

## بررسی عددی و تجربی روش تجزیه فرکانسی به منظور تقریب پارامترهای مودال سازه

محمد مهدی خطیبی<sup>۱\*</sup>، محمد رضا آشوری<sup>۲</sup>، علیرضا آلبویه<sup>۱</sup>

| اطلاعات مقاله  | چکیده  |
|--|--|
| دریافت مقاله: آبان ۱۳۸۸<br>پذیرش مقاله: فروردین ۱۳۸۹   |  |
| <b>واژگان کلیدی:</b><br>آنالیز مودال محیطی،<br>روش تجزیه فرکانسی،<br>پارامترهای مودال،<br>روش المان محدود. | تست مودال کلاسیک سازه‌هایی نظیر پل‌ها، برج‌ها و ساختمان‌ها، با مشکلاتی نظیر دشوار بودن تحریک و وجود نویز در اندازه‌گیری مواجه است. از این رو محققان سعی در ارائه روش‌های جدیدی نموده‌اند که در آن‌ها تحریک، به کمک نیروهای طبیعی صورت گرفته و خصوصیات دینامیکی سازه صرفاً با اندازه‌گیری پاسخ بدست می‌آید. در این مقاله، به بررسی عددی و تجربی یکی از این روش‌ها به نام تجزیه فرکانسی پرداخته شده است. در بررسی عددی، از مدل یک ساختمان ۶ طبقه استفاده شده است. بدین منظور ابتدا ساختمان به روش المان محدود مدل شده و پارامترهای مودال دقیق آن محاسبه شده است. سپس ساختمان در یک آزمایش شبیه سازی شده تحت تحریک اتفاقی قرار گرفته و با بکارگیری روش تجزیه فرکانسی بر روی پاسخ‌ها، پارامترهای مودال آن محاسبه شده است. مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی با نتایج حل دقیق اختلافات اندکی را نشان می‌دهند، بعلاوه اثرات محل و نوع تحریک و همچنین اثر میزان نویز در نتایج، مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین به منظور بررسی تجربی روش مذکور، یک تیر دو سر گیر دار تحت تست مودال کلاسیک و تست ارتعاش محیطی قرار گرفته است. با اجرای روش تجزیه فرکانسی بر روی نتایج تست ارتعاش محیطی، پارامترهای مودال بدست آمده‌اند. مقایسه این نتایج با آنچه از تست مودال کلاسیک بدست آمده است، نشانگر دقت مناسب روش تجزیه فرکانسی در تقریب پارامترهای مودال سازه است. |

### ۱- مقدمه

مدل‌های تقریبی عددی، نظیر روش اجزاء محدود<sup>۱</sup>، با مشکلاتی مواجه باشند. از این رو تست مودال، به عنوان ابزار مناسبی برای دستیابی به خواص دینامیکی سازه‌ها، شناخته شده است. روش‌های آنالیز مودال کلاسیک بر اندازه‌گیری ورودی/خروجی مبتنی بوده و با بکارگیری روش‌های شناسایی مدل؛ نظیر انتخاب قله<sup>۲</sup>، روش زمانی ابراهیم<sup>۳</sup>، تابع شناسایی مود مختلط<sup>۴</sup> و غیره به استخراج پارامترهای مودال سازه می‌پردازند [۱].

تحلیل دینامیکی، یکی از ضروریات مهم در طراحی، ساخت و نگهداری سازه‌ها می‌باشد. اما به جهت در دسترس نبودن جواب تحلیلی برای سازه‌های پیچیده، با بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف و نیز وجود خطاهایی نظیر؛ خطاهای حاصل از بکارگیری فرضیات و تئوری‌های نامناسب، خطا در مدل کردن جزئیات سازه‌های پیچیده و عدم اطلاع صحیح از خواص مواد،

<sup>1</sup> Finite Element Method (FEM)

<sup>2</sup> Pick peaking

<sup>3</sup> Ibrahim Time Domain (ITD) method

<sup>4</sup> Complex Mode Indicator Function (CMIF)

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m.m.khatybi@gmail.com

۱. مدرس، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان

۲. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

اثر نویز در نتایج، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه به منظور ارزیابی تجربی روش مذکور، یک تیر دو سر گیردار تحت تست مودال کلاسیک و تست ارتعاش محیطی قرار گرفته است. با اجرای روش تجزیه فرکانسی بر روی نتایج حاصل از تست ارتعاش محیطی، پارامترهای مودال سازه محاسبه و با آنچه از تست مودال کلاسیک بدست آمده است، مقایسه شده‌اند. نتایج این مقایسه نشان می‌دهد که روش مذکور از دقت بالایی در تقریب پارامترهای مودال سازه برخوردار است.

## ۲- تئوری روش تجزیه فرکانسی

روش‌های آنالیز ارتعاشات محیطی به دو دسته کلی؛ پارامتریک و غیر پارامتریک تقسیم بندی می‌شوند. روش‌های غیر پارامتریک با انجام یک مجموعه عملیات ریاضی، بر روی داده‌های اندازه گیری شده، در حوزه فرکانس، به استخراج مشخصات دینامیکی سازه می‌پردازند [۸]؛ در حالیکه در روش‌های پارامتریک، یک مدل پارامتریک برای سیستم، در حوزه زمان تقریب زده شده و مستقیماً بر روی پاسخ‌های بدست آمده از داده‌های اندازه‌گیری منطبق<sup>۴</sup> می‌شود و مدل دینامیکی سیستم استخراج می‌گردد [۹].

یکی از روش‌های غیر پارامتریک، روش تجزیه فرکانسی است، که شباهت‌هایی با روش انتخاب قله و تابع شناسایی مود مختلط دارد. در این روش که توسط برینکر و همکارانش ارائه شده [۶، ۷]، ابتدا ماتریس چگالی طیف توان<sup>۵</sup> پاسخ محاسبه شده و سپس روش تجزیه مقادیر تکین<sup>۶</sup> بر روی آن اعمال می‌شود و به کمک آن، مقادیر فرکانس های طبیعی، ضرایب دمپینگ و شکل مودها بدست می‌آیند.

