

بررسی ارتعاشات آزاد ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی

امیرحشمت خدمتی‌بازکیایی^{۱*}، حمید دهقان‌طرزجانی^۲، نادر محمدی^۳

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۰۶	در این پژوهش یک روش عددی به منظور بررسی و پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی یک ورق مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک تک‌پارامتری ارائه شده است. به منظور جلوگیری از اثرات غیرخطی، بستر الاستیک، وینکلر در نظر گرفته شده و از اثرات کوپل شده فنرها صرف‌نظر گردیده است. برای بررسی ورق مدرج تابعی از تئوری ورق نازک استفاده می‌شود. ورق به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی مدل شده است. با اعمال این روش و تجزیه به یک سری زیردامنه، هرگونه ناپیوستگی در بار و خواص فیزیکی قابل اعمال است. پس از تعیین شرایط مرزی، شرایط سازگاری و معادلات دیفرانسیل حرکت، این روابط به کمک روش مذکور به معادلات جبری تبدیل می‌شوند و این معادلات، مسئله مقدار ویژه‌ای را تشکیل می‌دهند که با حل آن فرکانس‌های طبیعی ورق مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر محاسبه می‌گردد. جهت بررسی صحت الگوریتم‌ها و روش حل عددی معرفی شده، از مقالات معتبر استفاده گردیده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش المان کوادراچر دیفرانسیلی، از دقت مناسبی برای ورق با شش شرط مرزی مختلق برخوردار می‌باشند.
پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۳/۲۰	
واژگان کلیدی: ارتعاشات آزاد، ورق مواد مدرج تابعی، بستر الاستیک وینکلر، المان کوادراچر دیفرانسیلی.	

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی، مواد کامپوزیتی بوده که از نظر میکروسکوپی غیرهمگن و خواص مکانیکی آن‌ها، به آرامی و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند و همین تغییر پیوسته در خواص این مواد، باعث تغییرات تدریجی نتایج می‌گردد. در سال ۱۹۸۴ میلادی در منطقه سندایی ژاپن [۱]، برای نخستین بار، دانشمندان علم مواد، این مواد را به عنوان مواد با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند. عموماً این مواد از یک مخلوط سرامیک و فلز و یا ترکیبی

از فلزات مختلف ساخته می‌شوند که برخلاف کامپوزیت‌های الیاف-ماتریس، مشکل عدم تطابق خواص مکانیکی در عرض یک سطح مشترک دو ماده مجزا چسبیده به یکدیگر، که ممکن است باعث جدا شدن در دماهای بالا گردند، را ندارد.

مزیت این مواد، توانایی بالای مقاومتی در محیط‌های متغیر دمایی بدون تغییر در ساختارشان بوده است. به دلیل این ویژگی بارز، مقاومت در برابر خوردگی و استقامت بالا در مقابل شکست بررسی رفتار این قبیل مواد، از اهمیت بالایی

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: a-khedmati@phdstu.scu.ac.ir

۱. دانشجوی دکترای تخصصی، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

۲. مربی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد پزند

۳. استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد پزند

ضرایب وزنی پیشنهاد کردند. روش اول منجر به حل دستگاه معادلات خطی می‌شد که تولید ماتریس واندرموند^۶ می‌کرد. با افزایش نقاط دقت ماتریس، بدرفتار می‌شد و از طرف دیگر معکوس گرفتن از آن نیز مشکل بود. در روش دوم آن‌ها با استفاده از یک فرمول جبری موفق به محاسبه ضرایب وزنی شدند اما در این روش مختصات نقاط دقت ریشه‌های چند جمله‌ای لژاندر بود. کوان و چانگ^۷ [۹] توانستند با استفاده از توابع درونیاب لاگرانژ به عنوان توابع پایه، فرمولی را برای محاسبه ضرایب وزنی مشتق اول و دوم بدست آوردند. شو و ریچارد^۸ [۱۰] برای محاسبه وزن‌های DQM درجه اول، از رابطه‌ای جبری و مستقل از مختصات گره‌ها استفاده کردند. ایشان در این روش از توابع پایه لاگرانژ در محاسبه وزن‌ها استفاده نمودند و علاوه بر محاسبه تقریب درجه اول، رابطه بازگشتی ساده‌ای برای محاسبه وزن‌های مشتق درجات بالاتر با استفاده از وزن‌های درجه اول بدست آوردند. این روابط معمولاً با عنوان GDQ^۹ شناخته می‌شود. حسینی مارانی و مرادی [۱۱]، در سال ۱۳۹۱ شمسی، به بررسی ارتعاشات آزاد ورق همگن دارای ترک، به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی پرداختند. ایشان ترک را به کمک فنر چرخشی گسترده، مدل کرده و با تقسیم ورق به تعدادی المان و قراردادن ترک در مرز بین دو یا چند المان، با اعمال روش المان کوادراچر دیفرانسیلی بر روی معادلات دیفرانسیل حرکت، اثرات تعدادی پارامترها از جمله محل، اندازه و عمق ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق را، با مقایسه نتایج با روش اجزاء محدود، مورد بحث قرار دادند.

