

مطالعه‌ی تحلیلی الگوی شروع تسلیم برای استوانه‌ی توخالی مدرج تابعی دوار

مهدی سلمانی تهرانی^{۱*} و محمدرضا همتی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: مواد مدرج تابعی، استوانه‌ی توخالی دوار، الگوی شروع تسلیم، معیار ترسکا، نسبت شعاع‌ها، پارامترهای توان.</p>	<p>مقاله‌ی حاضر به بررسی تحلیلی اثر نسبت شعاع‌ها و پارامترهای توان، بر الگوی شروع تسلیم استوانه‌ی توخالی مدرج تابعی دوار می‌پردازد. تحلیل بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییرشکل‌های کوچک در حالت کرنش-صفحه‌ای و با فرض تسلیم بر اساس معیار ترسکا انجام شده است. مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم به‌صورت تابع‌های توانی از مختصه‌ی شعاعی فرض شده‌اند. معادله‌ی تعادل ناویر به‌صورت تحلیلی حل شده است. با مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده با حالت استوانه‌ی همگن و همچنین با حالت خاص چگالی و تنش تسلیم ثابت، که در مراجع پیشین آمده، اعتبار تحلیل‌ها نشان شده است. سپس اثر پارامترهای هندسی و مادی بر ترتیب تنش‌ها و چگونگی شروع تسلیم بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم می‌تواند اثر قابل توجهی بر الگوی شروع تسلیم ناشی از دوران استوانه داشته باشد. بر اساس جستجوی نگارندگان، اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم و نیز پارامتر نسبت شعاع‌ها بر الگوی شروع تسلیم استوانه‌ی مدرج تابعی دوار در پژوهش‌های پیشین، بررسی نشده است.</p>

۱- مقدمه

اساس این نیاز، مواد مدرج تابعی^۲ برای نخستین بار به‌وسیله‌ی پژوهش‌گران ژاپنی [۱] در میانه‌ی دهه‌ی ۸۰ میلادی ساخته و معرفی شد.

ماده‌ی مدرج تابعی در حقیقت ماده‌ای مرکب است که از دو جنس متفاوت تشکیل شده است. به‌گونه‌ای که از یک سطح به سطح دیگر، ماده به تدریج از یک جنس به جنس دیگر تبدیل می‌شود. در نتیجه بر خلاف مواد مرکب متداول که تغییر خواص به‌صورت گسسته و ناگهانی است، خواص فیزیکی ماده‌ی مدرج تابعی به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند. به این ترتیب بر خلاف مواد مرکب متداول، پدیده‌ی تمرکز تنش در سطح مشترک لایه‌ها دیگر وجود نخواهد داشت. ترکیب سرامیک و فلز، یکی از رایج‌ترین شکل مواد مدرج تابعی است.

در کاربردهای ابتدایی در صنایع هوا-فضا، برای پوشش و روکش قطعات با دمای کارکرد بالا، از سرامیک استفاده می‌شد. اگرچه سرامیک عایق گرمایی بسیار خوبی است، اما مقاومت آن در برابر تنش‌های پس‌ماند بسیار پایین است. تنش‌های پس‌ماند سبب بروز مشکلاتی مانند ایجاد حفره و ترک در سرامیک می‌شود. مواد مرکب لایه‌ای نیز در اثر تنش‌های حرارتی دچار لایه‌لایه شدن می‌شوند. با توجه به این مشکلات، ایده‌ی ساخت یک ماده‌ی مرکب که علاوه بر مقاومت گرمایی و مکانیکی بالا، مشکل لایه‌لایه شدن نیز نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد. بر

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: tehrani@cc.iut.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۲. دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

² Functionally Graded Materials

توتونکو و اوزترک [۷] نیز استوانه‌ی مدرج تابعی قرار تحت فشار را با در نظر گرفتن شرایط مرزی فشاری مختلف تحلیل کردند. آن‌ها نیز متغیر مسأله را مدول الاستیسیته را در نظر گرفتند.

یو و یانگ [۸] به بررسی رفتار الاستیک کروی مدرج تابعی تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن مدول الاستیسیته به صورت یک تابع نمایی، به عنوان تنها پارامتر متغیر، پرداختند. در پژوهش آن‌ها دو نوع مخزن فشار بررسی شده است. مخزن ساندویچی با لایه‌ی میانی مدرج تابعی و لایه‌های داخلی و خارجی همگن و نیز مخزن به صورت کاملاً مدرج تابعی.

دای و همکارانش [۹] رفتار الاستیک-مغناطیس^۱ مخزن استوانه‌ای و کروی مدرج تابعی تحت فشار داخلی و میدان مغناطیسی را مطالعه کردند. آن‌ها با فرض تابع توانی برای مدول الاستیسیته و ضریب نفوذپذیری مغناطیس^۲، نشان دادند که این متغیرها اثر زیادی بر تنش الاستیک-مغناطیس و آشفستگی میدان جریان مغناطیس دارند.

اراسلان و اکیس [۱۰] به تحلیل رفتار الاستیک کروی مدرج تابعی ضخیم تحت فشار داخلی پرداختند. آن‌ها تغییرات شعاعی مدول الاستیسیته را یکبار به صورت خطی و بار دیگر به صورت نمایی فرض کرده، تنش‌های ایجاد شده در دو حالت را با هم مقایسه کردند.

پژوهش‌هایی نیز در زمینه‌ی تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک مخازن استوانه‌ای و کروی مدرج تابعی منتشر شده است. اراسلان و اکیس [۱۱] به تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ی مدرج تابعی، تحت فشار داخلی پرداختند. در کار آن‌ها مدول الاستیسیته و تنش تسلیم به صورت تابع توانی از مختصه‌ی شعاعی فرض شده است. آن‌گاه با بررسی توزیع تنش در حالت الاستیک و الاستیک-پلاستیک، نتایج را با حالت ماده‌ی همگن مقایسه کردند و نشان دادند که بین رفتار استوانه‌ی همگن و استوانه‌ی مدرج تابعی، تفاوت قابل توجهی از نظر تنش‌های ایجاد شده و تسلیم ماده وجود دارد.

پژوهش‌هایی نیز با در نظر گرفتن تنش گرمایی در بررسی استوانه‌ی مدرج تابعی انجام شده است. جباری و همکارانش [۱۲] با فرض آن‌که تنها مدول الاستیسیته

با توجه به ویژگی‌های منحصربه‌فرد مواد مدرج تابعی، پیش‌بینی می‌شود که کاربرد این مواد در طی سال‌های آینده گسترش یابد. در حال حاضر مواد مدرج تابعی در زمینه‌های بسیاری کاربرد دارند. از آن جمله می‌توان به سپرهای حرارتی، پوشش توربین گاز برای کاهش تورق و افزایش طول عمر، پوشش حرارتی در موتورهای بنزینی برای افزایش تراکم و راندمان، اجزای مبدل‌های گرمایی، روکش‌های پلازما برای راکتورهای گداخت هسته‌ای، ابزارهای برش الماس SiC برای ماشین‌کاری دقیق، لنزهای تماسی، استخوان مصنوعی، فیبر نوری، صنایع ساعت‌سازی، اتصالات الکتریکی و مغناطیسی برای ولتاژهای بالا اشاره نمود.

تحلیل رفتار مکانیکی استوانه‌ی دوار با توجه به کاربردهای متنوع آن در صنایع مختلف، همواره از مسائل مهم و کلاسیک در حوزه‌ی مکانیک جامدات بوده است. استوانه‌ی دوار در بسیاری از مسائل صنعتی مانند سانتریفیوژها و موتورهای الکتریکی کاربرد اساسی دارند. با توجه به ویژگی‌های مواد مدرج تابعی و هم‌چنین خواسته‌های مورد انتظار از استوانه‌های دوار، استوانه‌های مدرج تابعی دوار کاربرد روبه‌افزایشی در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند. از کاربردهای استوانه‌ی مدرج تابعی دوار می‌توان به موتورهای الکتریکی، ژنراتورهای برق، راکتورها، سانتریفیوژهای سرعت دورانی بالا، موتورهای سرامیکی، پمپ‌های سرعت دورانی بالا، موتورهای الکتریکی با پوسته‌ی مغناطیسی پیوسته، یاتاقان‌های ضد سایش و مقاوم در برابر مواد شیمیایی، توربین گاز، ساخت دیواره‌ی موشک‌ها و موارد دیگری از این قبیل [۲] اشاره کرد.

در زمینه‌ی تحلیل رفتار الاستیک و الاستیک-پلاستیک استوانه و دیسک دوار همگن، پژوهش‌های زیادی انجام شده است. از جمله‌ی مهمترین آن‌ها می‌توان به کارهای مندلسون [۳]، تیموشنکو و گودیر [۴] و چاکراباتی [۵] اشاره کرد.