در سازه‌های بزرگ و پیچیده، تحلیل دینامیکی با چند مشکل اساسی مواجه است. اولین مشکل تحریک سازه می‌باشد، برای تحریک سازه‌های بزرگ باید نیروی زیادی به کار گرفته شود تا تمامی شکل مودهای سازه در محدوده فرکانسی مد نظر تحریک گردد؛ از یک سو چنین نیروی بزرگی، ممکن است موجب خرابی محلی سازه شده و از سوی دیگر موجب بروز رفتار غیر خطی شود. مشکل دوم، وجود نویز فراوان نظیر باد، تردد خودرو و امواج صوتی در محیط تست می‌باشد [۲]. وجود این مشکلات، محققان را بر آن داشته تا به ارائه روش‌های نوین آنالیز مودال اقدام کنند. در این روش‌ها فقط پاسخ سازه به تحریک محیطی، اندازه گیری می‌شود. از این رو این روش‌ها با عنوان آنالیز ارتعاش محیطی<sup>۱</sup> یا آنالیز مودال فقط پاسخ<sup>۲</sup> شناخته می‌شوند. اولین موارد کاربرد این روش‌ها، در زمینه بررسی ارتعاشات پل معلق [۳] و ارتعاشات سازه‌ها [۴] صورت گرفته است. در دهه‌ی اخیر، با پیشرفت کامپیوترها و روش‌های محاسباتی، فعالیت گسترده‌تری در این زمینه انجام شده است. در برخی مطالعات روش‌های استفاده از تحریک طبیعی برای شناسایی سیستم مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۵]. برینکر و همکارانش روشی را به نام تجزیه فرکانسی<sup>۳</sup> ارائه کرده‌اند [۶]، که چندی بعد با کمی تغییر به عنوان یکی از پرکاربردترین روش‌های آنالیز مودال بر مبنای پاسخ شناخته شد [۷].

در این مقاله، روش تجزیه فرکانسی تحت شبیه‌سازی و بررسی تجربی قرار گرفته است. به منظور شبیه‌سازی، از مدل المان محدود یک ساختمان ۶ طبقه کمک گرفته شده است و پارامترهای مودال دقیق آن محاسبه شده‌اند. در ادامه، مدل در نرم‌افزار Matlab، تحت تحریک اتفاقی قرار گرفته و با اجرای روش تجزیه فرکانسی بر روی پاسخ‌های آن، پارامترهای مودال آن محاسبه شده‌اند. علاوه بر این، روش از دید محل و نوع تحریک و همچنین

<sup>4</sup> Fit

<sup>5</sup> Power Spectral Density(PSD)

<sup>6</sup> Singular Value Decomposition(SVD)

<sup>1</sup> Ambient Vibration Analysis

<sup>2</sup> Output Only Modal Analysis(OOMA)

<sup>3</sup> Frequency Domain Decomposition (FDD)

$$A_k \propto Q_k C \bar{Q}_k = \phi_k \gamma_k C \gamma_k^T \phi_k^T = d_k \phi_k \phi_k^T \quad (۶)$$
 که در آن  $d_k$  یک اسکالر،  $\phi_k$  بردار شکل مود  $k$  ام و  $\gamma_k$  بردار دخالت مود می‌باشد. بنابراین در نهایت چگالی توان پاسخ ها بر حسب شکل مودها و قطب‌های سیستم به صورت رابطه ۷ در خواهد آمد.

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{d_k \phi_k \phi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{d}_k \bar{\phi}_k \bar{\phi}_k^T}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (۷)$$

رابطه (۷) بیان می‌کند که، در هر فرکانس تعداد محدودی مود در ساختن پاسخ سیستم شرکت می‌نمایند. در نزدیکی فرکانس های طبیعی سیستم، فقط یک مود، به طرز قابل توجهی پاسخ سیستم را می‌سازد. لذا پاسخ در این فرکانس، بسیار شبیه شکل مود این فرکانس خواهد بود. اگر ماتریس طیف چگالی توان پاسخ، در هر فرکانس به مقادیر و بردارهای تکین آن تجزیه گردد (رابطه ۸)؛ از آنجایی که مقادیر تکین در ارتباط مستقیم با ضریب شرکت مودها می‌باشند، تعداد مقادیر تکین غیر صفر، نشان دهنده تعداد مودهایی است که پاسخ سیستم را در آن فرکانس می‌سازند و قله‌های اولین مقدار تکین سیستم، معادل با فرکانس های طبیعی سیستم خواهد بود. از طرف دیگر بردارهای تکین متناظر با قله های اولین مقادیر تکین، بردارهای شکل مود سیستم را تقریب می‌زنند. در روش FDD برای بدست آوردن ضرایب دمپینگ می‌توان از نقاط نیم توان استفاده کرد، که البته از دقت چندان خوبی برخوردار نمی‌باشد [۷].

$$\hat{G}_{yy}(j\omega_i) = U_i S_i U_i^H \quad (۸)$$

در رابطه فوق،  $U_i$  بردار تکین و  $S_i$  ماتریس مقادیر تکین سیستم در فرکانس  $\omega_i$  می‌باشد.

### ۳- شبیه سازی

#### ۳-۱- مدل اجزاء محدود یک ساختمان ۶ طبقه

در این بخش به منظور شبیه سازی روش تجزیه فرکانسی، از مدل المان محدود یک ساختمان ۶ طبقه استفاده شده است (شکل ۱). بدین منظور با فرض صلب بودن کف

اساس روابط حاکم بر FDD، بر رابطه بین خروجی ها و ورودی های یک سیستم استوار است رابطه ۱ [۱۰].

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega).G_{xx}(j\omega).H^T(j\omega) \quad (۱)$$

که در آن  $G_{xx}$  ماتریس طیف چگالی توان ورودی،  $G_{yy}$  ماتریس طیف چگالی توان خروجی و  $H(j\omega)$ ، ماتریس تابع پاسخ فرکانسی می‌باشد. برای ماتریس پاسخ فرکانسی می‌توان نوشت [۱]:

$$H(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{Q}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (۲)$$

که  $Q_k$  نشان دهنده ترم باقیمانده،  $\lambda_k$  نشان دهنده  $k$  امین فرکانس طبیعی و علامت "-" نشان دهنده مزدوج مختلط و  $n$  تعداد مود های مد نظر را نشان می‌دهد. با ترکیب روابط ۱ و ۲ رابطه بین چگالی توان ورودی و خروجی مطابق رابطه ۳ بدست می‌آید [۷].

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{Q_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{Q}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \right] . G_{xx}(j\omega) \left[ \sum_{s=1}^n \frac{Q_s}{j\omega - \lambda_s} + \frac{\bar{Q}_s}{j\omega - \bar{\lambda}_s} \right] \quad (۳)$$

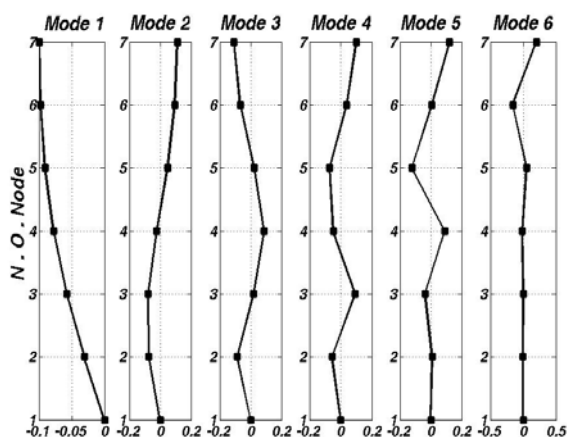
در صورتیکه ورودی نویز سفید باشد، ماتریس چگالی توان آن یک ماتریس قطری به فرم  $G_{xx}(j\omega) = C[I]$  خواهد بود. با جایگزین کردن این رابطه در رابطه (۳) و ساده کردن آن، رابطه ۴ حاصل خواهد شد [۷].

