

## تأثیر مشخصات تکیه گاه ویسکوالاستیک مدل سازی شده با مدل جامع کلوین - ویت بر ارتعاش محوری میله

روح اله زنگانه<sup>۱\*</sup>، علیرضا کرامت<sup>۲</sup> و احمد احمدی<sup>۳</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
<p><b>واژگان کلیدی:</b> استهلاک انرژی، ارتعاش محوری، روش اجزای محدود، تکیه گاه ویسکوالاستیک، مدل جامع کلوین - ویت.</p>	<p>استفاده از مواد ویسکوالاستیک در تکیه گاه به منظور میرایی نیروهای دینامیکی و استهلاک انرژی سازه در این مقاله بررسی شده است. مشخصات مصالح ویسکوالاستیک بکار رفته، در کیفیت و کمیت میرایی تأثیر گذار می باشند. در این مطالعه مواد ویسکوالاستیک توسط مدل مکانیکی جامع کلوین - ویت توصیف و معادلات حاکم به روش اجزای محدود و در حوزه زمان حل شدند. جهت بررسی تأثیر مشخصات مواد ویسکوالاستیک تکیه گاه بر ارتعاش محوری، تحلیل دینامیکی و شبه پایدار میله ای تحت نیروی ثابت پله ای صورت گرفت. در نهایت معیارهایی جهت شناخت و انتخاب مناسب این مواد و بهبود عملکرد آنها در میرایی و استهلاک انرژی ارائه گردید. سپس ارتعاش محوری میله ای با مصالح الاستیک و همچنین ویسکوالاستیک، با وجود تکیه گاه مرزی و میانی ساخته شده از مواد ویسکوالاستیک تحت بار محرک هارمونیک در فرکانس های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصله حاکی از آن است که استفاده از تکیه گاه ویسکوالاستیک در کاهش و میرایی ارتعاشات میله به ویژه در فرکانس های کم بسیار موثر است. در فرکانس های بالا عملکرد این مواد در استهلاک انرژی بسیار وابسته به زمان تأخیر المانهای کلوین - ویت می باشد.</p>

### ۱- مقدمه

تشکیل دهنده سازه و چه زمانی که به عنوان مواد به کار رفته در سازه های جانبی مرتبط با سازه اصلی استفاده شده اند، بارها به روش های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال در بررسی پدیده ضربه قوچ، اندرکنش سیال - سازه و ارتعاشات سازه ای [۱ و ۲]، در بررسی فشار خون در مهندسی پزشکی، (به دلیل خاصیت پلیمری ای که خون، رگهای بدن و دنده هایی که شاهرگ های اصلی بر آنها تکیه دارند، از خود نشان می دهند) [۳] عملکرد مواد ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین می توان در مهندسی راه آهن به بررسی تأثیر تکیه گاه های ویسکوالاستیک قرار گرفته در زیر ریل های راه آهن [۴]، در مهندسی مکانیک به بررسی کاهش صدا و پاسخ ماشین آلات چرخشی با وجود تکیه -

مواد پلیمری زیادی وجود دارند که دارای خاصیت ویسکوالاستیک می باشند. شناخت بهتر و مدلسازی دقیقتر رفتار آنها در بخشهای مختلف مهندسی می تواند منجر به طرح بهینه و کارآمدتر گردد. این مواد به دلیل قابلیتشان در استهلاک انرژی و میرایی ارتعاشات، مورد توجه بسیاری از محققین در علوم مختلف قرار گرفته اند. لذا عملکرد و رفتارشان، چه زمانی که به عنوان مواد اصلی

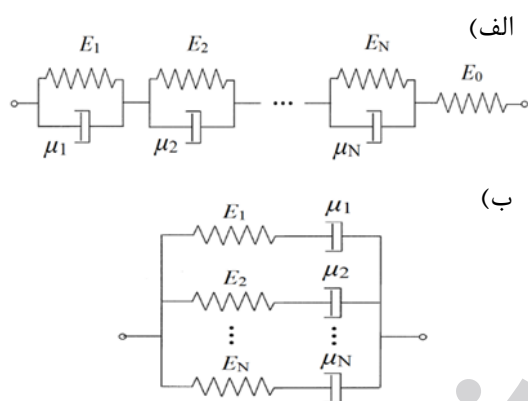
\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: roohollah.zanganeh@gmail.com

۱. دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود

۲. استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

۳. دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود

تک المانی کلوین - ویت، ماکسول، کلوین - ویت تعمیم یافته<sup>۱</sup> (شکل ۲- الف) و ماکسول تعمیم یافته<sup>۲</sup> (شکل ۲- ب) قیاس زده می‌شود. دو مدل اول نمی‌توانند به خوبی رفتار واقعی مواد ویسکوالاستیک را مدل نمایند و بهتر است از مدل‌های سوم و چهارم برای مدلسازی دقیق‌تر این مواد استفاده شود به طوری که بهتر است برای جامدات ویسکوالاستیک از مدل کلوین - ویت تعمیم یافته که شامل  $N$  المان کلوین - ویت و یک فنر که به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند، استفاده شود و برای سیالات ویسکوالاستیک، مدل تعمیم یافته ماکسول که شامل  $N$  المان ماکسول به صورت موازی است مورد استفاده قرار گیرد [۸].

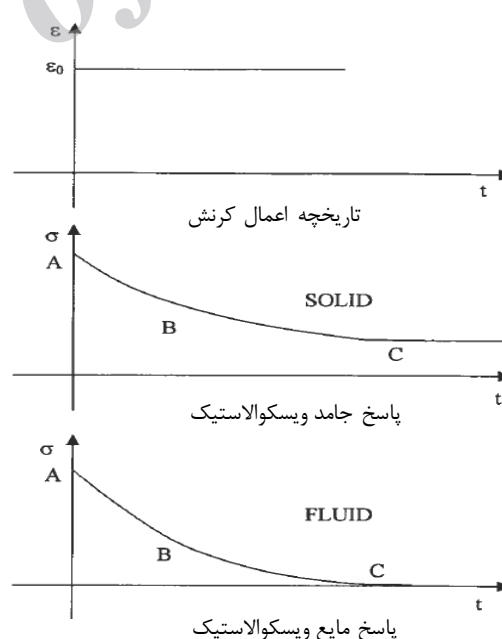


شکل ۲- الف- مدل جامع کلوین-ویت. ب- مدل جامع ماکسول.

در روابط ساختاری (تنش- کرنش) ارایه شده جهت توصیف مواد ویسکوالاستیک، به منظور اجتناب از مشتقات مراتب بالای تنش و کرنش نسبت به زمان در مدل‌های مکانیکی مرسوم مواد ویسکوالاستیک (ماکسول کلوین- ویت تعمیم یافته)، از روابطی بر حسب انتگرال کانولوشن استفاده شده است.

جهت محاسبه عددی انتگرال کانولوشن<sup>۳</sup> ناشی از رفتار ویسکوالاستیک، یک تقریب عددی بازگشتی براساس مقادیری از گام زمانی فعلی و قبلی توسط Keramat و Ahmadi [۲] ارائه شده است. با به کارگیری این تقریب می‌توان به راحتی با استفاده از روش اجزای محدود و در

گاه‌های غلطکی ویسکوالاستیک [۵ و ۶] اشاره نمود. در واقع استهلاک انرژی ارتعاش سازه توسط تکیه‌گاه ویسکوالاستیک یکی از روشهای کارآمد برای کاهش مقدار نیروهای ضربه‌ای شدید، صداهای حاصله و مشکلات مرتبط با خستگی می‌باشد. پاسخ تکیه‌گاه نقش مهمی در رفتار سیستم از جهت ایجاد صدا و قابلیت آن در استهلاک انرژی مخصوصاً در فرکانس‌های پایین دارد [۷]. نمونه‌ای از رفتار مواد ویسکوالاستیک در تست کرنش ثابت در شکل (۱) مشاهده می‌شود. این مواد هم دارای رفتاری مشابه مواد الاستیک و هم رفتاری مشابه مایعات ویسکوز می‌باشند که بسته به ساختار مولکولی آنها می‌تواند مقدار هر یک از این رفتارها متفاوت باشد. به عنوان مثال در آزمایشی با بارگذاری به صورت تنش پله ای  $\sigma_0$  در یک ماده نمونه ویسکوالاستیک (تست خزش) هم می‌توان کرنش آنی که خصیصه مواد الاستیک است و هم کرنش تاخیری (خزشی) که ناشی از رفتار مایعات ویسکوز می‌باشد را مشاهده نمود. رفتار الاستیک مصالح توسط فنر خطی و رفتار ویسکوز توسط میراگر مدل می‌شود.



شکل ۱- تست کرنش و پاسخ مکانیکی ماده ویسکوالاستیک

بنابراین می‌توان با ترکیبی مناسب از فنرها و میراگرها به مدلسازی رفتار مواد ویسکوالاستیک جهت بدست آوردن معادلات حاکم (روابط تنش-کرنش) در این مواد پرداخت. پاسخ این مواد با مدل‌های مکانیکی همچون مدل‌های

<sup>1</sup> Generalized Kelvin-Voigt model

<sup>2</sup> Generalized Maxwell model

<sup>3</sup> Convolution integral

محدود توسط Koutsawa و Daya [۱۹]، اشاره کرد. اما نکته قابل توجه این است که بررسی تکیه‌گاه ویسکوالاستیک و مشخصات آن در این مطالعات بیشتر در تیرها و با استفاده از مدل‌های مکانیکی ساده (که به طور کامل رفتار مواد ویسکوالاستیک را مدل نمی‌سازند) و در حوزه فرکانس انجام شده است که غالباً قابلیت تعمیم به مسائل پیچیده‌تر را ندارند.

این موضوع بیانگر اهمیت مطالعه حاضر می‌باشد چراکه هدف از آن، ارائه رابطه و نحوه پیاده‌سازی شرط مرزی تکیه‌گاه مرزی و میانی ویسکوالاستیک مدلسازی شده با مدل جامع کلون-ویت جهت بررسی اثرات آن تکیه‌گاه بر ارتعاش محوری میله تحت بار محرک ثابت و سینوسی می‌باشد. این کار در قالب بررسی تاثیر مشخصات این نوع تکیه‌گاه و ارائه معیارهایی جهت بهبود عملکرد و انتخاب مناسب این مواد صورت گرفته است. معادلات با استفاده از روش اجزای محدود و در حوزه زمان حل می‌شوند. در حل عددی برای ترم‌های مربوط به رفتار ویسکوالاستیک از رابطه تقریبی با دقت بالای ارائه شده در مرجع Keramat و Ahmadi [۲] استفاده شده است.

## ۲- مواد و روشها

### ۲-۱- روابط ساختاری مواد ویسکوالاستیک

در مدل جامع کلون-ویت که برای توصیف مواد ویسکوالاستیک بکار رفته در تکیه‌گاه استفاده شده است، نیرو در هر المان و فنر برابر نیروی کل وارد شده به مدل می‌باشد اما جابه‌جایی کل برابر با جمع جابه‌جایی هر المان و فنر خواهد بود. جابه‌جایی آنی مربوط به فنر بوده و در المان‌های کلون-ویت صفر است. رابطه ساختاری تنش و کرنش برای مدل کلون-ویت تعمیم یافته را می‌توان با نوشتن روابط نیرو-تغییرشکل برای فنرها و میراگرها و قیاس آنها با تنش و کرنش به صورت زیر نوشت [۸]:

$$P_0 \sigma + \sum_{k=1}^{N_{KV}} P_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = q_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^{N_{KV}} q_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k} \quad (1)$$

که در آن ضرایب  $P$  و  $q$  توابعی بر حسب مدول الاستیسیته و ویسکوزیته هر المان نشان داده شده در

حوزه زمان به مطالعه رفتار مواد ویسکوالاستیک پرداخت. این تقریب عددی در روش اجزای محدود، تنها ترم‌های اضافی‌ای در ماتریس جرم (یا سختی) و بردار نیرو نسبت به مواد الاستیک ایجاد می‌نماید.