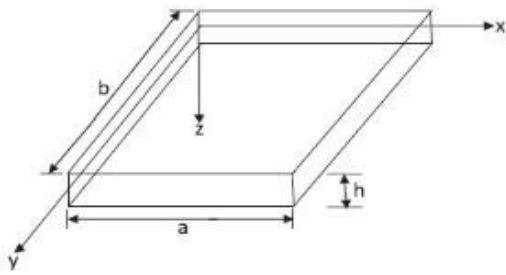
در پژوهش حاضر، به منظور یافتن فرکانس طبیعی ورق مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک، با استفاده از تئوری کلاسیک برای ورق نازک پرداخته شده است. نتایج حاصله بیانگر این امر بوده که با افزایش تعداد دامنه و نوع و تعداد نقاط دقت، ضعف تئوری کلاسیک برای ورق نسبتاً ضخیم،

در صنعت، برخوردار است؛ به این دلیل و همچنین نیاز به استفاده از این مواد، باعث گردیده که بسیاری از محققان و پژوهشگران به بررسی و تحلیل مواد مدرج تابعی بپردازند. ورق واقع شده بر بستر الاستیک در سازه‌های مهندسی بسیار رایج است. برای بررسی اندرکنش مابین بستر و ورق، مدل‌های متنوعی موجود بوده که ساده‌ترین آن‌ها، وینکلر یا مدل تک پارامتری است که در آن، فندانسیون را به صورت فنرهای جدا از هم و بدون تأثیر برهم فرض گردیده است. زنکور^۱ [۲] به بررسی یک ورق FGM بر بستر الاستیک پسترناک^۲ با استفاده از تئوری سینوسی و شرایط مرزی متقارن تکیه‌گاه ساده پرداخت. ملک زاده [۳] در سال ۲۰۰۹ با تئوری الاستیسیته سه بعدی و روش حل عددی DQ^۳ به بررسی همین موضوع پرداخت. در سال ۲۰۱۰، حسینی هاشمی، رکنی دماوندی طاهر و اخوان، [۴] ارتعاشات آزاد یک ورق نازک قطاعی FGM، با ضخامت متغیر را بر بستر الاستیک دو پارامتری بررسی نمودند. ایشان با بهره‌گیری از تئوری کلاسیک (ورق‌های نازک)، معادلات تعادل را در مختصات استوانه‌ای بازنویسی کرده و برای حل عددی معادلات حاکم استخراجی، از روش عددی DQ استفاده نموده‌اند. بافرانی [۵] در سال ۲۰۱۱ پژوهش خود را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی انجام داد. تای‌دای و هو چوی^۴ [۶] با استفاده از روش حل ناویر و استفاده از فرضیه مرتبه اول برشی به بررسی ارتعاشات ورق مدرج تابعی بر بستر الاستیک در سال ۲۰۱۱ پرداختند. در سال ۱۳۹۲ هجری شمسی بررسی ارتعاشات آزاد ورق نازک مدرج تابعی بر بستر الاستیک، با روش حل عددی المان کوادراچر دیفرانسیلی برای دو شرط مرزی متقارن تکیه‌گاه ساده و آزاد توسط خدمتی بازکیایی، دهقان طرزجانی و محمدی [۷] پرداخته شده است.

روش DQ اولین بار توسط بلمان^۵ و همکاران [۸] در اوایل دهه ۷۰ میلادی مطرح شد. آن‌ها، دو روش را برای تعیین

Vondermond^۱
 Quan and Chung^۶
 Shu and Richards^۸
 Generalized Differential Quadrature^۹

Zenkour^۱
 Pasternak Elastic Foundation^۲
 Differential Quadrature Method^۳
 Tai Thai and Ho Choi^۴
 Bellman^۵



شکل ۱- مختصات و ابعاد ورق

با اعمال دسته روابط شماره (۴) روابط کرنش-جابجایی به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به قانون هوک، روابط تنش-جابجایی نیز بصورت روابط شماره (۶) بیان شده است.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - z\nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - z\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E(z)}{1+\nu} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

حال به منظور یافتن معادلات حاکم، انرژی پتانسیل ورق به صورت رابطه شماره (۷) معرفی شده است.

$$u_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz dy dx \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

با استفاده از دسته روابط (۵) و (۶) جایگذاری در رابطه (۷) داریم.

$$u_p = \frac{D}{2} \iint_A [(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}] dA \quad (8)$$

وقتی که $dA = dx dy$ و

با حجم محاسبات بسیار کمتر برطرف گردیده است. این امر و بررسی سه روش مختلف دیگر چون GDQ اهداف و نوآوری پژوهش خواهد بود.

۲- تئوری

۱-۲- معادلات حاکم

یک ورق FGM نازک، قرار گرفته بر بستر الاستیک تک پارامتری را در نظر گرفته، با توجه به محور مختصات واقع شده در گوشه ورق، شکل ۱، خواص مکانیکی برای آن، در امتداد ضخامت متغیر بوده و با توجه به قانون توانی بیان شده است:

$$\begin{aligned} P(z) &= (P_c - P_m) V_c + P_m \\ V_c &= \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^\alpha, \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

با توجه به رابطه (۱) و با فرض ثابت بودن نسبت پواسان:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^\alpha + E_m \quad (2)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^\alpha + \rho_m \quad (3)$$

که در آن E مدول یانگ، ρ چگالی و اندیسهای m و c به ترتیب به سرامیک و فلز اشاره دارد. با توجه به روابط (۲) و (۳)، اگر مقدار α به سمت صفر میل کند، خواص مکانیکی ورق مفروض نیز به سمت سرامیک میل کرده و با افزایش و رشد α ، چگالی و مدول الاستیسیته ورق نزدیک به خواص فلز شده است. باید توجه داشت که مقدار $\alpha = 1$ باعث تغییرات ترکیب سرامیک و فلز مفروض به صورت خطی شده است.