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{A}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} + \frac{B_k}{-j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{B}_k}{-j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (۴)$$

در این معادله  $A_k$ ،  $k$  امین باقیمانده چگالی توان خروجی می‌باشد، که با رابطه (۵) نمایش داده شده است.

$$A_k = Q_K C \left( \sum_{s=1}^n \frac{\bar{Q}_k^T}{-\lambda_k - \lambda_s} + \frac{Q_k^T}{-\lambda_k - \lambda_s} \right) \quad (۵)$$

با استفاده از خاصیت تعامد مود ها، باقیمانده به صورت  $A_k = Q_k C \bar{Q}_k / 2\alpha_k$  در آن  $\alpha_k$  بخش حقیقی  $k$  امین قطب  $\lambda_k = -\alpha_k + j\omega_k$  می‌باشد. در صورتیکه میرایی سیستم کم باشد، ترم باقیمانده متناسب با شکل مود خواهد بود و لذا بصورت  $Q_K = \phi_k \gamma_k$  در خواهد آمد. بنابراین:



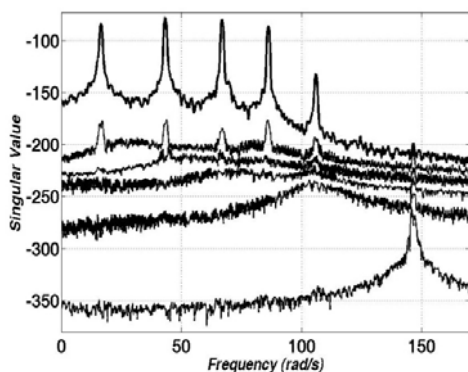
شکل ۲- شکل مودهای محاسبه شده به روش اجزاء محدود

### ۲-۳- شبیه سازی روش تجزیه فرکانسی

به منظور اجرای روش، ابتدا مدل اجزاء محدود ساختمان، در محیط سیمولینک نرم افزار Matlab تحریک شده است و فقط پاسخ سازه اندازه گیری شده و به کمک روش تجزیه فرکانسی پارامترهای مودال آن محاسبه شده است. آنگاه با تغییر محل تحریک، نوع تحریک و میزان نویز وارده در تست شبیه سازی شده، اثر این عوامل بر روی روش تجزیه فرکانسی بررسی شده است.

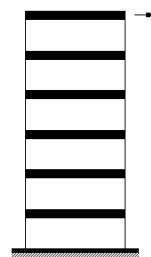
### ۳-۳- بررسی اثر محل تحریک

در آزمایش شبیه سازی شده، در مرحله اول، ساختمان از درجه آزادی اول تحریک شده است. با اندازه گیری پاسخ در تمام درجات آزادی، طیف چگالی توان پاسخ محاسبه و نمودار آن ترسیم شده است (شکل ۳).



شکل ۳- نمودار مقادیر تکین طیف پاسخ - تحریک در درجه آزادی اول

طبقات، برای هر طبقه یک درجه آزادی در جهت جانبی در نظر گرفته شده است. بنابراین یک مدل ۶ درجه آزادی برای این ساختمان بدست آمده است.



شکل ۱- مدل ۶ درجه آزادی یک ساختمان ۶ طبقه

برای مدل فوق، با استفاده از روش ضرایب تاثیر، عناصر ماتریس سختی محاسبه شده است (رابطه ۹). همچنین با فرض توزیع یکنواخت جرم در هر المان، ماتریس جرم بدست آمده است (رابطه ۱۰) [۱]:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 24 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$M = \beta \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $EI$  سختی خمشی،  $L$  ارتفاع هر طبقه و  $2\beta$  جرم هر طبقه می‌باشند.

با استفاده از ماتریس‌های فوق، فرکانس‌های طبیعی (جدول ۱) و شکل مودهای ساختمان محاسبه شده‌اند (شکل ۲).

جدول ۱- فرکانس‌های طبیعی - روش اجزاء محدود

| شماره مود | فرکانس‌های طبیعی (rad/s) |
|-----------|--------------------------|
| ۱         | ۱۶,۵۷                    |
| ۲         | ۴۳,۲۶                    |
| ۳         | ۶۶,۸۸                    |
| ۴         | ۸۶,۲۱                    |
| ۵         | ۱۰۶,۰۰                   |
| ۶         | ۱۴۶,۵۰                   |

فرکانس‌های طبیعی و ضرایب دمپینگ محاسبه شده در این حالت، در جدول ۲ ارائه و با مقادیر FEM، مقایسه شده است.

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی و ضرایب دمپینگ محاسبه شده - تحریک در درجه آزادی ششم

| شماره مود      | فرکانس های طبیعی (Rad/s) |        | ضرایب دمپینگ (%) |      |
|----------------|--------------------------|--------|------------------|------|
|                | FEM                      | FDD    | FEM              | FDD  |
| ۱              | ۱۶,۵۷                    | ۱۶,۵۸  | ۱,۸۵             | ۰,۳۱ |
| ۲              | ۴۳,۲۶                    | ۴۳,۲۷  | ۰,۵۳             | ۰,۴۳ |
| ۳              | ۶۶,۸۸                    | ۶۷,۰۱  | ۰,۳۴             | ۰,۴۹ |
| ۴              | ۸۶,۲۱                    | ۸۶,۲۰  | ۰,۳۵             | ۰,۵۸ |
| ۵              | ۱۰۶,۰۰                   | ۱۰۶,۱۰ | ۰,۲۸             | ۰,۸۹ |
| ۶              | ۱۴۶,۵۰                   | ۱۴۶,۶۰ | ۰,۱۵             | ۱,۵۱ |
| خطای متوسط (%) | ۰,۲۵۶                    |        | ۱۲۴,۳۲           |      |

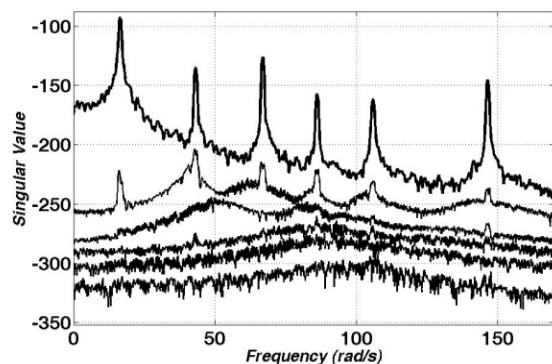
جدول ۲، نشان می‌دهد، که روش FDD با دقت بسیار مناسبی، فرکانس‌های طبیعی را تقریب می‌زند ولی همانطور که در بخش تئوری اشاره شد، اجرای روش نقاط نیم توان بر روی قله های مقدار تکین اول (شکل ۴) برای محاسبه دمپینگ از دقت مناسبی برخوردار نیست. بنابراین در ادامه به دلیل عدم دقت، ضرایب دمپینگ محاسبه نشده اند، البته برای محاسبه دمپینگ می‌توان از روش های دیگری نظیر روش تجزیه فرکانسی بهبود یافته استفاده نمود [۱۲].