با توجه به کاربرد روبه‌گسترش مواد مدرج تابعی، پژوهش‌های متفاوتی بر روی رفتار این مواد صورت گرفته است. در زمینه‌ی تحلیل رفتار الاستیک مخازن تحت فشار مدرج تابعی می‌توان به پژوهش‌های زیر اشاره کرد.

فوکویی و یاماناکا [۶] با فرض تابع توانی برای تغییرات مدول الاستیسیته، رفتار الاستیک استوانه‌ی جداره-ضخیم مدرج تابعی تحت فشار داخلی را تحلیل کردند.

¹ Magneto Elasticity

² Magnetic Permeability

پنگ و لی [۱۷] با فرض تابع‌های توانی متفاوت برای مدول الاستیسیته در جهت‌های شعاعی و محیطی، تغییرشکل دیسک توخالی مدرج تابعی دوار ارتوتروپیک^۱ را تحلیل کردند. آن‌ها سپس برای حل معادله‌ی تعادل، روشی بر اساس معادله‌ی انتگرالی فردهولم^۲ ارائه کردند. در زمینه‌ی تحلیل تغییرشکل سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی، پژوهش‌هایی نیز در داخل کشور انجام شده است. طهانی و طالبیان [۱۸] به تحلیل رفتار مخازن استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارهای مکانیکی و گرمایی و محاسبه‌ی توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی‌های ایجاد شده در اثر فشار داخلی پرداختند.

پژوهش‌های دیگری نیز در داخل کشور در زمینه‌ی تحلیل رفتار این نوع سازه‌ها منتشر شده است. از جمله می‌توان به تحلیل کمانش محوری پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با روش بدون المان محلی پتروف-گالرکین، تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای نسبتاً ضخیم مدرج تابعی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی روی بستر الاستیک وینکر-پسترناک تحت بارهای مکانیکی و گرمایی و هم‌چنین ارتعاشات آزاد و اجباری استوانه‌های مدرج تابعی به روش بدون المان، اشاره کرد [۱۹-۲۳].

بر اساس جستجوی نگارندگان، در میان پژوهش‌های منتشرشده در زمینه‌ی تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، تا کنون اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم و نیز پارامتر هندسی نسبت شعاع بر الگوی شروع تسلیم بررسی نشده است. بررسی اثر این پارامترها بر چگونگی شروع تسلیم از دو جهت اهمیت دارد. نخست تعیین سرعت زاویه‌ای حدی مجاز، پیش از شروع تسلیم. دوم شناخت چگونگی گسترش ناحیه‌ی پلاستیک، برای تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ی مدرج تابعی دوار. بر این اساس، هدف اصلی این مقاله بررسی اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم و نیز پارامتر هندسی نسبت شعاع‌ها بر الگوی شروع تسلیم است. شکل ۱ به صورت طرح‌واره، هندسه و پارامترهای اصلی هندسی و بارگذاری مسأله‌ی مورد بررسی را نشان می‌دهد.

متغیر باشد، به تحلیل تنش‌های مکانیکی و گرمایی در استوانه‌ی مدرج تابعی در اثر بارگذاری متقارن محوری پرداختند.

همان‌گونه که اشاره شد، یکی از کاربردهای مواد مدرج تابعی در ساخت استوانه و دیسک دوار است. در این زمینه نیز پژوهش‌های مختلفی انجام شده است.

اراسلان و اکیس [۱۳] مسأله‌ی استوانه و دیسک مدرج تابعی دوار را به ترتیب با فرض حالت کرنش-صفحه‌ای و تنش-صفحه‌ای، تحلیل کردند. در پژوهش آن‌ها مدول الاستیسیته یک‌بار به صورت تابع توانی و بار دیگر به صورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است. آن‌گاه نتایج دو حالت را با هم مقایسه کردند.

کردخیلی و نقدآبادی [۱۴] تغییرشکل دیسک مدرج تابعی دوار توخالی و توپر را مطالعه کردند. آن‌ها برای تغییرات مدول الاستیسیته و ضریب هدایت گرمایی، از تابع توانی استفاده کردند. آن‌گاه با تقسیم ضخامت در راستای شعاع به چند زیرمجموعه و با توجه به شرایط پیوستگی در هر زیردامنه، معادلات تعادل را به صورت نیمه-تحلیلی حل کرده، با رسم جابه‌جایی شعاعی و تنش‌ها، نتایج را با ماده‌ی همگن مقایسه کردند.

یو و همکارانش [۱۵] با در نظر گرفتن دیسک مدرج تابعی دوار که در معرض بارگذاری گرمایی قرار گرفته را با فرض مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و چگالی به صورت تابع‌های توانی از مختصه‌ی شعاعی، معادلات را به صورت تحلیلی حل کرده، توزیع تنش را برای برخی حالت‌های متغیر ماده بررسی کردند.

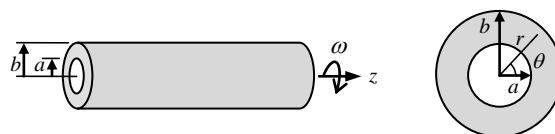
اراسلان و اکیس [۱۶] با فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل و به‌کارگیری معیار تسلیم ترسکا و قانون جریان وابسته به آن، تغییرشکل الاستیک-پلاستیک استوانه‌ی مدرج تابعی دوار را تحلیل کردند. آن‌ها تغییر مدول الاستیسیته را به صورت تابع توانی از مختصه‌ی شعاعی فرض کرده، از تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی کردند. سپس با حل تحلیلی معادله‌ی تعادل ناویر و بررسی توزیع تنش ناحیه‌ی پلاستیک، نشان دادند که تسلیم لزوماً از شعاع داخلی شروع نمی‌شود. بلکه بسته به پارامتر توان مدول الاستیسیته، ممکن است تسلیم از شعاع داخلی یا خارجی شروع شود.

¹ Orthotropic

² Fredholm Integral Equation

۲- معادلات حاکم

۱-۲- تحلیل رفتار الاستیک



شکل ۱- نمایش طرح‌واره‌ی هندسه و پارامترهای اصلی مسأله

با توجه به هندسه‌ی مسأله، فرمول‌بندی و بررسی نتایج در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) انجام می‌شود (شکل ۱). در این مقاله پارامترهای مادی مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم، بر حسب مختصه‌ی شعاعی متغیر فرض می‌شوند. تغییر این پارامترها به صورت تابع‌های توانی (۱) در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 (r/b)^{n_E} \\ \rho(r) &= \rho_0 (r/b)^{n_\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه‌های (۱) E_0 ، ρ_0 و σ_0 به ترتیب مقدار مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم در شعاع خارجی، $r=b$ ، هستند. در این مقاله از تغییرات ضریب پواسون، چشم‌پوشی شده است.

معادله‌ی حرکت استوانه‌ی دوار به صورت معادله‌ی (۲) بیان می‌شود [۱].

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta = -\rho r^2 \omega^2 \quad (2)$$

معادله‌ی حرکت بالا، که در اصطلاح معادله‌ی تعادل نیز گفته می‌شود، کلی و مستقل از همگن بودن و هم‌چنین الاستیک یا الاستیک-پلاستیک بودن رفتار ماده است. بر اساس نظریه‌ی تغییرشکل‌های کوچک، رابطه‌ی مؤلفه‌های شعاعی و محیطی کرنش با جابه‌جایی شعاعی با به صورت رابطه‌های (۳) است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= du(r)/dr \\ \varepsilon_\theta &= u(r)/r \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه‌های (۳) ε_θ و ε_r به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و محیطی کرنش هستند. با توجه به فرض طول بسیار بزرگ برای استوانه، شرایط کرنش-صفحه‌ای برای مسأله‌ی مورد بررسی حاکم است و در نتیجه کرنش محوری، ε_z ، برابر صفر خواهد بود.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4)$$

با استفاده از قانون هوک و در نظر گرفتن شرایط کرنش-صفحه‌ای و اعمال روابط کرنش-جابه‌جایی شعاعی (۳)، رابطه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی شعاعی به صورت رابطه‌های (۵) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{du(r)}{dr} + \nu \frac{u(r)}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{u(r)}{r} + \nu \frac{du(r)}{dr} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ که σ_r ، σ_θ و σ_z به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی، محیطی و محوری تنش هستند. با جایگذاری مؤلفه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی شعاعی، معادله‌ی تعادل بر حسب جابه‌جایی شعاعی به صورت رابطه‌ی (۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) + (1+n_E)r \left(\frac{d}{dr} u(r) \right) - \frac{1-\nu(1+n_E)}{1-\nu} u(r) = \\ - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\rho_0 \omega^2}{E_0} b^{(n_E-n_\rho)} r^{(3+n_\rho-n_E)} \end{aligned} \quad (6)$$

