

تحلیل ترک در مواد مرکب به وسیله روش انرژی

عبدالحسین فریدون^{۱*}، فرهان یکنای کیا^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: آذر ۱۳۸۷ پذیرش مقاله: خرداد ۱۳۸۸	در این مقاله، روش انتگرال J برای محاسبه و تحلیل ترک در مواد مرکب لایه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش ترک تحت زوایای مختلف با طول‌های مختلف در انواع لایه بندی مورد بررسی قرار می‌گیرد و حالت بحرانی و بهترین حالت مشخص می‌گردد. برای تحلیل ترک در ماده مرکب ابتدا توسط یک نرم افزار المان محدود ماده مورد تحلیل قرار گرفته و توسط یک برنامه که به صورت جداگانه برای نرم افزار المان محدود تعریف می‌شود انتگرال J به صورت عددی محاسبه می‌شود سپس با استفاده از انتگرال J ضریب تمرکز تنش در ماده مورد محاسبه قرار می‌گیرد. علت این که به طور مستقیم ضریب تمرکز تنش محاسبه نمی‌شود این است که چون ترک در نوک آن دارای تکین می‌باشد بنابراین نرم افزار المان محدود با خطای بالایی آن را محاسبه می‌نماید ولی با استفاده از خاصیت استقلال از مسیر انتگرال J می‌توان در مسیره‌های دورتر از نوک ترک انتگرال J و در نتیجه ضریب تمرکز تنش را محاسبه کرد.
واژگان کلیدی: ترک انتگرال J شکست مواد مرکب تمرکز تنش	

۱- مقدمه

ضررهای ناشی از شکست‌های ناگهانی در ایالات متحده آمریکا در سال ۱۹۷۸ بالغ بر ۱۱۹ میلیارد دلار گردیده که در حدود ۰.۴٪ تولید ناخالص ملی این کشور را تشکیل می‌دهد.

در سال‌های اخیر مواد مرکب لایه‌ای با زمینه و الیاف‌های مختلف مورد توجه قرار گرفته است و تحلیل‌های مکانیکی تحت انواع بارها برای این گونه مواد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. مثلاً تحلیل مواد مرکب تحت بارهای دینامیکی و بار ضربه و تحلیل ارتعاشی آن‌ها و غیره.

در این گونه مواد احتمال وجود حفره‌ها درون لایه‌ها و وجود ترک‌هایی در بین لایه‌ها که توسط مواد پر نشده است، زیاد می‌باشد. لذا همزمان با افزایش کاربرد مواد مرکب به ویژه در دو دهه اخیر تلاش‌های بسیاری به منظور دستیابی به حل‌های تحلیلی در مواد مرکب صورت

پدیده شکست در اجسام یکی از عمده‌ترین مسائلی است که انسان از زمان ساختن ساده‌ترین ابزارها با آن مواجه بوده و به دلیل پیشرفت تکنولوژی در عصر حاضر این مسئله از اهمیت بیشتری نسبت به گذشته برخوردار می‌باشد.

در واقع گسیختگی ناگهانی بسیاری از تجهیزات و سازه‌های صنعتی، نه تنها عواقب جانی ناگواری را در پی دارد، بلکه ضررهای چشمگیر اقتصادی را نیز فراهم می‌آورد. تحقیقات اخیر [۱] نشان داده است که قیمت

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: ab.fereidoon@gmail.com

۱. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

صورت گرفت. در این زمینه، بارنبلات [۵]، ولز [۶] و مک کلینتون [۷] ارائه شد.

تصحیح ناحیه پلاستیک توسط ایروین در واقع یک بسط ساده روابط مکانیک شکست الاستیک خطی بود. در حالی که بارنبلات مدل پر زحمت‌تری را بر پایه تسلیم یک تسمه باریک از مواد در نوک ترک بسط دادند ولز پیشنهاد کرد که زمانی پلاستیک قابل توجهی قبل از شکست اتفاق می‌افتد که از جابجایی سطوح ترک به عنوان محک و میزان شکست استفاده شود. این موضوع زمانی به فکر ولز رسید که می‌کوشید تا روش مکانیک شکست الاستیک خطی برای سازه‌های فلزی با استحکام متوسط و پایین به کار برد. او به این نتیجه رسید که این مواد انعطاف‌پذیرتر از آن هستند که مکانیک شکست الاستیک خطی در مورد آن‌ها به کار گرفته شود. بعد ولز متوجه شد که همراه با تغییر شکل پلاستیک، سطوح ترک از یکدیگر جدا می‌شوند. این منجر به معرفی پارامتری شد که امروزه آن را به نام $CTOD^*$ یا میزان باز شدگی نوک ترک می‌شناسند و بر این اساس استوار است که اگر کرنش پلاستیک در نوک ترک از یک مقدار بحرانی تجاوز کند باید انتظار شروع رشد ترک را داشت، از این رو استنباط می‌شود که شکست در یک $CTOD$ بحرانی صورت می‌گیرد.

رایس [۸] برای مشخص کردن رفتار غیر خطی مواد در نوک ترک پارامتر دیگری معرفی نمود و با ایده آل سازی رفتار الاستیک-پلاستیک به رفتار الاستیک غیرخطی توانست رابطه‌ای برای نرخ آزاد سازی انرژی در مواد غیرخطی به دست آورد. او نشان داد که این مقدار را می‌توان به صورت انتگرال خط مستقل از مسیر عنوان کرد. رایس این انتگرال خطی را انتگرال J نامید. بعد از معرفی انتگرال J توسط رایس، هاتچینسون [۹] و رایس و روزنگرن [۱۱] انتگرال J را به میدان تنش نوک ترک در مواد غیر خطی مرتبط کردند. این تحلیل‌ها نشان داد که

گرفته است. از بین روش‌های قابل کاربرد در زمینه مواد غیر متجانس می‌توان از روش شرایط مرزی، روش ترتیبی مرزی و روش اجزاء محدود نام برد.