به منظور مقایسه‌ی شکل مودهای بدست آمده، ابتدا شکل مودهای FEM و FDD ترسیم شده‌اند (شکل ۵). ولی همانطور که شکل ۵ نشان می‌دهد، شکل مودهای بدست آمده از روش FDD با آنچه از مدل المان محدود بدست آمده است، اختلاف دارد. که این موضوع یکی از مشکلات مهم روش‌های آنالیز مودال محیطی است و چنین شکل مودهایی، شکل مودهای نامیزان نامیده می‌شوند. البته روش‌هایی برای اصلاح شکل مودهای نامیزان در سال‌های اخیر ارائه شده است [۱۳].

در شکل ۳، نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ به ازای فرکانس ترسیم شده است. در نزدیکی فرکانس‌های طبیعی سیستم، یک مود به طرز قابل توجهی پاسخ سیستم را می‌سازد. لذا پاسخ در این فرکانس، بسیار شبیه شکل مود این فرکانس خواهد بود. از آنجایی که مقادیر تکین در ارتباط مستقیم با ضریب شرکت مودها می‌باشند، تعداد مقادیر تکین غیر صفر، نشان دهنده تعداد مودهایی است که پاسخ سیستم را در آن فرکانس می‌سازند و قله‌های اولین مقدار تکین سیستم، معادل با فرکانس‌های طبیعی سیستم خواهند بود. از طرف دیگر بردارهای تکین متناظر با قله‌های اولین مقادیر تکین، بردارهای شکل مود سیستم را تقریب می‌زنند.

همانطور که در شکل ۳، مشاهده می‌شود، تحریک در درجه آزادی اول، مود ششم سازه را به خوبی تحریک نکرده است. به همین دلیل مقدار تکین اول در شکل ۳، قله‌ای متناظر با فرکانس ششم ندارد.

در مرحله بعد، تحریک در درجه آزادی ششم، صورت گرفته است. با اندازه‌گیری پاسخ در تمام درجات آزادی، طیف چگالی توان پاسخ محاسبه و نمودار آن ترسیم شده است (شکل ۴). همانطور که شکل ۴، نشان می‌دهد، همه‌ی فرکانس‌های طبیعی سازه، به خوبی تحریک شده اند. بنابراین به کمک روش تجزیه فرکانسی، فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و ضرایب دمپینگ (به روش نقاط نیم توان) محاسبه شده‌اند.



شکل ۴- نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ - تحریک در درجه آزادی ششم

همانطور که شکل ۶ نشان می‌دهد، مقادیر قطر اصلی نمودار مک یک می‌باشند، که نشان دهنده ارتباط کامل بین شکل مودهای روش تجزیه فرکانسی با روش اجزاء محدود است.

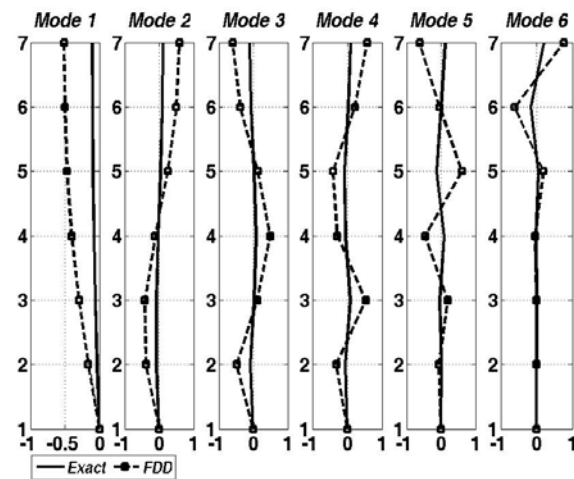
نتایج حاصل، نشان می‌دهند که علاوه بر اینکه باید تمام محدوده فرکانسی مد نظر تحریک شود، باید تمامی شکل مودهای موجود در آن محدوده فرکانسی نیز به خوبی تحریک شوند. بنابراین محل تحریک باید حتی‌المقدور در تمامی شکل مودها در شکم<sup>۲</sup> باشد و در گره قرار نگیرد.

در تحریک در درجه آزادی اول، مودهای اول تا پنجم به خوبی تحریک شده اند (شکل ۳) ولی مود ششم تحریک نشده است. زیرا در مود ششم، درجه آزادی اول حرکت بسیار کمی دارد. اگر شکل مود اول روش اجزاء محدود، تحت بررسی قرار گیرد (رابطه ۱۲)، مشاهده می‌شود که نسبت جابجایی درجه آزادی اول به درجه آزادی ششم حدود 0.09% است. بنابراین تحریک در درجه آزادی اول نتوانسته است مود ششم را به خوبی تحریک کند.

$$\Phi_6^{FEM} = \begin{Bmatrix} -0.0002 \\ 0.0015 \\ -0.0100 \\ 0.0504 \\ -0.1598 \\ 0.2022 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

البته در تست ارتعاش محیطی، تحریک توسط محیط صورت می‌گیرد و در واقع سازه در تمام درجات آزادی تحریک می‌شود و چنین مشکلی در شرایط واقعی بوجود نخواهد آمد.

به منظور بررسی این موضوع، سازه در تمام درجات آزادی نیز تحریک شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که، تحریک سازه در تمام درجات آزادی می‌تواند با دقت بسیار مناسبی فرکانس های طبیعی و شکل مودها را محاسبه کند (جدول ۳ و شکل ۷).



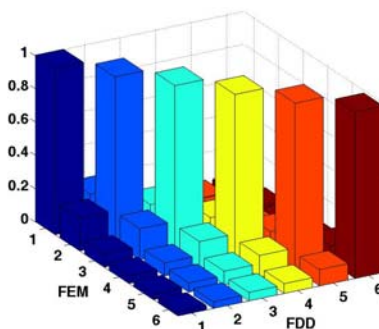
شکل ۵- مقایسه شکل مودهای دو روش تجزیه فرکانسی و اجزاء محدود، تحریک در درجه آزادی ششم

بنابراین برای اطمینان از ارتباط کامل شکل مودهای روش تجزیه فرکانسی و روش اجزاء محدود از معیار مک<sup>۱</sup>، که بر اساس رابطه (۱۱) محاسبه شده، استفاده شده است.

$$MAC(i, j) = \frac{|\{\varphi\}_{FDD-i}^T \{\varphi\}_{FEM-j}|^2}{|\{\varphi\}_{FDD-i}^T \{\varphi\}_{FDD-i} \times |\{\varphi\}_{FEM-j}^T \{\varphi\}_{FEM-j}|} \quad (11)$$

که  $\{\varphi\}_{FDD-i}$  امین،  $i$  امین، شکل مود روش تجزیه فرکانسی و  $\{\varphi\}_{FEM-i}$  امین،  $i$  امین، شکل مود روش اجزاء محدود است.