حل تحلیلی معادله‌ی دیفرانسیل (۶) به صورت بی‌بعد شده‌ی رابطه‌ی (۷) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}) = C_1 \bar{r}^{\left(\frac{-n_E-k}{2}\right)} + C_2 \bar{r}^{\left(\frac{-n_E+k}{2}\right)} - \\ A_1 \bar{\omega}^2 \bar{r}^{(n_\rho-n_E+3)} \end{aligned} \quad (7)$$

در رابطه‌ی (۷) C_1 و C_2 ، ثابت‌های بی‌بعد انتگرال‌گیری هستند. پارامترهای بی‌بعد \bar{u} و $\bar{\omega}^2$ و ثابت‌های بی‌بعد A_1 و k در رابطه‌ی (۷) بر اساس رابطه‌های (۸) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r/b \\ \bar{u} &= u/b \\ \bar{\omega}^2 &= (\rho_0 \omega^2 b^2) / E_0 \\ k &= \frac{\sqrt{(1-2\nu+\nu^2)n_E^2 + 4\nu(\nu-1)n_E + 4(\nu^2-2\nu+1)}}{1-\nu} \end{aligned} \quad (8)$$

به سادگی می‌توان نشان داد کرنش‌های شعاعی و محیطی بر حسب جابه‌جایی بی‌بعد \bar{u} به صورت رابطه‌های (۹) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= (du/dr) = (d\bar{u}/d\bar{r}) \\ \varepsilon_\theta &= (u/r) = (\bar{u}/\bar{r}) \end{aligned} \quad (9)$$

هم‌چنین مؤلفه‌های بی‌بعد تنش بر اساس رابطه‌ی (۱۰) تعریف می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_i / E_0 \quad (10)$$

برای بررسی شرایط تسلیم، از معیار تسلیم ترسکا استفاده شده است. همان‌گونه که در مراجع پیشین نیز دیده می‌شود، بررسی شرایط تسلیم به انتخاب مقدار عددی پارامترهای توان n_ρ و n_σ وابسته است. در این مقاله، نتایج عددی برای حالتی که پارامترهای توان n_ρ و n_σ یکسان و مساوی باشند، ارائه و بررسی می‌شوند. بر اساس نتایج نمودارهای شکل‌های ۴ تا ۷ که در ادامه و در بخش نتایج ارائه خواهد شد، مشاهده می‌شود که به‌ازای مقادیر مختلف و مساوی پارامترهای توان n_ρ و n_σ ترتیب مؤلفه‌های تنش همواره به‌صورت $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ است. بنابراین معیار تسلیم ترسکا پس از بی‌بعدسازی، به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_0}{E_0} \bar{r}^{n_\sigma} = \bar{\sigma}_0 \bar{r}^{n_\sigma} \quad (16)$$

برای سادگی نامگذاری و به‌کارگیری در معادله‌ها و ترسیم نمودارها، تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، به‌صورت زیر معرفی می‌شود.

$$\bar{\sigma}_{Tresca} = \frac{(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r)}{\bar{\sigma}_0} - \bar{r}^{n_\sigma} \quad (17)$$

با جایگذاری تنش‌های بی‌بعد در رابطه‌ی (۱۷)، صورت بسط داده شده‌ی تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، استخراج می‌شود. پس از جایگذاری عبارت‌ها و ساده‌سازی، تنش بی‌بعد ترسکا به‌شکل رابطه‌ی (۱۸) به‌دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_{Tresca} = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\sigma}_0} f(\bar{r}) - \bar{r}^{n_\sigma}$$

$$f(\bar{r}) = \frac{1}{(1+\nu)} \times \bar{r}^{n_E} \times \left\{ \left[\bar{C}_1 \bar{r}^{m_1} + \bar{C}_2 \bar{r}^{m_2} - A_1 \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \right] - \left(\bar{C}_1 \bar{r}^{m_1} \frac{(-n_E-k)}{2} + \bar{C}_2 \bar{r}^{m_2} \frac{(-n_E+k)}{2} - A_1 (3+n_\rho-n_E) \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \right) \right\} \quad (18)$$

$$\bar{C}_1 = \frac{C_1}{\bar{\omega}^2}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{C_2}{\bar{\omega}^2}$$

در رابطه‌های (۱۸)، پارامتر بی‌بعد $\bar{\omega} / \sqrt{\bar{\sigma}_0}$ ، اندازه‌ی بارگذاری را نشان می‌دهد. به‌گونه‌ای که با افزایش سرعت زاویه‌ای، این پارامتر بی‌بعد نیز بزرگتر می‌شود. با توجه به نقش این پارامتر در بررسی و تحلیل نتایج، پارامتر بی‌بعد بارگذاری به‌صورت رابطه‌ی (۱۹) تعریف می‌شود.

$$\Omega = \bar{\omega} / \sqrt{\bar{\sigma}_0} \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه‌ی جابه‌جایی (۷) در روابط تنش برحسب جابه‌جایی (۵)، تنش‌های بی‌بعد به‌صورت رابطه‌های (۱۱) به‌دست می‌آیند.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \bar{r}^{n_E} \times \left\{ v \left(C_1 \bar{r}^{m_1} + C_2 \bar{r}^{m_2} - A_1 \bar{\omega}^2 \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \right) + (1-\nu) \left(C_1 \bar{r}^{m_1} \frac{(-n_E-k)}{2} + C_2 \bar{r}^{m_2} \frac{(-n_E+k)}{2} - A_1 \bar{\omega}^2 (3+n_\rho-n_E) \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \right) \right\} \quad (11)$$

الف

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \bar{r}^{n_E} \times \left\{ (1-\nu) \left(C_1 \bar{r}^{m_1} + C_2 \bar{r}^{m_2} - A_1 \bar{\omega}^2 \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \right) + v \left(C_1 \bar{r}^{m_1} \frac{(-n_E-k)}{2} + C_2 \bar{r}^{m_2} \frac{(-n_E+k)}{2} - A_1 \bar{\omega}^2 (3+n_\rho-n_E) \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \right) \right\} \quad (11)$$

ب

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \bar{r}^{n_E} \times \left\{ C_1 \bar{r}^{m_1} \times m_3 + C_2 \bar{r}^{m_2} \times m_4 - A_1 \bar{\omega}^2 \bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)} \times (4+n_\rho-n_E) \right\} \quad (11)$$

ج

ثابت‌های m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 در روابط تنش (۱۱) عبارتند از

$$m_1 = (-n_E - k - 2) / 2$$

$$m_2 = (-n_E + k - 2) / 2$$

$$m_3 = (-n_E - k + 2) / 2$$

$$m_4 = (-n_E + k + 2) / 2 \quad (12)$$

شرایط مرزی بدون تنش روی سطوح داخلی و خارجی استوانه به‌وسیله‌ی رابطه‌های (۱۳) بیان می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r} = (a/b)) = 0$$

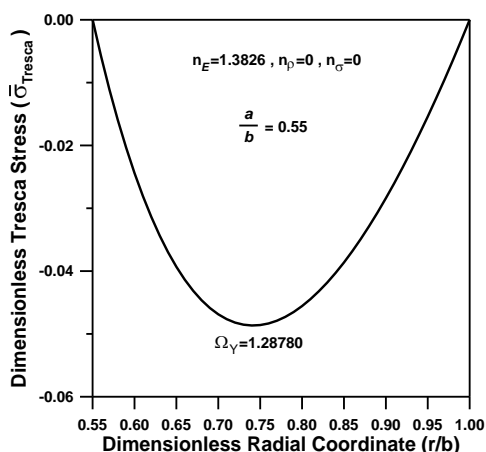
$$\bar{\sigma}_r(\bar{r} = 1) = 0 \quad (13)$$

ثابت‌های انتگرال‌گیری بی‌بعد C_1 و C_2 ، با استفاده از شرایط مرزی (۱۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$C_1 = -2 \times A_1 \times A_2 \times \bar{\omega}^2 \times \frac{1}{\left(\left(\frac{b}{a} \right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_2} \right)} \times \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{-n_\rho-4} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_1} \right]$$

$$C_2 = -2 \times A_1 \times A_3 \times \bar{\omega}^2 \times \frac{1}{\left(\left(\frac{b}{a} \right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_2} \right)} \times \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{-n_\rho-4} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_2} \right] \quad (14)$$

۲-۲- بررسی شروع تسلیم



شکل ۲- نمودار تنش بی‌بعد ترسکا در آستانه‌ی شروع تسلیم

به‌ازای $(a/b)=0/55$ و $(n_ρ=n_σ=0)$ و $n_E=1/38260$

در نمودار شکل (۲) مشاهده می‌شود که در این حالت خاص، به‌ازای پارامتر بی‌بعد بارگذاری $Ω_γ=1/28780$ تسلیم هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی آغاز می‌شود. این نتیجه دقیقاً منطبق با نتیجه‌ی ارائه شده در مرجع [۱۶] برای همین شرایط است.