بر اساس معیار مکانیک شکست الاستیک خطی، شکست و رشد ترک پایدار هنگامی رخ می‌دهد که ضرایب شدت تنش (بر حسب حالات بارگذاری یا ترکیب آن‌ها) به یک مقدار بحرانی برسند. این نظریه بر این فرض استوار است که ماده کاملاً الاستیک و ترد بوده و در نتیجه از اثر ناحیه پلاستیک در نوک ترک به علت کوچکی صرف نظر می‌شود لذا لازم نیست کاری برای ایجاد و گسترش ناحیه پلاستیک انجام گیرد. در حقیقت انرژی کرنشی آزاد شده در این از نظر توازن انرژی، نرخ انرژی آزاد شده برای شروع ترک ناپایدار که در نهایت به شکست منجر می‌گردد باید با انرژی سطح ترک برابر باشد. انرژی سطح در واقع مقدار انرژی لازم بر واحد سطح برای گسیختن تمامی پیوندهای بین دو سطح ترک است که در آستانه جدایش قرار دارند.

ایروین [۲] مفهوم نرخ آزاد سازی انرژی را گسترش داد و در حقیقت نظریه گریفیث را به گونه‌ای مطرح کرد که برای حل مسائل مهندسی مناسب‌تر بود مدتی بعد وسترگارد [۳] یک روش نیمه معکوس برای تحلیل تنش و جابجایی در نوک ترک پیشنهاد نمود. ایروین [۴] از روش وسترگارد استفاده نمود تا نشان دهد که تنش و جابجایی در نزدیکی نوک ترک را می‌توان به کمک یک مقدار ثابت که مرتبط با نرخ آزاد سازی انرژی است توصیف کرد. این پارامتر مشخصه نوک ترک به عنوان ضریب شدت تنش شناخته می‌شود.

بعد از سال ۱۹۶۰ محققین نظر خود را متوجه پلاستیسیته نوک ترک کردند. زمانی که قبل از شکست در جسم تغییر شکل پلاستیک قابل توجهی ایجاد می‌گردد، در این صورت دیگر مکانیک شکست الاستیک خطی معتبر نمی‌باشد. در طی فاصله زمانی نسبتاً کوتاهی تحقیقات زیادی در مورد مسئله تسلیم در نوک ترک

1- Crack Tip-Opening Displacement

جابجا شده در اثر تغییر شکل جسم از شکل ۱- الف به جسم شکل ۱- ب بوده و ΔS بیانگر سطح تازه تشکیل شده عاری از کشش باشد رابیس [۱۷] نشان می‌دهد که کاهش انرژی پتانسیل ΔU_p همراه گسترش یک ترک یا جاله، چنین به دست می‌آید:

$$-\Delta U_p = \int_{\Delta V} W dV - \int_{\Delta S} T \Delta u dS \quad (1)$$

که در آن W ، دانسیته انرژی کرنش است و چنین تعریف می‌شود:

$$W = W(\epsilon) = \int_{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2)$$

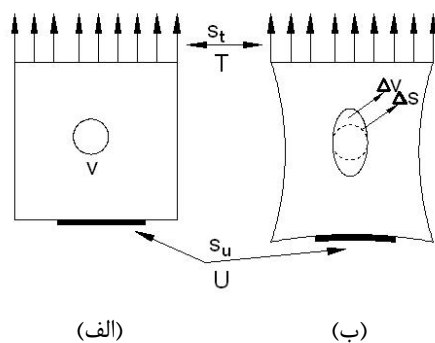
σ_{ij} تانسور تنش و ϵ_{ij} تانسور کرنش با مؤلفه‌های زیر است:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

T بردار کشش است که بر S_T اثر می‌کند و با توجه به بردار نرمال یکه به سمت خارج n در طول Γ تعریف می‌شود.

رابطه ۱ بیان می‌کند که کاهش خالص انرژی عبارت است از انرژی کرنش حجم ماده برداشته شده منهای کار انجام شده در آزادسازی سطوح کشش جدید، یعنی:

$$\Delta U_p < 0$$



شکل ۱- حجم ماده جابجا شده در اثر تغییر شکل جسم

برای جسم‌های صفحه‌ای رابطه ۱ را می‌توان چنین بیان نمود:

به کمک J می‌توان میدان تنش غیر خطی را نیز به دست آورد.

شیه و همکاران [۱۱] نشان دادند که بین انتگرال J و CTOD رابطه‌ای موجود است. استفاده از هر دو این پارامترها برای سنجش وضعیت شکست در اجسام معتبر می‌باشد. در ادامه تحقیقات در مورد انتگرال J در سال ۱۹۸۱ لابنز، بوی و آمستوی [۱۲] انتگرال J تحت شرایط سه بعدی را معرفی کردند. انتگرال J در این حالت از مجموع دو انتگرال تشکیل شده است. یکی از این انتگرال‌ها، انتگرال خط و دیگری انتگرال سطح است. هر کدام از این اجزاء وابسته به مسیر بوده اما مجموع آن‌ها مستقل از مسیر می‌باشد. در سال ۱۹۸۶ شیه و همکاران [۱۳] رابطه انتگرال مستقل از مسیر J را برای حالتی که جسم سه بعدی تحت تنش حرارتی قرار داشته به دست آوردند. همچنین ساکاتا [۱۴] انتگرال J را برای حالتی که جسم ترک دار تحت نیروهای اینرسی قرار داشته را بسط داد.

