

## جابجایی آزاد نانوسیال آب-آلومینا در یک محفظه مربعی حاوی دو جفت چشمه و چاه

مسلم قاسمی<sup>۱</sup>، بهزاد قاسمی<sup>۲\*</sup>، افراسیاب رئیسی<sup>۳</sup>

| اطلاعات مقاله   | چکیده   |
|---|---|
| دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۱۰<br>پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۳/۰۹   | مقاله حاضر انتقال حرارت جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی با دو جفت چشمه و چاه روی دیواره‌های افقی بالائی و پائینی حاوی نانو سیال آب-آلومینا را به صورت عددی مورد مطالعه قرار داده است. چشمه و چاه حرارتی به ترتیب دارای دماهای $T_c$ و $T_h$ می باشند. معادلات حاکم بر جریان توسط یک برنامه کامپیوتری که به زبان فرترن، بر اساس روش حجم کنترل و الگوریتم سیمپل نوشته شده است، حل شده اند. اثر پارامترهایی نظیر کسر حجمی نانوسیال از ۰ تا ۰/۰۵، اعداد ریلی $10^5, 10^4, 10^3$ و $10^6$ و تغییر موقعیت دو جفت چشمه و چاه بر میدان جریان و دما و نرخ انتقال حرارت مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد با افزایش عدد ریلی و کسر حجمی نانوذرات میزان انتقال حرارت افزایش می‌یابد. البته افزایش کسر حجمی نانو ذرات در اعداد ریلی پائین ( $10^3$ و $10^4$ ) اثر افزایشی بیشتری در انتقال حرارت در مقایسه با اعداد ریلی بالا ( $10^5$ و $10^6$ ) دارد. نتایج همچنین نشان دهنده تاثیر بسزای موقعیت چشمه و چاه ها بر نرخ انتقال حرارت است. در اعداد ریلی بالا هنگامی که چشمه و چاه ها روی دیواره های عمودی محفظه قرار دارند شاهد انتقال حرارت بیشتری هستیم. |
| <b>واژگان کلیدی:</b><br>نانوسیال،<br>جابجایی طبیعی،<br>محفظه،<br>چشمه و چاه حرارتی،<br>حل عددی. |   |

### ۱- مقدمه

جابجایی آزاد به دلیل کاربرد وسیع در سیستم‌های مهندسی از قبیل کلکتورهای خورشیدی، عایق‌های حرارتی، راکتورهای هسته‌ای، رشد کریستال‌ها، هوانوردی، کاربردهای شیمیایی، تهویه اتاق‌ها و طراحی حرارتی ساختمان‌ها، خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی و بسیاری تجهیزات و سیستم‌های دیگر از پدیده‌های مهم در صنعت محسوب می‌شود [۲ و ۱]. تاکنون مطالعات عددی و تجربی بسیاری در مورد جنبه‌های مختلف کاربرد انتقال گرمای

جابجایی آزاد بر روی صفحات، استوانه‌ها، محفظه‌ها، سطوح پیچیده و ... انجام شده است. مرجع [۲] سیستم‌های مختلف انتقال حرارت جابجایی که در محفظه بکار برده شده را معرفی کرده است. در این راستا توجه محققان زیادی به افزایش نرخ انتقال گرمای جابجایی آزاد در محفظه‌ها با وجود منابع حرارتی مجزا روی دیواره‌های آن جلب شده است [۳-۵].

کالکاجنی و همکاران [۶]، انتقال حرارت جابجایی آزاد را در یک محفظه مربعی که از پائین گرم و از دیواره‌های جانبی

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: ghasemi@eng.sku.ac.ir

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد

۲. استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد

۳. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد

محفظه مربعی با یک گرمکن روی دیوار را به روش المان محدود بررسی کردند و مشاهده کردند که تاثیر ذرات نانو بر افزایش عدد نوسلت گرمکن در نسبت طول به عرض های کمتر، بیشتر خواهد بود. همین محققین در بررسی دیگری [۱۱] تأثیر استفاده از نانوسیال بر میدان های جریان و دما و نرخ انتقال حرارت را بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن نقش نیروهای شناوری در محفظه ی بسته ای که به صورت منطقه ای گرم می شد، دریافتند که استفاده از نانوسیال باعث بهبود انتقال حرارت می شود. مطالعات بسیار دیگری نیز بر روی اثر استفاده از نانوسیال در انتقال حرارت داخل محفظه انجام شده است. تمامی این نتایج حاکی از افزایش انتقال حرارت به علت استفاده از نانوذرات با هدایت حرارتی بالا در داخل محفظه می باشد.

به علت کاربردهای صنعتی زیاد، تحقیقات بسیاری نیز بر روی محفظه های دارای منابع حرارتی مجزا، انجام شده است.

امین الساداتی وقاسمی [۱۲] جابجایی آزاد در یک محفظه حاوی نانوسیال که از سه طرف عایق بوده و وجه پایینی دارای دو جفت چشمه و چاه است را مورد مطالعه قرار دادند. آنها نشان دادند که افزایش عدد ریلی و کسر حجمی نانوذرات نرخ انتقال حرارت محفظه را بدون توجه به چیدمان جفت چشمه و چاه، افزایش می دهد. شیخ زاده و همکاران [۱۳]، جابجایی آزاد در یک محفظه حاوی نانوسیال آب- مس که دو طرف آن چشمه و چاه حرارتی وجود داشت را بررسی کردند. آنها دریافتند که مقدار عدد نوسلت علاوه بر عدد ریلی و کسر حجمی نانوذرات، به وضعیت قرار گیری چشمه و چاه نیز بستگی دارد.

اگرچه در تحقیقات بررسی شده گذشته اثر وجود منبع حرارتی زیاد مورد نظر محققین قرار گرفته است لیکن مطالعه ای بر روی محفظه حاوی نانوسیال با حضور همزمان دو جفت چشمه و چاه به چشم نمی خورد. بنابراین هدف کلی مقاله حاضر بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه مربعی حاوی نانوسیال آب- آلومینا با وجود دو جفت چشمه و چاه روی دیواره های افقی آن می باشد.

خنک می شد را به دو صورت تجربی و عددی مورد بررسی قرار دادند. آنها دریافتند که در اعداد ریلی پائین تر از  $10^4$  اثر غالب انتقال حرارت از نوع هدایت حرارتی می باشد. در حالی که در عدد ریلی  $10^5$  و بالاتر اثر همرفتی غالب خواهد شد. سزای و محمد [۳] با در نظر گرفتن یک محفظه افقی مستطیلی که در پائین آن یک منبع حرارتی قرار داشت، نشان دادند که حداکثر نرخ انتقال حرارت از لبه های منبع حرارتی و کمترین آن در مرکز منبع می باشد. همچنین ایشان عدد نوسلت را به عنوان تابعی از عدد ریلی و ابعاد چشمه معرفی کردند. سراوان و سیواراج [۴]، جابجایی در یک محفظه مربعی حاوی هوا با وجود یک منبع حرارتی در دیواره پایینی را به روش حجم محدود بررسی کردند. آنها در مطالعاتشان به این نتیجه رسیدند که برای  $Gr = 10^6$ ، حرارت دهی غیریکنواخت در برابر حرارت دهی یکنواخت، نرخ انتقال حرارت کلی را به طور قابل ملاحظه ای افزایش می دهد. این درحالیست که برای  $Gr = 10^7$  این اثر کم رنگ می باشد.