در ادامه اثر پارامترهای بر الگوی شروع تسلیم بررسی می‌شوند. اما بررسی تغییرشکل و توزیع تنش در استوانه، به انتخاب مقدار عددی پارامترهای توان وابسته است. در این مقاله، نتایج عددی برای حالتی که پارامترهای توان $n_E, n_ρ, n_σ$ یکسان و مساوی باشند، ارائه و بررسی می‌شوند. انتخاب مقدار مساوی برای پارامترهای توان در مراجع پیشین، مانند مرجع [۹]، نیز انجام شده است. هم‌چنین ضریب پواسون $ν=0/3$ فرض می‌شوند.

استفاده از معیار ترسکا برای تعیین بارگذاری شروع تسلیم، مستلزم تعیین ترتیب مؤلفه‌های تنش در محدوده‌ی تغییرشکل الاستیک است. در بخش بعد، اثر نسبت شعاع‌ها و تغییر مدول الاستیسیته و چگالی بر ترتیب مؤلفه‌های تنش بررسی می‌شود.

۳-۲- بررسی اثر چگالی متغیر و نسبت شعاع‌ها بر ترتیب تنش‌ها

پیش از بررسی شرایط شروع تسلیم استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، توجه به یک نکته‌ی اساسی ضروری است. تحلیل رفتار استوانه‌ی دوار همگن نشان می‌دهد [۵] بر اساس معیار تسلیم ترسکا، تسلیم همواره از شعاع داخلی شروع می‌شود. اما برای استوانه‌ی مدرج تابعی دوار لزوماً این‌گونه

اکنون می‌توان شروع تسلیم را لحظه‌ای معرفی نمود که تنش $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، برای نخستین‌بار برابر صفر می‌شود. در حقیقت در شروع بارگذاری و به‌ازای سرعت‌های زاویه‌ای کوچک، تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، بر حسب \bar{r} متغیر، اما در سرتاسر ناحیه‌ی $1 \leq \bar{r} \leq (a/b)$ منفی خواهد بود. به‌تدریج با افزایش سرعت زاویه‌ای و در نتیجه افزایش پارامتر $Ω_γ$ ، به‌ازای یک مقدار خاص پارامتر $Ω_γ$ که با $Ω_γ$ نشان داده می‌شود، در یک مقدار مشخص از \bar{r} ، تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، برابر صفر خواهد شد.

برای تعیین شرایط شروع تسلیم، ابتدا مقدار مشخصی برای نسبت (b/a) ، توان‌های $n_E, n_ρ, n_σ$ و هم‌چنین ضریب پواسون، انتخاب می‌شوند. سپس طی یک فرآیند سعی و خطا و با افزایش تدریجی پارامتر بی‌بعد بارگذاری، $Ω_γ$ تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ رسم می‌شود. به‌گونه‌ای که پارامتر بی‌بعد بارگذاری شروع تسلیم، که به‌ازای آن نخستین‌بار $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ برابر صفر می‌شود و هم‌چنین موقعیت شروع تسلیم، مشخص شود.

۳- نتایج و بحث

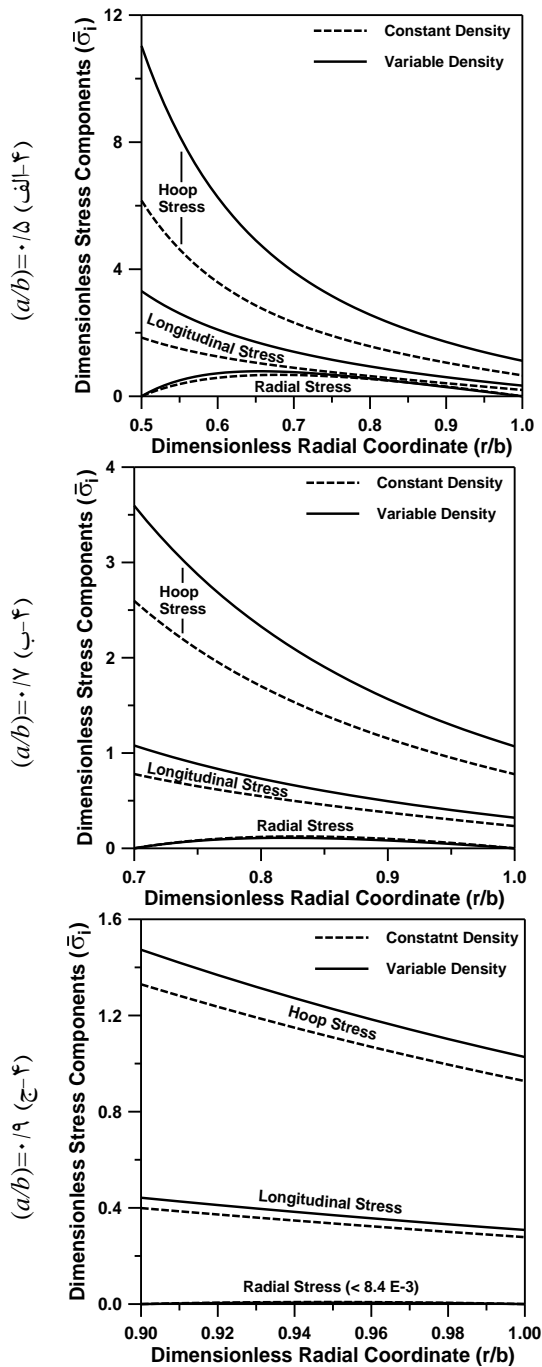
۳-۱- ارزیابی و اعتبارسنجی نتایج

برای ارزیابی و اعتبارسنجی روابط ارائه شده، سرعت زاویه‌ای متناظر با شروع تسلیم برای دو حالت استوانه‌ی دوار همگن و حالت خاصی از استوانه‌ی مدرج تابعی دوار که در مرجع [۱۶] ارائه شده‌اند، مقایسه می‌شود. به‌ازای مقدار صفر برای پارامترهای توان، $n_E=n_ρ=n_σ=0$ ، روابط به‌دست آمده در بخش پیش به روابط مربوط برای استوانه‌ی دوار همگن تبدیل خواهند شد. با حل این روابط در این حالت، سرعت زاویه‌ای متناظر با شروع تسلیم، به‌صورت رابطه‌ی (۲۰) محاسبه می‌شود. رابطه‌ی (۲۰) همان نتیجه‌ی ارائه شده در مرجع [۱۶] است.

$$\frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_0}} = 2 \left(\frac{b}{a} \right) \sqrt{\frac{1-\nu}{(1-2\nu) + (3-2\nu) \left(\frac{b}{a} \right)^2}} \quad (20)$$

به‌عنوان ارزیابی دیگر، نمودار تنش بی‌بعد ترسکا متناظر با شروع تسلیم به‌ازای $(a/b)=0/55$ و پارامترهای توان $(n_ρ=n_σ=0)$ و $n_E=1/38260$ در شکل (۲) رسم شده است.

مختلف پارامترهای توان و نسبت شعاعی (a/b) ، در شکل‌های ۴ تا ۷ رسم شده‌اند.

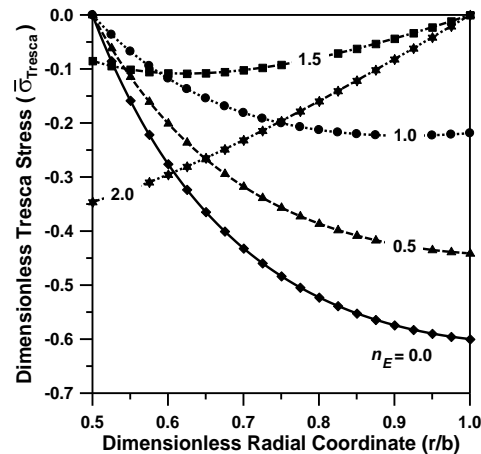


شکل ۴- بررسی اثر هندسه و چگالی متغیر بر ترتیب تنش‌ها به‌ازای $n_i=2$

نیست. دلیل این موضوع، متغیر بودن خصوصیات مادی و وابستگی مؤلفه‌های تنش به خصوصیات مادی است.