۲- فرمول بندی

مفهوم اساسی انتگرال J به وسیله اشلیبی [۱۵] به کار برده شد تا توسط آن نیروهای تعمیم یافته بر روی نابجایی‌ها و عیوب نقطه‌ای در میدان‌های الاستیک و به کمک یک مؤلفه ایستایی تانسور انرژی مقدار حرکت مشخص گردد. تعریف اصلی انتگرال J به وسیله رابیس [۱۶] یک جسم همگن از یک ماده با رفتار الاستیک خطی یا غیر خطی عاری از هر نیروی داخلی و تغییر شکل اولیه و تحت یک میدان تغییر شکل دو بعدی در فضای دکارتی را در بر می‌گیرد. یک جسم الاستیک خطی یا غیر خطی را که دارای یک ترک یا سوراخ بوده را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که حجم اصلی جسم V باشد که تحت بارهای کششی سطحی T بر روی مرز S_T و یک تغییر مکان مشخص u بر روی مرز S_U باشد. اگر ΔV حجم ماده

محدودیت اصلی در این جا این است که جسم باید تحت بارگذاری با افزایش یکنواخت قرار گیرد و نباید هیچ گونه برداشتن بار (حذف بار) تحمیل شود.

بنابراین J میزانی است برای کار ورودی به سیستم و نه مقدار کار برگشت پذیر در هنگام حذف بار (برداشتن بار). برای تغییرات بی نهایت کوچک در شکل هندسی یک ترک نوک پهن و یا تغییر شکل پلاستیک یافته، عبارت انتگرال خطی در معادله (۷) مؤثرتر می‌باشد. بر عکس، در حالت یک ترک نوک تیز، COD* یا میزان بازشدگی ترک قابل چشم پوشی است و عبارت انتگرال سطح در معادله انتگرال J برجسته و مهم می‌شود. انتگرال J کاملاً مستقل از مسیر می‌باشد [۱۸].

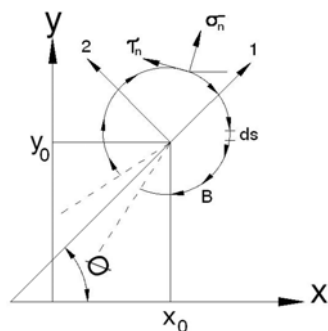
۳- تعیین انتگرال J براساس روش اجزاء

محدود

شارپلز [۱۹] برای تعیین انتگرال J برای یک صفحه دارای ترک در یک لبه از روش اجزاء محدود استفاده نموده است. انتگرال J برای یک ترک با یک شیب دلخواه که در طول محور ξ قرار گرفته چنین به دست می‌آید:

$$J = \int_{\Gamma} W d\eta - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial \xi} ds \quad (9)$$

به طریقی دیگر، با استفاده از شکل ۳ انتگرال فوق را می‌توان چنین نوشت:



شکل ۳- محاسبه انتگرال J

1- Crack-opening displacement

$$-\Delta U_p = \int_{\Delta A} W dA - \int_{\Delta S} T \Delta u ds \quad (4)$$

که در آن ΔA سطح ماده برداشته شده برای ایجاد یک فضای خالی و ΔS نشان دهنده مرز تازه تشکیل یافته بدون کشش است. از معادله ۴ در حد برای رشد بی نهایت کوچک ترک، نرخ تغییر انرژی پتانسیل نسبت به رشد ترک می‌تواند چنین بیان شود:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial a} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial a} dx dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial a} ds \quad (5)$$

که در آن A مساحت و Γ محیط سطح آن می‌باشد. اکنون، سیستم مختصاتی مطابق شکل ۲ به گونه‌ای که مبدأ آن در نوک ترک بوده انتخاب می‌کنیم. درحالی که $dx=da$ ، رابطه ۵ چنین می‌شود:

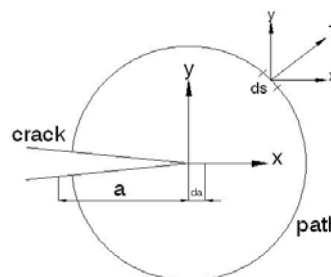
$$-\frac{\partial U_p}{\partial a} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (6)$$

با استفاده از قضیه گرین، می‌توان معادله ۶ برحسب انتگرال‌های خطی را به صورت زیر بیان کرد:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial a} = \int_{\Gamma} W dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (7)$$

که در آن $-\partial U_p / \partial a$ به عنوان انتگرال J شناخته می‌شود یعنی:

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad Jm^{-2} \text{ or } Nm^{-1} \quad (8)$$



شکل ۲- مشخصات سیستم مختصات

یکی از نتایج مهم تعمیم اعتبار معادله ۸ برای رفتار غیرخطی آن است که تحت محدودیت‌های به خصوص، می‌توان آن برای مدل کردن رفتار پلاستیک استفاده کرد.