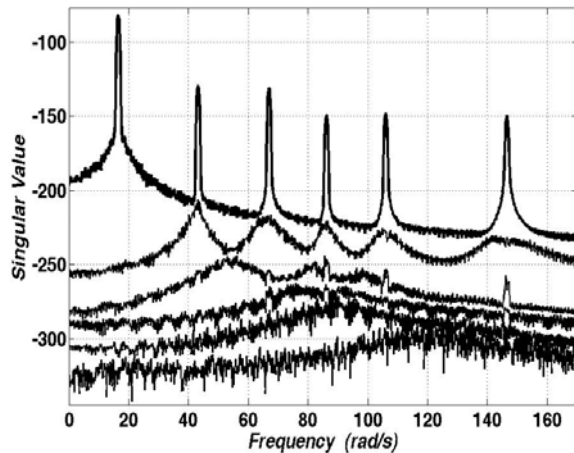
شاخص مک، بیانگر اندازه کسینوس زاویه بین بردارهای شکل مود است. اگر بردارهای شکل مود بر هم منطبق باشند، مقدار این شاخص برابر یک می‌شود. بنابراین، مقدار مک برای همه مودهای روش تجزیه فرکانسی و روش اجزاء محدود محاسبه شده و نمودار آن در شکل ۶، ارائه شده است.



شکل ۶- مقایسه شکل مودهای دو روش تجزیه فرکانسی و اجزاء محدود با استفاده از شاخص مک

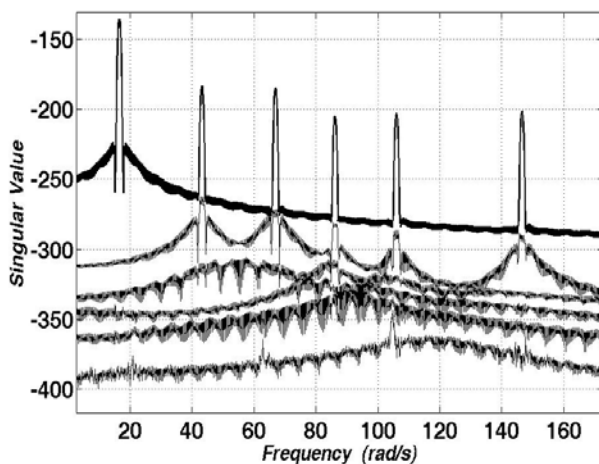
<sup>2</sup> Anti node

<sup>1</sup> Modal Assurance Criteria (MAC)



شکل ۸- نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ در تحریک با سیگنال فرکانس متغیر

در تحریک فرکانس متغیر، سازه با یک سیگنال سینوسی با فرکانس متغیر تحریک می‌شود. در تحریک ضربه همزمان، در یک لحظه در تمام درجات آزادی یک نیروی ضربه‌ای وارد شده است که اگر چه همه‌ی مودها و محدوده فرکانسی مد نظر را تحریک کرده است، ولی چنین تحریکی در محیط واقعی وجود ندارد.

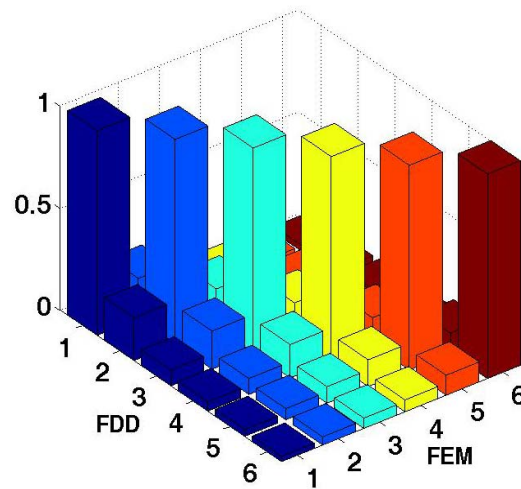


شکل ۹- نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ در تحریک ضربه همزمان

در تحریک ضربه چند گانه، نیروی ضربه‌ای با اختلاف زمانی معینی به درجات آزادی مختلف وارد شده است. این تحریک اگر چه نتایج خوبی را به همراه دارد، ولی حالت ایده آل تحریک نویز سفید است. تحریک نویز سفید

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده - تحریک در تمام درجات آزادی

| شماره مود      | فرکانس‌های طبیعی (rad/s) |        |
|----------------|--------------------------|--------|
|                | FEM                      | FDD    |
| ۱              | ۱۶,۵۷                    | ۱۶,۸۵  |
| ۲              | ۴۳,۲۶                    | ۴۳,۲۷  |
| ۳              | ۶۶,۸۸                    | ۶۶,۹۵  |
| ۴              | ۸۶,۲۱                    | ۸۶,۲۰  |
| ۵              | ۱۰۶,۰۰                   | ۱۰۶,۰۸ |
| ۶              | ۱۴۶,۵۰                   | ۱۴۶,۵۷ |
| خطای متوسط (%) | ۰,۰۵۳                    |        |



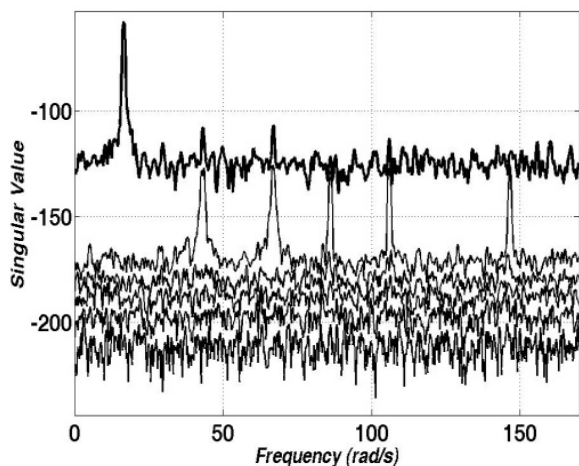
شکل ۷- مقایسه شکل مودهای دو روش تجزیه فرکانسی و اجزاء محدود با استفاده از شاخص مک

### ۳-۴- بررسی اثر نوع تحریک

در ادامه بررسی روش تجزیه فرکانسی، این بار اثر نوع تحریک در نتایج بررسی شده است. بدین منظور ساختمان در تمام درجات آزادی تحت تحریک‌های فرکانس متغیر<sup>۱</sup>، ضربه همزمان، ضربه چندگانه و اتفاقی قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که تحریک‌های انتخاب شده، تقریباً نتایج یکسانی به همراه دارند، در اینجا برخی از نمودارهای مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ ارائه شده است (شکل‌های ۸ و ۹).

