شبیه‌سازی و آنالیز حساسیت ارتعاشات غیرخطی حرکت غلت شناور

محمد مهدی جلیلی[۱،*]،سعید ابراهیمی[۲]،ندا رحمت[۳]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۶/۲۵

پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۲/۲۳

واژگان کلیدی:

حرکت غلت شناور،
روش مقیاس‌های چندگانه،
منحنی پاسخ فرکانسی،
تحریک هارمونیک،
تشدید.

چکیده

در این تحقیق، مدل‌سازی ریاضی حرکت غیر خطی غلت کشتی مورد مطالعه قرار گرفته است. پس از استخراج معادله بی‌بعد حاکم بر حرکت حول محور طولی شناور، روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادله غیرخطی به کاربرده شده است. معادله حرکت در دو حالت بدون تحریک و با تحریک هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور اعتبار سنجی پاسخ‌های بدست‌آمده به روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ بدست آمده برای یک نمونه در هر دو حالت، با حل عددی معادله مقایسه شده و تطابق خوبی بدست آمده است. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف سیستم مانند ضریب میرایی و ضریب ممان برگرداننده بر پاسخ فرکانسی سیستم در فرکانس تشدید اول و سوپرهارمونیک بررسی شده است. سپس آنالیز حساسیت سیستم در حالت تحریک هارمونیک به دو روش انجام شده و نتایج با هم مقایسه گردیده است.

۱- مقدمه

حرکت حول محور طولی شناور بحرانی‌ترین حرکتی است که موجب واژگونی آن می‌گردد. لذا مطالعه نوسانات غلت شناورها مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. اولین قدم برای مطالعه حرکت حول محور طولی، مدل‌سازی حرکت و استخراج معادله حاکم بر حرکت است. معادله حرکت رول شامل جملات خطی و غیرخطی در ممان برگرداننده و ممان میرایی است. در سال ۲۰۰۵، بولین [۱] برای حل معادله حرکت از روش میانگین‌گیری۲ استفاده کرده است. در سال ۱۹۹۹، تیلن [۲] با در نظر گرفتن ممان برگرداننده به صورت چندجمله‌ای درجه سه از روش تعمیم یافته کریلو-بگو لیوبو۳ برای حل پریود یکی حرکت در حوزه زمان استفاده کرده است. او همچنین در سال ۲۰۰۰ با انتخاب جمله ممان میرایی به صورت سه نوع مختلف و جمله ممان برگرداننده به دو فرم چندجمله‌ای درجه سه و پنج از زاویه غلت، منحنی پاسخ رول را در هر حالت برحسب فرکانس با هم مقایسه کرده است [۳]. گو [۴] در سال ۲۰۰۴ پس از مدل‌سازی فیزیکی حرکت رول و بی بعدسازی معادله حاکم بر آن از تابع ملنیکوف۴ برای تحلیل حرکت استفاده کرده است. در سال ۲۰۱۱، شینگ

*. پست الکترونیک نویسنده مسئول: jalili@yazd.ac.ir

۱. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

۲. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

۳. کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

[2] Averaging technique
[3] Krylov-Bogoliubov
[4] Melnikov

و مک کو [۵] معادله حرکت غلت کشتی را یک بار به صورت معادله دیفرانسیل جزئی و بار دیگر به صورت معادله دیفرانسیل معمولی مدل کرده‌اند و سپس با استفاده از روش شبکه عصبی براساس داده آزمایشگاهی موجود به تخمین پارامترهای معادله حرکت ارائه شده، پرداخته‌اند. پسمان و همکاران [۶] به بررسی تأثیر میرایی در حرکت غیرخطی غلت کشتی پرداخته‌اند و نتیجه گرفته‌اند که میرایی نقش مهمی در حرکت و کاهش دامنه ماکزیمم دارد. در سال ۲۰۰۳، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه۱، تحلیل حرکت غیرخطی غلت کشتی در امواج منظم دریا بر اساس تقریب ممان برگرداننده به صورت یک چند جمله‌ای مرتبه هفت بر حسب زاویه رول نسبی انجام شده است [۷]. پس از تحلیل، دامنه و فاز نوسانات در حالت پایدار بدست آمده و پایداری روش حل با استفاده از روش لیاپونوف بررسی گردیده است. هوی و فنگ [۸] در سال ۲۰۱۰ با استفاده از یک نرم‌افزار به تحلیل عددی پاسخ حالت پایدار حرکت غلت کشتی پرداخته‌اند و حرکت را در حالت تشدید و پایدار بررسی کرده‌اند.