۴- رابطه انتگرال J با ضرایب شدت تنش

می دانیم بین ضرایب a_{ij} (معروف به ضرایب نرمی* می باشد که نحوه استخراج آن در مرجع [۲۰] آمده است) و برای مؤلفه‌های انتگرال J روابط زیر برقرار است [۲۰]:

$$J_1 = \left[\frac{-a_{22}}{2} I_m \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) \right] K_I^2 \quad (12)$$

$$+ [a_{11} I_m(\mu_1 \mu_2)] K_I K_{II} + \left[\frac{a_{II}}{2} I_m(\mu_1 + \mu_2) \right] K_{II}^2$$

$$J_2 = \left[R_C(\mu_1 + \mu_2) \frac{a_{II}}{2} (\mu_1 + \mu_2) \right] k_1^2$$

$$+ \left[R_C(\mu_1 \mu_2) \frac{a_{11}}{2} I_m(\mu_1 + \mu_2) + \frac{a_{16}}{2} I_m(\mu_1 \mu_2) \right]$$

$$+ \frac{a_{22}}{2} I_m \left(\frac{d_{22}}{2} \right) \left] K_I K_{II} + \left[\frac{a_{16}}{2} I_m(\mu_1 + \mu_2) + \frac{a_{22}}{2} I_m \frac{a_{22}}{2} I_m \left(\frac{1}{\mu_1 \mu_2} \right) \right] K_{II}^2$$

برای مواد متجانس $a_{16} = 0$ و $a_{11} = a_{22} = \frac{k+1}{8\mu}$ و $\mu_1 = \mu_2 = 1$ بوده و روابط فوق به شکل معروف زیر در می‌آیند: (۱۳)

$$J_1 = \frac{k+1}{8G} (k_1^2 + k_{II}^2)$$

$$J_2 = \frac{k+1}{8G} (-2k_I k_{II})$$

در حالت تنش صفحه‌ای $K = \frac{3-\nu}{1+\nu}$
 در حالت کرنش صفحه‌ای $K = 3-4\nu$

$$J = \int_{\Gamma} W d\eta - (\sigma_n, \tau_n) \begin{bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_n}{\partial \xi} \end{bmatrix} dS \quad (10)$$

که در آن:

$$W = 1/2E(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + [(1+2\nu)/E](\tau_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{zz})$$

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 a + \sigma_{yy} \sin^2 a + \tau_{xy} \sin a \cos a$$

$$\tau_n = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin a \cos a + \tau_{xy} \sin a \cos a$$

$$u_n = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

$$v_n = -u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

برای کرنش صفحه‌ای $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ و برای تنش صفحه‌ای $\sigma_{zz} = 0$ می‌باشد.

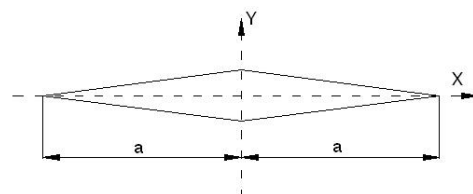
پس از انجام عملیات مناسب و تغییر متغیرها، معادله (۱۰) انتگرال J را بر حسب مختصات دکارتی به شکل رابطه زیر می‌دهد:

$$J = \int W (-\sin \phi dy + \cos \phi dy) - \int (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} \cos \phi dy + \tau_{xy} \epsilon_{yy} \sin \phi dy - \tau_{xy} \epsilon_{xx} \cos \phi dx - \sigma_{yy} \epsilon_{yy} \sin \phi dx + \tau_{xy} \epsilon_{xy} \cos \phi dy - \tau_{xy} \epsilon_{xy} \sin \phi dx + A) \quad (11)$$

که در آن:

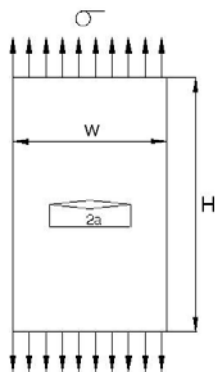
$$A = (\sigma_{xx} \sin \phi - \tau_{xy} \cos \phi) du + (-\sigma_{yy} \cos \phi - \tau_{xy} \sin \phi) dv$$

مقدار فوق را می‌توان از روش عددی با جمع کردن هر قسمت از ds بین گره‌های مجاور که بر روی مسیر قرار می‌گیرند به دست آورد؛ چنانچه در شکل ۴ نشان داده شده است.



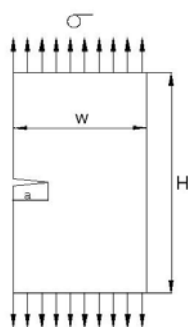
شکل ۴- ترک

برای ۴ طول مختلف انجام می‌دهیم. میزان بار بر روی ضریب تمرکز تنش بی تأثیر می‌باشد. در شکل ۵ نمونه مورد تحلیل نشان داده شده است.



شکل ۵- نمونه با ترک میانی

در این تحلیل $\frac{H}{W} = 4$ و $\sigma = 50 * 10^6 \text{ pa}$ در نظر می‌گیریم. در قسمت بعدی از مقاله، تحقیق خود را بر روی ماده مرکب با ترک لبه‌ای ادامه می‌دهیم (شکل ۶).



شکل ۶ - نمونه با ترک لبه‌ای

هدف از این کار مقایسه ضریب تمرکز تنش برای طول و زوایای مختلف ترک و از طرف دیگر مقایسه آن با ترک میانی می‌باشد. در این قسمت همان طور که در ترک میانی توضیح داده شد ترک در انواع لایه بندی‌های مختلف ایجاد می‌شود. در این تحلیل $\frac{H}{W} = 4$ و $\sigma = 50 * 10^6 \text{ pa}$ در نظر می‌گیریم. تایید روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر در جدول ۲ نشان داده شده است.