در زمینه ارتعاش در مواد ویسکوالاستیک می‌توان به آنالیز اجزای محدود مسائل دینامیکی گذرای ویسکوالاستیک در حوزه زمان توسط Sim و Lee [۹] و دینامیک ارتعاش محوری تیر ویسکوالاستیک در معرض کشش محوری با استفاده از روش المان طیفی (SEM) توسط Oh و Lee [۱۰] اشاره نمود. ارتعاش محوری در این مواد در حوزه فرکانس نیز قابل فرمولبندی و حل می‌باشد که در این حوزه ترم‌های انتگرال اغلب توسط پارامترهای مختلط نشان داده می‌شوند [۱۱ و ۱۲].

در زمینه حل عددی و تحلیلی انتشار موج طولی در محیط الاستیک و ویسکوالاستیک چندین تحقیق وجود دارد که از بین آنها می‌توان حل تحلیلی ارائه شده توسط MA [۱۳] و حل عددی توسط Leonov [۱۴]، Keramat و Ahmadi [۲] را برجسته نمود.

در رابطه با مدلسازی تکیه‌گاه ویسکوالاستیک می‌توان به بررسی اثرات این نوع تکیه‌گاه بر انتشار صوت از صفحه مستطیلی با استفاده از روش انرژی کرنش مودال (MSE) توسط Fan و همکاران [۱۵] اشاره کرد. در این مقاله نشان داده شد که استفاده از مواد ویسکوالاستیک در تکیه‌گاه مرزی، می‌تواند یک روش کاربردی برای کاهش ارتعاشات باشد به طوری که ابعاد و مشخصات تکیه‌گاه برای بیشینه کردن کارایی مهم است. نتایج مشابهی در بررسی ارتعاش تیری با تکیه‌گاه ویسکوالاستیک که با تحلیل حالت مختلط نرمال توسط Fan و همکاران [۱۶] انجام شد بدست آمد. در مطالعه‌ای دیگر پایداری دینامیکی تیر الاستیک با تکیه‌گاه ویسکوالاستیک توسط Majorana و Pomaro [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین می‌توان به بررسی تاثیر خصوصیات تکیه‌گاه ویسکوالاستیک بر انتشار موج در حوزه فرکانس و ارائه روشهایی جهت تنظیم بهینه سختی تکیه‌گاه توسط Park [۷]، تعیین پاسخ حالت پایدار تیر الاستیک طره با وجود تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در پی، ناشی از تحریک سینوسی پی با استفاده از اصل حرکت نسبی توسط Turgut [۱۸] و تحلیل تیر چند لایه که در دو طرف بر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک قرار دارد، با استفاده از روش اجزای

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^t \sigma(t-s) \frac{dJ}{ds}(s) ds = \\ &= \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t-s) \frac{dJ}{ds}(s) ds \quad (4) \\ &= (\sigma * dJ)(t)\end{aligned}$$

که در آن تابع خزش تطابقی  $J(t)$  به صورت زیر تعریف می شود [۲ و ۸]:

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k \left(1 - e^{-t/\tau_k}\right) \quad (5)$$

به طوری که می توان با انجام تست خزش، مشخصات تابع خزش تطابقی را براساس خصوصیات فنرها و میراگرها بدست آورد که در آن، نشان دهنده پاسخ آنی مصالح ویسکوالاستیک،  $J_k = 1/E_k$  نشان دهنده خزش تطابقی فنر مربوط به المان  $k$  ام کلونین-ویت،  $E_k$  مدول الاستیسیته فنر  $k$  ام و  $\tau_k$  زمان تاخیر خزش میراگر  $k$  ام می باشد. در اینجا  $\tau_k = \mu_k/E_k$  است که در آن  $\mu_k$  ویسکوزیته میراگر  $k$  ام می باشد.

می توان رابطه ای ریاضی بین تابع رهاسازی  $G(t)$  و خزش  $J(t)$  بدست آورد. برای این منظور با توجه به معادله (۴)، برای تنش پله ای  $\sigma_0$  کرنش برابر است با  $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$  حال با جا گذاری در معادله (۲)، خواهیم داشت:

$$\sigma_0 = \sigma_0 J(t) * dG(t) \Rightarrow J(t) * dG(t) = 1 \quad (6)$$

لذا با داشتن مشخصات تابع خزش تطابقی  $(J_k, \tau_k)$  و  $J_0$  می توان با استفاده از رابطه (۶)، مشخصه های تابع رهاسازی  $(G_\infty, G_k, \eta_k)$  را بدست آورد و برعکس.

## ۲-۲- معادلات حاکم

معادله ارتعاش محوری در یک میله الاستیک به طول  $L$  و سطح مقطع  $A_R$  که در مرز  $x=L$  در معرض نیروی محوری دلخواه  $F(t)$  قرار دارد، به صورت زیر خواهد بود [۲]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7)$$

که در آن  $u$  جابه جایی،  $E$  مدول الاستیسیته و  $\rho$  جرم مخصوص میله می باشد.

چنانچه میله از جنس مواد ویسکوالاستیک باشد معادله ارتعاش محوری بر حسب تابع خزش برابر است با [۲]:

شکل (۲- الف) می باشد که با توجه به تعداد المانهای کلونین-ویت ( $N_{KV}$ ) این توابع تغییر خواهند نمود.  $\varepsilon$  و  $\sigma$  به ترتیب نشان دهنده تنش و کرنش هستند. همانطور که مشاهده می شود رابطه بنیادی حاکم در مواد ویسکو-الاستیک خطی با توجه به  $(N_{KV})$ ، شامل مشتقاتی از تنش و کرنش می باشد. به همین دلیل غالباً نمی تواند به منظور استفاده های مهندسی ابزار مناسبی باشد. برای رفع این مشکل، می توان با گرفتن تبدیل لاپلاس و معکوس آن از معادله (۱) [۸] و یا با استفاده از اصل روی هم گذاری بولتزنم<sup>۱</sup> [۲۰]، رابطه تنش و کرنش را به فرم انتگرالی زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-s) \frac{dG}{ds}(s) ds \\ &= \varepsilon(t)G(0) + \int_0^t \varepsilon(t-s) \frac{dG}{ds}(s) ds \\ &= (\varepsilon * dG)(t)\end{aligned} \quad (2)$$

عبارت دوم در معادله (۲) در صورتی بدست می آید که فرض شود کرنش قبل از  $t=0$ ، صفر است. علامت " $*d$ " عملگر استیلیس کانولوشن<sup>۲</sup> می باشد که جهت ساده نویسی معادله (۲) (به عبارت سوم توجه شود) بکار گرفته شده است. در معادله فوق، تابع رهاسازی،  $G(t)$  مطابق با مدل تعمیم یافته کلونین - ویت به صورت معادله (۳) بدست خواهد آمد:

$$G(t) = G_\infty + \sum_{k=1}^{N_{KV}} G_k e^{-t/\eta_k} \quad (3)$$

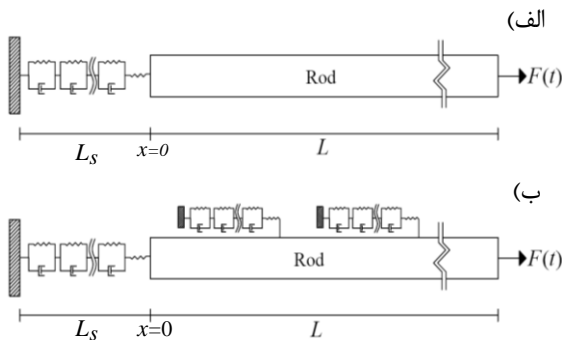
در تابع فوق  $N_{KV}$ ، تعداد المانهای کلونین - ویت،  $\eta_k$  زمان تاخیر رهاسازی المان  $k$  ام و  $G_\infty = G(\infty)$  است که بیانگر تنش نهایی تحت کرنش واحد می باشد. برای مشخصات تابع رهاسازی  $(G_k, \eta_k)$  نمی توان روابط ساده و مستقیمی بر اساس خصوصیات فنرها و میراگرهای مدل جهت درک واضحی از نحوه اثرگذاری آنها بر پاسخ ارائه نمود.

رابطه کرنش بر حسب تنش را می توان برای این مدل به صورت زیر نوشت [۸]:

<sup>1</sup> Boltzmann's superposition principle

<sup>2</sup> Stieltjes convolution operator

در صورتی که در مرز سمت چپ ( $x=0$ )، تکیه‌گاه گیردار و ثابت وجود داشته باشد به جای معادله (۱۲) شرط مرزی  $u(0,t)=0$  حاکم خواهد بود. در این صورت استهلاک انرژی و میرایی نوسانات رخ نخواهد داد.



شکل ۳- میله در معرض نیروی محوری  $F(t)$  و تکیه‌گاههای مرزی و میانی ویسکوالاستیک

### ۲-۳- روش حل عددی

برای حل عددی می‌بایست ترم انتگرال کانولوشن موجود در معادلات (۸)، (۹)، (۱۱) و (۱۲) که پس از بسط عملگر استیلیس کانولوشن ظاهر می‌شود را با روشی مناسب تقریب زد. برای این منظور با توجه به تقریب عددی موجود در مراجع [۱ و ۲]، می‌توان نوشت:

$$I_k(t) = \frac{G_k}{\eta_k} \int_0^t h(t-s) e^{-s/\eta_k} ds$$

$$\approx \alpha_{1k} h(t) + e^{-\Delta t/\eta_k} (\alpha_{1k} h(t-\Delta t) + I_k(t-\Delta t)) \quad (13)$$

که در آن  $h(t)$  یک تابع دلخواه حقیقی،  $I_k$  انتگرال کانولوشن ایجاد شده در روابط دارای "d" و  $\alpha_{1k}$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\alpha_{1k} = \frac{G_k \Delta t}{2\eta_k} \quad (14)$$

در این تحقیق برای اینکه بتوان شرط مرزی تکیه‌گاه ویسکوالاستیک را اعمال نمود، باید معادله ارتعاش محوری میله ویسکوالاستیک بر حسب تابع رهاسازی، معادله (۹)، را حل نمود. بدین منظور با استفاده از روش اجزای

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} * dJ \quad (8)$$

اما جهت اعمال شرط مرزی ارائه شده برای تکیه‌گاه ویسکوالاستیک نیاز است معادله ارتعاش محوری بر حسب تابع رهاسازی استخراج و حل گردد (به معادلات ۱۱ و ۱۵ دقت شود). لذا می‌توان با استفاده از رابطه (۶) و خاصیت شرکت پذیری عملگر استیلیس کانولوشن، معادله ارتعاش محوری را بر حسب تابع رهاسازی به صورت زیر بدست آورد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} * dG = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (9)$$

شرایط اولیه مسئله به صورت زیر خواهند بود:

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0. \quad (10)$$

شرط مرزی حاکم بر انتهای میله ( $x=L$ ) که نیروی  $F(t)$  اعمال می‌شود برابر است با:

$$\sigma_R(L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) * dG^R(t) = \frac{F(t)}{A_R} \quad (11)$$

که در آن اندیس R بیانگر پارامترهای مربوط به میله (Rod) می‌باشد. اگر میله از جنس مصالح الاستیک باشد به جای "  $dG^R(t)$  " که مدول الاستیسیته میله الاستیک است، قرار خواهد گرفت.

### ۲-۲-۱- تکیه‌گاه ویسکوالاستیک

شرط مرزی حاکم در  $x=0$  که میله دارای تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک است (شکل ۳-الف)، به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_R(0,t) = -\frac{A_S}{A_R} (\sigma_S(0,t))$$

$$= -\frac{A_S}{A_R} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) * dG^S(t) \right)$$

$$= -\frac{A_S}{A_R} (\varepsilon(0,t) * dG^S(t)) \quad (12)$$

که در آن S بیانگر پارامترهای مربوط به تکیه‌گاه (Support) و  $A_S$  سطح مقطع آن می‌باشد.

چنانچه از تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک در طول میله در محل  $x=x_0$  استفاده شود، شکل (۳-ب)، در گره اتصال تکیه‌گاه میانی به میله، شرط مرزی‌ای مشابه معادله (۱۲) با  $x$  مورد نظر، اعمال می‌شود.