با استفاده از تئوری کلاسیک برای ورقهای نازک و با چشم پوشی از مقادیر U_0 و V_0 :

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ V(x, y, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ W(x, y, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

تقسیم هر کدام از المان‌ها و برقراری معادلات حاکم. ۳. برهم نهی المان‌های جدا شده و برقراری معادلات حاکم با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و شرایط سازگاری در المان‌های مجاور. برای محاسبه مشتق تابع با این روش ابتدا باید ضرایب وزنی را بدست آورد. چندین راه برای محاسبه ضرایب وزنی وجود دارد. برای مسائلی که دارای دامنه دو بعدی هستند، توابع متغیر $\phi^e(\zeta)$ و $\theta^e(\eta)$ به کمک ضرایب لاگرانژ متناسب با المان مجزای e در راستاهای ζ و η در دامنه اصلی تقریب زده می‌شوند.

$$\phi^e(\zeta) = \frac{L(\zeta)}{M^1(\zeta_n)} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$L(\zeta) = \prod_{\beta=1, \beta \neq n}^{N^e} (\zeta - \zeta_\beta)$$

$$M^1(\zeta_n) = \prod_{\beta=1, \beta \neq n}^{N^e} (\zeta_n - \zeta_\beta) \quad (16)$$

N^e تعداد نقاط دقت در جهت ζ در هر المان است. مشتق اول تابع نسبت به مختصات طبیعی ζ با روش DQ تقریب زده می‌شود. به این صورت که مشتق اول تابع نسبت به مختصات طبیعی ζ برابر با مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط المان در راستای ζ

$$\frac{d\phi^e(\zeta)}{d\zeta} = \sum_{\beta=1}^{N^e} D_{n\beta}^\zeta \phi_\beta^e \quad n = 1, 2, \dots, N^e$$

$$D_{n\beta}^\zeta = \frac{M^1(\zeta_n)}{(\zeta_n - \zeta_\beta) M^1(\zeta_\beta)} \quad n, \beta = 1, 2, \dots, N^e$$

$$D_{nn}^\zeta = - \sum_{\gamma=1, \gamma \neq n}^{N^e} D_{n\gamma}^\zeta \quad n, \gamma = 1, 2, \dots, N^e \quad (17)$$

مشتق مرتبه دوم و مراتب بالاتر راستای ζ و η به صورت مشابه نیز بدست می‌آیند.

ورق به تعدادی المان تقسیم شده و معادلات حرکت برای ارتعاشات عرضی نوشته می‌شوند. این معادلات به همراه معادلات مربوط به شرایط مرزی و شرایط سازگاری، به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی به یک مسئله

$$D = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz}{1 - \nu^2} \quad (9)$$

انرژی پتانسیل حاصل از بستر الاستیک نیز در رابطه (۱۰) بیان می‌گردد.

$$u_f = \frac{1}{2} \iint_A K_w w^2 dA \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) منظور از K_w ، ضریب سختی بستر تک‌پارامتری وینکلر است. میزان انرژی جنبشی ورق نیز بطریق زیر محاسبه خواهد شد.

$$T_p = \frac{1}{2} \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \dot{U}_i dz dA \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۴) برحسب زمان، صرفنظر نمودن از ممان اینرسی چرخشی و قرارگیری در رابطه (۱۱)، انرژی جنبشی ورق به این‌گونه تعریف شده است.

$$T_p = \frac{1}{2} \iint_A I w^{\cdot 2} dA \quad (12)$$

که در آن

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (13)$$

هم‌اکنون با استفاده از اصل همپلتون (رابطه (۱۴))

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_p - u_p - u_f) dt = 0 \quad (14)$$

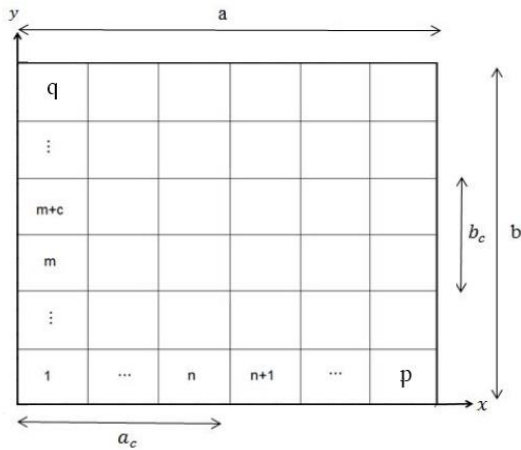
و قرار دادن روابط (۸)، (۱۰) و (۱۲) در آن و ساده‌سازی، معادله حاکم برای ارتعاشات یک ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر حاصل خواهد شد.

$$D \nabla^4 w + K_w w + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$$

۲-۲- روش المان کوادراچر دیفرانسیلی

روش المان کوادراچر دیفرانسیلی روش عددی جدیدی برای حل، با همگرایی سریع، معادلات دیفرانسیلی خطی و غیرخطی است. ایده اصلی این روش از سه قسمت اصلی تشکیل می‌شود: ۱. تقسیم دامنه‌ی متغیرها به چندین زیر دامنه یا المان ۲. استفاده از روش کوادراچر دیفرانسیل برای



شکل ۲- نحوه المان بندی ورق

$$W^{r,s} = 0$$

$$\frac{\partial W^{r,s}}{\partial x} = 0 \quad r = p, s = 1, \dots, q \quad (23)$$

شروط مرزی برای وجوه عمودی، y نیز به همین صورت خواهد بود.

شرایط پیوستگی بین المان‌ها در جهت x شامل پیوستگی در جابه‌جایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی می‌باشد.

$$W^{r,s} = W^{r+1,s} \quad (24)$$

$$\frac{\partial W^{r,s}}{\partial x} = \frac{\partial W^{r+1,s}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W^{r+1,s}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r+1,s}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 W^{r+1,s}}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r+1,s}}{\partial y^2 \partial x}$$

$$r = 1, \dots, p, s = 1, \dots, q$$

شرایط پیوستگی بین المان‌ها در جهت y که نیز شامل پیوستگی در جابه‌جایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی می‌باشد، به همین ترتیب حاصل می‌گردد.

$$W^{r,s} = W^{r,s+1}$$

$$\frac{\partial W^{r,s}}{\partial y} = \frac{\partial W^{r,s+1}}{\partial y}$$

مقدار ویژه تبدیل شده که با حل مسئله مقدار ویژه حاصل، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید. که p تعداد المان در راستای x ، q تعداد المان در راستای y و c عددی دلخواه می‌باشد ($1 < n < p$) و ($1 < m < q$). در روش کوادراچر دیفرانسیلی برای اعمال شرایط مرزی روش‌های گوناگونی موجود است. در پژوهش حاضر از روش کلی^۱ استفاده شده است.