۵- مثال‌های عددی

حال با استفاده از روابط بالا به بررسی چند نوع ترک در مواد مرکب می‌پردازیم. برای به دست آوردن تمرکز تنش در مواد مرکب با استفاده از نرم افزار ANSYS یک برنامه به زبان ماکرو برای این نرم افزار تهیه می‌شود تا بتوان مقدار تمرکز تنش را به دست آورد و یا راه حل دیگر این است که مسئله را کاملاً در نرم افزار المان محدود حل کرده سپس مقادیر تنش و کرنش و جابه جایی را استخراج کرده و در یک نرم افزار محاسبات عددی روابط انتگرال J را محاسبه کرد. سپس با آن برنامه خروجی نرم افزار المان محدود انتگرال J و در نتیجه ضریب تمرکز تنش را به دست آورد.

در این جا برای نمونه ماده اپوکسی-گلاس را در نظر می‌گیریم که در کاربردهای هوا - فضا جایگاه مناسبی دارد خصوصیات این ماده در جدول ۱ داده شده است [۲۱].

جدول ۱ - خواص مواد برای لایه بندی‌های مختلف

نحوه لایه بندی	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{xy}	G_{xy}
$[0/\pm 45/90]_s$	۶۰/۰۴	۶۰/۰۴	۰/۲۵۹	۲۳/۸۵
$[0]_s$	۱۱/۷۲	۱۴۴/۸	۰/۰۱۷	۹/۶۵
$[\pm 45]_s$	۳۱/۱۸	۳۱/۱۸	۰/۶۱۵	۳۸/۰۳
$[\pm 30]_s$	۱۷/۶۴	۶۶/۹۹	۰/۲۶۲	۳۰/۹۴
$[90]_s$	۱۴۴/۸	۱۱/۷۲	۰/۲۱۰	۹/۶۵

همان طور که ملاحظه می‌شود خصوصیات برای پنج نوع لایه بندی مختلف که در نتیجه چرخش زوایای لایه‌ها به وجود آمده، داده شده است. در این مقاله هر ۵ لایه بندی را مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

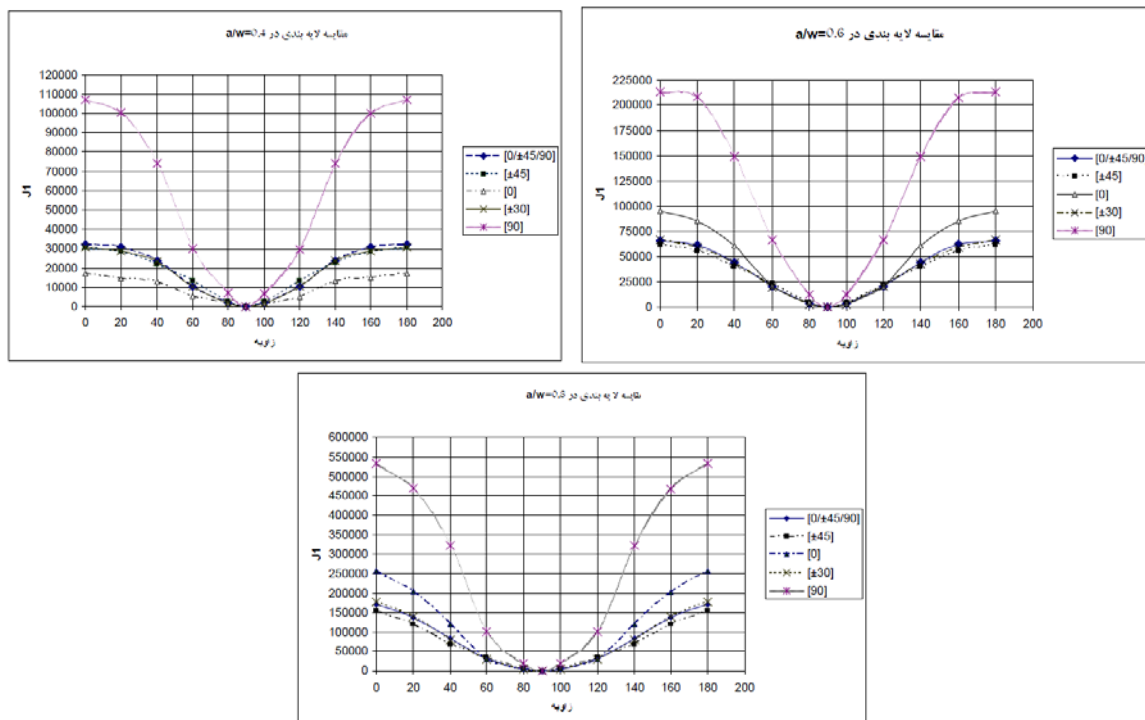
برای تحلیل اول یک ترک از نوع میانی در ماده مرکب ایجاد می‌کنیم و ترک را از زاویه ۰ درجه تا ۱۸۰ درجه می‌چرخانیم تا در هر زاویه میزان انتگرال J به دست آید. سپس طول ترک را بیشتر می‌کنیم و دوباره ترک را می‌چرخانیم. نتایج حاصله را مقایسه می‌کنیم این کار را