### ۲-۳-۱- پیاده سازی شرط مرزی تکیه گاه ویسکوالاستیک

معادله (۱۲) را با استفاده از بسط عملگر استیلیس کانونلوشن و تعریف کرنش، به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_R(0,t) &= -\frac{A_S}{A_R} (\varepsilon(0,t) * dG^S(t)) \\ &= -\frac{A_S}{A_R} \left( \frac{u(0,t)}{L_s} G^S(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \frac{u(0,t-s)}{L_s} \frac{dG^S}{ds}(s) ds \right) \quad (18) \end{aligned}$$

حال با استفاده از تقریب انتگرال کانونلوشن (معادله ۱۳)، معادله (۱۸) پس از مرتب سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_R(0,t) \approx -\frac{A_S}{A_R} (C_3 u(0,t) + C_4) \quad (19)$$

$$C_3 = \frac{1}{L_s} \left( G^S(0) - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \alpha_{1k}^S \right)$$

$$C_4 = \frac{-1}{L_s} \sum_{k=1}^{N_{KV}} e^{-\Delta t / \eta_k^S} \left[ \alpha_{1k}^S u(0,t-\Delta t) + I_{2k}(t-\Delta t) \right]$$

$$I_{2k}(t) = \frac{G_k^S}{\eta_k^S} \int_0^t u(0,t-s) e^{-s/\eta_k^S} ds.$$

عبارت حاصل در معادله (۱۹) شامل ضریبی از جابه جایی مجهول در محل اتصال تکیه گاه ویسکوالاستیک به لوله می باشد که درایه ای از ماتریس سختی معادله اجزای محدود کل را که متناظر با محل اتصال تکیه گاه است، اصلاح می نماید. این عبارت همچنین شامل پارامتری از مقادیر معلوم گام زمانی قبلی است که به بردار نیرو اضافه می شود.

پس از سرهمبندی معادله (۱۵) برای تمام المانها و اعمال شرایط مرزی و مقادیر اولیه، از الگوریتم نیومارک-β، با β = 1/4 (شتاب میانگین)، برای حل معادلات در حوزه زمان استفاده می شود [۲۱].

### ۳- نتایج و بحث

همانطور که در معادلات (۱۹) و (۳) مشاهده می شود، رابطه تنش تکیه گاه ویسکوالاستیک و تابع رهاسازی این

محدود و با توجه به روش گالرکین<sup>۱</sup>، تابع میانمایی N در آن معادله ضرب و فرم ضعیف تشکیل می گردد. سپس با انتگرال گیری در ناحیه یک المان با مرزهای x<sub>a</sub> و x<sub>b</sub> استفاده از توابع تقریب خطی [1-x/l x/l]، معادله اجزای محدود المان به صورت زیر بدست می آید (پیوست الف را مشاهده نمایید):

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}} + (C_1) \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_r + [\mathbf{N}^T \sigma_R]_{x_a}^{x_b} \quad (15)$$

$$C_1 = \left( G^R(0) - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \alpha_{1k}^R \right)$$

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{K}_e C_2$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^{N_{KV}} e^{-\Delta t / \eta_k^R} [\alpha_{1k}^R \hat{\mathbf{u}}(t-\Delta t) + \mathbf{I}_{1k}(t-\Delta t)]$$

$$\mathbf{I}_{1k}(t) = \frac{G_k^R}{\eta_k^R} \int_0^t \hat{\mathbf{u}}(t-s) e^{-s/\eta_k^R} ds$$

که بردار جابه جایی گرهی است. برای توابع تقریب خطی، ماتریس M<sub>e</sub> و K<sub>e</sub> برای المان نمونه e به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

برای بررسی ارتعاش محوری میله الاستیک، معادله (۷)، معادله (۱۵) با وجود C<sub>1</sub>=E و f<sub>r</sub>=0 صادق خواهد بود، که E مدول الاستیسیته میله الاستیک می باشد.

آخرین عبارت در سمت راست معادله (۱۵) بیانگر شرایط مرزی المان بر حسب تنش است. بنابراین می توان به راحتی شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) را در معادله اعمال نمود. قابل ذکر است اگر توابع تقریب خطی را بکار برده و معادلات حاصل برای تمام المانها سرهمبندی شوند، ترم آخر در معادلات حاصل، ساده شده و به جز در گره های مرزی و گره های میانمایی که دارای نیروی خارجی بوده یا تکیه گاه میانی به آنها متصل شده است، در مابقی گرهها، این ترم برابر صفر خواهد بود.

<sup>2</sup> Newmark-β

<sup>1</sup>Galerkin method

جابجایی استاتیکی انتهای میله برابر است با:

$$\Delta_T = F_0 \left( \frac{L_s}{E_{eq} A_s} + \frac{L}{EA} \right) \quad (20)$$

از آنجایی که جابجایی نهایی تحت نیروی ثابت مد نظر است، در مدل جامع کلون-ویت که تکیه‌گاه ویسکو-الاستیک با آن مدل شده است، میراگرها تاثیری نخواهند داشت و تنها مدول الاستیسیته فزهاست که باید به صورت سری با یکدیگر جمع شوند. بنابراین در معادله (20)،  $E_{eq}$  به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$E_{eq} = \left[ J_0^S + \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k^S \right]^{-1} \quad (21)$$

در صورتی که جنس میله نیز از ماده ویسکو-الاستیک باشد، مدول الاستیسیته آن با توجه به مشخصات میله، طبق رابطه (21) محاسبه می‌شود.

مقایسه جابجایی نهایی سیستم با جابجایی استاتیکی در انتهای بخش (۳-۲-۲) انجام شده است که نشان می‌دهد پاسخ عددی سیستم درست می‌باشد. برای حالتی که از تکیه‌گاه میانی استفاده شده است به همین صورت می‌توان سختی معادل کل سیستم را بدست آورد و جابجایی استاتیکی نهایی سیستم را محاسبه نمود.

برای بررسی تنش در میانه میله فرض می‌شود  $F_0=10$  N طول میله  $L=4$  m و سطح مقطع آن  $A_R=0.01$  m<sup>2</sup> مدول الاستیسیته میله الاستیک  $E=10^{10}$  Pa و چگالی مصالح برابر با  $\rho=1200$  kg/m<sup>3</sup> باشد. مشخصات تابع خزش تطابقی  $J(t)$  و تابع رهاسازی  $G(t)$  معادل آن برای ماده ویسکو-الاستیک نمونه بکار رفته در تکیه‌گاه طبق جدول (۱) می‌باشد. طول تکیه‌گاه مرزی  $L_s=0.1$  m و سطح مقطع آن  $(A_s)$  نیز در تمامی حالات برابر سطح مقطع میله فرض شده است.

جدول ۱- مشخصات مواد ویسکو-الاستیک در تکیه‌گاه مرزی

مشخصه‌های تابع خزش تطابقی			
$J_0$ (Pa <sup>-1</sup> )	$J_k$ (Pa <sup>-1</sup> )	$\tau_k$ (s)	$k$
	$0.092 \times 10^{-10}$	$0.0011$	۱
$10^{-10}$	$1/105 \times 10^{-10}$	$0.301$	۲
	$7/803 \times 10^{-10}$	$0.1508$	۳
مشخصه‌های تابع رهاسازی			
$G_\infty$ (Pa)	$G_k$ (Pa)	$\eta_k$ (s)	$k$
	$1 \times 10^9$	$0.1 \times 10^{-2}$	۱
$10^9$	$7 \times 10^9$	$1 \times 10^{-2}$	۲
	$1 \times 10^9$	$5 \times 10^{-2}$	۳

مواد که با مدل جامع کلون - ویت قیاس شده اند، به پارامترهای مختلفی وابسته‌اند که می‌توانند بر عملکرد این ماده تاثیر بگذارند. از آنجایی که این پارامترها، که عبارتند از  $L_s$ ،  $G_\infty$ ،  $G_k$ ،  $\eta_k$  برای مدلسازی رفتار مواد ویسکو-الاستیک یا پلیمری در عمل بکار می‌روند، لذا شناخت تاثیرات آنها می‌تواند در انتخاب ماده پلیمری مناسب کمک نماید.

در این پژوهش دو موضوع مورد بررسی قرار گرفته است، ابتدا پس از ارزیابی و صحت سنجی روابط و نحوه پیاده سازی شرط مرزی تکیه‌گاه ویسکو-الاستیک، اثرات آن بر ارتعاش محوری میله الاستیک تحت نیروی محرک ثابت بررسی می‌شود. این موضوع در قالب بررسی تاثیر مشخصات این نوع تکیه‌گاه (مانند طول تکیه‌گاه، زمان تاخیر،  $G_k$  و  $G_\infty$ ) بر مقدار و سرعت میرایی و تغییرات حداکثر و حداقل جابجایی انجام می‌شود و معیارهایی جهت بهبود عملکرد و انتخاب مناسب این مواد ارائه می‌گردد. سپس تاثیر تکیه‌گاه ویسکو-الاستیک مرزی و میانی بر ارتعاش محوری میله الاستیک و ویسکو-الاستیک، ناشی از اعمال نیروی محرک سینوسی  $F(t) = \alpha \sin \omega t$  بررسی می‌شود و اثر زمان تاخیر مدل تکیه‌گاه، در فرکانسهای مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

### ۳-۱- صحت سنجی

جهت صحت سنجی روش بکار رفته برای مدلسازی شرط مرزی تکیه‌گاه ویسکو-الاستیک و نتایج، به دلیل عدم وجود نتایج آزمایشگاهی یا حل تحلیلی و یا نتایج مشابه بدست آمده از حل عددی دیگر جهت مقایسه، دو پاسخ نهایی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. ۱- مقایسه جابجایی نهایی سیستم پس از میرایی ناشی از تکیه‌گاه ویسکو-الاستیک که از حل عددی بدست آمده است، با جابجایی شبه پایدار نهایی سیستم. ۲- تنش نهایی سیستم در میانه میله که از حل عددی بدست آمده است، با تنش استاتیکی آن. در صورتی که سیستم به درستی عمل نماید، پاسخ نهایی حل عددی پس از میرایی به پاسخ نهایی حالت پایدار میل نموده و برابر می‌شوند. برای این منظور فرض می‌شود نیروی محرک  $F_0$  به انتهای میله الاستیک دارای تکیه‌گاه مرزی ویسکو-الاستیک اعمال می‌شود.

### ۳-۲-۱- اثرات تغییر طول تکیه گاه ( $L_s$ )

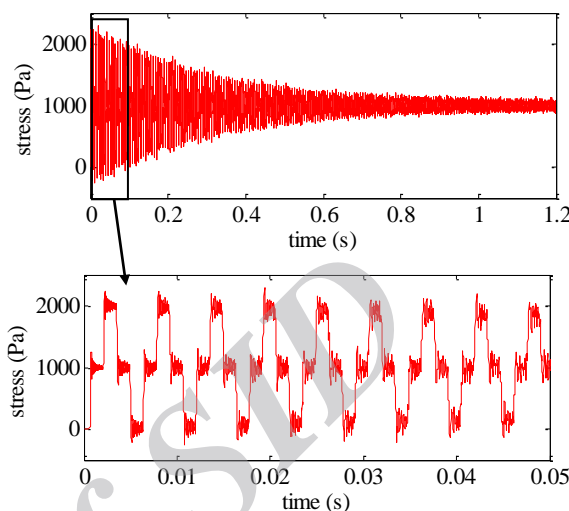
ابتدا تغییرات طول تکیه گاه ویسکوالاستیک ( $L_s$ ) مورد بررسی قرار می گیرد. لذا سایر پارامترها ثابت و تنها طول تکیه گاه تغییر خواهد کرد. نتایج ارتعاش محوری میله الاستیک را می توان با تعریف نسبت طول تکیه گاه به طول میله برابر  $v = L_s/L$ ، و تغییر  $L_s$  از ۱۰ سانتی متر تا ۵۰ سانتی متر، در شکل (۵) مشاهده نمود. در شکل (۵-الف) پوش ماکزیمم و مینیمم جابجایی های گره انتهایی در هر دوره تناوب ارتعاش میله الاستیک، از زمان شروع ارتعاش تا زمان  $0.4$  ثانیه رسم شده است و بیانگر دامنه نوسانات می باشد. در شکل (۵-ب) تاریخچه جابجایی گره انتهایی میله با تکیه گاه ثابت (رنگ مشکی) و تکیه گاه ویسکوالاستیک با طولهای مختلف (سایر رنگها)، در زمانهای اولیه رسم شده است. همچنین نمودارهای درصد میرایی نوسانات در حالت های مختلف طول تکیه-گاه ویسکوالاستیک در دوره های تناوب مختلف در شکل (۵-ج) آورده شده است. درصد میرایی در دوره تناوب  $n$ م به صورت زیر تعریف شده است:

$$d_n = \frac{(u_{\max}^{\text{Fsup}} - u_{\min}^{\text{Fsup}}) - (u_{\max}^{\text{Vsup}} - u_{\min}^{\text{Vsup}})}{(u_{\max}^{\text{Fsup}} - u_{\min}^{\text{Fsup}})} \times 100 \quad (19)$$

که در آن  $u_{\max}^{\text{Fsu}}$  و  $u_{\min}^{\text{Fsu}}$  به ترتیب بیانگر جابجایی ماکزیمم و مینیمم در دوره تناوب  $n$  ام ارتعاش میله الاستیک با تکیه گاه ثابت و  $u_{\max}^{\text{Vsu}}$  و  $u_{\min}^{\text{Vsu}}$  نیز به ترتیب بیانگر جابجایی ماکزیمم و مینیمم در دوره تناوب  $n$  ام ارتعاش میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکو-الاستیک می باشند.