شرایط مرزی در وجوه آزاد در جهت‌های x و y شامل گشتاور خمشی و نیروی برشی صفر بوده که در روابط (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) بیان شده‌اند.

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} = 0 \quad r = p \quad (18)$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial y^2 \partial x} = 0 \quad s = 1, \dots, q$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,1}}{\partial x^2} = 0 \quad r = 1, \dots, p \quad (19)$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,1}}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r,1}}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} = 0 \quad r = 1, \dots, p \quad (20)$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,1}}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad s = q$$

شرط مرزی در گوشه‌های آزاد ورق در رابطه (۲۱) محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x \partial y} = 0 \quad r = p, s = 1, q \quad (21)$$

همچنین شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ورق شامل جابجایی و ممان برشی صفر می‌باشد.

$$W^{r,s} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} = 0 \quad r = p, s = 1, \dots, q$$

شروط مرزی تکیه‌گاه گیردار ورق شامل جابجایی و شیب صفر می‌باشد.

¹ General Approach

زیر نویس‌های b و i به ترتیب نشان دهنده مناطق مرزی و داخلی می‌باشند. بردارهای $\{W_b\}$ و $\{W_i\}$ به ترتیب نشان دهنده مقادیر تابع در نقاط مرزی و داخلی هستند. همچنین در رابطه (۳۰)، λ مجذور فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. با حل این مسئله فرکانس‌های طبیعی از مقادیر ویژه‌ی دستگاه معادلات فوق استخراج می‌شوند.

۳- نتایج

۳-۱- صحت نتایج

در این بخش نتایج به دست آمده از این پژوهش ارائه می‌شود. جهت بررسی صحت و دقت مدلسازی ورق، نتایج حاصل از روش عددی معرفی شده با مراجع معتبر مقایسه خواهد شد. در ادامه تاثیر برخی از پارامترها نظیر تعداد المان‌ها، نوع و تعداد نقاط دقت بر همگرایی جواب‌ها بررسی می‌گردد. بدین منظور، یک ورق مدرج تابعی متشکل از آلومینیوم و آلومینا با خواص مکانیکی معرفی شده در جدول ۱، در نظر گرفته شده است.

جدول ۱: خصوصیات مکانیکی مواد مورد نظر

ماده	$\rho(kg/m^3)$	$E(Gpa)$	ν
آلومینیوم	۳۸۰۰	۷۰	۰/۳
آلومینا	۳۷۰۷	۳۸۰	۰/۳

بدر نظر گرفتن فرکانس طبیعی بی بعد و ثابت هم‌ارز ضریب سختی بستر الاستیک به صورت:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (31)$$

$$\bar{K}_w = \frac{K_w b^4}{D_m} \quad D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (32)$$

شرایط مرزی مختلف مورد بحث در پژوهش حاضر، به‌گونه‌ای است که این شروط، در دو وجه افقی، محور x به‌صورت تکیه‌گاه ساده و در وجه y ترکیبی از شروط متقارن و نامتقارن اعمال گردیده است. به‌طور مثال شرط مرزی $SCSF$ بیان‌گر وجود شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو وجه افقی ورق و شرط مرزی گیردار در یک وجه محور

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W^{r,s+1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s+1}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 W^{r,s+1}}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^{r,s+1}}{\partial x^2 \partial y}$$

$$r = 1, \dots, p, s = 1, \dots, q \quad (25)$$

یکی از پارامترهای موثر در روش المان کوادراچر دیفرانسیلی استفاده از نقاط دقت است. با توجه به استفاده از روش‌های بدست آوردن نقاط دقت، نوع روش نیز تغییر خواهد کرد. به عنوان مثال در مدل سازی به کمک GDQM، از نقاط دقت با استفاده از چند جمله‌ای لژاندر استفاده می‌گردد. در پژوهش حاضر از چهار روش بهره برده شده است، که در ادامه به بیان این چهار روش پرداخته شده است.

۱- نقاط دقت با فواصل مساوی

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}, i = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

۲- نقاط دقت با استفاده از چندجمله‌ای چبیشف

$$x_i = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{2i-1}{2N} \pi)], i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$x_1 = 0, x_N = 0 \quad (27)$$

۳- نقاط دقت با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر

$$x_i = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{2i-3}{2N-4} \pi)], i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$x_1 = 0, x_N = 0 \quad (28)$$

۴- نقاط دقت با استفاده از چندجمله‌ای گوس-لوباتو-چبیشف

$$x_i = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{i-1}{N-1} \pi)], i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$x_1 = 0, x_N = 0 \quad (29)$$

با اعمال روش DQEM بر روی معادله دیفرانسیلی ورق‌ها، شرایط مرزی و شرایط پیوستگی، می‌توان معادلات حاصل را به فرم زیر تبدیل نمود.

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{bi}] \\ [A_{ib}] & [A_{ii}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_b\} \\ \{W_i\} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{ib} & B_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_b \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (30)$$