جدول ۲- مقایسه متفاوت $\frac{a}{w}$ برای چیدمان لایه‌ها و J

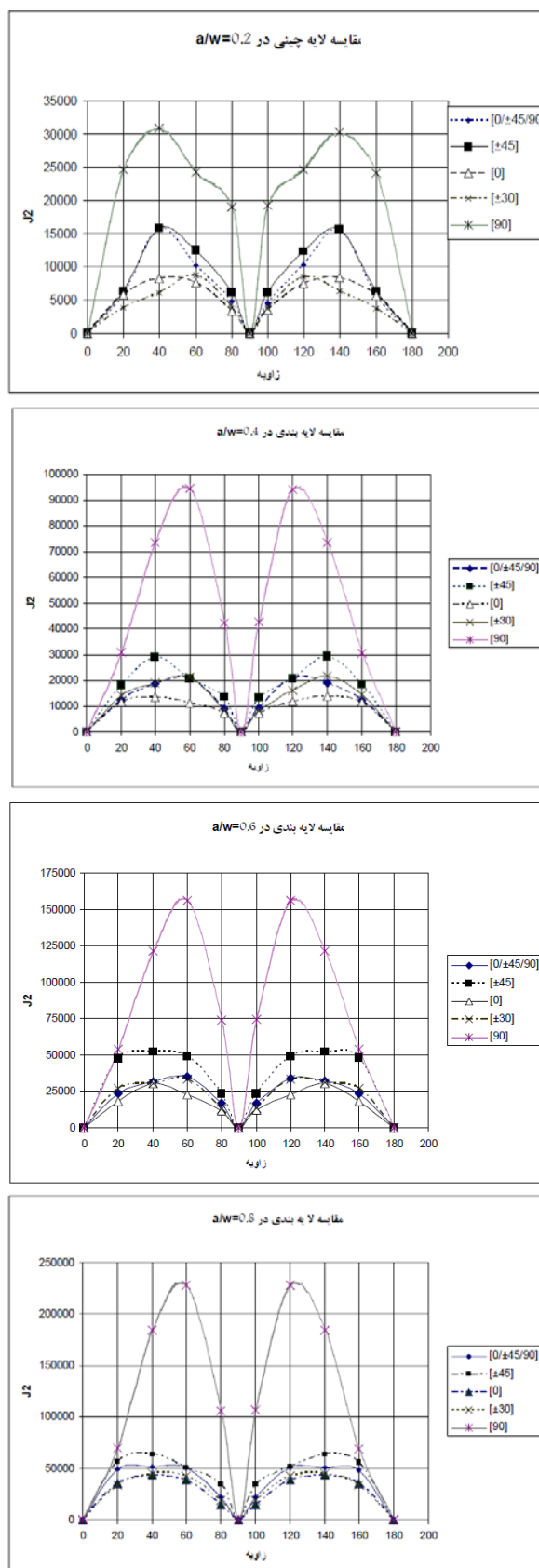
a/w چیدمان لایه‌ها	از روش حاضر	Force method	از روش حاضر	Force method	از روش حاضر	Force method	از روش حاضر	Force method
	0.2		0.4		0.6		0.8	
$[\pm 90]_s$	1.16	1.11	1.25	1.21	1.45	1.40	1.99	1.87
$[\pm 45]_s$	1.58	1.52	1.82	1.75	2.23	2.19	3.17	2.18
$[0/\pm 45/90]_s$	1.02	1.01	1.11	1.08	1.3	1.14	1.80	1.72

به طور مشابه نمودارهای شکل ۸، مقادیر مختلف انتگرال J_2 برای صفحات با لایه بندی‌های مختلف و ترک میانی به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار کمینه آن را برحسب متغیرها نشان می‌دهند.

نمودارهای شکل ۷، مقادیر مختلف انتگرال J_1 برای صفحات با چیدمان مختلف لایه‌ها و ترک میانی به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار کمینه آن را برحسب متغیرها نشان می‌دهند.



شکل ۷- مقادیر مختلف انتگرال J_1 برای صفحات با چیدمان مختلف لایه‌ها و ترک میانی به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار کمینه