با توجه به شکل (۵) مشاهده می شود با افزایش طول تکیه گاه ویسکوالاستیک و کاهش سختی، خاصیت این مواد بیشتر ظاهر می شود. یعنی هم درصد میرایی افزایش پیدا می کند و هم جابجایی نهایی میله پس از میرای ارتعاش بیشتر می شود که به دلیل افزایش کرنشهای تاخیری تکیه گاه است. نمودارهای درصد میرایی با افزایش طول تکیه گاه، نسبت به یکدیگر از حالت تقریباً خطی به نمایی تبدیل می شوند که با نمودار تنش- کرنش مواد ویسکوالاستیک مطابقت دارد. این امر موجب می شود تا در زمانهای اولیه، افزایش میرایی قابل توجهی را مشاهده

نتایج عددی مربوط به تنش در میانه میله در شکل (۴) ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می شود، تنش نهایی در سیستم پس از میرایی به سمت تنش استاتیکی ( $F_0/A_R = 1000 \text{ Pa}$ ) میل می نماید.



شکل ۴- تاریخچه تنش در میانه میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک.

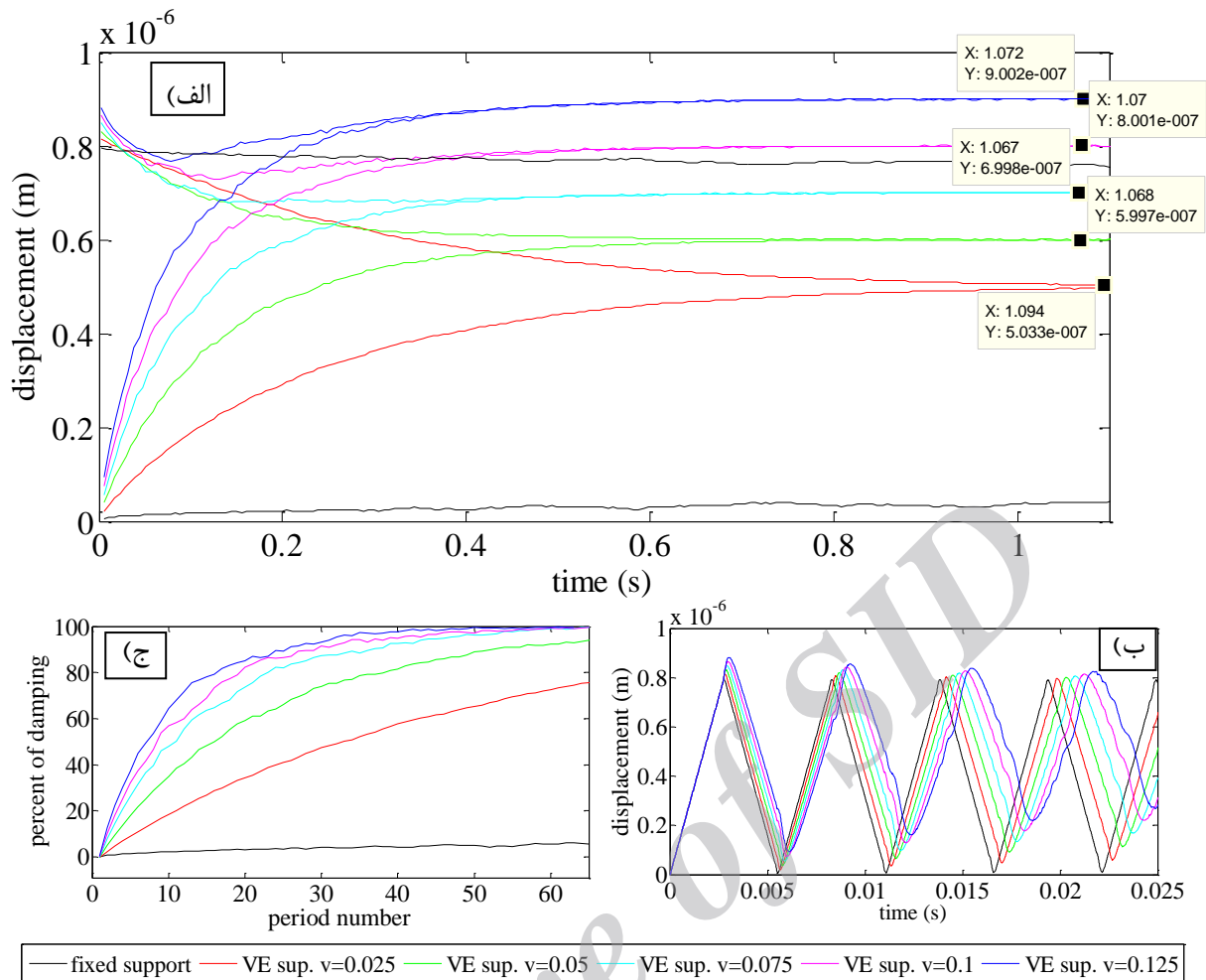
در ادامه اثر تکیه گاه ویسکوالاستیک و تأثیر مشخصات آن بر ارتعاش محوری میله تحت دو نیروی محرک پله ای ثابت و سینوسی به طور جامع مورد بررسی قرار می گیرد.

### ۳-۲-۲- نیروی محرک پله ای ثابت

با توجه به رابطه شرط مرزی سمت راست میله (معادله ۱۱)، که برای هر نیروی دلخواه  $F(t)$  برقرار است، از نیروی پله ای  $F_0=10 \text{ N}$ ، برای ارتعاش محوری میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک استفاده می شود. مشخصات میله و تکیه گاه مانند بخش (۳-۱) می باشد. قابل توجه است که جهت بررسی تأثیر مشخصات تکیه گاه ویسکوالاستیک، تغییرات در پارامترها نسبت به جدول (۱) انجام می شود.

در تمامی شکل های این بخش نتایج ارائه شده مربوط به گره آخر میله، یعنی گره واقع در  $x=4 \text{ m}$  می باشد، چراکه جابجایی در این گره بحرانی تر است.





شکل ۵- اثرات ناشی از تغییرات طول تکیه گاه ویسکوالاستیک بر ارتعاش محوری گره انتهایی میله الاستیک. (الف) پوش ماکزیمم و مینیمم جابجایی های ناشی از ارتعاش میله با تکیه گاه ثابت (رنگ مشکی) و تکیه گاه ویسکوالاستیک با  $v=L_s/L$  های مختلف (سایر رنگ ها). (ب) تاریخچه جابجایی میله در زمانهای اولیه ارتعاش. (ج) درصد میرایی ارتعاش در هر دوره تناوب.

جابجایی میله الاستیک مرتعش با تکیه گاه ثابت است که نمی تواند مطلوب باشد. البته باید به این نکته توجه نمود که در عمل، معمولا بارهای دینامیکی (مثل زلزله، ضربه، انفجار و ...) پریودیک بوده و پس از مدت زمان اندکی کاملا از روی سیستم برداشته می شوند. بنابراین در این شرایط جابجایی نهایی میله پس از میرایی ارتعاشات در مقابل خاصیت این مواد در میرایی و استهلاک انرژی از درجه اهمیت کمتری برخوردار است.

همچنین با توجه به شکل (۵-الف) می توان دید که استفاده از تکیه گاه ویسکوالاستیک و افزایش طول آن، بر حداقل جابجایی ها تاثیر بیشتری می گذارد که به دلیل رفتار مواد ویسکوالاستیک و کرنشهای تاخیری در تکیه گاه می باشد.

نمود (افزایش سرعت میرایی) و میرایی کامل در زمان کمتری اتفاق افتد.

اما علاوه بر افزایش سرعت میرایی باید به حداکثر جابجایی ها نیز توجه شود. همانطور که در شکل (۵-الف) مشاهده می شود با افزایش طول تکیه گاه، حداکثر جابجایی های اولیه که می تواند شرایط بحرانی را ایجاد نماید، اندکی افزایش می یابد. همچنین کرنش نهایی تکیه گاه که موجب افزایش جابجایی نهایی انتهایی میله (پس از میرایی ارتعاشات) می شود، نیز بیشتر خواهد شد. دلیل این امر ثابت بودن بارگذاری و عدم حذف آن و بروز کامل رفتار خزشی مواد ویسکوالاستیک می باشد. به عنوان مثال زمانی که نسبت طول تکیه گاه ویسکوالاستیک به طول کل میله،  $v$ ، برابر 0.1 باشد، جابجایی نهایی میله پس از میرایی ارتعاش دینامیکی، تقریبا برابر حداکثر

همان طور که در شکل (۶- الف و ج) مشاهده می شود افزایش  $G_{inf}$ ، یا  $St$  و نزدیک شدن آن به مدول الاستیسیته میله، باعث خواهد شد جابجایی نهایی میله به جابجایی استاتیکی (شبه پایدار) میله الاستیک با تکیه گاه گیردار نزدیک شود و در عین حال درصد میرایی کاهش پیدا کند. کاهش بیش از حد  $G_{inf}$ ، یعنی  $St$  کمتر از 0.1، تأثیر بسیار اندکی بر افزایش درصد میرایی دارد (شکل ۶- ج) و تنها کرنش نهایی تکیه گاه ویسکوالاستیک یا به طور کل، جابجایی نهایی میله پس از میرایی را به طور نامطلوبی افزایش می دهد. همچنین افزایش بیش از حد  $G_{inf}$ ، یعنی  $St$  بیش از 0.5، جهت کاهش جابجایی نهایی میله نیز مطلوب نخواهد بود چرا که نمی توان این جابجایی را از مقداری نزدیک به جابجایی شبه پایدار میله با تکیه گاه ثابت کمتر نمود و تنها درصد میرایی کاهش پیدا خواهد کرد. بنابراین نسبتی بین 0.1 تا 0.5 برای  $St$  می تواند مناسب باشد.

شکل (۶- ب) نشان می دهد که تأثیر تغییرات  $G_{inf}$  بر کاهش یا افزایش فرکانس یا طول موج ارتعاش و همچنین افزایش حداکثر جابجایی های اولیه بسیار اندک می باشد. چنانچه به شکل های (۵- ج) و (۶- ج) دقت شود، از آنجایی که در این دو شکل نمودار درصد میرایی رسم شده با رنگ قرمز، در شرایط یکسانی می باشد، مشاهده می شود که با افزایش  $L_s$ ، سرعت میرایی (افزایش میرایی در دوره های تناوب اولیه) نیز افزایش می یابد در حالی که افزایش  $G_{inf}$  تأثیر چندانی بر افزایش سرعت میرایی ندارد. بنابراین بیشتر تأثیر تغییرات  $G_{inf}$  بر جابجایی های نهایی پس از میرایی نوسانات می باشد.