جدول ۲: فرکانس طبیعی بی بعد برای سه شرط مرزی متقارن با نسبت ضخامت بر طول ۰/۰۵

خطا	کنونی	مرجع [۵]	α	\bar{K}_w
SSSS				
۰	۰/۶۸۷	۰/۰۲۸۹	۰/۰۲۹۱	۰
	۲/۰۰۸	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۴۹	۰/۵
	۲/۳۰۳	۰/۰۲۳۲	۰/۰۲۲۷	۱
	۳/۳۴۹	۰/۰۲۱۶	۰/۰۲۰۹	۲
	۲/۵۳۸	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۹۷	۵
۱۰۰	۲/۳۴۹	۰/۰۲۹۱	۰/۰۲۹۸	۰
	۰/۳۸۷	۰/۰۲۵۷	۰/۰۲۵۸	۰/۵
	۱/۲۶۰	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۳۸	۱
	۰/۹۰۵	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۲۱	۲
	۲/۳۸۱	۰/۰۲۰۵	۰/۰۲۱۰	۵
SCSC				
۰	۰/۲۳۷	۰/۰۴۲۰	۰/۰۴۲۱	۰
	۱/۱۱۴	۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۵۹	۰/۵
	۰/۶۱۷	۰/۰۳۲۶	۰/۰۳۲۴	۱
	۱/۰۱۷	۰/۰۲۹۲	۰/۰۲۹۵	۲
	۱/۷۹۸	۰/۰۲۷۳	۰/۰۲۷۸	۵
۱۰۰	۰	۰/۰۴۲۶	۰/۰۴۲۶	۰
	۰/۵۴۸	۰/۰۳۶۳	۰/۰۳۶۵	۰/۵
	۰/۸۹۵	۰/۰۳۳۵	۰/۰۳۳۲	۱
	۰/۳۲۹	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۴	۲
	۱/۳۸۹	۰/۰۲۸۴	۰/۰۲۸۸	۵
SFSF				
۰	۰/۷۰۴	۰/۰۱۴۳	۰/۰۱۴۲	۰
	۰/۴۱۳	۰/۰۱۲۶	۰/۰۱۲۱	۰/۵
	۲/۷۵۲	۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۰۹	۱
	۳/۰۳۰	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۹۹	۲
	۱/۰۶۴	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۹۴	۵
۱۰۰	۱/۲۸۲	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۶	۰
	۳/۶۲۳	۰/۰۱۴۳	۰/۰۱۳۸	۰/۵
	۲/۳۲۵	۰/۰۱۳۲	۰/۰۱۲۹	۱
	۱/۶۳۹	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۲۲	۲
	۰	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱۹	۵

عمود و وجه دیگر ورق آزاد است. برای بررسی دقیق تر نتایج حاصله برای سه شرط مرزی فوق الذکر، به بیان و معرفی میزان خطای روش عددی DQEM با مرجع [۵] پرداخته شده است. میزان خطا در رابطه (۳۳) بیان شده است.

$$Error = \left| \frac{\omega_{Ref} - \omega_{DQEM}}{\omega_{Ref}} \right| \times 100 \quad (33)$$

که در آن ω_{Ref} و ω_{DQEM} به ترتیب معرف میزان فرکانس بنیادی بی بعد در مرجع و روش عددی DQEM است. در جداول شماره ۲ و ۴ به بررسی ورق مربع با نسبت ضخامت بر طول ۰/۰۵ و در جداول شماره ۳ و ۵ به بررسی ورق مربع با نسبت ضخامت بر طول ۰/۱ پرداخته شده است. لازم به ذکر است که مرجع استفاده شده برای سنجش صحت مدل سازی در دو مقاله دیگر برای معیار درستی روش حل و نتایج، به کار گرفته شده است همچنین داده های روش المان کوادراچر دیفرانسیلی با استفاده از ۹ المان، پانزده نقطه دقت در هر المان در راستاهای x و y و نقاط دقت با استفاده از چند جمله ای گوس-لوباتو-چبیشف به دست آمده اند که در ادامه دلیل استفاده از این پارامترها بررسی شده است.

۳-۲- تاثیر نوع نقاط دقت بر فرکانس های طبیعی

نقاط دقت یکی از پارامترهای مهم در روش المان کوادراچر دیفرانسیلی است. انتخاب نقاط دقت مناسب باعث همگرایی سریع تر و خطای کمتر در محاسبه فرکانس های طبیعی می شود. در این بخش تاثیر نقاط دقت با توزیع فواصل مساوی، نقاط دقت با استفاده از چند جمله ای های چبیشف، لژاندر و گوس-لوباتو-چبیشف بر محاسبه فرکانس طبیعی دوم برای یکی از شش شرط مرزی مذکور مورد بررسی قرار می گیرد سپس نتایج حاصله از این مقایسه را برای کل شش شرط مرزی تعمیم خواهیم داد.

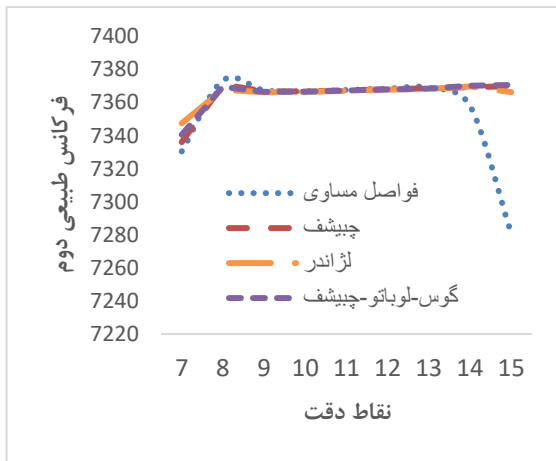
جدول ۳: فرکانس طبیعی بی بعد برای سه شرط مرزی متقارن با نسبت ضخامت بر طول ۰/۱