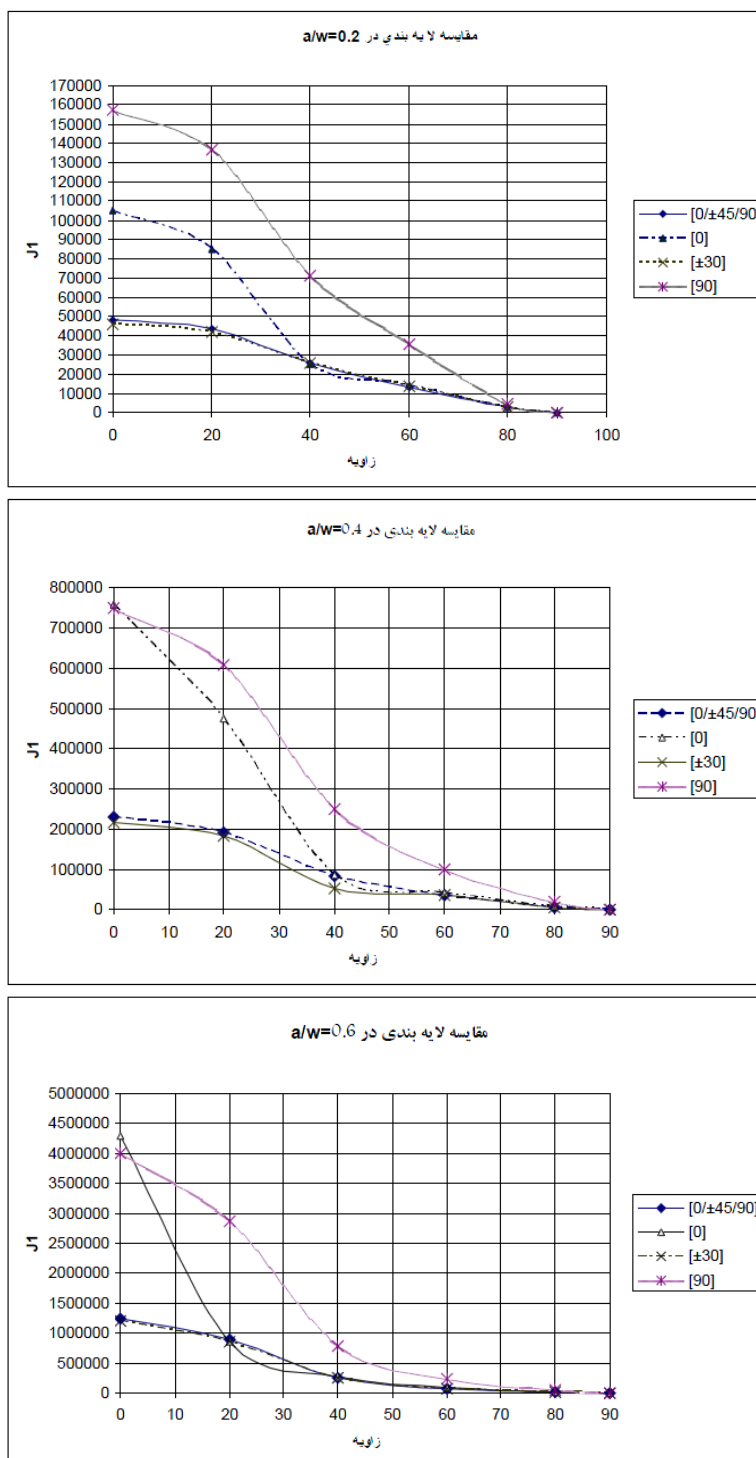


شکل ۸- مقادیر مختلف انتگرال J_1 برای صفحات با چیدمان مختلف لایه‌ها و ترک میانی به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار

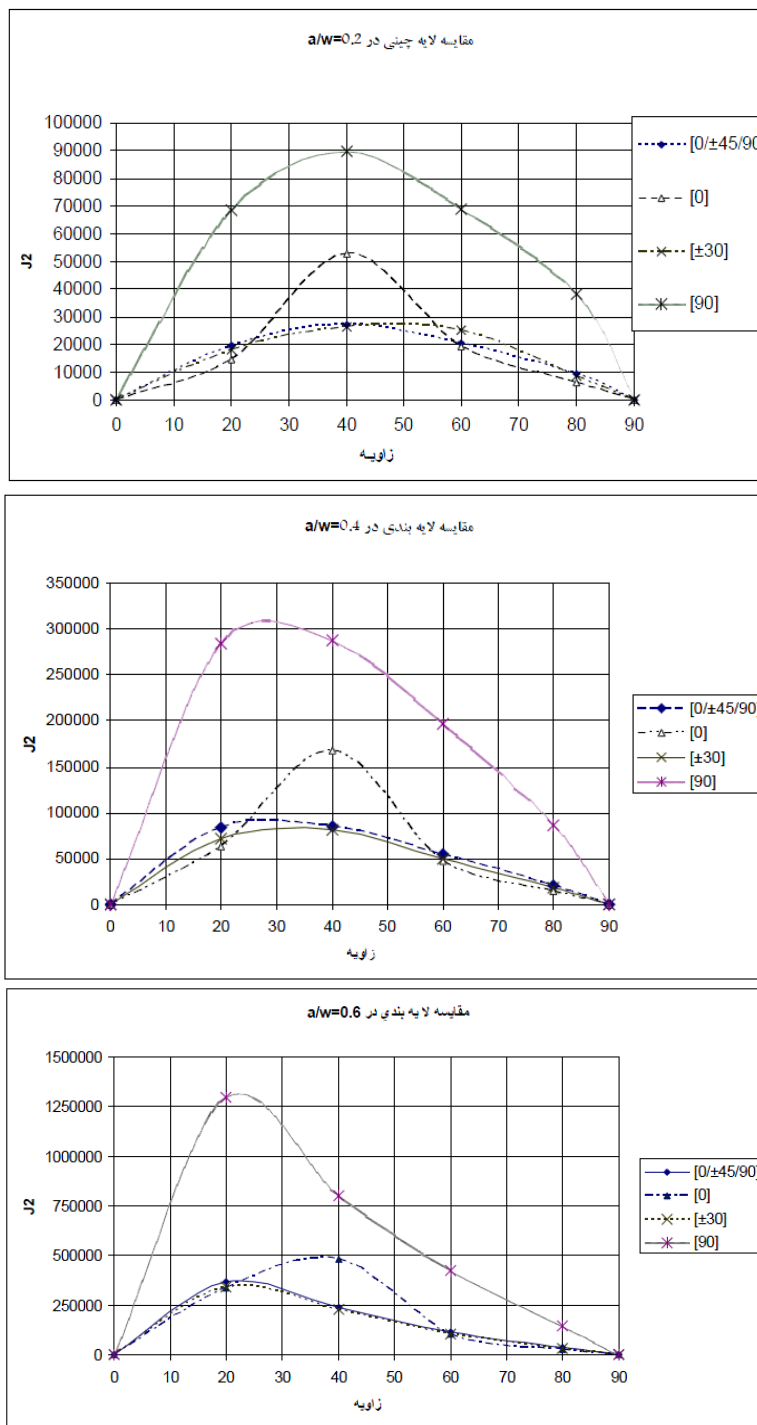
کمینه

نمودارهای شکل ۹ مقادیر مختلف انتگرال J_1 برای صفحات با لایه بندی‌های مختلف و ترک لبه‌ای به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار کمینه آن را برحسب متغیرها نشان می‌دهند.