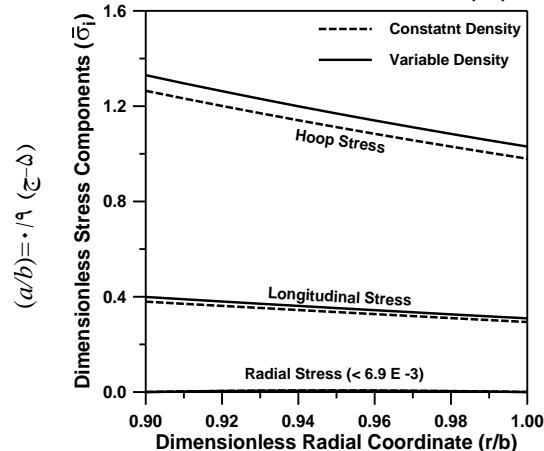
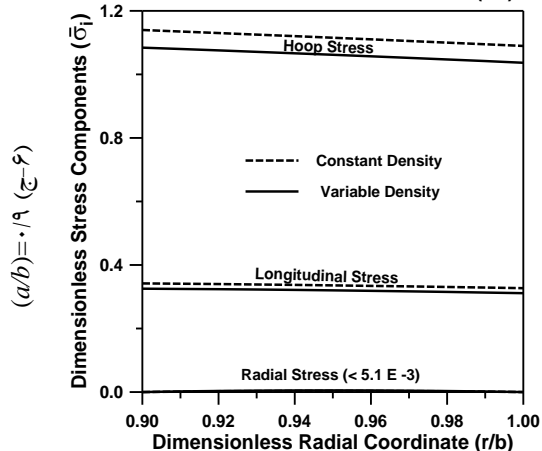
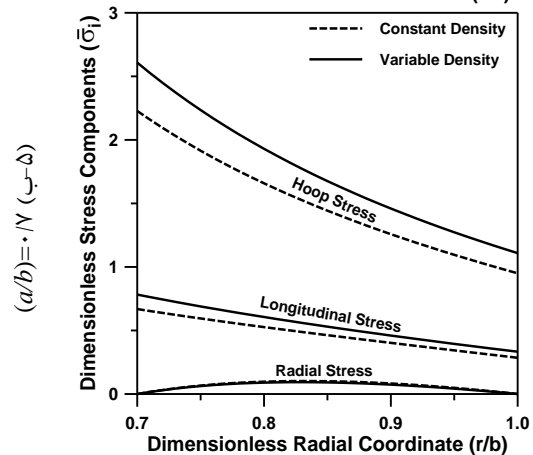
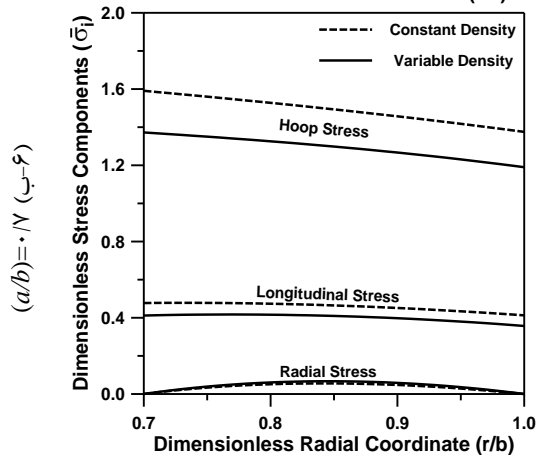
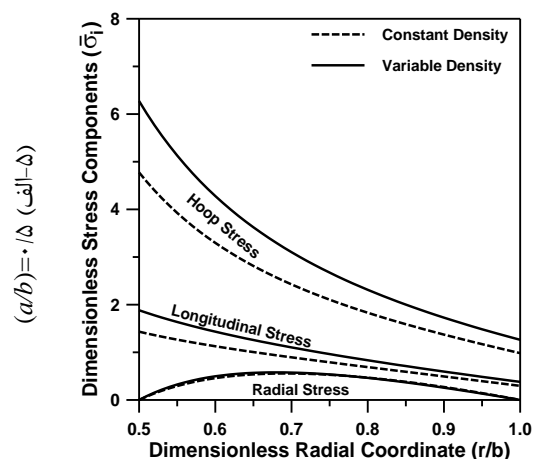
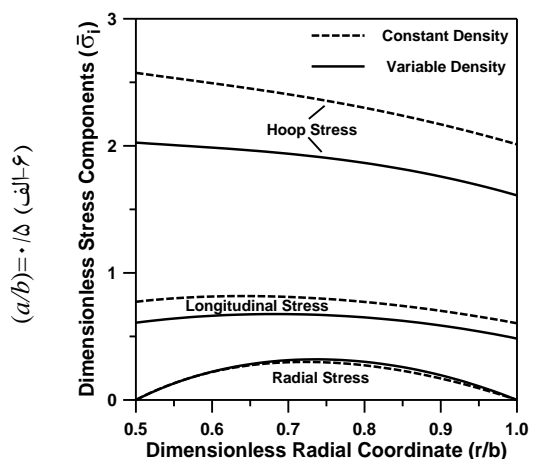
توجیه چگونگی تأثیر تغییرات خصوصیات مادی بر تغییر الگوی شروع تسلیم، با توجه به پیچیدگی روابط، دشوار است. اما برای نمونه، در حالتی که چگالی و تنش تسلیم ثابت باشند $(n_p=n_\sigma=0)$ و مدول الاستیسیته بر اساس تابع توانی، با پارامتر توان مثبت تغییر کند $(n_E>0)$ ، آن‌گاه مدول الاستیسیته در شعاع داخلی بزرگتر از مدول الاستیسیته شعاع خارجی خواهد بود. بزرگتر بودن مدول الاستیسیته در شعاع داخلی می‌تواند سبب شود شروع تسلیم در شعاع داخلی به تأخیر بیفتد. بنابراین می‌توان انتظار داشت که به‌ازای توان خاصی برای مدول الاستیسیته، تسلیم هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی شروع شود.

نمودارهای شکل ۳، اثر افزایش n_E را بر نمودار تنش بی‌بعد ترسکا در آستانه‌ی تسلیم نشان می‌دهند. این نمودارها به‌روشنی نتیجه‌ی بالا را تأیید می‌کنند. توجه به نمودارها نشان می‌دهد می‌توان انتظار داشت که به‌ازای یک مقدار بین $n_E=1$ و $n_E=1/5$ تسلیم هم‌زمان از شعاع‌های داخلی و خارجی شروع شود. این موضوع به صورت مشروح‌تر در بخش نتایج مشاهده خواهد شد.



شکل ۳- نمودار تنش بی‌بعد ترسکا در آستانه‌ی تسلیم، به‌ازای $(a/b)=0.5$ ، و مقدارهای مختلف و مثبت n_E

در این قسمت اثر تغییر چگالی و نسبت شعاع‌ها بر ترتیب مؤلفه‌های تنش بررسی می‌شوند. برای این منظور، نمودار مؤلفه‌های بی‌بعد شده‌ی تنش، به‌ازای $\bar{\omega}=1$ ، در دو حالت چگالی متغیر و چگالی ثابت، به‌ازای مقدارهای



شکل ۶- بررسی اثر هندسه و چگالی متغیر بر ترتیب تنش‌ها
به‌ازای $n_i=1$

شکل ۵- بررسی اثر هندسه و چگالی متغیر بر ترتیب تنش‌ها
به‌ازای $n_i=-1$

در نمودارهای قسمت (ج) از شکل‌های ۴ تا ۷، که به‌ازای $(a/b)=0.9$ رسم شده‌اند، اندازه‌ی مؤلفه‌ی شعاعی در مقایسه با دیگر مؤلفه‌های تنش بسیار کوچک است. به‌همین دلیل مرتبه‌ی بزرگی تنش شعاعی در این نمودارها بیان شده است تا با دیگر مؤلفه‌های تنش قابل مقایسه باشند.

در ترسیم مؤلفه‌های تنش در شکل‌های ۴ تا ۷، اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای بی‌بعد، $\bar{\omega}$ ، برابر واحد در نظر گرفته شده است. به‌عبارت دیگر نمودارهای شکل‌های ۴ تا ۷ نسبت تنش بی‌بعد $\bar{\sigma}_i$ به سرعت زاویه‌ای بی‌بعد $\bar{\omega}$ را نشان می‌دهند.