### ۳-۲-۳- اثرات تغییر $G_k$ ها

در بررسی  $G_k$ ، تغییرات در تمام  $G_k$  ها اعمال خواهد شد. این تغییرات، بر خلاف  $G_{inf}$ ، همانطور که در شکل (۷- الف) دیده می شود تأثیری بر جابجایی نهایی میله پس از میرایی ارتعاش ندارد. این موضوع به این دلیل است که با تغییر  $G_k$  ها، هر چند  $J_0$  و  $J_k$  ها عوض می شود، اما حاصل جمع آنها، یعنی  $E_{eq}$  تغییر نمی کند. بنابراین بر طبق رابطه (۲۰) نیز، جابجایی نهایی نباید تغییر نماید. با توجه به شکل (۷- ب و ج)، با کاهش  $G_k$  ها، فرکانس کاهش اما طول موج، حداکثر جابجایی اولیه و همچنین

قابل توجه است در صورتی که مدول الاستیسیته میله الاستیک  $m$  برابر شود، بایستی  $v$  ها،  $1/m$  برابر شود و در صورتی که  $G_{\infty}$ ،  $m$  برابر شود،  $v$  ها بایستی  $m$  برابر شود تا از لحاظ جابجایی های نهایی انتهای میله (مجموع کرنش میله و تکیه گاه) رفتاری مشابه آنچه بیان شد، مشاهده نمود.

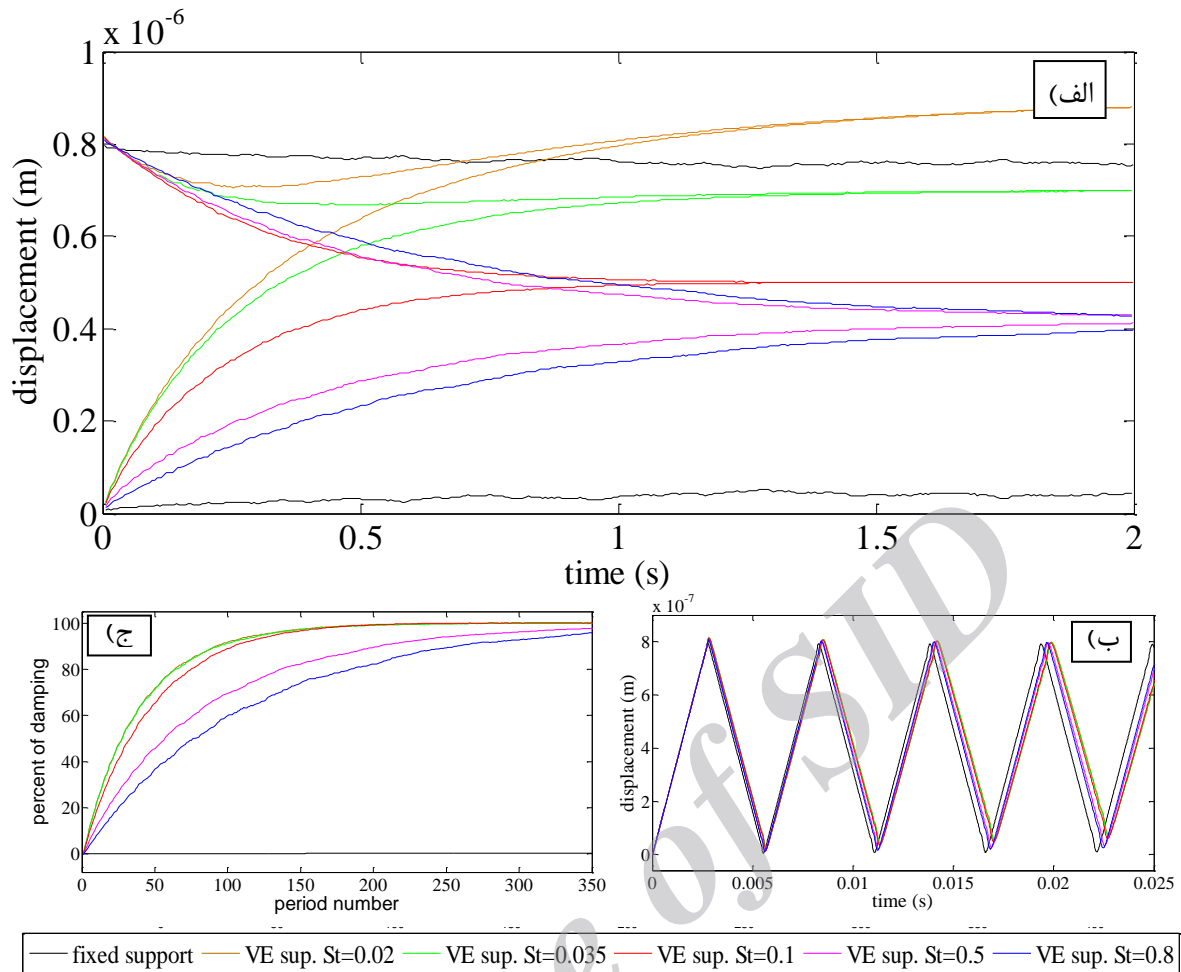
در شکل (۵- ب) که تاریخچه جابجایی ارتعاش میله الاستیک در زمانهای اولیه رسم شده است، نشان می دهد با افزایش طول تکیه گاه ویسکوالاستیک، طول موج ارتعاش نیز افزایش و فرکانس آن کاهش پیدا می کند.

در شکل (۵- الف) جابجایی های نهایی انتهای میله نشان داده شده است. این مقادیر با جابجایی های استاتیکی که می توان از رابطه (۲۰) بدست آورد، برابر است. به عنوان مثال برای تکیه گاه به طول  $L_s = 0.2$  m، جابجایی استاتیکی برابر  $\Delta_T = 6 \times 10^{-7}$  می باشد که این مقدار بسیار نزدیک به مقدار نشان داده شده در گراف مربوطه می باشد (گراف سبز رنگ با  $v=0.05$ ). این موضوع نشان می دهد که نتایج حل عددی درست بوده و سیستم درست عمل می نماید.

همانطور که مشاهده شد تغییرات طول تکیه گاه بر کلیه پاسخ ها از جمله جابجایی های اولیه و نهایی، فرکانس و درصد میرایی اثر می گذارد. لذا در ادامه برای بهتر مشخص شدن تأثیر هر یک از پارامترهای مواد ویسکوالاستیک بر رفتارهای ذکر شده، تغییرات آنها به طور جداگانه مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور جهت بهتر نشان دادن این تغییرات از طول تکیه گاه  $L_s = 0.1$  m یا  $v=0.025$  استفاده می شود.

### ۳-۲-۳- اثرات تغییر $G_{\infty}$

در بررسی تغییرات  $G_{\infty} = G_{inf}$ ، از نسبت این پارامتر به مدول الاستیسیته میله ( $E$ ) که با  $St = G_{inf}/E$  نشان داده شده است، استفاده می شود. دلیل آن مشاهده رفتاری مشابه از لحاظ کیفی و نه کمی با تغییر این نسبت می باشد. نتایج این بررسی در شکل (۶) نشان داده شده است. با توجه به معادله (۱۹) و رابطه  $C_3$ ، با افزایش  $G_{inf}$ ،  $G^S(0)$  و به تبع آن  $C_3$  افزایش پیدا خواهد کرد. بنابراین افزایش آن، موجب افزایش سختی و کاهش آن موجب کاهش سختی خواهد شد.



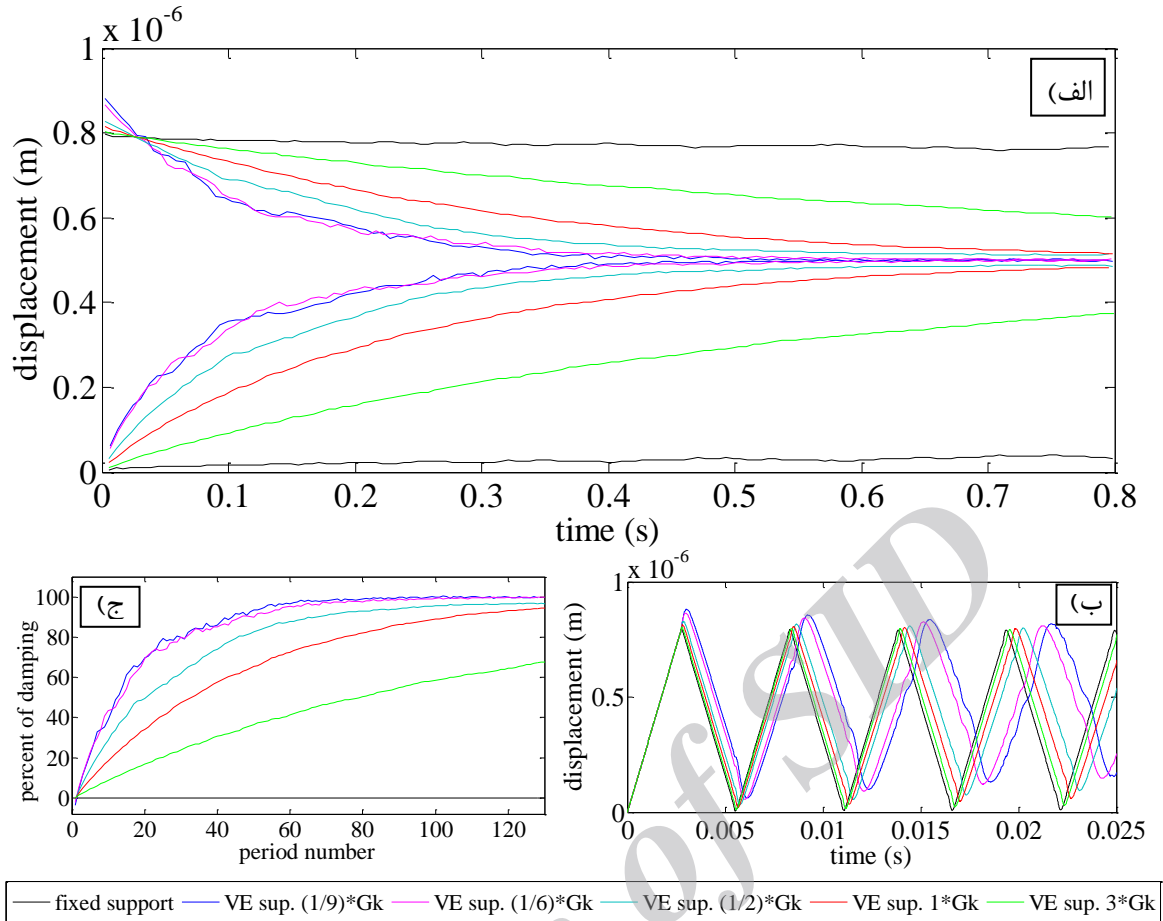
شکل ۶- اثرات ناشی از تغییرات  $G_{inf}$  تکیه گاه ویسکوالاستیک بر ارتعاش محوری گره انتهایی میله الاستیک. (الف) پوش ماکزیمم و مینیمم جابجایی های ناشی از ارتعاش میله الاستیک با تکیه گاه ثابت (رنگ مشکی) و ویسکوالاستیک در  $st=G_{inf}/E$  های مختلف (سایر رنگها). (ب) تاریخچه جابجایی میله در زمانهای اولیه ارتعاش. (ج) درصد میرایی ارتعاش در هر دوره تناوب.

#### ۳-۲-۴- اثرات تغییر $\eta_k$ ها

در شکل (۸) نتایج مرتبط با بررسی تغییرات  $\eta_k$  ها نشان داده شده است. همانطور که در شکل (۸- الف و ب) مشاهده می شود با توجه به تعریف  $\eta_k$  که بیانگر زمان تاخیر رهاسازی میراگرهای موجود در مدل جامع کلین- ویت می باشد، تغییرات  $\eta_k$  ها تاثیری بر حداکثر جابجایی های اولیه و جابجایی نهایی میله پس از میرایی ارتعاشات و همچنین فرکانس و طول موج ارتعاش ندارد.

اما تاثیر قابل توجه آن بر افزایش میرایی در زمانهای اولیه نسبت به سایر پارامترها، بدون ایجاد تغییر در جابجایی های اولیه و نهایی، می تواند در بهبود عملکرد این مواد و همچنین کنترل پدیده خستگی بسیار مفید باشد. همچنین در کاهش  $\eta_k$  ها جهت افزایش میرایی، بر خلاف  $G_k$  ها محدودیتی وجود ندارد.