خطا	کنونی	مرجع [۵]	α	\bar{K}_w
SSSS				
۰	۰	۰/۱۱۳۴	۰/۱۱۳۹	۰/۴۴۱
	۰/۵	۰/۰۹۷۵	۰/۰۹۶۸	۰/۷۱۸
	۱	۰/۰۸۹۱	۰/۰۹۱۶	۲/۸۰۶
	۲	۰/۰۸۱۹	۰/۰۸۴۵	۳/۱۷۵
	۵	۰/۰۷۶۷	۰/۰۷۸۸	۲/۷۳۸
۱۰۰	۰	۰/۱۱۶۲	۰/۱۱۴۳	۱/۶۳۵
	۰/۵	۰/۱۰۱۲	۰/۰۹۷۳	۳/۸۵۴
	۱	۰/۰۹۳۳	۰/۰۹۲۱	۱/۱۷۹
	۲	۰/۰۸۶۷	۰/۰۸۵۲	۱/۷۳۰
	۵	۰/۰۸۲۱	۰/۰۷۹۵	۳/۱۶۷
SCSC				
۰	۰	۰/۱۵۸۹	۰/۱۵۷۹	۰/۶۲۹
	۰/۵	۰/۱۳۶۶	۰/۱۳۶۲	۰/۲۹۴
	۱	۰/۱۲۳۹	۰/۱۲۴۱	۰/۱۶۱
	۲	۰/۱۱۲۵	۰/۱۱۲۱	۰/۳۵۵
	۵	۰/۱۰۴۳	۰/۱۰۴۵	۰/۱۹۱
۱۰۰	۰	۰/۱۶۰۹	۰/۱۵۹۳	۰/۹۹۴
	۰/۵	۰/۱۳۹۳	۰/۱۳۷۹	۱/۰۰۵
	۱	۰/۱۲۶۹	۰/۱۲۶۰	۰/۷۰۹
	۲	۰/۱۱۶۱	۰/۱۱۴۳	۱/۵۷۵
	۵	۰/۱۰۸۴	۰/۱۰۶۹	۱/۳۸۴
SFSF				
۰	۰	۰/۰۵۶۲	۰/۰۵۶۴	۰/۳۵۶
	۰/۵	۰/۰۴۷۹	۰/۰۴۹۵	۳/۳۴۰
	۱	۰/۰۴۳۲	۰/۰۴۳۷	۱/۱۵۷
	۲	۰/۰۳۹۳	۰/۰۳۹۷	۱/۰۱۸
	۵	۰/۰۳۷۱	۰/۰۳۷۰	۰/۲۶۹
۱۰۰	۰	۰/۰۶۱۷	۰/۰۶۱۲	۰/۸۱۰
	۰/۵	۰/۰۵۴۹	۰/۰۵۵۲	۰/۵۴۶
	۱	۰/۰۵۱۳	۰/۰۵۱۴	۰/۱۹۵
	۲	۰/۰۴۸۶	۰/۰۴۸۸	۰/۴۱۱
	۵	۰/۰۴۷۴	۰/۰۴۶۹	۱/۰۵۵

جدول ۴: فرکانس طبیعی بی بعد برای سه شرط مرزی نامتقارن با نسبت ضخامت بر طول ۰/۵

خطا	کنونی	مرجع [۵]	α	\bar{K}_w
SCSF				
۰	۰	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۶	۰/۵۳۵
	۰/۵	۰/۰۱۵۹	۰/۰۱۶۳	۲/۴۵۴
	۱	۰/۰۱۴۳	۰/۰۱۴۵	۱/۳۹۹
	۲	۰/۰۱۳۰	۰/۰۱۳۳	۲/۳۰۸
	۵	۰/۰۱۲۳	۰/۰۱۲۴	۰/۸۱۳
۱۰۰	۰	۰/۰۱۹۷	۰/۰۱۹۷	۰
	۰/۵	۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۷۷	۲/۸۲۵
	۱	۰/۰۱۵۹	۰/۰۱۶۰	۰/۶۲۹
	۲	۰/۰۱۴۹	۰/۰۱۵۰	۰/۶۷۱
	۵	۰/۰۱۴۴	۰/۰۱۴۳	۰/۶۹۴
SSSC				
۰	۰	۰/۰۳۴۶	۰/۰۳۴۵	۰/۲۸۹
	۰/۵	۰/۰۲۹۶	۰/۰۳۰۳	۲/۶۱۲
	۱	۰/۰۲۶۸	۰/۰۲۷۴	۲/۲۳۹
	۲	۰/۰۲۴۵	۰/۰۲۵۰	۲/۰۴۱
	۵	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۳۳	۰/۸۶۹
۱۰۰	۰	۰/۰۳۵۲	۰/۰۳۴۶	۱/۷۰۴
	۰/۵	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۵	۰/۶۶۰
	۱	۰/۰۲۷۷	۰/۰۲۷۸	۰/۳۶۱
	۲	۰/۰۲۵۵	۰/۰۲۵۳	۰/۷۸۴
	۵	۰/۰۲۴۳	۰/۰۲۳۶	۲/۸۸۱
SSSF				
۰	۰	۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۷۱	۰/۵۸۱
	۰/۵	۰/۰۱۴۶	۰/۰۱۵۰	۲/۷۴۰
	۱	۰/۰۱۳۳	۰/۰۱۳۶	۲/۳۵۶
	۲	۰/۰۱۲۱	۰/۰۱۲۵	۳/۳۰۶
	۵	۰/۰۱۱۴	۰/۰۱۱۷	۲/۶۳۱
۱۰۰	۰	۰/۰۱۸۴	۰/۰۱۸۴	۰
	۰/۵	۰/۰۱۶۱	۰/۰۱۶۵	۲/۴۸۴
	۱	۰/۰۱۴۹	۰/۰۱۵۰	۰/۶۷۱
	۲	۰/۰۱۴۰	۰/۰۱۴۱	۰/۷۱۴
	۵	۰/۰۱۳۵	۰/۰۱۳۴	۰/۷۴۱

۱/۵، نسبت طول بر ضخامت ۰/۰۵، ورق با شرط مرزی SSSS و نسبت تراکم حجمی ۰/۵ فرض شده است. همان‌گونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود نقاط دقت براساس چندجمله‌ای گوس-لوباتو-چبیشف خطای کمتر و همگرایی سریع‌تری نسبت به تعداد نقاط دیگر دارد و بیشترین خطا مربوط به نقاط دقت با فواصل مساوی است.