در زمینه آنالیز حساسیت، در سال ۱۹۹۴ بیکداش و همکاران [۹] با استفاده از تحلیل ملنیکوف به مطالعه تأثیر میرایی‌های مختلف بر حرکت غیرخطی غلت کشتی پرداخته و حساسیت تغییر پارامترها در حرکت را بررسی کرده‌اند. در سال ۲۰۰۲ یک مدل چهار درجه آزادی کشتی برای کاربردهای کنترلی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۰]. در همین راستا، مدل‌های خطی و غیرخطی فضای حالت ارائه شده است. در ادامه، کیفیت مدل خطی نسبت به مدل غیرخطی بررسی شده و حساسیت مدل به تغییر پارامترها مورد مطالعه قرار گرفته است. وانگ و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۴ با استفاده از مدل ریاضی چهار درجه آزادی مانور یک کشتی به شبیه‌سازی حرکت پرداخته‌اند. سپس، بر اساس داده‌های شبیه‌سازی آنالیز حساسیت به روش مستقیم بر روی ضرایب هیدرودینامیکی انجام گردیده است با حذف ضرایب با حساسیت کمتر مطابق با نتایج آنالیز، مدل ریاضی ساده‌تر شده است.

در این مقاله، پس از تعریف معادله حاکم بر حرکت غلت شناور و بی‌بعدسازی آن با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به حل تحلیلی معادله پرداخته می‌شود. در ابتدا، معادله حاکم با فرض نیروی تحریک صفر بررسی شده و پاسخ بدست آمده با حل عددی آن مقایسه می‌شود. همچنین، به حل معادله تحت تأثیر نیروی هارمونیک پرداخته می‌شود. پس از استخراج معادله پاسخ فرکانسی، تأثیر تغییر پارامترهایی نظیر ضریب میرایی خطی، ضرایب خطی و غیرخطی ممان برگرداننده بر روی پاسخ فرکانسی در حالت تشدید اول و سوپرهارمونیک بررسی شده است. در ادامه، با اعمال آنالیز حساسیت با استفاده از دو روش، میزان حساسیت تغییرات حرکت رول در حالت تحریک هارمونیک به تغییر پارامترهای سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با توجه به تحقیقات منتشر شده در زمینه بررسی حرکت غلت یک شناور، حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه به منظور تحلیل رفتار سوپرهارمونیک شناور و همچنین آنالیز حساسیت اعمال شده از ویژگی‌های بارز تحقیق حاضر در مقایسه با سایر کارها محسوب می‌شود.

۲- معادله حرکت غلت شناور حول محور طولی

مطابق شکل (۱) شناور (کشتی) دارای شش درجه آزادی شامل سه حرکت انتقالی و سه حرکت دورانی است. دوران حول محور طولی بحرانی‌ترین حرکت شناور است که باعث واژگونی آن می‌شود و لذا دارای اهمیت بسیاری است.

فرم کلی معادله حرکت حول محور طولی شناور به فرم زیر نوشته می‌شود [۳].

$$I\ddot{\varphi} + B(\dot{\varphi},\varphi) + C(\varphi) = M(t) \quad (۱)$$

که در آن I شامل ممان اینرسی حول محور طولی (I_{xx}) و جرم افزوده ناشی از سیال پیرامون سازه (δI_{xx}) است. در نتیجه:

[1] Method of Multiple Scales (MMS)

$$I = I_{xx} + \delta I_{xx} \qquad (۲)$$

ممان میرایی مطابق [۳] به سه حالت زیر بیان می شود.

$$B_1(\dot{\varphi}) = B_L\dot{\varphi} + B_N\dot{\varphi}^2 \qquad (۳)$$

$$B_2(\varphi,\dot{\varphi}) = B_L\dot{\varphi} + B_N\varphi^2\dot{\varphi} \qquad (۴)$$

$$B_3(\dot{\varphi}) = B_L\dot{\varphi} + B_N\dot{\varphi}^3 \qquad (۵)$$

ممان میرایی به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب سرعت زاویه‌ای $\dot{\varphi}$ بیان می‌شود، که شامل ضرایب خطی B_L و غیر خطی B_N است. در این مقاله ممان میرایی به صورت $B_3(\dot{\varphi})$ در نظر گرفته شده است. به طور معمول ممان برگرداننده به صورت یک چندجمله‌ای درجه فرد از φ است که از درجات بالای آن در حل معادله صرف نظر می‌شود و به دو فرم چند جمله‌ای درجه سه و چندجمله‌ای درجه پنج مطابق روابط زیر فرمول بندی می‌شود [۳].