دنگ و همکاران [۷] به مطالعه جابجایی آزاد سیال در یک محفظه مستطیلی با منابع حرارتی مجزا بر روی دیواره پرداختند. آنها نشان دادند؛ بطور کلی منابع حرارتی دما ثابت در مقایسه با منابع حرارتی شار ثابت، اثر قوی تری بر روی جریان سیال و انتقال حرارت دارند.

سالیان اخیر با استفاده از تکنولوژی برتر، توان بدست آوردن ذرات ریز جامد فلزی یا غیرفلزی در مقیاس کمتر از  $100$  نانومتر را بدست آورده اند. این ذرات با تعلیق سازی در مایعات با استعداد، منجر به نوعی از سیال به نام نانوسیال شده است. مهمترین اثر مشاهده شده در نانوسیال ها افزایش قابل توجه هدایت گرمایی بوده است. به دنبال آن مطالعات زیادی بر روی این نوع سیالات انجام شده است. در زمینه جابجایی آزاد نانوسیال و کاربرد های آن می توان به تحقیقات امین الساداتی و قاسمی [۸]، پیشکار و قاسمی [۹] اشاره کرد. عمدتاً در این تحقیقات مشاهده شده است که افزایش درصد حجمی نانو ذرات به سیال پایه انتقال حرارت را تقویت می کند. از توپ و ابونادا [۱۰] نیز

پیوستگی

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

مومنوم X

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} \alpha_f} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

مومنوم Y

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} \alpha_f} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf} \beta_f} Ra Pr \theta \quad (3)$$

انرژی

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

در استخراج معادلات فوق از پارامترهای بی بعد زیر استفاده شده است.

$$X, Y = \frac{x, y}{H} \quad P = \frac{\rho H^2}{\rho_{nf} \alpha_f^2} \quad (4)$$

$$U = \frac{uH}{\alpha_f} \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad V = \frac{vH}{\alpha_f}$$

در این روابط H طول ضلع محفظه می باشد و اعداد بدون بعد ریلی و پرانتل نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$Ra = \frac{g \beta_f H^3 (T_h - T_c)}{\nu_f \alpha_f} \quad (5)$$

$$Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f}$$

#### ۴- شرایط مرزی

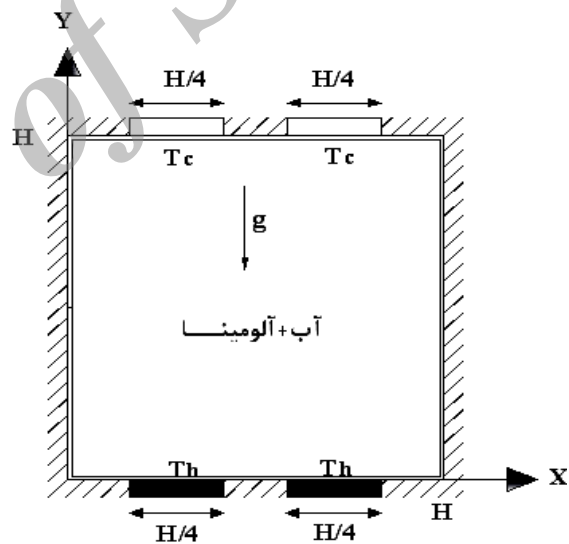
شرط مرزی هیدرودینامیکی مساله حاضر، شرط عدم لغزش و شرط عدم نفوذ بر روی دیواره ها ( $U=V=0$ ) می باشد. برای چشمه و چاه حرارتی شرط دما ثابت، یعنی برای چشمه حرارتی  $\theta=1$  و برای چاه حرارتی  $\theta=0$  می باشد. همچنین شرط مرزی آدیاباتیک، برای دیگر سطوح در نظر

گرفته شده است؛ یعنی  $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$  یا  $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$  است.

تاثیر پارامترهایی مانند عدد ریلی، درصد حجمی نانوذرات و تغییر موقعیت چشمه و چاهها بر روی میدان جریان و دما، سرعت جریان و میزان انتقال حرارت مورد بررسی قرار گرفته است.

#### ۲- بیان مساله

در مساله حاضر مانند شکل (۱) یک محفظه مربعی دارای طول و عرض برابر H، که حاوی نانوسیال آب- آلومینا می باشد در نظر گرفته می شود. محفظه دارای یک جفت چشمه روی دیواره پائینی و یک جفت چاه بر روی دیواره بالائی می باشد. منابع گرم و سرد به ترتیب در دماهای  $T_h$  و  $T_c$  ( $T_c < T_h$ ) قرار دارند. بقیه قسمت های دیواره ها عایق فرض شده است. همچنین چشمه ها و چاهها دارای طول مساوی با یکدیگر و برابر ( $H/4$ ) است.



شکل ۱- طرح شماتیک مساله

#### ۳- معادلات حاکم و شرایط مرزی

در مطالعه حاضر فرض می شود جریان دائم، تراکم ناپذیر و آرام است. تنها نیروی حجمی، نیروی گرانش بوده و خواص ترموفیزیکی نانوسیال به جز دانسیته آن که با مدل بوزینسک تقریب زده شده است، ثابت در نظر گرفته می شود. بنابراین معادلات دوبعدی بدون بعد حاکم بر رفتار نانوسیال به صورت زیر خواهد بود [۱۴].

مبتنی بر حجم کنترل حل شده‌اند. میدان حل با روش شبکه جابجا شده شبکه بندی شده است. جهت حل همزمان معادلات جبری شده از الگوریتم سیمپل استفاده شده است. برای اجرای این الگوریتم برنامه کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شده است. همچنین جملات پخش و جابجایی به روش توان پیرو گسسته‌سازی شده‌اند. از معیار همگرایی زیر جهت استفاده در روش‌های تکرار استفاده شده است.

$$\frac{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k|}{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{k+1}|} < 10^{-7} \quad (14)$$

در این رابطه  $i, j$  مختصات گره،  $\phi$  متغیر عمومی  $(\theta, V, U)$ ، و  $k$  نشان دهنده تعداد مرحله تکرار است.

جدول ۱- خواص ترموفیزیکی آب و نانوذرات آلومینا [۱۴]

| خواص                 | نانوذرات $(Al_2O_3)$   | سیال پایه (آب)      |
|----------------------|------------------------|---------------------|
| $\rho$ ( $kg/m^3$ )  | ۳۹۷۰                   | ۹۹۷/۱               |
| $cp$ ( $J/kg K$ )    | ۷۶۵                    | ۴۱۷۹                |
| $k$ ( $W/mK$ )       | ۴۰                     | ۰/۶۱۳               |
| $\beta$ ( $K^{-1}$ ) | $0.785 \times 10^{-5}$ | $21 \times 10^{-5}$ |
| Pr                   | -                      | ۵/۸                 |

#### ۷- اعتبار سنجی و انتخاب شبکه

به منظور بررسی روش حل و اطمینان از صحت کد برنامه کامپیوتری نوشته شده، نتایج عددی حاصل از آن با برخی از نتایج مقالات قبلی مقایسه گردیده است. به عنوان اولین مقایسه جابجایی آزاد هوا در یک محفظه مربعی با دیواره‌های افقی عایق و دیواره‌های عمودی گرم و سرد مانند آنچه در مراجع [۱۷ و ۱۸] آمده است، در نظر گرفته شده است. در جدول ۲ نوسلت متوسط کار حاضر با نتایج این مراجع مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود اختلاف نتایج ناچیز است.