درصد میرای افزایش می یابد. بایستی توجه نمود همانطور که در شکل (۷- الف و ج) مشاهده می شود، کاهش  $G_k$  ها تا زمانی که مجموع  $G_k$  ها برابر  $G_{inf}$  نشود، می تواند موجب افزایش درصد میرایی شود (به دلیل رفتار تابع رهاسازی این مواد می باشد). به عنوان مثال اگر  $G_{inf} = 3 \times 10^9$  باشد، و مجموع  $\sum_{k=1}^{N_k} G_k = 9 \times 10^9$  باشد، جهت افزایش درصد میرایی، می توان  $G_k$  ها را تنها به اندازه  $1/3$  کاهش داد، و اگر بیشتر از این مقدار کوچک شود درصد میرایی کاهش پیدا می کند.



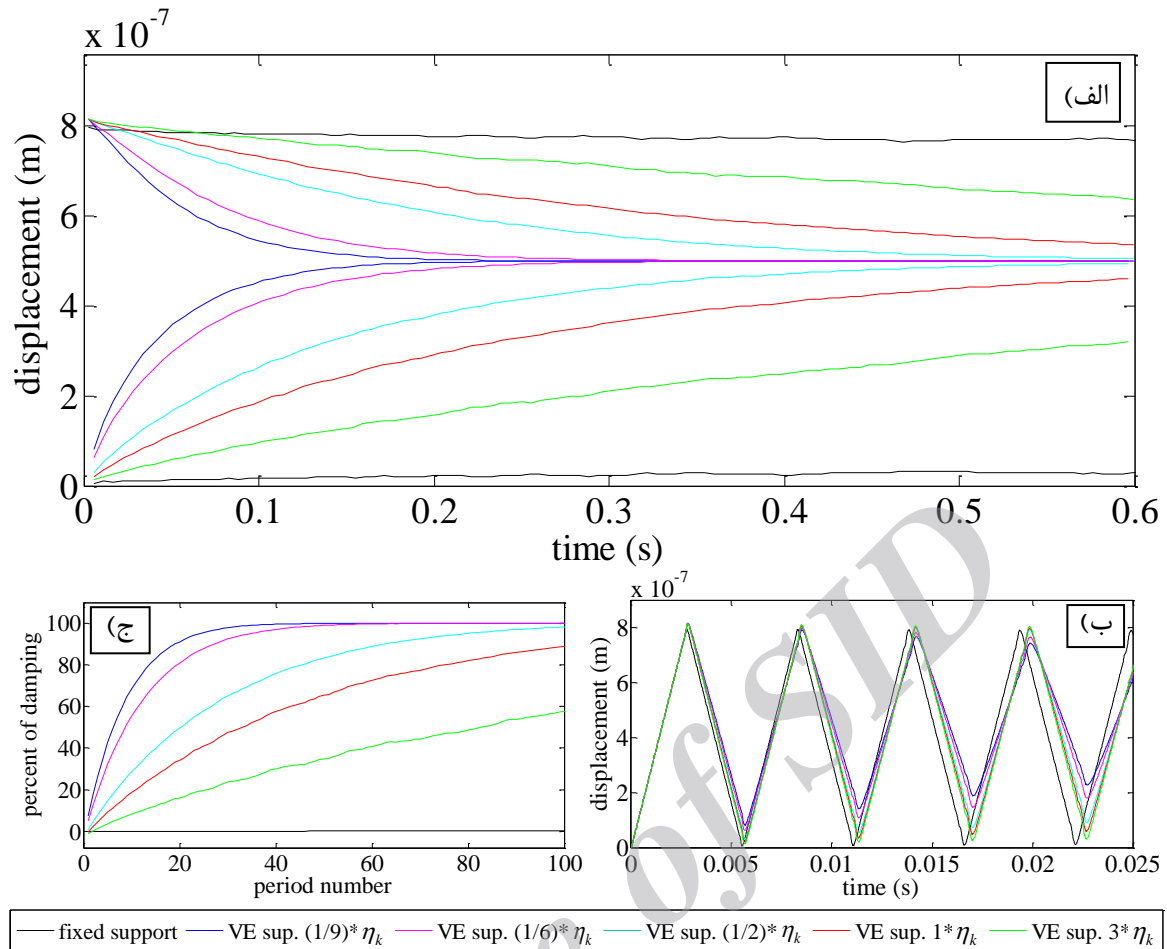
شکل ۷- اثرات ناشی از تغییرات  $G_k$  های تکیه گاه ویسکوالاستیک بر ارتعاش محوری گره انتهایی میله الاستیک. الف) پوش ماکزیمم و مینیمم جابجایی های ناشی از ارتعاش میله الاستیک با تکیه گاه ثابت (رنگ مشکی) و ویسکوالاستیک با  $G_k$  های مختلف. ب) تاریخچه جابجایی میله در زمانهای اولیه ارتعاش. ج) درصد میرایی ارتعاش در هر دوره تناوب.

### ۳-۳- نیروی محرک سینوسی

بررسی اثر میرایی مواد ویسکوالاستیک تکیه گاه بر ارتعاش محوری میله ناشی از نیروهای هارمونیک مانند نیروی سینوسی  $F(t) = \alpha \sin \omega t$ ، به ویژه در فرکانس های مختلف می تواند مهم باشد. بدین منظور از نیروی محرک سینوسی  $F(t) = 4 \sin(200\pi t)$  استفاده می شود. چگالی میله الاستیک  $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$  و مدول الاستیسیته آن  $E = 2.0750 \times 10^9 \text{ Pa}$  فرض می شود. سایر مشخصات میله مانند بخش (۳-۱) می باشد. مشخصات مواد ویسکوالاستیک بکار رفته در این بخش، در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۲- مشخصات تابع خزش تطابقی و رهاسازی مواد ویسکوالاستیک

$J_0 = \frac{1}{E_0} \text{ (Pa}^{-1}\text{)}$	$J_k \text{ (Pa}^{-1}\text{)}$	$\tau_k \text{ (s)}$	$k$	مشخصه های تابع خزشی تطابقی
	$12/0.5 \times 10^{-10}$	0.2	1	
	$9/64 \times 10^{-10}$	0.4	2	
$4/819 \times 10^{-10}$	$7/23 \times 10^{-10}$	0.6	3	
	$4/82 \times 10^{-10}$	0.8	4	
	$2/41 \times 10^{-10}$	1	5	
$G_\infty \text{ (Pa)}$	$G_k \text{ (Pa)}$	$\tau_k \text{ (s)}$	$k$	مشخصه های تابع رهاسازی
	$1/756 \times 10^9$	0.391	1	
	$0.47 \times 10^9$	0.3013	2	
$2/441 \times 10^8$	$0.17 \times 10^9$	0.5271	3	
	$0.08 \times 10^9$	0.7492	4	
	$0.03 \times 10^9$	0.9716	5	



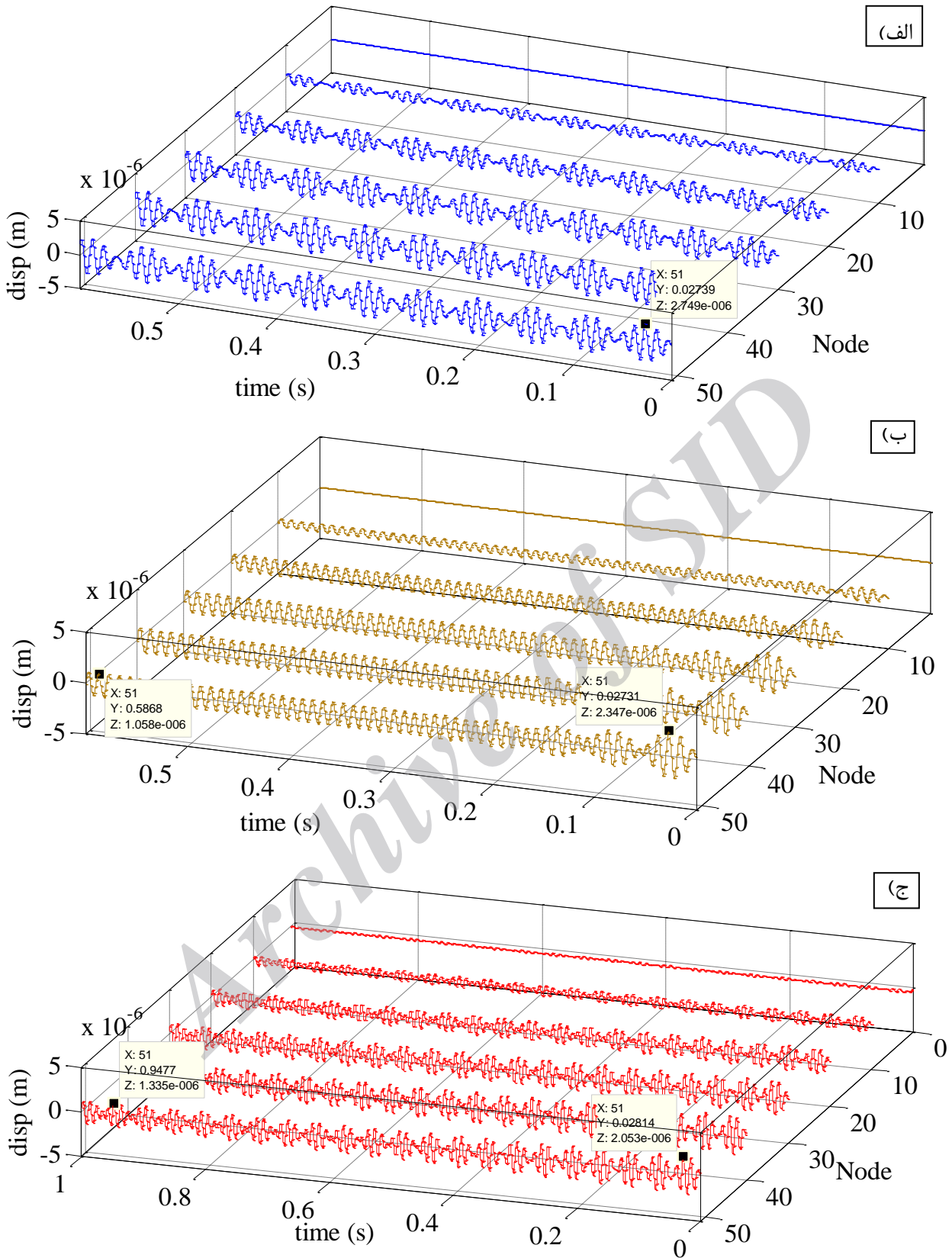
شکل ۸- اثرات ناشی از تغییر در زمان تاخیرهای تکیه‌گاه ویسکوالاستیک بر ارتعاش محوری گره انتهایی میله الاستیک. (الف) پوش ماکزیمم و مینیمم جابجایی‌های ناشی از ارتعاش میله الاستیک با تکیه‌گاه ثابت (رنگ مشکی) و ویسکوالاستیک با  $\eta_k$  های مختلف (سایر رنگها). (ب) تاریخچه جابجایی میله در زمانهای اولیه ارتعاش. (ج) درصد میرایی ارتعاش در هر دوره تناوب.

0.35 ثانیه میرا می‌شود و سپس میله با یک دامنه ثابت به صورت پایدار تحت نیروی سینوسی جابجا می‌گردد. همواره استفاده از مصالح میراگر در خود سازه به دلایل مختلف اقتصادی و فنی مقدور نمی‌باشد. چنانچه از مواد ویسکوالاستیک جدول (۲)، در تکیه‌گاه مرزی به طول 0.2 m، به جای میله استفاده شود و میله از جنس الاستیک باشد، نتایج در شکل (۹-ج) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در گره یک، جابجایی‌هایی هر چند اندک به وجود می‌آید، که دلیل آن تغییر تکیه‌گاه از حالت گیردار به ویسکوالاستیک می‌باشد. در این حالت حداکثر جابجایی اولیه نسبت به حالت قبل کاهش پیدا کرده است ولی ارتعاشات دامنه جابجایی، حتی پس از گذشت یک ثانیه به طور کامل میرا نشده است. علت آن کمتر شدن مواد ویسکوالاستیک بکار رفته

### ۳-۳-۱- ارتعاش میله الاستیک با تکیه‌گاه مرزی و میانی ویسکوالاستیک

نتایج جابجایی دینامیکی محوری میله الاستیک با تکیه‌گاه گیردار در شکل (۹-الف)، در گره ۶ یا مقطع نشان داده شده است که در آن ارتعاشات بدون میرایی دامنه جابجایی مشاهده می‌شود.