<sup>۱</sup> Chirp signal

همچنین نتایج بررسی نشان می‌دهد که تا حداکثر ۲۰٪ نویز، فرکانس‌های طبیعی تخمین زده شده به روش تجزیه فرکانسی از دقت مناسبی برخوردارند ولی شکل مودها در این حالت از دقت مناسبی برخوردار نخواهند بود (شکل ۱۱ و جدول ۴).



شکل ۱۱- نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ با ۲۰٪ نویز

جدول ۴ - مقادیر خطای متوسط در تخمین فرکانس‌های طبیعی به روش FDD

| C (%)          | ۵     | ۱۰    | ۱۵    | ۲۰    |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| خطای متوسط (%) | ۰,۳۱۹ | ۰,۴۷۹ | ۰,۵۹۴ | ۰,۶۶۳ |

#### ۴- بررسی تجربی

به منظور بررسی تجربی روش تجزیه فرکانسی یک تیر دو سر درگیر تحت تست مودال کلاسیک و تست مودال محیطی قرار گرفته است (شکل ۱۲). خصوصیات تیر تحت بررسی در جدول ۵، آمده است.

جدول ۵- خصوصیات تیر تحت تست

| طول (cm) | عرض (cm) | ضخامت (cm) |
|----------|----------|------------|
| ۷۰       | ۴        | ۰,۵        |

تحریکی است که اگر زمان نمونه برداری در تست‌های واقعی طولانی باشد، تقریباً در محیط واقعی، چنین تحریکی به سازه وارد می‌شود.

نتایج حاصل از این بررسی نشان می‌دهد، برای محاسبه پارامترهای مودال سازه به روش تجزیه فرکانسی کافی است، تحریک اعمالی به سازه، کلیه فرکانس‌های مد نظر را تحریک نماید.

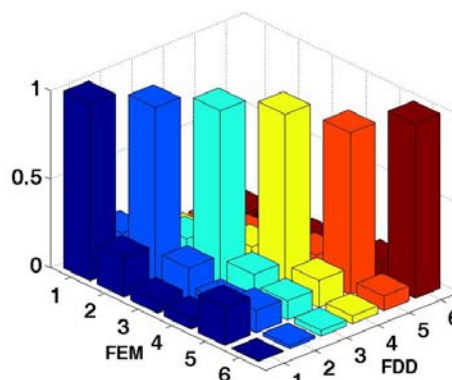
#### ۳-۵- بررسی اثر نویز

در ادامه بررسی روش تجزیه فرکانسی، این بار وجود نویز در سیگنال پاسخ و اثر آن در نتایج بررسی شده است. بدین منظور ساختمان در تمام درجات آزادی با سیگنال اتفاقی<sup>۱</sup> تحریک شده است. سیگنال نویز در محیط سیمولینک نرم افزار متلب به صورت یک سیگنال اتفاقی تولید شده است و با استفاده از رابطه ۱۳ به سیگنال پاسخ سازه اضافه شده است.

$$NS(t) = S(t) * (1 + C * N(t)) \quad (13)$$

که  $NS(t)$  سیگنال پاسخ به همراه نویز، در زمان  $t$ ،  $S(t)$  سیگنال پاسخ بدون نویز در زمان  $t$ ،  $C$  ضریب نویز و  $N(t)$  سیگنال نویز در زمان  $t$  می‌باشد.

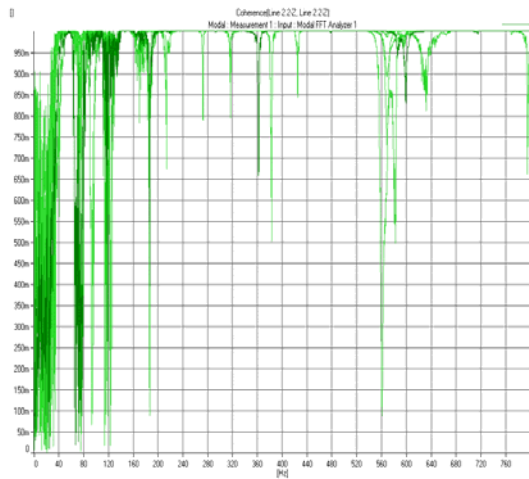
نتایج بررسی نشان می‌دهد که روش تجزیه فرکانسی تا میزان ۱۵٪ نویز ( $C = 0.15$ ) از دقت مناسبی در تخمین شکل مود برخوردار است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰- مقایسه شکل مودهای دو روش تجزیه فرکانسی و اجزاء محدود - ۱۵٪ نویز

<sup>۱</sup> Random signal

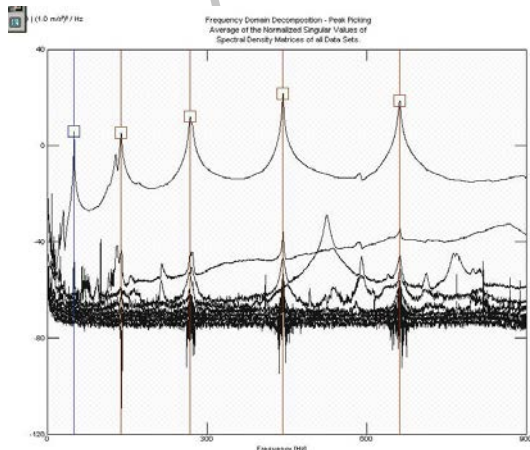




شکل ۱۳-ب- توابع وابستگی حاصل از تست چکش

همانطور که توابع وابستگی نشان می‌دهند (شکل ۱۳-ب)، تست چکش از دقت مناسبی برخوردار است. بنابراین به منظور تخمین پارامترهای مودال تیر تحت تست، توابع پاسخ فرکانسی حاصل از تست به کمک نرم افزار Modent آنالیز شده است [۱۵]. در نتیجه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر بدست آمده اند (جدول ۶ و شکل ۱۵).

در ادامه به منظور اجرای تست ارتعاش محیطی، به کمک چکش، ضربات دلخواهی به تیر وارد شده است. سیگنال شتاب توسط شتاب سنج‌ها اندازه‌گیری شده است. سپس سیگنال‌های شتاب اندازه‌گیری شده، به نرم افزار Operational Modal Analysis منتقل شده و نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ بدست آمده است (شکل ۱۴).