مورد دیگری که برای اعتبار سنجی کار حاضر در نظر گرفته شده است، تحقیقی است که توسط شیخ زاده و همکاران [۱۳] انجام شده است. در این تحقیق محفظه‌ی مربعی شکل حاوی نانوسیال آب-آلومینا در نظر گرفته شده است.

میزان انتقال حرارت در قالب عدد نوسلت بیان می‌شود که عدد نوسلت موضعی روی منابع حرارتی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Nu = \frac{-k_{nf}}{k_f} \left( \frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_{N=0} \quad (6)$$

که در این رابطه  $N$  مولفه مکانی بی‌بعد  $X$  یا  $Y$  است. عدد نوسلت متوسط نیز از طریق انتگرال‌گیری نوسلت موضعی روی منابع سرد یا گرم قابل محاسبه است.

$$\overline{Nu} = \int Nu \, dN \quad (7)$$

#### ۵- خواص نانوسیال

همانگونه که مشاهده می‌شود برای بکاربردن معادلات حاکم احتیاج به دانستن خواص نانوسیال می‌باشد. چگالی، ضریب انبساط حجمی، ظرفیت حرارتی و ضریب پخش حرارتی نانوسیال به صورت زیر تعریف شده است [۱۴].

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_p \quad (8)$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta)_f + \phi(\rho\beta)_p \quad (9)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_p \quad (10)$$

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (11)$$

ویسکوزیته دینامیکی را از رابطه برینکمن [۱۵] و هدایت حرارتی نانوسیال را از رابطه ماکسول [۱۶] محاسبه می‌کنیم.

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (12)$$

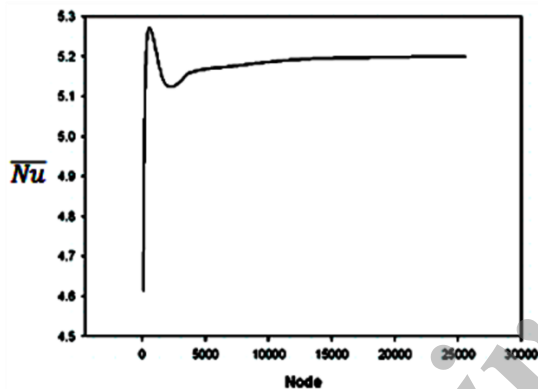
$$k_{nf} = k_f \left[ \frac{(k_s + 2k_f) - 2\phi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \phi(k_f - k_s)} \right] \quad (13)$$

همچنین خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانوذرات در جدول ۱ آمده است.

#### ۶- روش عددی

معادلات بی‌بعد (معادلات ۱ تا ۴) با در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوط به آن با استفاده از روش اختلاف محدود

در این حالت نیروی شناوری ضعیف بوده و توانایی غلبه بر نیروی ویسکوز را ندارد. در نتیجه انتقال حرارت عمدتاً توسط هدایت مولکولی صورت می‌گیرد. با افزایش عدد ریلی حرکت‌های جابجایی در سیال خالص و نانو سیال پدیدار شده و بر نیروی ویسکوز غلبه کرده و دو گردابه با حرکت-های ساعتگرد و پادساعتگرد پدیدار می‌شود. در عدد ریلی  $10^4$  گردابه‌ها شکل تقریباً دایره‌ای داشته و با افزایش عدد ریلی گردابه‌ها کشیده‌تر شده و با تراکم بالاتری در مرکز به هم می‌رسند. همچنین مقدار ماکزیمم تابع جریان نیز با افزایش عدد ریلی مخصوصاً در اعداد ریلی بالا به شدت افزایش می‌یابد.



شکل ۲- بررسی استقلال شبکه، عدد ریلی  $10^4$  و  $(\Phi=0.05)$  همانطور که از خطوط هم‌دمای شکل (۳) دیده می‌شود در عدد ریلی  $10^3$  این خطوط توزیع یکنواختی از دما را درون محفظه رسم کرده‌اند که به وسیله خطوط افقی که عمود بر دیواره‌های عایق هستند مشخص می‌باشند. با افزایش عدد ریلی به  $10^4$  این خطوط حالت قله به خود گرفته که به نظر می‌رسد در حالت گذار از رژیم هدایت به جابجایی می‌باشند. فرم قارچی خطوط هم‌دما از عدد ریلی  $10^5$  شروع به شکل‌گیری کرده و در عدد ریلی بالاتر رشد می‌کند و انحنا در قسمت کلاهدک قارچ و در قسمت نزدیک به چاه افزایش می‌یابد. با بالا رفتن عدد ریلی خطوط هم‌دما روی منابع حرارتی متمرکزتر شده که این امر دلیلی بر افزایش گرادیان دما روی منابع و در نتیجه افزایش انتقال حرارت می‌باشد.

چشمه و چاه حرارتی روی دیواره‌های قائم این محفظه قرار دارند و بقیه دیواره‌ها عایق می‌باشند. به وضوح می‌توان مشاهده کرد میزان اختلاف بین نتایج کار حاضر و مرجع فوق ناچیز است.

جدول ۲- مقایسه نتایج با مراجع [۱۷] و [۱۸]

| نوسلت متوسط |          |            |                      |             |
|-------------|----------|------------|----------------------|-------------|
| عدد ریلی    | کار حاضر | دیویس [۱۷] | فوسجی و همکاران [۱۸] | درصد اختلاف |
| $10^3$      | ۱/۱۱۸    | ۱/۱۱۸      | ۱/۱۴۱                | ۰/۰۰        |
| $10^4$      | ۲/۲۴۲    | ۲/۲۴۳      | ۲/۲۹                 | ۰/۲         |
| $10^5$      | ۴/۵۳۵    | ۴/۵۱۹      | ۴/۹۶۴                | ۰/۷         |
| $10^6$      | ۸/۹۳۱    | ۸/۷۹۹      | ۱۰/۳۹                | ۱/۳         |

جدول ۳- مقایسه نوسلت متوسط کار حاضر با مرجع [۱۳]

| نوسلت متوسط |                |                         |                |       |
|-------------|----------------|-------------------------|----------------|-------|
| کسر حجمی    | نتایج کار حاضر | شیخ زاده و همکاران [۱۳] | اختلاف به درصد |       |
| ۰           | ۶/۴۹۶          | ۶/۳۲                    | ۲/۷۱           | ۰/۱۰۵ |
| ۰/۱         | ۶/۸۴           | ۶/۷۴                    | ۱/۴۶           | ۰/۱۱۵ |
| ۰/۱۱۵       | ۷/۴۴۲          | ۷/۱۱۷                   | ۱/۴۶           | ۰/۱۱۵ |
|             |                |                         |                | -۱/۹۹ |