شکل ۳- تاثیر نقاط دقت مختلف بر فرکانس طبیعی دوم ورق مذکور

۳-۳- تاثیر تعداد نقاط دقت بر فرکانس بنیادین

تاثیر افزایش تعداد نقاط دقت بر خطای نسبی پارامتر فرکانس طبیعی معرفی شده در رابطه ۳۱ در شکل ۴ نشان داده شده است. در محاسبه داده‌های شکل ۴ از سه المان در راستای محور عمود و افق و نقاط دقت گوس-لوباتو-چبیشف استفاده و نتایج حاصل با داده‌های مرجع [۵] مقایسه شده است. شرایط مرزی ورق مفروض را SCSF، با اضلاعی مساوی، نسبت طول بر ضخامت ۲۰ و نسبت ضریب تراکم حجمی ۲ در نظر گرفته شده است. ورق فوق‌الذکر بر بستر الاستیک با ضریب سختی ۱۰۰ واقع شده است.

همان‌گونه که از شکل ۴ مشهود است با افزایش تعداد نقاط دقت، مقدار خطای نسبی کاهش یافته و استفاده از پانزده نقطه دقت خطاهای قابل قبولی را پدید آورده است.

جدول ۵: فرکانس طبیعی بی بعد برای سه شرط مرزی نامتقارن با نسبت ضخامت بر طول ۰/۱

خطا	کنونی	مرجع [۵]	α	\bar{K}_w
SCSF				
۰	۰/۲۷۴	۰/۰۷۲۸	۰/۰۷۳۰	۰
	۲/۵۶۸	۰/۰۶۳۹	۰/۰۶۲۳	۰/۵
	۱/۹۵۰	۰/۰۵۷۵	۰/۰۵۶۴	۱
	۰/۹۷۵	۰/۰۵۱۸	۰/۰۵۱۳	۲
	۰/۲۰۷	۰/۰۴۸۳	۰/۰۴۸۲	۵
۱۰۰	۰/۴۰۹	۰/۰۷۳۶	۰/۰۷۳۳	۰
	۴/۴۲۵	۰/۰۶۴۸	۰/۰۶۷۸	۰/۵
	۰/۹۵۵	۰/۰۶۳۴	۰/۰۶۲۸	۱
	۰/۵۱۱	۰/۰۵۸۴	۰/۰۵۸۷	۲
	۰/۱۷۷	۰/۰۵۵۵	۰/۰۵۶۵	۵
SSSF				
۰	۱/۲۷۵	۰/۱۳۵۰	۰/۱۳۳۳	۰
	۳/۴۹۳	۰/۱۱۸۵	۰/۱۱۴۵	۰/۵
	۱/۹۲۳	۰/۱۰۶۰	۰/۱۰۴۰	۱
	۵/۲۶۳	۰/۱۰۰۰	۰/۰۹۵۰	۲
	۵/۱۹۲	۰/۰۹۳۲	۰/۰۸۸۶	۵
۱۰۰	۰/۲۹۵	۰/۱۳۵۳	۰/۱۳۵۷	۰
	۱/۱۰۵	۰/۱۱۸۹	۰/۱۱۷۶	۰/۵
	۱/۱۱۴	۰/۱۰۶۵	۰/۱۰۷۷	۱
	۱/۵۱۴	۰/۱۰۰۶	۰/۰۹۹۱	۲
	۰/۵۳۵	۰/۰۹۳۹	۰/۰۹۳۴	۵
SSSF				
۰	۰	۰/۰۶۷۸	۰/۰۶۷۸	۰
	۲/۹۴۱	۰/۰۵۹۵	۰/۰۵۷۸	۰/۵
	۱/۳۳۶	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۲۴	۱
	۳/۵۶۴	۰/۰۴۹۴	۰/۰۴۷۷	۲
	۲/۶۷۳	۰/۰۴۶۱	۰/۰۴۴۹	۵
۱۰۰	۲/۰۷۲	۰/۰۷۰۹	۰/۰۷۲۴	۰
	۰/۷۸۵	۰/۰۶۳۲	۰/۰۶۳۷	۰/۵
	۵/۲۳۶	۰/۰۵۶۱	۰/۰۵۹۲	۱
۲/۶۹۸	۰/۰۵۴۱	۰/۰۵۵۶	۲	

در محاسبه فرکانس‌های طبیعی در این بخش از سه المان در راستای x و y استفاده شده است. لازم به ذکر است که ورق مدرج تابعی بر بستر الاستیک با پارامتر ضریب سختی معرفی شده در رابطه ۳۲، ۱۰۰، با نسبت طول بر عرض

پیشنهاد می‌گردد زیرا درصد خطای پایین و سرعت همگرایی بسیار بالایی را داراست.

۴- نتیجه‌گیری

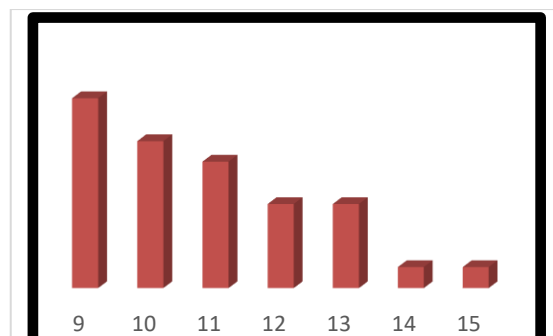
در این پژوهش یک روش عددی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی یک ورق مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک ارائه گردیده است. بستر الاستیک، که وجود آن باعث ایجاد تغییر در پارامترهای مودال از جمله فرکانس‌های طبیعی می‌گردد، به صورت تک پارامتری و وینکلر مدل شده و با اعمال روش المان کوادراچر دیفرانسیلی بر معادلات دیفرانسیلی حاکم بر ورق، شرایط مرزی و شرایط پیوستگی، فرکانس‌های طبیعی ورق حاصل شده است. صحت روش عددی ارائه شده از طریق مراجع معتبر مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به بررسی‌های انجام شده می‌توان نتایج زیر را بیان نمود.