نمودارهای شکل ۱۰ مقادیر مختلف انتگرال J_2 برای صفحات با لایه بندی‌های مختلف و ترک لبه‌ای به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار کمینه آن را برحسب متغیرها نشان می‌دهند.



شکل ۹- مقادیر مختلف انتگرال J_1 برای صفحات با لایه بندی‌های مختلف و ترک لبه‌ای به ازای طول و زوایای مختلف ترک و مقدار کمینه



شکل ۱۰- مقادیر مختلف انتگرال J_1 برای صفحات با لایه بندی‌های مختلف و ترک لبه‌ای به ازای طول وزوایای مختلف ترک و مقدار کمینه

۶- نتیجه گیری

در حالت ۰ درجه (تنها زاویه مورد بحث در مرجع [۲۰]) نتایج را با هم مقایسه می‌کنیم. قابل توجه است که ابتدا باید انتگرال J_1 را با استفاده از رابطه ۱۲ به ضریب تمرکز تنش تبدیل کنیم.

نتایج این تحقیق تطابق خوبی با نتایج مقاله مرجع [۲۱] دارد. البته در مرجع اشاره شده تمام مقادیر فوق استخراج نشده بلکه فقط در ۲ زاویه و تنها برای چند لایه بندی به دست آمده است. برای مقایسه تنها در حالت ترک میانی و

مراجع

1. Duga, J. J., Fisher, W.H., Ruxbaum, R.W., Rosefield, A.R., Burh, A.R., Honton, E.J., and McMillan, S. c., "The Economic Effects of Fracture in the United States", NBS Special Publication 647-2, united States Department of Commerce, Washington, DC, March (1983).
 2. Westergard, H.M. "Bearing Pressures and Craks". *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, pp. 49-53, (1939).
 3. Irwin, G.R. "Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Travers a Plate". *Journal of Applieau Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364, (1957).
 4. Irwin G.R. "Pastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness." Sagamore Research Conference Proceedings, Vol. 4, (1961).
 5. Barenblatt, G.I., "The Mathematical Theory of Equilibrium Crack in Brittle Fracture" *Advaces in Appiled Mechanics*, Vol, VII, Academic Press, pp. 55-129, (1962).
 6. Wells, A.A. "Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture", Proceedings of the Crack P{ropagation Symposium, Vol 1, Paper 84, Cranfield, UK, 1961.
 7. McClintock, F.A. "DFuctile Fracture Instability In Shear", *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 25, pp. 581-588, (1958).
 8. Rice, J.R. "A path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Crack". *Journal of Applied Mechanics*, Vol 35, pp. 379-386, (1968).
 9. Hutchinson, J.W. "Singular Behavior at the End of a Tensile Crack Tip in a Hardening Material". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 13-31, (1968).
 10. Rics J.R. and Rosengren, G.F. "Plane Strain Defomation near a Crack Tip in a Power Law Gard Tip in a Power Law Gardening Material". *Journal of the Mechanics and Physics of Soilds*, Vol. 16, pp. 1-12, (1968).
 11. Shils, C.F. and Hutchinson, J.W. "Fully Plastic Solutions and Large-Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack"; Problems. *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 98, pp. 289-295, (1976).
 12. Ammestoy, M., Bui H.D. and Labbens R. "On the Definition Of Local Path Independent Integrals In Three Dimensional Crack Problems". *Mech. Res. Commun.* 8, pp. 231-236, (1986).
 13. Shih C.F. Moran B. and Nakamura T. "Energy Release Rate Along A Three-Dimensional Crack Front In A Thermaik Stressed Body". *Int. J. Integral* 30, pp. 79-102, 1986 .
 14. Sakata. M, "J Integral Approach To Fracture of Rotating Disks". *Journal of Mater. Technol.* 100, pp. 128-133, (1979).
 15. Eshelby, J.D. "The Continuum Theory Of Lattice Defects In Solid State Physics" (editors F. Seitz and D. Thurnbull), 3, pp.79-141. (1956).
 16. Rice, J.R. "Path Independent Integral And The Approximate Analysis Of Strain Concentration By Notches And Cracks", *J. Appl. Mech.*, 35, pp. 379-86, (1968).
 17. Rice J. R. "Mathematical Analysis In The Mechanics of Fracture", in NEW YORK 2, pp 191-311, (1968).
۱۸. اس. ا. مگید " مکانیک شکست " ترجمه دکتر غلامحسین فرهی (۱۳۷۶).
19. Sharples, J.K. "Determination of Stress Intensity Factors For A Plate With A Single Edge Crack Using Finite Element", National Engineering Laboratory Publication, NEL Report No. 615, (1976).
۲۰. محمد نورین "تحلیل ترکهای مورب و کنگره ای شکل تحت شرایط حالت ترکیبی حالت اول و دوم در صفحات محدود غیر متجانس با استفاده از انتگرال J" (۱۳۷۷).
21. TAN P.W. "Bigelowan Improved Boundary Force Method For Analyzing Cracked Anisotropic Materials" Mail Stop 188E, NASA Langley Research Center, Hampton, VA 236655225, U.S.A (1988).