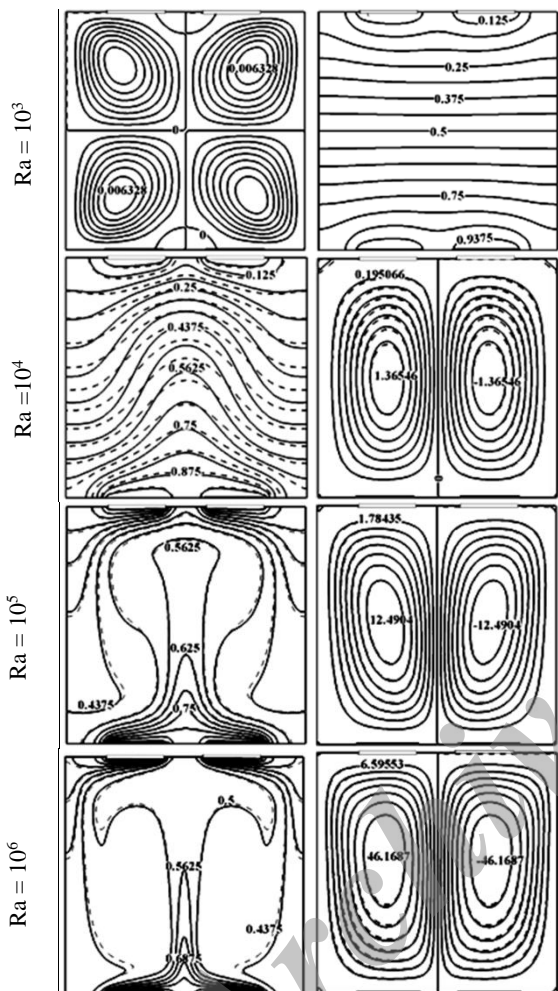
جهت انتخاب شبکه حل مناسب، بررسی روی تعداد نقاط شبکه انجام گرفت. بدین منظور اثر تعداد نقاط شبکه بر روی نوسلت متوسط محفظه شکل (۱) بررسی شده است. نتایج حاصل از این بررسی برای نانوسیال  $(\Phi=0.05)$  به ازای  $Ra=10^4$  در شکل (۲) آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود برای شبکه  $100 \times 100$  به بالا تغییر چندانی در مقدار نوسلت دیده نمی‌شود بنابراین با انتخاب شبکه یکنواخت  $100 \times 100$  نتایج مورد نظر را بدست می‌آوریم.

## ۸- نتایج

### ۸-۱- بررسی اثر عدد ریلی بر خطوط جریان و هم‌دما

در شکل (۳) اثر عدد ریلی بر خطوط جریان و هم‌دما برای سیال خالص و نانوسیال  $(\Phi=0.05)$  نشان داده شده است. برای عدد ریلی  $10^3$  چهار گردابه ضعیف به چشم می‌خورد.

مربوط به چشمه سمت چپ آورده شده است. جهش‌های کناری در نمودار نوسلت موضعی به علت گرادیان شدید دمایی ناشی از تماس با نانوسیال سرد در نزدیکی دیوار (سمت چپ) و سرعت زیاد در مرکز محفظه می‌باشد.



شکل ۳- خطوط جریان (راست) و همدمای (چپ) در ریلی مختلف خطوط (—) سیال خالص و نانوسیال  $\Phi=0.05$  خطوط (---)

برای پیش بینی کل انتقال حرارت در اعداد ریلی مختلف، مقدار عددی نوسلت متوسط تمامی منابع و نوسلت متوسط کل محفظه در جدول ۴ آمده است. همانگونه که در جدول مشاهده می‌شود برای تمامی اعداد ریلی مقدار نوسلت متوسط روی منابع حرارتی برابر می‌باشد. به علت نوع چیدمان منابع حرارتی گردابه‌های یکسانی تشکیل شده و همچنین طبق قانون بقای انرژی مقدار حرارت ورودی به محفظه با خروجی آن یکسان می‌باشد.

همچنین خطوط همدمای نانوسیال که با خطوط غیرممتد در شکل مشخص است دارای انحراف بیشتری نسبت به سیال خالص می‌باشند. این انحراف در ریلی  $10^4$  به علت قرارگیری در حالت گذار بیشتر می‌باشد.

جهت بررسی بهتر جریان سیال در شکل (۴) مولفه عمودی سرعت روی محور افقی مرکزی محفظه ( $Y=0.5$ ) برای نانوسیال  $\Phi=0.05$  رسم شده است. پروفیل سینوسی سرعت، جهت چرخش جریان در محفظه را نشان می‌دهد. مطابق آنچه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود خطوط جریان تشکیل دو گردابه یکی ساعتگرد و دیگری پادساعتگرد را می‌دهد. در سمت چپ محفظه، به علت وجود گردابه پادساعتگرد، نمودار سرعت در سمت چپ به پائین منحرف شده و با ایجاد یک نقطه عطف در مرکز گردابه سمت چپ جهت آن عکس شده و تا مرکز گردابه ساعتگرد ادامه می‌یابد سپس با ایجاد نقطه عطف دیگری در مرکز گردابه سمت راست، دوباره جهت نمودار عکس می‌شود و به صفر می‌رسد.

همانگونه که پیش‌بینی می‌شد و در شکل (۳) نیز مشاهده شد به علت عدم وجود نیروی شناوری و غالب بودن نیرو-های ویسکوز در اعداد ریلی  $10^3$  و  $10^4$ ، سرعت جریان بسیار کم می‌باشد ولی با افزایش عدد ریلی و ایجاد نیروهای غوطه‌وری مقدار قدرمطلق سرعت‌ها افزایش پیدا کرده و برای عدد ریلی  $10^6$  این افزایش بسیار چشمگیر می‌باشد.

در شکل ۵ تغییرات نوسلت موضعی برای نانوسیال با کسر حجمی ۵ درصد در اعداد ریلی مختلف آمده است. همانگونه که مشاهده می‌شود افزایش عدد ریلی  $10^3$  به  $10^4$  تاثیر چندانی در نوسلت موضعی ندارد. ولی افزایش بیشتر عدد ریلی باعث افزایش چشمگیر در نوسلت می‌شود. علت این موضوع بالا رفتن سرعت جریان به دلیل افزایش نیروی غوطه‌وری و در نتیجه افزایش سرعت تبادل حرارت و نهایتاً بالا رفتن مقدار انتقال حرارت درون محفظه می‌باشد.

با توجه به تقارن خطوط جریان و همدمای در شکل (۳) تاثیر هر دو چشمه در میزان انتقال حرارت یکسان بوده و کاملاً قرینه یکدیگر می‌باشند بنابراین فقط نمودار نوسلت موضعی

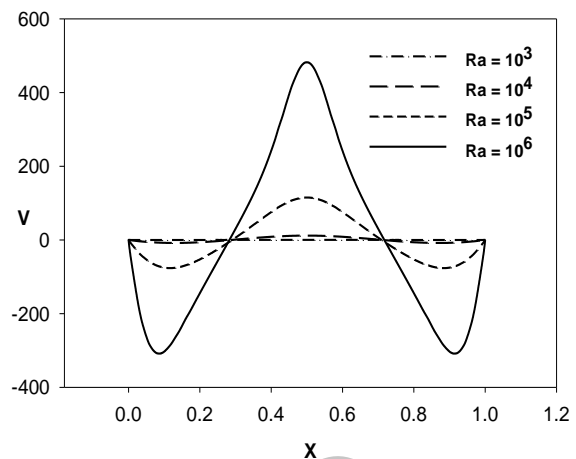
جدول ۵- ماکزیمم تابع جریان به ازای اعداد ریلی و درصدهای حجمی متفاوت

| اختلاف نانو سیال با $\Phi=0.05$ (./) آب | ماکزیمم تابع جریان |       |       |       |        | Ra              |
|---|--------------------|-------|-------|-------|--------|-----------------|
|   | ۰/۰۵               | ۰/۰۳  | ۰/۰۱  | ۰     | $\Phi$ |                 |
| -۰/۵۵                                   | ۰/۷۲۳              | ۰/۷۲۵ | ۰/۷۲۶ | ۰/۷۲۷ | ۰      | ۱۰ <sup>۳</sup> |
| -۱۹/۲                                   | ۱/۵۶۰              | ۱/۷۳۸ | ۱/۸۷۵ | ۱/۹۳  | ۰      | ۱۰ <sup>۴</sup> |
| ۶/۴                                     | ۱۴/۲۸              | ۱۳/۹۳ | ۱۳/۵۹ | ۱۳/۴۲ | ۰      | ۱۰ <sup>۵</sup> |
| ۷/۷                                     | ۵۲/۷۴              | ۵۰/۲۴ | ۴۹/۷۴ | ۴۸/۹۹ | ۰      | ۱۰ <sup>۶</sup> |