همانطور که قبلاً اشاره شد می‌توان جهت میرایی ارتعاشات از مواد ویسکوالاستیک در سازه اصلی یا به عنوان روشی جایگزین در تکیه‌گاه استفاده نمود. در صورتی که از مواد ویسکوالاستیک در میله با تکیه‌گاه گیردار، جهت میرایی استفاده شود، نتایج در شکل (۹-ب) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود ارتعاشات دامنه جابجایی خیلی سریع و با گذشت تقریباً



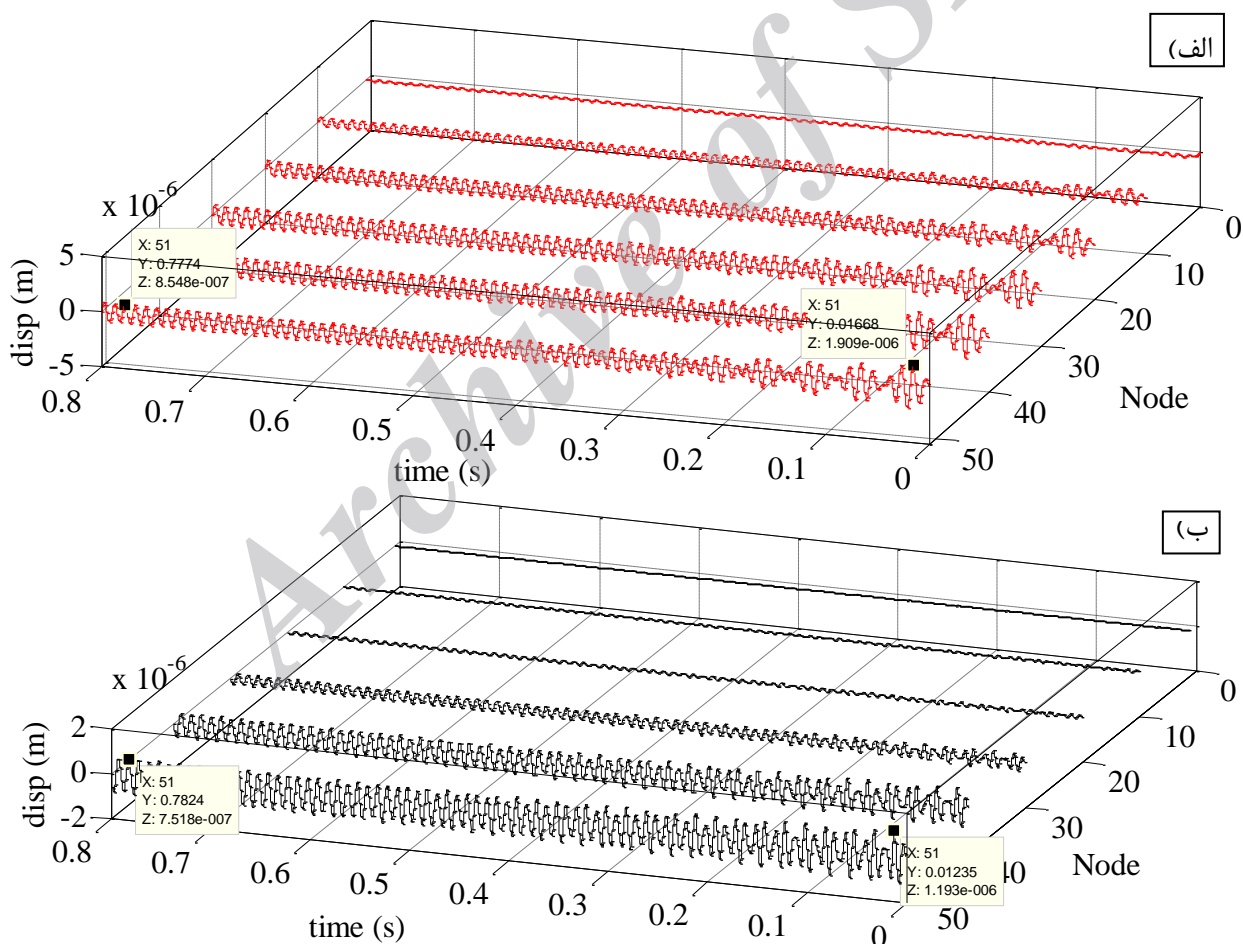
شکل ۹- تاریخچه جابجایی ۶ گره در طول میله، ناشی از نیروی سینوسی، در سه حالت: الف) میله الاستیک با تکیه گاه مرزی گیردار. ب) میله ویسکوالاستیک با تکیه گاه مرزی گیردار. ج) - میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک. (مواد ویسکوالاستیک بکار رفته در حالت ب و ج یکسان می باشد)

میله، واقع در  $x=2$  m استفاده شده است. طول دو تکیه - گاه مرزی و میانی  $0.2$  m و از جنس مواد ویسکوالاستیک جدول (۲) می باشد (مصلحی که پیش تر در میله استفاده شده بود).

شکل (۱۰-ب) نشان می دهد که این حالت از کارآمدی خوبی برخوردار است چراکه نه تنها می تواند هزینه ها را از لحاظ استفاده مواد، کاهش دهد بلکه پس از تقریباً  $0.6$  ثانیه ارتعاشات دامنه میرا می شود، همچنین جابجایی ها به ویژه حداکثر جابجایی دینامیکی اولیه و حداکثر جابجایی ها پس از میرایی را نسبت به حالات قبل کاهش می دهد. لذا از این نظر در مقایسه با حالات قبلی تکیه گاهی مناسب است. البته همچنان می توان با استفاده از مصالح بهتر در تکیه گاه ها شرایط را بهبود بخشید.

نسبت به حالتی که این مواد در میله استفاده شده اند، می باشد. اما می توان با افزایش طول تکیه گاه یا استفاده از مواد ویسکوالاستیک مناسب تر به عملکرد بهتری دست یافت. به عنوان مثال در صورتی که زمان های تاخیر جدول (۲)،  $1/6$  برابر شوند نتایج مناسبی حاصل خواهد شد. از جمله کاهش حداکثر جابجایی اولیه نسبت به حالت قبل و میرای کامل پس از تقریباً  $0.55$  ثانیه، که در شکل (۱۰-الف) نشان داده شده است.

تهیه چنین مصالحی همواره، چه از لحاظ اقتصادی و چه از لحاظ فنی، امکان پذیر نیست. در چنین شرایطی استفاده از تکیه گاه ویسکوالاستیک در طول میله به ویژه در حالت هایی که طول میله زیاد است، می تواند مفید باشد. برای این منظور از یک تکیه گاه ویسکوالاستیک در طول



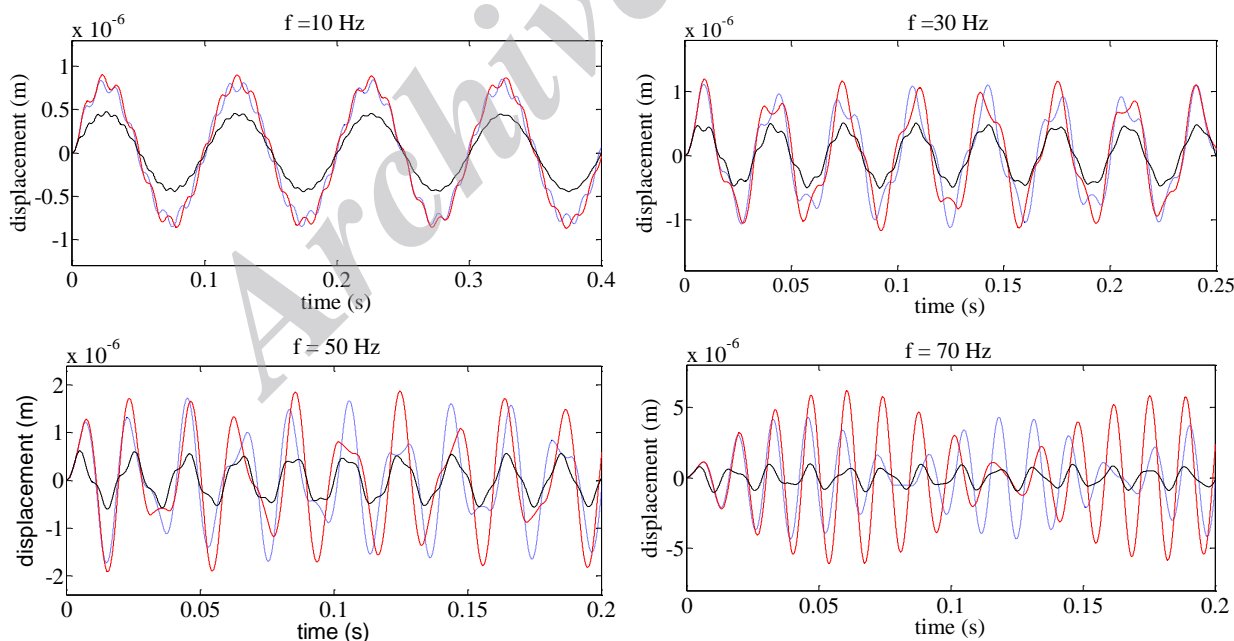
شکل ۱۰- تاریخچه جابجایی ۶ گره در طول میله ناشی از نیروی سینوی در دو حالت: الف) میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکو-الاستیک با مصالح تقویت شده. ب) میله الاستیک با تکیه گاه ویسکوالاستیک در مرز ابتدا و وسط میله. در این حالت مواد ویسکوالاستیک به کار رفته مطابق جدول (۲) می باشد.

مانند جدول (۲) می باشد. همانطور که نتایج در شکل (۱۱) نشان می دهند، با افزایش فرکانس نیرو، تأثیر مواد ویسکوالاستیک در میرایی کاهش پیدا می کند و میرایی در مدت زمان بیشتری اتفاق می افتد. همچنین موجب تغییر در دامنه و فرکانس ارتعاش در مقایسه با حالت ارتعاش میله الاستیک با تکیه-گاه گیردار می شود که دلیل آنها کوچک بودن دوره تناوب نیروی محرک در فرکانس های زیاد در مقایسه با زمان های تاخیر مواد تکیه گاه ویسکوالاستیک مدلسازی شده با مدل کلونین-ویت تعمیم یافته می باشد، لذا مواد ویسکوالاستیک نمی توانند به طور کامل خصوصیات خود را بروز دهند و میرایی در مدت زمان بیشتری رخ خواهد داد. این موضوع در شکل (۱۰-الف) به خوبی مشاهده گردید که جهت بهبود عملکرد تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک در فرکانس  $f=100 \text{ Hz}$ ، با کاهش زمانهای تاخیر به  $(1/6)$ ، میرایی نسبت به شکل (۹-ج) در مدت زمان کوتاه تری اتفاق افتاد. همچنین می توان با استفاده از تکیه گاه میانی ویسکوالاستیک علاوه بر افزایش میرایی و کنترل جابجایی ها، اثرات تغییرات فرکانس را نیز کنترل نمود.

همانطور که در شکل (۱۰-ب) مشاهده می شود در این حالت به دلیل وجود تکیه گاه ویسکوالاستیک در وسط میله و تکیه گاه ویسکوالاستیک مرزی در گره یک، جابجایی گره هایی که بین این دو تکیه گاه قرار دارند، بسیار کاهش یافته است. قابل توجه است که این نوع تکیه گاه ها به دلیل قابلیت ارتجاعی خود، علاوه بر میرای ارتعاشات موجب کاهش تنش های ایجاد شده در تکیه گاه نسبت به حالت گیردار می شود که می تواند از لحاظ طراحی مهم باشد.