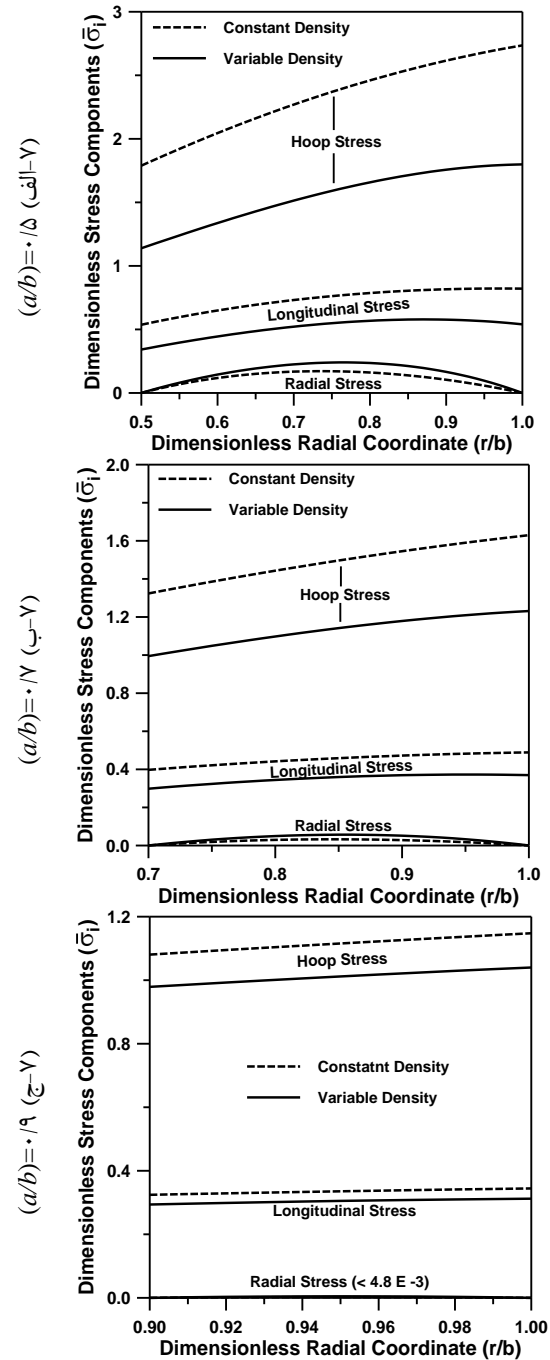
البته انتظار می‌رود با افزایش پارامتر توان برای مقادیر $n_i > 2$ ، ترتیب مؤلفه‌های تنش تغییر کند. به‌علاوه بر اساس نتایج نمودارهای شکل‌های ۴ تا ۷، به‌نظر می‌رسد این تغییر در ترتیب مؤلفه‌های تنش در حالت چگالی ثابت، سریعتر از حالت چگالی متغیر رخ دهد. نتایج نشان می‌دهد در همه‌ی حالت‌ها و در ناحیه‌ی مورد بررسی، ترتیب تنش‌ها به‌صورت $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ باقی می‌ماند.

۳-۳- بررسی اثر نسبت شعاع‌ها بر شروع تسلیم

در مرجع [۱۶] برای بررسی رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، از تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شده است. در این مقاله برای نشان دادن اهمیت تغییرات چگالی و تنش تسلیم، اثر نسبت شعاع‌ها بر شروع تسلیم در دو حالت بررسی می‌شوند. حالتی که تنها مدول الاستیسیته تغییر کند و حالتی که علاوه بر مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم نیز متغیر در نظر گرفته شوند.

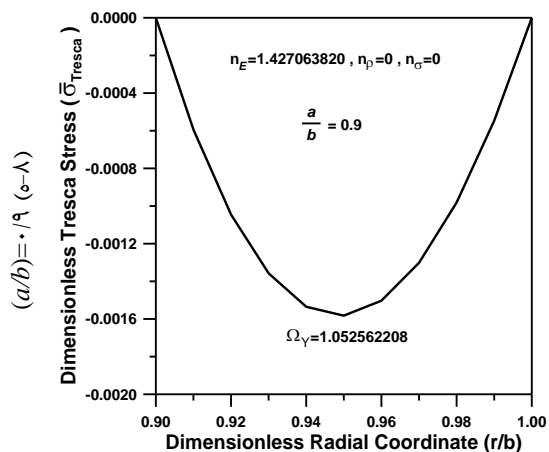
ابتدا اثر هندسه در حالتی که فقط تغییرات مدول الاستیسیته در نظر گرفته شود، $n_\rho = n_\sigma = 0$ و $n_E \neq 0$ بررسی می‌شود. در نمودارهای شکل ۸، حالتی که تسلیم هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی شروع می‌شود نشان داده شده است. در هر یک از این حالت‌ها، به‌ازای توان تغییرات مدول الاستیسیته نشان داده شده در هر شکل تسلیم هم‌زمان از داخل و خارج شروع می‌شود و به‌ازای توان کمتر از آن تسلیم از داخل و به‌ازای توان بیشتر از آن تسلیم از شعاع خارجی شروع می‌شود.

نمودارهای شکل ۸ نشان می‌دهند در حالتی که از تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شود، تسلیم می‌تواند هم‌زمان از شعاع داخلی و شعاع خارجی شروع شود. در هر کدام از نمودارهای شکل ۸، توان و پارامتر بارگذاری بحرانی بارگذاری در هر نسبت شعاعی نشان داده شده است.

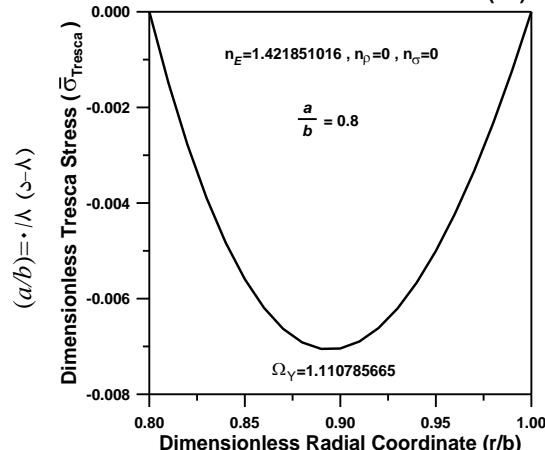
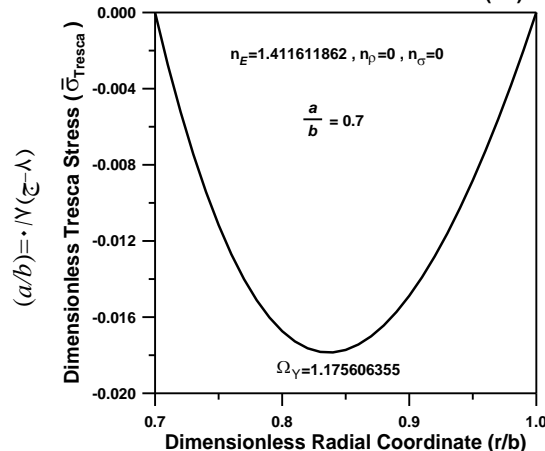
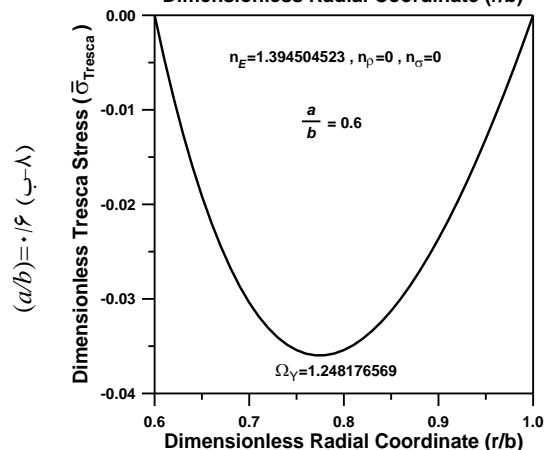
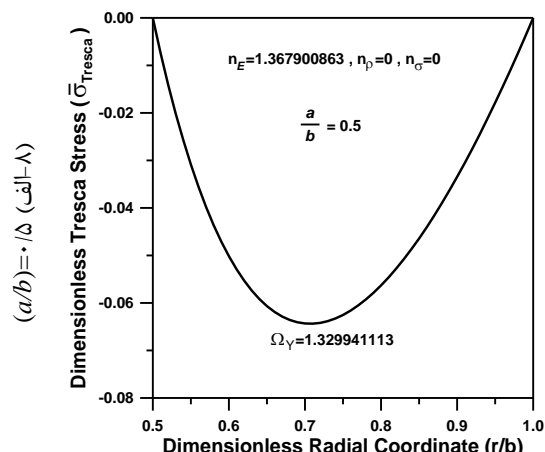


شکل ۷- بررسی اثر هندسه و چگالی متغیر بر ترتیب تنش‌ها به‌ازای $n_i = 2$

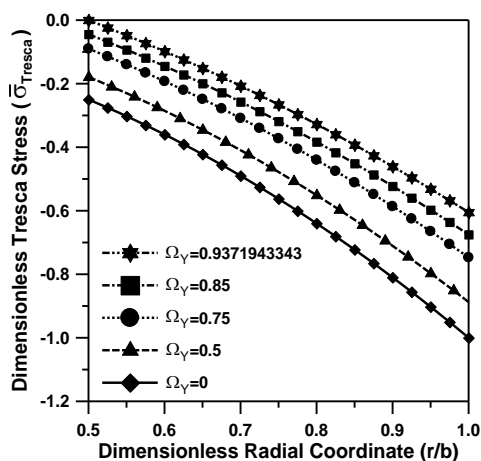
نمودارهای شکل‌های ۴ تا ۷ نشان می‌دهند اگرچه در نظر گرفتن تغییرات چگالی بر اندازه‌های هر یک از مؤلفه‌های تنش اثرگذار است. اما در محدوده‌ی $-2 \leq n_E = n_\rho \leq 2$ برای پارامترهای توان، بر ترتیب مؤلفه‌های تنش اثری ندارند. همچنین تغییر نسبت شعاع‌ها در محدوده‌ی $0.15 \leq (a/b) \leq 1$ نیز در ترتیب مؤلفه‌های تنش تغییری به وجود نمی‌آورد.