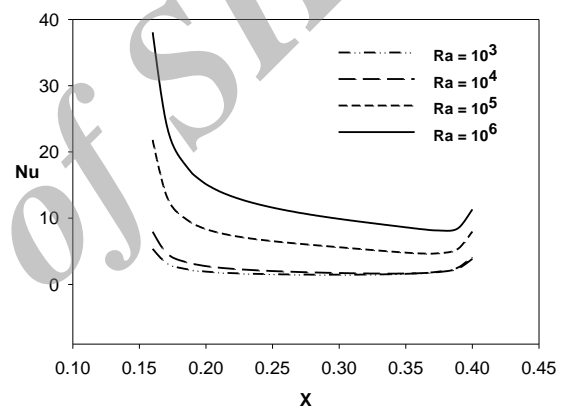
در ستون آخر جدول مقدار درصد اختلاف عددی ماکزیمم تابع جریان نانو سیال با ضریب حجمی ۵ درصد با سیال

خالص  $(\frac{|\psi_{\max}|_{nf} - |\psi_{\max}|_f}{|\psi_{\max}|_f} \times 100)$  آمده است. به طور کلی،

همانطور که انتظار می‌رفت، با افزایش عدد ریلی، قدرت گردابه‌های داخل محفظه چه برای نانو سیال و چه برای سیال خالص، افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود در اعداد ریلی پائین (۱۰<sup>۳</sup> و ۱۰<sup>۴</sup>) با افزایش میزان درصد حجمی نانوذرات ماکزیمم تابع جریان کاهش می‌یابد. همانطور که در این جدول دیده می‌شود، در ریلی ۱۰<sup>۴</sup> مقدار ماکزیمم تابع جریان بیشترین تغییرات را با درصد حجمی نانوذرات دارد. این درحالیست که برای اعداد ریلی ۱۰<sup>۵</sup> و ۱۰<sup>۶</sup> با افزایش درصد حجمی نانوذرات مقدار ماکزیمم تابع جریان افزایش می‌یابد. علت کاهش قدرت جریان در اعداد ریلی پائین، افزایش لزجت نانو سیال در اثر افزایش ذرات جامد در سیال پایه می‌باشد. افزایش لزجت باعث کند شدن حرکت سیال و بالطبع کاهش مقدار ماکزیمم تابع جریان می‌شود. اما در اعداد ریلی بالا ( $Ra \geq 10^5$ )، که نیروی شناوری بر نیروی ویسکوز غلبه دارد، اضافه کردن نانوذرات نه تنها باعث کاهش سرعت جریان داخل محفظه نشده، بلکه با بهبود عملکرد حرارتی نانو سیال و افزایش انتقال حرارت از محفظه، جریانات شناوری قوی‌تر شده و ماکزیمم مقدار تابع جریان افزایش یافته است.



شکل ۴- تغییرات سرعت عمودی به ازای تغییرات ریلی برای نانو سیال  $\Phi=0.05$



شکل ۵- تغییرات نوسلت موضعی به ازای اعداد ریلی متفاوت

جدول ۴- نوسلت متوسط به ازای اعداد ریلی متفاوت ( $\Phi=0.05$ )

| عدد ریلی        | چشمه چپ | چشمه راست | چاه چپ | چاه راست | کل   |
|-----------------|---------|-----------|--------|----------|------|
| ۱۰ <sup>۳</sup> | ۰/۵۱    | ۰/۵۱      | ۰/۵۱   | ۰/۵۱     | ۱/۰۲ |
| ۱۰ <sup>۴</sup> | ۰/۶۳    | ۰/۶۳      | ۰/۶۳   | ۰/۶۳     | ۱/۲۶ |
| ۱۰ <sup>۵</sup> | ۱/۸۲    | ۱/۸۲      | ۱/۸۲   | ۱/۸۲     | ۳/۶۴ |
| ۱۰ <sup>۶</sup> | ۳/۲     | ۳/۲       | ۳/۲    | ۳/۲      | ۶/۴  |

## ۸-۲- بررسی اثر درصد حجمی نانوذرات

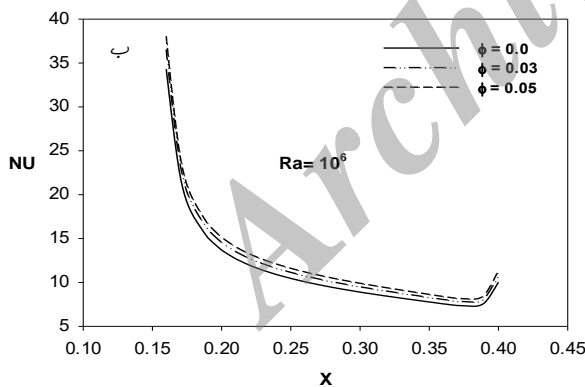
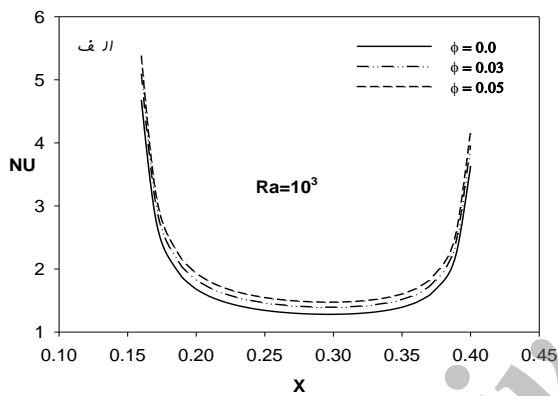
در این قسمت برای محفظه شکل ۱ به بررسی اثر درصد حجمی نانوذرات در اعداد ریلی مختلف بر روی پارامترهای جریان و انتقال حرارت می‌پردازیم. در جدول ۵ مقدار ماکزیمم تابع جریان را برای درصدهای حجمی مختلف نانوذرات در اعداد ریلی گوناگون آمده است.

در جدول (۶) نوسلت متوسط کل محفظه به ازای درصدهای حجمی متفاوت برای اعداد ریلی مختلف آمده است. علاوه بر این در این جدول درصد افزایش عدد نوسلت متوسط نانوسیال با درصد حجمی ۵ درصد نسبت به سیال خالص

$$\left( \frac{\overline{Nu_{nf}} - \overline{Nu_f}}{\overline{Nu_f}} \times 100 \right)$$

آورده شده است.