### ۳-۳-۲- اثر فرکانس نیرو بر ارتعاش میله الاستیک با تکیه گاه ویسکوالاستیک

بررسی مشابه ای برای سه حالت، میله الاستیک با تکیه گاه مرزی گیردار، میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک و میله الاستیک با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک و یک تکیه گاه ویسکوالاستیک در وسط میله، برای نیروی سینوسی  $F(t)=4 \sin(2\pi f t)$  در چهار فرکانس  $f=10, 30, 50, 70 \text{ Hz}$  انجام شد  $(f = \omega / 2\pi)$ . مشخصات مواد ویسکوالاستیک بکار رفته



شکل ۱۱- تاریخچه جابجایی گره انتهایی میله الاستیک در معرض نیروی محرک سینوسی، در چهار فرکانس ۱۰، ۳۰، ۵۰ و ۷۰. در هر شکل نتایج ارتعاش میله الاستیک با تکیه گاه گیردار (آبی-خط تیره)، با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک (خط قرمز)، با تکیه گاه مرزی ویسکوالاستیک و یک تکیه گاه ویسکوالاستیک در وسط میله (خط مشکی) نشان داده شده است.



در بررسی  $G_{inf}$  از نسبت این پارامتر بر مدول الاستیسیته میله  $(St = G_{inf}/E)$  استفاده گردید. نتایج نشان داد که تغییرات  $G_{inf}$  تاثیر چندانی بر جابجایی‌های اولیه، فرکانس ارتعاش و درصد میرایی به ویژه در  $St$  های کم ندارد. بیشتر تاثیر تغییرات آن بر جابجایی‌های نهایی میله پس از میرایی نوسانات است و با توجه به مدل مورد بررسی در این مقاله نسبت حدود 0.1 تا 0.5 برای  $St$  مناسب می‌باشد. البته افزایش زیاد  $St$  و نزدیک شدن  $G_{inf}$  به  $E$ ، در صد میرایی را کاهش خواهد داد.

تغییرات  $G_k$  ها بر خلاف  $G_{inf}$  بر جابجایی‌های نهایی پس از میرایی، تاثیری ندارد. کاهش  $G_k$  ها، موجب افزایش جابجایی‌های اولیه و درصد میرایی می‌گردد. همچنین کاهش  $G_k$  ها موجب کاهش فرکانس نیز می‌گردد.

تغییرات  $\eta_k$  ها نیز بر جابجایی‌های نهایی و همچنین بر خلاف  $G_k$  ها، بر جابجایی اولیه و فرکانس نیز تاثیر ندارد. اثر مهم  $\eta_k$  بر میرایی است به نحوی که کاهش  $\eta_k$  ها منجر به افزایش قابل ملاحظه در مقدار و سرعت میرایی می‌شود. از آنجایی که کاهش  $\eta_k$  ها بدون تاثیر بر سایر رفتارها موجب افزایش قابل ملاحظه درصد میرایی به ویژه در زمانهای اولیه می‌گردد، می‌تواند در کنترل پدیده خستگی بسیار مفید باشد.

نتایج ارتعاش محوری میله با تکیه‌گاه ویسکوالاستیک ناشی از نیروی سینوسی نشان داد که استفاده از تکیه‌گاه ویسکوالاستیک جهت میرایی نوسانات در نیروهایی با فرکانس‌های پایین بسیار موثر است و در نیروهایی با فرکانس‌های بالا این کارایی بسیار وابسته به زمان‌های تاخیر می‌باشد و می‌بایست از موادی با زمان‌های تاخیر کم‌تر استفاده نمود. این موضوع اهمیت بررسی پاسخ دینامیکی را در فرکانس‌های بالا نشان می‌دهد.

علاوه بر موارد ذکر شده باید به این نکته توجه نمود که اعمال نیروی های هارمونیک با فرکانس کم، شبیه حالتی است که نیرو به تدریج زیاد می‌شود، لذا اثرات دینامیکی بسیار کمی ظاهر شده و پاسخ مانند حالت شبه پایدار خواهد بود. این موضوع اهمیت بررسی پاسخ دینامیکی در فرکانس های بالا را نشان می‌دهد.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله اثرات تکیه‌گاه ویسکوالاستیک و مشخصات آن، که با مدل جامع کلونین-ویت مدلسازی شده است، بر ارتعاش محوری میله تحت بار محرک پله‌ای ثابت و سینوسی مورد بررسی قرار گرفته است. پس از ارائه روابط و نحوه پیاده سازی شرط مرزی تکیه‌گاه ویسکوالاستیک، معادلات با استفاده از روش اجزای محدود و در حوزه زمان حل گردید. رفتار تاخیری مواد ویسکوالاستیک تکیه‌گاه با مشاهده استهلاك انرژی و میرایی ارتعاشات و همچنین تغییر فرکانس آشکار می‌شود. میزان این تغییرات به مشخصات مصالح ویسکوالاستیک مورد استفاده در تکیه‌گاه بستگی دارد.

نتایج بررسی مشخصات مواد ویسکوالاستیک تکیه‌گاه بر ارتعاش محوری ناشی از نیروی محرک پله ای نشان داد که افزایش طول تکیه‌گاه، موجب کاهش فرکانس ارتعاش میله و افزایش مقدار و سرعت میرایی خواهد شد. همچنین جابجایی های اولیه و جابجایی های نهایی میله پس از میرایی نوسانات نیز افزایش می‌یابد. برای مدل در نظر گرفته شده در این مقاله دیده شد که نسبت  $v=0.05$  مناسب است.

## پیوست الف

در حل اجزای محدود معادله ارتعاش محوری (۹)، ابتدا با استفاده از تابع وزن  $W$ ، انتگرال وزنی برای یک المان دو گرهی با مرزهای  $x_a$  و  $x_b$  نوشته و با استفاده از انتگرال جزء به جزء، شکل ضعیف آن معادله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} * dG + \rho_t W \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx + \left[ W \left( -\frac{\partial u}{\partial x} * dG \right) \right]_{x_a}^{x_b} = 0, \quad \text{الف-۱}$$

عبارت دوم در سمت چپ معادله (الف-۱)، بیانگر شرایط مرزی است و ترم  $\frac{\partial u}{\partial x} * dG$  در آن طبق رابطه (۲) و تعریف کرنش - های کوچک برابر تنش ( $\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} * dG$ ) در مرزهای المان خواهد بود. اما اگر  $\frac{\partial u}{\partial x} * dG$  در عبارت اول معادله (الف-۱) با استفاده از تعریف عملگر استیلیس کانولوش بسط داده شود، با استفاده از تقریب عددی ارائه شده (۱۳)، آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} * dG \approx \left( G(0) - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \alpha_{1k} \right) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - \sum_{k=1}^{N_{KV}} e^{-\frac{\Delta t}{\eta_k}} \left( \alpha_{1k} \frac{\partial u(t-\Delta t)}{\partial x} + I_{\frac{\partial u}{\partial x}}(t-\Delta t) \right), \quad \text{الف-۲}$$

که در آن  $\alpha_{1k}$  طبق رابطه (۱۴) و  $I_{\frac{\partial u}{\partial x}}$  به صورت رابطه (۱۳) می‌باشد، اگر در آن  $h(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(t)$  و  $h(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(t)$  باشد.

چنانچه رابطه (الف-۲)، به جای ترم مربوطه در انتگرال معادله (الف-۱) جایگزین شود و از روش گالرکین و توابع تقریب خطی برای المان دو گرهی ( $i=1,2$ ) نمونه به طول  $l$ ،  $W = N_i(x)$  استفاده و  $u$  به صورت  $u = \sum_{j=1}^2 u_j(t) N_j(x)$  تعریف شود، در نهایت معادلات اجزاء برای المان نمونه به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\sum_{j=1}^{n=2} \left[ \rho_t M_{ij} \ddot{u}_j(t) + \left( G(0) - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \alpha_{1k} \right) K_{ij} u_j(t) \right] - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \left[ \sum_{j=1}^{n=2} e^{-\Delta t/\eta_k} \left( \alpha_{1k} K_{ij} u_j(t-\Delta t) + K_{ij} I_{u_j}(t-\Delta t) \right) \right] - \left[ N_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} * dG = \sigma \right) \right]_{x_a}^{x_b} = 0, \quad i=1,2 \quad \text{الف-۳}$$

که در آن  $\ddot{u}_j$  مشتق دوم جابه‌جایی نسبت به زمان یعنی شتاب می‌باشد. ماتریس جرم  $M_{ij}$  و سختی  $K_{ij}$  برای المان نمونه دوگرهی در مختصات محلی به صورت زیر خواهد بود:

$$M_{ij} = \int_0^l N_i(\bar{x}) N_j(\bar{x}) d\bar{x}, \quad \text{for } i=1,2, \quad j=1,2 \quad \text{الف-۴}$$

$$K_{ij} = \int_0^l \frac{\partial N_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial N_j(\bar{x})}{\partial \bar{x}} d\bar{x}, \quad \text{for } i=1,2, \quad j=1,2 \quad \text{الف-۵}$$

در نهایت اگر معادلات اجزای (الف-۳) برای المان نمونه  $e$  به فرم ماتریسی نوشته شود رابطه (۱۵) بدست خواهد آمد.

## ۵- مراجع

- [1] Keramat, A., Tijsseling, A.S., Hou, Q., Ahmadi, A. (2012). "Fluid-structure interaction with pipe-wall viscoelasticity during water hammer". *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 28, pp. 434-455.
- [2] Keramat, A., Ahmadi, A. (2012). "Axial wave propagation in viscoelastic bars using a new finite-element-based method". *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 77, pp. 105-117.
- [3] Moireau, P., Xiao, N., Astorino, M., Figueroa, C.A., Chapelle, D., Taylor, C.A., Gerbeau, J.F. (2012). "External tissue support and fluid-structure simulation in blood flows". *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Vol. 11, pp. 1-18.
- [4] Vostroukhov, A.V., Metrikine, A.V. (2003). "Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track". *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 5723-5752.
- [5] Tillema, H.G. (2003). "Noise reduction of rotating machinery by viscoelastic bearing supports". PhD thesis, University of Twente ISBN: 90-36518776.
- [6] Friswell, M.I., Sawicki, J.T., Inman, D.J., Lees, A.W. (2007). "The response of rotating machines on viscoelastic supports". *International Review of Mechanical Engineering*, Vol. 1, pp. 32-40.
- [7] Prak, J. (2007). "Influence of support viscoelastic properties on the structural wave propagation". *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 21, pp. 2117-2124.
- [8] Wineman, A.S., Rajagopal, K.R. (2000). "Mechanical response of polymers: an introduction". Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] Sim, W., Lee, S. (2005). "Finite element analysis of transient dynamic viscoelastic problems in time domain". *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 19(1), pp. 61-71.
- [10] Lee, U., Oh, H. (2005). "Dynamics of an axially moving viscoelastic beam subject to axial tension". *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 2381-2398.
- [11] Fenander, A. (1996). "Modal synthesis when modeling damping by use of fractional derivatives". *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 34, pp. 1051-1054.
- [12] See, H. (2001). "Advances in measuring linear viscoelastic properties using novel deformation geometries and Fourier transform technique". *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 13(2), pp. 67-81.
- [13] Ma, H. (2008). "Exact solutions of axial vibration problems of elastic bars". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 75(2), pp. 241-252.
- [14] Leonov, A.I. (1988). "Propagation of nonlinear waves along a viscoelastic bar". *Rheologica Acta*, Vol. 27(4), pp. 335-350.
- [15] Fan, Z.J., Kim, K.J. (1997). "Investigation of effects of viscoelastic boundary supports on transient sound radiated from a rectangular plate by modal strain energy method". *KSME International Journal*, Vol. 11(5), pp. 530-536.
- [16] Fan, Z.J., Lee, J.H., Kang, K.H., Kim, K.J. (1998). "The forced vibration of a beam with viscoelastic boundary supports". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210(5), pp. 673-682.
- [17] Majorana, C.E., Pomaro, B. (2011). "Dynamic stability of an elastic beam with visco-elastic translational and rotational support". *Engineering Computations*, Vol. 28(2), pp. 114-129.
- [18] Turgut, K. (2005). "Determination of the steady-state response of viscoelastically supported cantilever beam under sinusoidal base excitation". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 281(3), pp. 1145-1156.
- [19] Koutsawa, Y., Daya, E.M. (2007). "Static and free vibration analysis of laminated glass beam on viscoelastic supports". *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44(25), pp. 8735-8750.
- [20] Brinson, H.F., Brinson, L.C. (2008). "Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction". Springer Science+Business Media, LLC, New York, USA, ISBN-13: 978-1441944788.
- [21] Reddy, J.N. (1993). "An Introduction to the Finite Element Method". second ed. McGraw-Hill, New York.