 1339-1364, (1993).
27. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S., "Inelastic Post-Buckling Analysis of Truss Structures by Dynamic Relaxation Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37, pp. 3633-3657, (1994).
28. Fellipa, C.A., "Nonlinear Finite Element Methods", ASEN 5017, Course Material, (1997).
29. Norris, C.H., Wilber, J.B. and Utku, S., "Elementary Structural Analysis", Third edition, McGraw Hill, (1976).