نتایج نشان می‌دهند که با افزایش عدد ریلی،  $\overline{Nu}$  برای همه مقادیر  $\phi$  افزایش می‌یابد. همچنین در تمامی مقادیر عدد ریلی، با افزایش حجم نانوذرات عدد نوسلت متوسط افزایش می‌یابد البته میزان آن وابسته به عدد ریلی است.

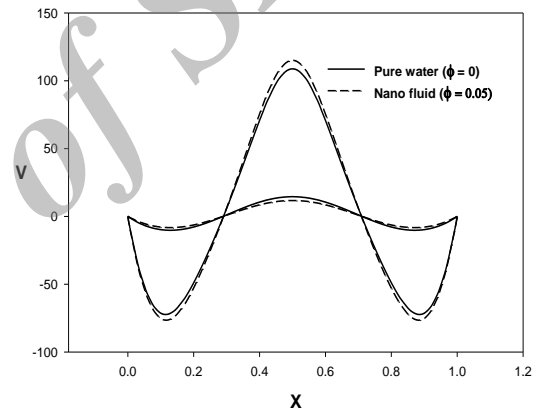


شکل ۷- اثر تغییر کسر حجمی نانوذرات بر نوسلت موضعی (الف)  $Ra=10^3$  - ب  $Ra=10^6$ )

### ۸-۳- اثر تغییر موقعیت منابع حرارتی

در این قسمت هدف تغییر موقعیت دو جفت چشمه و چاه به سه حالت دیگر است. با رسم خطوط جریان و همدمای این حالات برای نانوسیال ( $\Phi=0.05$ ) و عدد ریلی  $10^5$ ، به مقایسه پارامترهای جریان و انتقال حرارت این چهار حالت

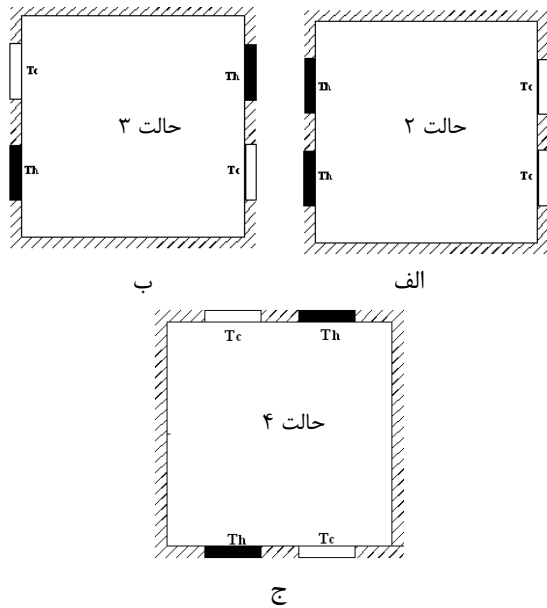
جهت درک بیشتر موضوع، شکل (۶) تغییرات سرعت عمودی جریان را در اثر افزایش کسر حجمی ۵ درصد برای اعداد ریلی  $10^4$  و  $10^5$  نشان می‌دهد. همانطور که اشاره شد با افزایش کسر حجمی برای عدد ریلی  $10^4$  مقدار سرعت کاهش یافته و برای عدد ریلی  $10^5$  سرعت افزایش می‌یابد. در ادامه اثر تغییر درصد حجمی نانوذرات را بر نوسلت موضعی چشمه سمت چپ برای اعداد ریلی  $10^3$  و  $10^6$  مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانطور که در شکل (۷) مشخص است، با افزایش کسر حجمی نانوذرات نوسلت موضعی افزایش می‌یابد. به وضوح مشاهده می‌شود در اعداد ریلی پائین اثر افزایش کسر حجمی نانوذرات بر نوسلت موضعی موثرتر است و در اعداد ریلی بالا این اثر کم‌رنگ‌تر می‌باشد.



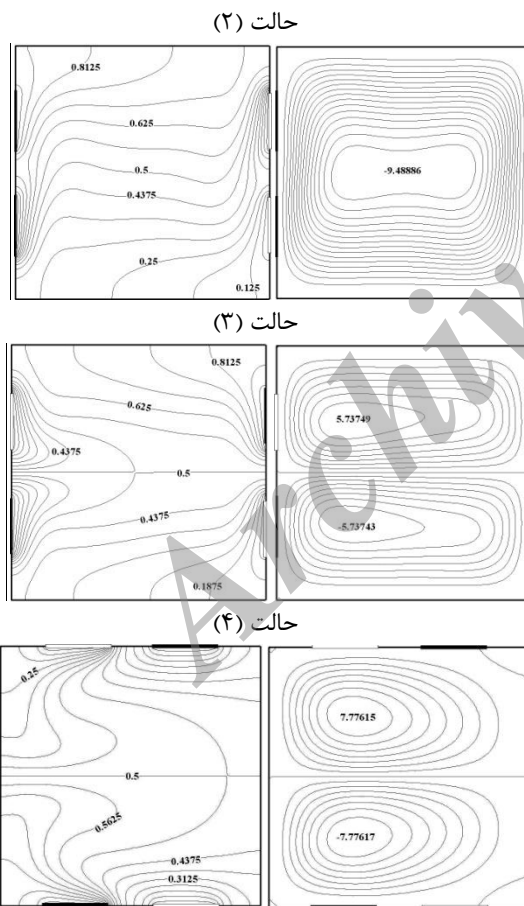
شکل ۶- اثر کسر حجمی بر روی سرعت عمودی در مرکز محفظه در ریلی  $10^4$  و  $10^5$

علت این تغییرات افزایش ضریب هدایت نانوسیال در اثر اضافه کردن نانو ذرات با ضریب هدایت بالا به سیال خالص می‌باشد. چون انتقال حرارت در اعداد ریلی پائین ( $10^3$ ) به طور عمده توسط هدایت صورت می‌گیرد، اضافه شدن نانوذرات جامد با ضریب هدایت حرارتی بالاتر نسبت به سیال پایه، باعث افزایش انتقال حرارت از طریق هدایت شده و در نتیجه عدد نوسلت افزایش پیدا می‌کند. لازم به ذکر است که افزایش ناگهانی نوسلت موضعی در لبه های چشمه حرارتی شکل (۷) به دلیل تغییر ناگهانی شرط مرزی و ایجاد گرادیانهای قویتر دما در نواحی است.