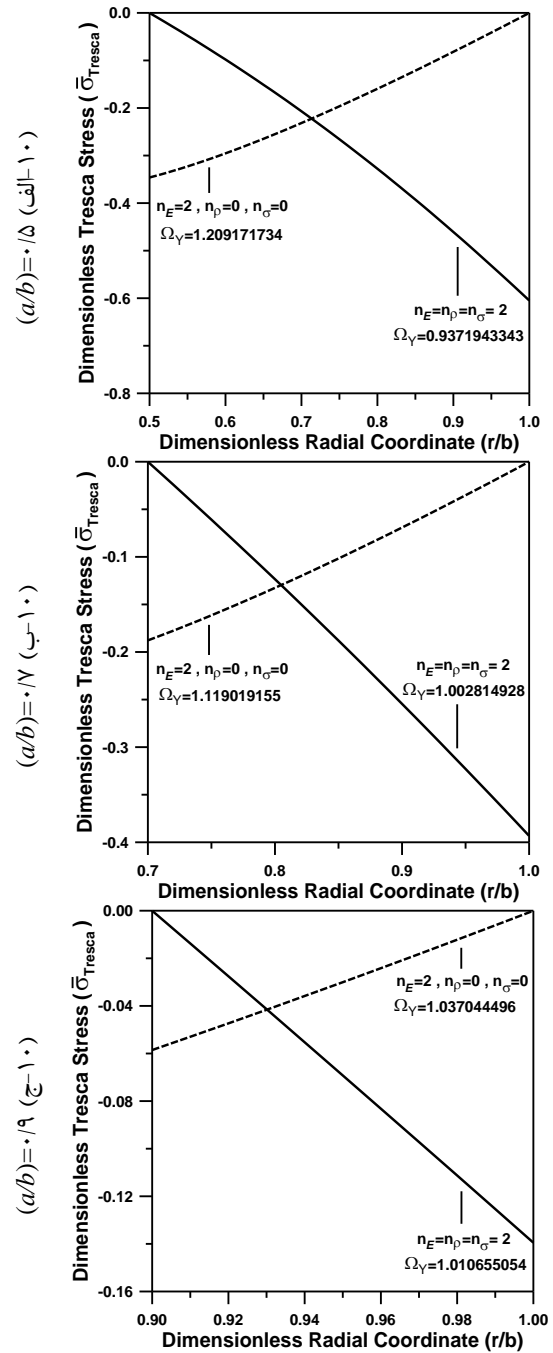
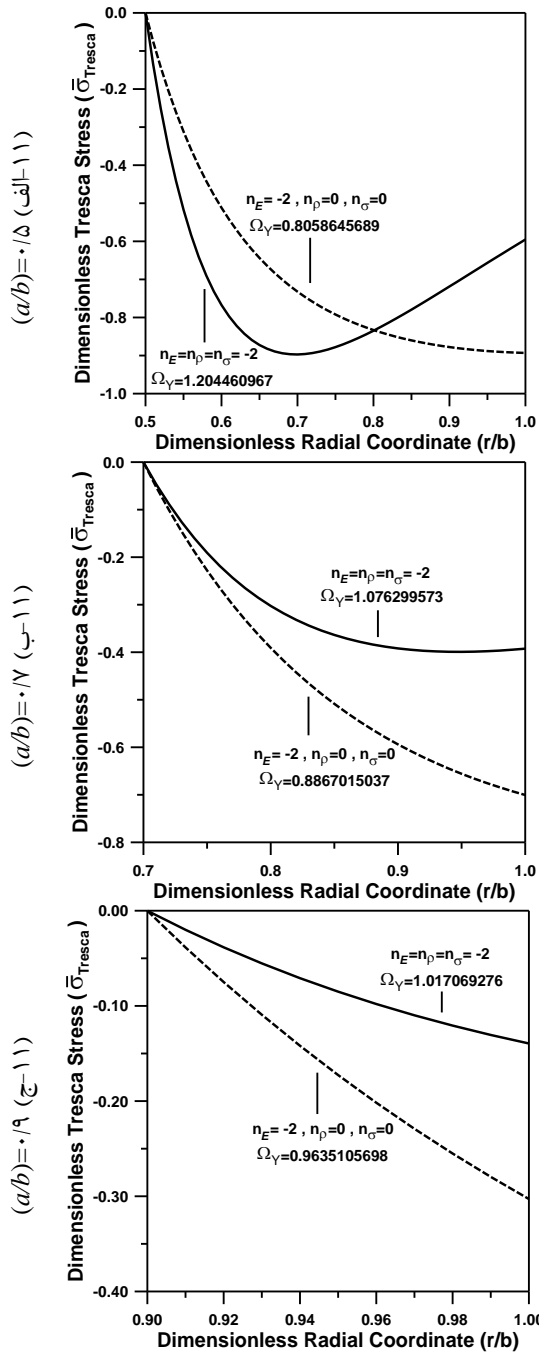
شکل ۸- بررسی اثر نسبت شعاع‌ها بر شروع تسلیم به‌ازای $n_E \neq 0$ و $n_p = n_\sigma = 0$



اکنون اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم در کنار تغییرات مدول الاستیسیته، بر شروع تسلیم بررسی می‌شود. می‌دانیم تسلیم زمانی آغاز می‌شود که در یک روند افزایش تدریجی پارامتر بی‌بعد بارگذاری، Ω ، برای نخستین بار تنش بی‌بعد ترسکا برابر با صفر شود. بر این اساس، برای هر حالت، با افزایش تدریجی Ω از صفر و رسم نمودار تابع تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}(r/b)$ ، به‌صورت سعی و خطا، پارامتر بی‌بعد بارگذاری متناظر با شروع تسلیم و همچنین مکان شروع تسلیم مشخص می‌شود. نمودارهای شکل ۹ روند تغییر تابع تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}(r/b)$ ، را برای حالت $n_E = n_p = n_\sigma = 2$ نشان می‌دهند.



شکل ۹- نمودار تنش بی‌بعد ترسکا به‌ازای $a/b = 0.5$ و مقادیرهای مختلف Ω ($n_E = n_p = n_\sigma = 2$)



شکل ۱۱- نمودار تابع تنش بی بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}(r)$ در آغاز تسلیم، برای $n_i=-2$ و به ازای مقادیر مختلف نسبت شعاعی الف- $(a/b)=0.15$ ، ب- $(a/b)=0.17$ و ج- $(a/b)=0.19$

شکل ۱۰- نمودار تابع تنش بی بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}(r)$ در آغاز تسلیم، برای $n_i=2$ و به ازای مقادیر مختلف نسبت شعاعی، الف- $(a/b)=0.15$ ، ب- $(a/b)=0.17$ و ج- $(a/b)=0.19$

نمودارهای شکل ۱۰ به ازای $n_i=2$ و نمودارهای شکل ۱۱ به ازای $n_i=-2$ و برای سه نسبت شعاعی مختلف رسم شده‌اند. به علاوه در هر نمودار، سرعت زاویه‌ای بی بعد متناظر با شروع تسلیم برای هر حالت نشان داده شده است. نمودارهای شکل ۱۰ نشان می‌دهند در نظر نگرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم، همانند آنچه در مرجع [۱۶] انجام شده، نه تنها در تعیین سرعت زاویه‌ای متناظر

در نمودارهای شکل‌های ۱۰ و ۱۱، تنش بی بعد ترسکا در آستانه‌ی شروع تسلیم، برای دو حالت چشم‌پوشی از تغییرات چگالی و تنش تسلیم و حالتی که تغییرات چگالی و تنش تسلیم در نظر گرفته شود، مقایسه شده‌اند.