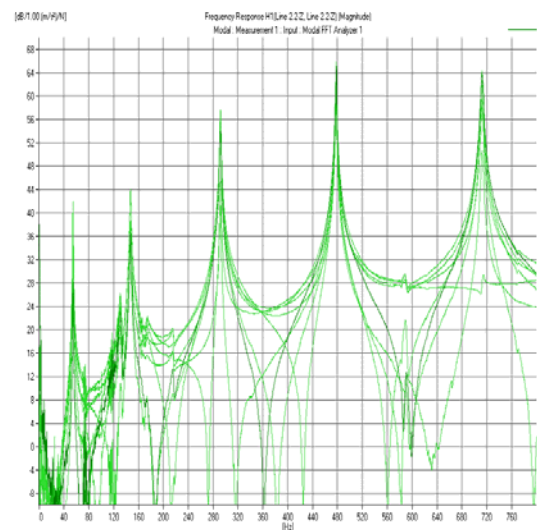
شکل ۱۴- نمودار مقادیر تکین طیف چگالی توان پاسخ

به منظور انجام تست مودال کلاسیک، ۸ شتاب سنج از نوع DJB/A/120V بر روی تیر نصب شده‌اند (شکل ۱۲). همچنین به کمک یک چکش ارتعاشی BK/8202 تیر تحریک شده است و سیگنال نیرو توسط آمپلی فایر ۲۶۴۷A تقویت شده است.



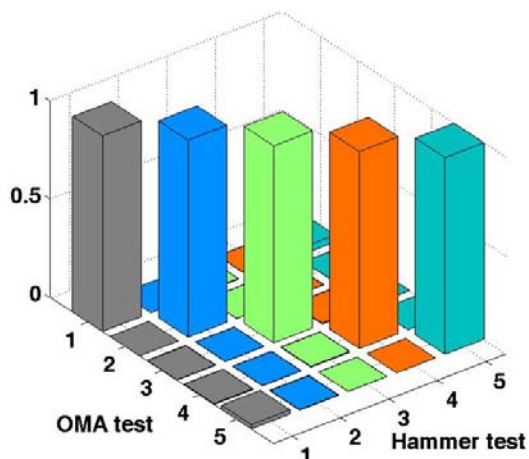
شکل ۱۲- نمایی از تیر دو سر درگیر تحت تست

با اندازه‌گیری نیروی تحریک و شتاب نقاط مختلف، توابع پاسخ فرکانسی و توابع وابستگی<sup>۱</sup> به کمک نرم افزار Pulse8 محاسبه شده‌اند. (شکل ۱۳) [۱۴].



شکل ۱۳-الف- توابع پاسخ فرکانسی حاصل از تست چکش

<sup>۱</sup> Coherence functions



شکل ۱۶- مقایسه شکل مودهای حاصل از تست مودال کلاسیک و تست مودال محیطی به کمک معیار مک

همانطور که شکل ۱۶، نشان می‌دهد، مقادیر قطر اصلی نمودار مک؛ یک می‌باشند. همانطور که پیش از این نیز بیان شد، شاخص مک؛ بیانگر اندازه کسینوس زاویه بین بردارهای شکل مود است. که اگر بردارهای شکل مود بر هم منطبق باشند، مقدار این شاخص برابر یک می‌شود. بنابراین بر اساس شکل ۱۶، شکل مودهای بدست آمده از تست مودال محیطی کاملاً بر شکل مودهای حاصل از تست مودال کلاسیک منطبق هستند. ولی بر اساس شکل ۱۵، شکل مودهای حاصل از تست مودال محیطی با آنچه از تست مودال کلاسیک بدست آمده اختلاف دارند، که اصطلاحاً نامیزانی شکل مودها نامیده می‌شود. به منظور میزان سازی شکل مودهای آنالیز مودال محیطی می‌توان از روش تغییر جرم [۱۶، ۱۷] و یا تغییر جرم و سختی [۱۸] استفاده کرد.

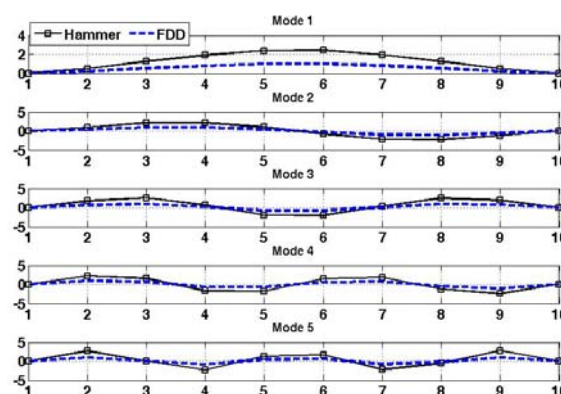
#### ۵- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله یکی از روش‌های آنالیز مودال محیطی به نام تجزیه فرکانسی، به صورت عددی و تجربی تحت بررسی قرار گرفت. شبیه سازی بر روی مدل ۶ درجه آزادی یک ساختمان ۶ طبقه اجرا شده است. در این شبیه

در نرم افزار Operational Modal Analysis با اجرای روش تجزیه فرکانسی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای حاصل از تست مودال محیطی محاسبه شده و با آنچه از تست مودال کلاسیک بدست آمده مقایسه شده‌اند (جدول ۶ و شکل ۱۵).

جدول ۶- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از تست مودال کلاسیک و تست مودال محیطی

| شماره مود      | فرکانس‌های طبیعی (Hz) |          |
|----------------|-----------------------|----------|
|                | Hammer test           | FDD test |
| ۱              | ۵۴,۰۶                 | ۵۴,۰۰    |
| ۲              | ۱۴۶,۵۹                | ۱۴۶,۵۰   |
| ۳              | ۲۹۱,۳۱                | ۲۹۱,۲۵   |
| ۴              | ۴۷۷,۳۴                | ۴۷۷,۲۵   |
| ۵              | ۷۱۲,۰۷                | ۷۱۱,۷۵   |
| خطای متوسط (%) | ۰,۰۵۴                 |          |



شکل ۱۵- مقایسه شکل مودهای حاصل از تست مودال کلاسیک و تست مودال محیطی

شکل ۱۵، نشان می‌دهد که شکل مودهای بدست آمده از تست مودال محیطی با آنچه از تست مودال کلاسیک بدست آمده است، اختلاف دارد. که در بخش شبیه سازی نیز به این موضوع اشاره شد. به منظور بررسی ارتباط بین شکل مودهای حاصل از تست مودال کلاسیک و تست مودال محیطی، از معیار مک استفاده شده است (شکل ۱۶).

فرکانسی بر شکل مودهای دقیق منطبق هستند ولی از لحاظ اندازه با شکل مود دقیق اختلاف دارند، که اصطلاحاً نامیزانی شکل مودها نامیده می‌شود. به منظور میزان سازی شکل مودها می‌توان از روش‌های تغییر جرم و یا تغییر جرم و سختی استفاده کرد.