شکل ۸- تغییر موقعیت منابع (طرح شماتیک حالات ۱، ۲، ۳ و ۴)



شکل ۹- خطوط جریان (راست) و همدمما (چپ) حالات ۱، ۲، ۳ و ۴ در ریلی ۱۰۵ و نانوسیال ( $\Phi=0.05$ )

در شکل (۱۰) تغییرات ماکزیمم تابع جریان برای حالت پایه و سه حالت دیگر به ازای افزایش عدد ریلی برای

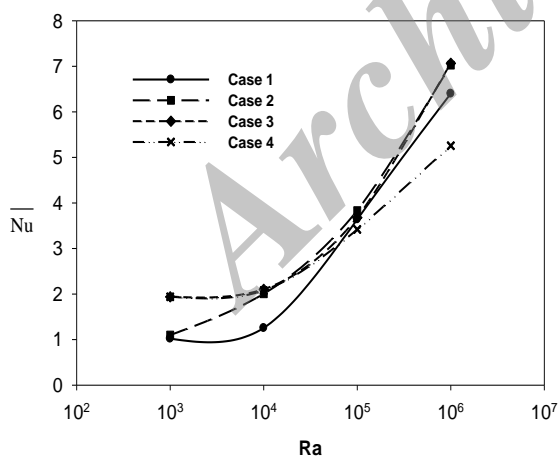
می‌پردازیم. شکل ۱ را در نظر بگیرید اگر این حالت را حالت اصلی و پایه قرار دهیم و آنرا حالت (۱) بنامیم، سه حالت دیگر مطابق شکل (۸) می‌باشد. در حالت (۲)؛ چشمه‌ها روی دیواره عمودی سمت چپ و چاه‌ها روی دیواره‌ی روبرو قرار داشته (شکل ۸ الف)، در حالت (۳)؛ جفت چشمه و چاه حرارتی به صورت ضربدری روی دیواره‌های عمودی قرار داشته (شکل ۸ ب)، و در حالت (۴)؛ جفت چشمه و چاه حرارتی به صورت ضربدری روی دیواره‌های افقی قرار داشته‌اند (شکل ۸ ج). قابل ذکر است تمامی شرایط که برای حالت اصلی در نظر گرفتیم برای سایر حالات نیز یکسان می‌باشد و در تمامی آنها شبکه یکنواخت  $100 \times 100$  جوابهای دقیق ارائه می‌داد. همانگونه که در شکل ۹ مشاهده می‌شود در حالت (۲) یک گردابه ساعتگرد تمامی محفظه را در برمی‌گیرد و خطوط دما تقریباً به صورت افقی در آمده است. حالت (۳) خطوط جریان دو گردابه یکی ساعتگرد (پائینی) و دیگری پادساعتگرد را تشکیل می‌دهند و خطوط جریان به صورت مایل قرار گرفته‌اند. حالت (۴) نیز خطوط جریان دو گردابه را یکی ساعتگرد (پائینی) و دیگری پادساعتگرد را تشکیل می‌دهند و خطوط همدمما به مرکز گردابه کشیده شده‌اند.

جدول ۶- نوسلت متوسط کل محفظه به ازای اعداد ریلی و درصد‌های حجمی متفاوت

| اختلاف نانوسیال $\Phi$  | نوسلت متوسط |       |       |       | Ra  |
|-------------------------|-------------|-------|-------|-------|-----|
|                         | ۰/۰۵        | ۰/۰۳  | ۰/۰۱  | ۰     |     |
| $\Phi = 0/105$<br>با آب | ۰/۰۵        | ۰/۰۳  | ۰/۰۱  | ۰     |     |
| ۱۵                      | ۱/۰۲        | ۰/۹۶۴ | ۰/۹۱۲ | ۰/۸۸۶ | ۱۰۳ |
| ۱۲                      | ۱/۴۱        | ۱/۳۶  | ۱/۲۹  | ۱/۲۶  | ۱۰۴ |
| ۱۰/۵                    | ۳/۶۳۷       | ۳/۴۹۷ | ۳/۳۵۹ | ۳/۲۹  | ۱۰۵ |
| ۱۰/۹                    | ۶/۳۹۸       | ۶/۱۴۳ | ۵/۸۹۱ | ۵/۷۶۷ | ۱۰۶ |

در ادامه به بررسی و مقایسه ماکزیمم تابع جریان (قدرت جریان) این چهار حالت می‌پردازیم. همچنین با بررسی عدد نوسلت متوسط محفظه میزان انتقال حرارت این چهار حالت را با هم مقایسه می‌کنیم.

انتقال حرارت هدایت، غالب است. در نتیجه تمامی حالات تقریباً در یک نقطه مشترک هستند و از آن به بعد هر کدام شیب جداگانه‌ای را به خود می‌گیرند. برای تمامی حالات (به جزء حالت ۲)، تا عدد ریلی  $10^4$  نمودار بدون شیب بوده و تقریباً رژیم انتقال حرارت هدایت، غالب است. از عدد ریلی  $10^4$  درون محفظه نیروی‌های قوی شناوری خواهیم داشت؛ پس نوسلت متوسط محفظه به شدت افزایش می‌یابد. همچنین از مقایسه نمودار نوسلت متوسط چهار حالت بر می‌آید که حالت (۲) و (۳) از ریلی  $10^4$  به بعد تقریباً بر هم منطبق می‌باشند و مقدار نوسلت محفظه در این دو حالت از دو حالت دیگر بیشتر می‌باشد. نوع چیدمان منابع حرارتی در حالت (۲) و (۳) باعث ایجاد جریان‌های قوی جابجایی و در نتیجه انتقال حرارت بیشتر درون محفظه می‌شود. پس به نظر می‌رسد که بهترین حالت برای بیشترین انتقال حرارت درون محفظه حالات (۲) و (۳) و سپس حالت (۱) می‌باشد این درحالیست که، برای حالت (۳) نوسلت کل محفظه با شیب ملایم تری افزایش می‌یابد که کاملاً با نمودار خطوط جریان درون محفظه (گردابه کوچک) قابل توجیه است.

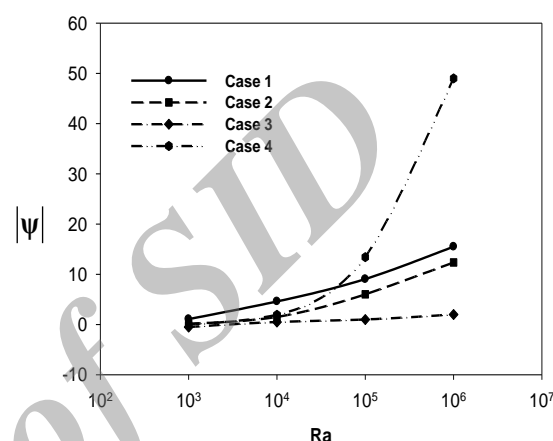


شکل ۱۱- مقایسه تغییرات نوسلت متوسط محفظه به ازای افزایش عدد ریلی برای چهار حالت ( $\Phi=0.05$ )

## ۹- نتیجه گیری

در این مقاله انتقال حرارت جابجایی آزاد نانوسیال در محفظه‌ای مربعی حاوی دو جفت چشمه و چاه مورد بررسی

نانوسیال با ( $\Phi=0.05$ ) آورده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود تمامی حالات در عدد ریلی  $10^3$  به علت اینکه جریان ضعیف است در یک نقطه مشترک هستند. به عبارتی قدرت جریان در ریلی پائین به نوع چیدمان چشمه و چاه در محفظه بستگی ندارد. در حالت های (۱) و (۲) تابع جریان با عدد ریلی نسبت مستقیم دارد به گونه‌ای که تقریباً با یک شیب یکسان افزایش می‌یابند.