۱- فرکانس بنیادی محاسبه شده توسط روش المان کوادراچر دیفرانسیلی تطابق قابل قبولی با مراجع مرتبط دارد. با توجه به جداول شماره ۲ الی ۵ و بررسی میزان خطاهای موجود، بالاترین میزان خطا در حالتی رخ داده است که میزان نسبت طول بر ضخامت برابر ۱۰ بوده است که این میزان خطا به دلیل استفاده از تئوری کلاسیک بوده و ایرادی به روش عددی ارائه شده وارد نیست. برای حالتی که نسبت ضخامت بر طول برابر ۰/۰۵ بوده است میزان خطا کاملاً قابل قبول بوده است.

۲- استفاده از نقاط دقت بر پایه چندجمله‌ای‌های گوس-لوباتو-چبیشف نتایج دقیق‌تری نسبت به انواع دیگر نقاط دقت ارائه می‌دهد.

۳- روش عددی ارائه شده دارای سه پارامتر موثر، نوع نقاط دقت، تعداد نقاط دقت و تعداد المان، بوده که با استفاده از آنها، همگرایی و سرعت همگرایی نسبت به دیگر روش‌ها بهبود قابل ملاحظه‌ای داشته است.

۴- با توجه به نتایج مشخص گردید که میزان تغییرات فرکانس طبیعی علاوه بر ضریب سختی بستر به ضخامت، طول و ضریب نسبت تراکم حجمی نیز وابسته است.

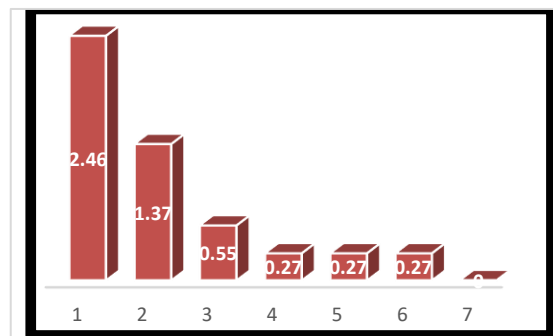


شکل ۴- تاثیر تعداد نقاط دقت مختلف در هر راستا بر فرکانس بنیادین ورق مذکور

۳-۴- تاثیر تعداد المان بر پارامتر فرکانس

بنیادی

در این بخش اثر تعداد المان‌ها در محاسبه پارامتر فرکانس بنیادی معرفی شده بررسی خواهد شد. برای بدست آوردن داده‌های شکل ۵ از روش المان کوادراچر دیفرانسیلی دارای پانزده نقطه دقت در هر المان و چندجمله‌ای‌های گوس-لوباتو-چبیشف استفاده و نتایج حاصله برای ورق مدرج تابعی مربع با نسبت طول بر ضخامت ۲۰، ضریب نسبت تراکم حجمی ۰/۵، ضریب سختی بستر ۱۰۰ و شرط مرزی متقارن تکیه‌گاه ساده و گیردار با داده‌های موجود در مرجع [۵] مقایسه شده است.



شکل ۵- تاثیر تعداد المان‌های مختلف در هر راستا بر فرکانس بنیادین ورق مذکور

همان‌گونه که در شکل فوق مشاهده می‌گردد با افزایش تعداد المان‌ها در راستاهای عمود و افق نتایج از دقت بیشتری برخوردارند و درصد خطای نسبی با افزایش تعداد المان‌ها کاهش یافته است. باید به این موضوع توجه داشت که افزایش تعداد المان‌ها حجم محاسبات را افزایش و سرعت حصول به جواب را به میزان قابل ملاحظه‌ای کاهش خواهد داد. از این رو تعداد المان در هر راستا برابر با سه

- ۵- با افزایش ضریب نسبت تراکم حجمی در ورق مدرج تابعی فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد.
- ۶- با افزایش ضریب سختی بستر الاستیک وینکلر فرکانس بنیادین ورق افزایش می‌یابد.
- ۷- همزمان با افزایش ضخامت ورق، فرکانس طبیعی اول نیز افزایش می‌یابد.

۵- مراجع

- [1] Rashedat, M. Mahmood., Esther, T. Akinlabi. (2012), "Functionally Graded Material: An Overview". Proceeding of the World Congress On Engineering, Vol. 3, pp 1-5.
- [2] M.Zenkour, A. (2009), "The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations". International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 51, pp 869-880.
- [3] Malekzadeh, P. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations". Composite Structures, Vol. 89, pp 367-373.
- [4] Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., and Akhavan, H. (2010), "Vibration Analysis Of Radially FGM Sectorial Plates Of Variable Thickness On Elastic Foundations". Composite Structures, Vol. 92, pp. 1734-1743.
- [5] Baferani, A. H., Saidi, A. R., Ehteshami, H. (2011), "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation". Composite Structures, Vol. 93, pp. 1842-1853.
- [6] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011), "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation". Composite Science and Technology, Vol. 71, pp. 1850-1858.
- [۷] خدمتی بازکیایی، ا.ح، دهقان طرزجانی، ح ، محمدی، ن (۱۳۹۲)، "بررسی ارتعاشات آزاد ورق FGM بر بستر الاستیک وینکلر به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی". دومین کنفرانس ملی سیستم‌های مکانیکی و نوآوری صنعتی، ۲۶ و ۲۷ آذر.
- [8] Bellman, R.E., Kashef, B., Casti, J. (1971), "Differential Quadrature : a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation". Computer and Physics, Vol. 1, pp. 133-143.
- [9] Quan, J.R., Chang, C.T. (1989), "New Insights in Solving Distributed System of Equations by Quadrature-Method". Computer and Chemistry Engineering, Vol. 13, pp. 1017-1024.
- [10] Shu, C., Richards, B.E. (1992), "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional in Compressible Navier-Stoke Equation, Int". Numerical Math Fluids, Vol. 15, pp. 791-798.
- [۱۱] حسینی مارانی، ا.، مرادی، ش. (۱۳۹۱)، "بررسی ارتعاشات آزاد ورق ترک‌دار به کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی". دومین کنفرانس بین‌المللی آکوستیک و ارتعاشات، ۶ و ۷ دی.