شود، تسلیم از شعاع داخلی آغاز می‌شود. در حالی که اگر همانند مرجع [۱۶] از تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شود، می‌تواند منجر به پیش‌بینی شروع تسلیم از شعاع خارجی و یا هم‌زمان شعاع داخلی و خارجی شود. ضمن آن‌که بارگذاری متناظر با شرایط شروع تسلیم نیز همراه با خطای قابل توجه محاسبه خواهد شد. بررسی اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم و نیز پارامتر هندسی نسبت شعاع‌های داخلی و خارجی بر الگوی شروع تسلیم استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، در پژوهش‌های پیشین انجام نشده و تازگی دارد.

فهرست علامت‌ها و نمادهای اختصاری

نمادهای لاتین	
r, θ, z	مختصات در دستگاه استوانه‌ای (به ترتیب مختصه شعاعی، محیطی و محوری)
\bar{r}	مختصه شعاعی بی‌بعد
$u, (\bar{u})$	جاب‌جایی شعاعی، (جاب‌جایی شعاعی بی‌بعد)
a, b	شعاع داخلی و خارجی استوانه
$E, (E_0)$	مدول الاستیسیته، (مدول الاستیسیته در شعاع خارجی)
n_E, n_ρ, n_σ	پارامترهای توان ماده‌ی مدرج تابعی (به ترتیب تابع مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم)
A_i, m_i, k	ثابت‌های بی‌بعد
C_i	ثابت‌های انتگرال‌گیری
نمادهای یونانی	
$\rho, (\rho_0)$	چگالی، (چگالی در شعاع خارجی)
ν	ضریب پواسون
$\sigma_r, (\sigma_0)$	تابع تنش تسلیم، (تنش تسلیم در شعاع خارجی)
$\sigma_i, (\bar{\sigma}_i)$	مؤلفه‌های تنش، (مؤلفه‌های بی‌بعد تنش)
ε_i	مؤلفه‌های کرنش
$\omega, (\bar{\omega})$	سرعت زاویه‌ای، (سرعت زاویه‌ای بی‌بعد)
$\Omega, (\Omega_r)$	پارامتر بی‌بعد بارگذاری (متناظر با آستانه‌ی تسلیم)

با شروع تسلیم، بلکه حتی در پیش‌بینی محل شروع تسلیم هم می‌تواند همراه با خطای قابل توجه همراه باشد. در مجموع بررسی نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد هنگامی که هر سه پارامتر توان مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم متغیر فرض شوند، به‌ازای هیچ‌یک از مقادیر نسبت شعاع‌های (a/b) ، پارامتر بی‌بعد بارگذاری Ω یافت نمی‌شود که به‌ازای آن، تسلیم هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی شروع شود. بلکه همواره تسلیم از داخل شروع می‌شود.

این در حالی است که ثابت فرض کردن چگالی و تنش تسلیم، ممکن است منجر به پیش‌بینی شروع تسلیم از شعاع داخلی، شعاع خارجی و یا هم‌زمان از داخل و خارج شروع شود.

این نتایج به‌روشنی نشان‌دهنده‌ی اهمیت در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم در بررسی الگوی شروع تسلیم و نیز مطالعه‌ی رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ی مدرج تابعی دوار است.

۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر پارامتر هندسی نسبت شعاع‌های داخلی و خارجی و هم‌چنین در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم، بر الگوی شروع تسلیم استوانه‌ی مدرج تابعی دوار به‌صورت تحلیلی بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد در محدوده‌ی $-2 \leq n_i \leq 2$ برای پارامترهای توان و محدوده‌ی $0.5 \leq (a/b) \leq 1$ برای نسبت شعاع‌ها، در نظر گرفتن اثر تغییرات چگالی و نیز تغییر نسبت شعاع‌ها، اثری بر ترتیب مؤلفه‌های تنش ندارند و ترتیب همواره به‌صورت $\sigma_\rho > \sigma_z > \sigma_r$ است. هم‌چنین نتایج به‌دست آمده نشان داد در حالتی که تغییرات چگالی و تنش تسلیم در نظر گرفته

۵- منابع

- [1] Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R., "The functionally gradient materials", *Journal of the Japan Society of Composite Materials*, Vol.13, p.p.257-264, 1987.
- [2] Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Functionally graded material: an overview, *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012*, Vol. III, London, U.K. 2012.
- [3] Mendelson, A., *Plasticity: Theory and Application*, New York, Macmillan, 1968.
- [4] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., New York, McGraw-Hill,

1970.

- [5] Chakrabarty, J., Theory of Plasticity, 3rd Ed., Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006.
- [6] Fukui, Y. and Yamanaka, N., "Elastic Analysis for Thick-Walled Tubes of Functionally Graded Material Subjected to Internal Pressure", *JSME International Journal*, Vol. 35, No. 4, p.p. 379–385, 1991.
- [7] Tutunku, N. and Ozturk, M., "Exact Solutions for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels", *Composites: Part B*, Vol. 32, p.p. 683–686, 2001.
- [8] You, L.H., Zhang J.J. and You, X.Y., "Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, p.p. 347–354, 2005.
- [9] Dai, H.L., Fu, Y.M. and Dong, Z.M., "Exact solutions for functionally graded pressure vessels in a uniform magnetic field", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, p.p. 5570–5580, 2006.
- [10] Eraslan, A.N. and Akis, T., "Exact Elasticity Solutions for Thick-Walled FG Spherical Pressure Vessels with Linearly and Exponentially Varying Properties", *IJE Transactions A: Basics*, Vol. 22, No. 4, p.p. 405–416, 2009.
- [11] Eraslan A.N. and Akis, T., "Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 83, p.p. 635–644, 2006.
- [12] Jabbari, M., Sohrabpour, S. and Eslami, M.R., "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, p.p. 493–497, 2002.
- [13] Eraslan, A.N. and Akis, T., "On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems", *Acta Mechanica*, Vol. 181, p.p. 43–63, 2006.
- [14] HosseiniKordkheili, S.A. and Naghdabadi, R., "Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk", *Composite Structures*, Vol. 79, p.p. 508–516, 2006.
- [15] You, L.H., You, X.Y., Zhang, J.J. and Li, J., "On rotating circular disks with varying material properties", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 58, p.p. 1068–1084, 2007.
- [16] Akis, T. and Eraslan, A.N., "Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 77, p.p. 745–765, 2007.
- [17] Peng, X.L. and Li, X.F., "Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 60, p.p. 84–91, 2012.
- [۱۸] طهانی، م. و طالبیان، ط.، "تحلیل مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی"، *مجله مهندسی مکانیک/امیرکبیر*، سال ۴۱، شماره ۱، ص.ص. ۴۹–۵۸، تابستان ۱۳۸۸.
- [۱۹] مرادی دستجردی، ر.، فروتن، م. و پوراصغر، ا.، "تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری استوانه‌هایی از جنس مواد هدفمند به روش بدون المان"، *فصل‌نامه علمی-پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات*، سال ۲، شماره ۱، تابستان ۱۳۸۸.
- [۲۰] ارژنگ‌پی، آ.، درویزه، م.، زارع‌پور، غ. و انصاری، ر.، "تحلیل کمانش محوری پوسته‌های استوانه‌ای متشکل از مواد هدفمند (FGM) با روش بدون المان محلی پتروف-گالرکین"، *نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران (ISME2011)*، بیرجند، ایران، اردیبهشت ۱۳۹۰.
- [۲۱] حسینی هاشمی، ش. و خرمی، ک.، "تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند (FGM)

مطالعه‌ی تحلیلی الگوی شروع تسلیم برای استوانه‌ی توخالی مدرج تابعی دوار

با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی"، مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس، دوره‌ی ۱۱، شماره‌ی ۲، ص.ص. ۹۳-۱۰۶، شهریور ۱۳۹۰.

[۲۲] حسینی هاشمی، ش.، اخوان، ه. و فدایی، م.، "تحلیل دقیق پاسخ-بسته‌ی ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه‌ی پیزوالکتریک"، مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس، دوره‌ی ۱۱، شماره‌ی ۳، ص.ص. ۵۷-۷۴، آذر ۱۳۹۰.

[۲۳] رفیعی‌پور، ح.، لطف‌آور، ا.، و حمزه شلمزاری، ص.، "تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند روی بستر الاستیک وینکر-پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی"، مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس، دوره‌ی ۱۲، شماره‌ی ۵، ص.ص. ۸۷-۱۰۱، دی‌ماه ۱۳۹۱.