شکل ۱۰- مقایسه تغییرات ماکزیمم تابع جریان به ازای افزایش عدد ریلی برای چهار حالت ( $\Phi=0.05$ )

نمودار حالت (۴) تا عدد ریلی  $10^4$  با نمودار حالت (۲) منطبق می‌باشد ولی از ریلی  $10^4$  به علت افزایش فوق العاده نیروی شناوری به یک‌باره شیب نمودار افزایش یافته و بعد از ریلی  $10^5$  ماکزیمم مقدار تابع جریان با شیب تقریباً ثابت و نسبتاً تند افزایش می‌یابد. در حالت ۳ تا عدد ریلی  $10^4$  نیروی ویسکوزیته بر نیروی شناوری غلبه داشته و آهنگ افزایش رشد قدرت جریان، کند می‌باشد. ولی از عدد ریلی  $10^4$  همانگونه که در شکل مشاهده می‌شود نیروی شناوری قدرت می‌گیرد و در نتیجه تابع جریان با رشد چشمگیری که از همه حالت‌ها بیشتر می‌باشد، بالاترین قدرت جریان را از آن خود می‌کند. به همین علت در اینجا نمودار تابع جریان شیب زیادی می‌گیرد.

در شکل (۱۱) مقایسه نوسلت متوسط کل محفظه برای نانوسیال ( $\Phi=0.05$ ) برای چهار حالت آمده است. طبق آنچه قبلاً نیز آورده شده بود در ریلی  $10^3$  تمامی حالات دارای توزیع یکنواخت دما درون محفظه می‌باشند و رژیم

$$P = \frac{\bar{p}H^2}{\rho_{nf}\alpha_f^2}$$

$C_p$  ظرفیت حرارتی مخصوص

$$Pr = \frac{V}{\alpha}$$

عدد نوسلت موضعی دیواره

$$Nu = \left( \frac{-k_{nf}}{k_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial N}$$

$$\bar{Nu} = \int Nu \, dN$$

$$Ra = Gr Pr$$

$K$  ضریب هدایت حرارتی

$\psi$  تابع بی بعد جریان

$\mu$  لزجت دینامیکی سیال

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

$\phi$  کسر حجمی نانوذرات

### علائم یونانی

$\alpha$  ضریب پخش حرارتی سیال

$\rho$  چگالی نانوسیال

$\nu$  لزجت سینماتیکی سیال

### زیرنویس

$f$  سیال

$c$  چاه

$h$  چشمه

$nf$  نانو سیال

قرار گرفته است. معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی به کمک الگوریتم سیمپل حل شده است. برنامه ای به زبان فرترن نوشته شده و پس از بررسی صحت آن نتایج لازم استخراج شده است. با توجه به موارد حاصله از بررسی های انجام شده می توان نتایج زیر را استنتاج کرد.

افزایش عدد ریلی همواره باعث افزایش نوسلت متوسط می شود و این مطلب برای کلیه حالات چیدمان منابع حرارتی صادق است.

در اعداد ریلی  $10^2$  و  $10^4$  نیرو های ویسکوز بر نیروی شناوری غلبه کرده و درون محفظه انتقال حرارت هدایت غالب می باشد. از عدد ریلی  $10^4$  به بعد با افزایش نیروهای شناوری، انتقال حرارت جابجایی سهم عمده را دارد.

در اعداد ریلی پائین ( $10^2$  و  $10^4$ ) افزایش درصد حجمی نانوذرات باعث افزایش لزجت نانوسیال و در نتیجه کند شدن جریان درون محفظه می شود. این در حالی است که در اعداد ریلی بالا ( $10^5$  و  $10^6$ ) اضافه کردن درصد حجمی نانوذرات باعث بهبود عملکرد حرارتی و تقویت جریان جابجایی درون محفظه شود.

در اعداد ریلی پائین ( $10^3$  و  $10^4$ ) افزایش کسر حجمی نانوذرات بر نوسلت موضعی و متوسط موثرتر می باشد این در حالیکه در اعداد ریلی بالا ( $10^5$  و  $10^6$ ) این اثر کم رنگ تر می باشد.

با تغییر موقعیت منابع حرارتی به گونه ای که جفت چشمه و چاه ها روی دیواره های عمودی قرار گیرند (حالات ۲ و ۳)، برای اعداد ریلی بالا، بیشترین میزان عدد نوسلت به دست خواهد آمد.

### فهرست علائم

$g$  شتاب جاذبه

$$X, Y = \frac{x, y}{H}$$

$$U = \frac{vH}{\alpha_f}$$

$$V = \frac{vH}{\alpha_f}$$

## ۱۰- مراجع

- [1] Ostrach, S. (1988). "Natural convection in enclosures". *Journal of Heat Transfer*, vol. 6, pp. 1175–1190.
- [2] Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L., Sammakia, B. (1988). "Buoyancy – induced flows and transport". Hemisphere Publishing Corporation, New York, pp. 1001.
- [3] Sezai, I., Mohamad, A. A. (2000). "Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal cavity". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 2257–2266.
- [4] Saravanan, S., Sivaraj, C. (2011). "Natural convection in an enclosure with a localized non uniform heat source on bottom wall". *International Journal of heat and mass transfer*, Vol. 54, pp. 2820-2828.
- [5] Sarris, I.E., Lekakis, I., Vlachos, N.S. (2004). "Natural convection in rectangular tanks heated locally from below". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 3549–3563.
- [6] Calcagni, B., Marsili, F. and Paroncini, M. (2005) "Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below". *Appl. Therm. Eng.*, Vol. 25, pp. 2522–2531.
- [7] Deng, Q. H. Tang, G. F. Li, Y. (2002). "A combined temperature scale for analyzing natural convection in rectangular enclosures with discrete wall heat sources". *Int J Heat Mass Transfer*, No. 45, pp. 3437–3446.
- [8] Aminossadati S. M., Ghasemi B. (2009). "Natural Convection Cooling of a Localised Heat Source at the Bottom of a Nanofluid-Filled Enclosure", *European Journal of Mechanics B/Fluids*, No. 28, pp. 630–640.
- [9] Pishkar I., Ghasemi B. (2012). "Chimney Cooling enhancement of two fins in a horizontal channel by nanofluid mixed convection". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 59, pp. 141-151.
- [10] Oztop H. F., Abu-Nada E. (2008). "Numerical Study of Natural Convection in Partially Heated Rectangular Enclosures Filled with Nanofluids". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, No. 29, pp. 1326–1336.
- [11] Abu-Nada, E. Oztop, H. F. (2009). "Effects of Inclination Angle on Natural Convection in Enclosures Filled with Cu–Water Nanofluid". *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 30, pp. 669–678.
- [12] Aminossadati S.M. and Ghasemi B. (2011). "Natural convection of water–CuO nanofluid in a cavity with two pairs of heat source-sink". *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 672–678.
- [13] Sheikhzadeh, G.A. Arefmanesh, A. Kheirkhah, M.H. Abdollahi, R. (2011). "Natural convection of Cu-water nanofluid in a cavity with partially active side walls". *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 30, pp. 166-176.
- [14] Ghasemi, B. Aminossadati, S.M. (2010). "Mixed convection in a lid-driven triangular enclosure filled with nanofluids". *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1142-1148.
- [15] Brinkman, H.C. (1952). "The Viscosity of Concentrated Suspensions and Solution". *J. Chem. Phys*, Vol. 20, pp. 571–581.
- [16] Maxwell, J. A. (1904). "Treatise on Electricity and Magnetism, Second ed. Oxford University Press". Cambridge, UK,
- [17] De Vahl Davis, G. (1983). "Natural convection of air in a square cavity: a Benchmark solution". *Int J Numer Meth Fluids*, Vol. 3, pp. 249-264.
- [18] Fusegi, T. Hyun, J. M. Kuwahara, K. Farouk, B. (1991). "A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 1543-1557.