به منظور تخمین دقیق پارامترهای مودال سازه توسط روش تجزیه فرکانسی، تحریک سازه باید طوری باشد که اولاً تمام محدوده فرکانسی مد نظر را تحریک کند و ثانیاً تحریک باید تمامی شکل مودهای مد نظر را به خوبی تحریک کند، تا امکان محاسبه دقیق شکل مودهای سازه فراهم شود.

به منظور بررسی تجربی روش تجزیه فرکانسی، یک تیر دو سر در گیر تحت تست مودال کلاسیک (تست چکش) و تست مودال محیطی قرار گرفت. فرکانس های طبیعی و شکل مودها به کمک آنالیز مودال کلاسیک و روش تجزیه فرکانسی بدست آمده‌اند. بررسی نتایج بدست آمده، نشان دهنده ی دقت مناسب روش تجزیه فرکانسی در تخمین پارامترهای مودال سازه است.

سازی اثر محل و نوع تحریک و همچنین وجود نویز در اندازه گیری بر روی نتایج بررسی شده است.

نتایج حاصل نشان می‌دهد، روش تجزیه فرکانسی در محاسبه فرکانس‌های طبیعی از دقت بسیار بالایی برخوردار است و حتی در حضور نویز ۲۰٪ در اندازه گیری، با دقت مناسبی فرکانس های طبیعی را تخمین می‌زند. علاوه بر فرکانس طبیعی، روش تجزیه فرکانسی می‌تواند با استفاده از تکنیک نقاط نیم توان، ضرایب دمپینگ سازه را محاسبه کند ولی نتایج حاصل نشان می‌دهد که این روش از دقت مناسبی در تخمین ضرایب دمپینگ برخوردار نیست و برای محاسبه ضرایب دمپینگ می‌توان از روش های دیگری نظیر روش تجزیه فرکانسی بهبود یافته استفاده کرد.

همچنین، نتایج حاصل از شبیه سازی نشان می‌دهد که روش تجزیه فرکانسی از دقت بالایی در تخمین شکل مودها برخوردار است و حتی در حضور نویز ۱۵٪ در اندازه گیری، با دقت مناسبی شکل مودهای سازه را محاسبه می‌کند. اگر چه شکل مودهای حاصل از روش تجزیه

## مراجع

- [1] Ewins, D. J. (2000), *Modal Testing: Theory, Practice and Application* (2nd Ed.), RESEARCH STUDIES PRESS LTD, England.
- [2] Hanson, D. (2006), "Operational Modal Analysis and Model Updating with a Cyclostationary Input", Ph.D. Thesis, University of New South Wales, Australia.
- [3] Abel-Ghaffer, A.M., Housner, G.W. (1978). Ambient Vibration Test of Suspension Bridge, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, Vol. 104(5), pp. 983-999.
- [4] Begg, R.D., Mackenzie, A.C., Dodds, C.J., Loland, O. (1976), "Structural Integrity Monitoring Using Digital Processing of Vibration Signals", 8th Annual Offshore Technology Conference (OTC), Texas, USA.
- [5] James, G. H., Crane, T. G., Laufer, J. P. (1995). The natural Excitation Technique (NexT) for Modal Parameter Extraction from Operating Structures, *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 10(4), pp. 260-277.
- [6] Brincker, R., Zhang, L., and Andersen, P. (2000), "Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition", 18th International Modal Analysis Conference (IMAC), USA.
- [7] Brincker, R., Zhang, L., and Andersen, P. (2001). Modal identification of output only systems using frequency domain decomposition, *Journal of Smart Materials and Structures*, Vol. 10, pp.441- 445.
- [8] Wenzel, H., Pichler, D. (2005), *Ambient Vibration Monitoring* (1st Ed.), John Wiley & Sons, Ltd, England.
- [9] Zhang, L., Brincker, R., Andersen, R. (2005), "An Overview of Operational Modal Analysis: Major Development and Issues", 1st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC), Copenhagen, Denmark, April 26-27.

- [10] Brandt, A. (2011), Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures (1st Ed.), John Wiley & Sons.
- [11] Thomson, W.T., Dahleh, M.D. (1998) Theory of Vibration with Applications (5th Ed.), Prentice Hall.
- [12] Magalhães, F., Cunha, Á., Caetano, E., Brincker, R. (2010) Damping estimation using free decays and ambient vibration tests, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24(5), pp. 1274-1290.
- [13] López Aenlle, M., Fernández, P., Brincker, R., Fernández Canteli, A. (2010). Scaling Factor Estimation Using an Optimized Mass Change Strategy, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24(5), pp. 1260-1273.
- [14] PULSE, Version 8.0, (1996–2003), Bruel & Kjaer, Sound & Vibration Measurement A/S.
- [15] MODENT, Integrated Software for Structural Dynamics, ICATS (1988–2000), Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, UK.
- [۱۶] خطیبی، م.م، آشوری، م.ر، آلبویه، ع.ر. (۱۳۸۸)، میزان سازی دقیق شکل مودهای آنالیز مودال محیطی با استفاده از آنالیز حساسیت، مجله علمی و پژوهشی مدل سازی در مهندسی، دوره ۷، شماره ۱۹.
- [17] Khatibi, M.M., Ashory, M.R., Albooyeh, A.R. (2011). Optimum Amount of Additive Mass in Scaling of Operational Mode Shapes, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 39(5), pp. 733-750.
- [18] Khatibi, M.M., Ashory, M.R., Malekjafarian, A., Brincker, R. (2012). Mass-Stiffness Change Method for Scaling of Operational Mode Shapes, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 26, pp. 34-59.

## NUMERICAL AND EXPERIMENTAL CONSIDERATION OF FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION METHOD FOR MODAL PARAMETERS IDENTIFICATION OF STRUCTURE

M. M. Khatibi<sup>1,\*</sup>, M. R. Ashory<sup>2</sup>, A. R. Albooyeh<sup>1</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Semnan Branch, Islamic Azad University, Semnan
2. Associate Professor, School of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan

\*Corresponding Author: m.m.khatybi@gmail.com

---

### ARTICLE INFO

Keywords:  
Operational Modal Analysis,  
Frequency Domain Decomposition Method,  
Modal Parameters, Finite Element Method.

### ABSTRACT

Classical modal testing of large structures such as bridges, towers and building is encountered with some problems such as exciting the structure and noisy environment. Therefore, researchers have proposed some new methods for identification of dynamic properties by measuring only the responses of structure. In this paper, one of the well-known methods entitled Frequency Domain Decomposition (FDD) is considered numerically and experimentally. The finite element method was used to conduct a model of a six stories building. The model was excited by random forces in a simulated test and modal parameters of the building were estimated. Also, the sensitivity of the results to the location and the type of excitation and measurement noise has been evaluated. To consider the FDD method experimentally, a clamped-clamped beam has been used. The classical and operational modal tests have been conducted on the beam and the modal parameters were estimated. The results of numerical and experimental studies show the effectiveness and accuracy of the FDD method in identification of modal parameters of structure.

---