$$GZ = C_1\varphi + C_3\varphi^3 + C_5\varphi^5 \qquad (۶)$$

$$GZ = C_1\varphi - C_3\varphi^3 \qquad (۷)$$

ضرایب معادلات (۶) و (۷) از منحنی GZ برحسب φ بدست می آیند بطوریکه C_1 ضریب خطی و C_3 و C_5 ضرایب غیرخطی آن است [۲]. در این پژوهش ممان برگرداننده به صورت چندجمله‌ای درجه سه فرض شده است. در نتیجه معادله حرکت مطابق مرجع [۴] به صورت زیر تبدیل می-گردد.

$$(I_{xx} + \delta I_{xx})\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + B_q\dot{\varphi}^3 + \Delta GZ = F_{sea}(t) \qquad (۸)$$

در رابطه بالا Δ مقدار سیال جابجا شده و F_{sea} گشتاور تحریک خارجی ناشی از ضربات امواج دریا است که در اینجا به صورت رابطه (۹) فرض و در قسمت ۳-۲ استفاده شده است.

$$F_{sea}(t) = F\cos(\omega_e t + \varphi_c) + F_0 \qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، F دامنه گشتاور، ω_e فرکانس تحریک و F_0 ممان ثابت است. با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۸) معادله زیر بدست می‌آید.

$$I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + B_q\dot{\varphi}^3 + \Delta(C_1\varphi - C_3\varphi^3) = F_{sea}(t) \qquad (۱۰)$$

مطابق رابطه (۱۰) فرکانس طبیعی سیستم خطی شده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

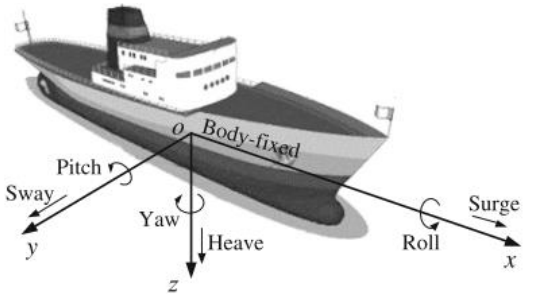
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\Delta C_1}{I}} \qquad (۱۱)$$

با تعریف $x = \varphi$ و $\tau = \omega_0 t$ و جایگذاری در معادله (۱۰) داریم:

$$\omega_0{}^2 I\frac{d^2x}{d\tau^2} + B\omega_0\frac{dx}{d\tau} + B_q\omega_0\omega_0{}^2\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^3 + \Delta C_1 x - \Delta C_3 x^3 = F_{sea} \qquad (۱۲)$$

در نتیجه معادله بی‌بعد شده ارتعاشات شناور حول محور طولی آن به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{B\omega_0}{\Delta C_1}\frac{dx}{d\tau} + \frac{B_q\omega_0}{I}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^3 + x - \frac{C_3}{C_1}x^3 = \frac{F}{\Delta C_1} \qquad (۱۳)$$



شکل۱- طرح کلی درجات آزادی یک کشتی [۱۱]

۳- حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه (MMS)

برای حل معادله غیرخطی (۱۳) پارامترهای جدید به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{b_1}{\omega_0} = \varepsilon^2\delta_1$$
$$b_3\omega_0 = \varepsilon\delta_2$$
$$\frac{\acute{C}_3}{C_1} = \alpha \qquad (۱۴)$$
$$\frac{F}{\omega_0{}^2} = \varepsilon f$$
$$\frac{F_0}{\omega_0{}^2} = \varepsilon f_0$$

در رابطه بالا ε پارامتر کمکی است که می‌تواند به اندازه کافی کوچک باشد. با جایگذاری پارامترهای (۱۴) درمعادله (۱۳) معادله بی‌بعد شده به شکل زیر تبدیل می‌گردد.

$$\ddot{x}(\tau) + \varepsilon^2\delta_1\dot{x}(\tau) + \varepsilon\delta_2\dot{x}^3(\tau) + x - \alpha x^3 = \varepsilon f\cos(\Omega\tau + \varphi_c) + \varepsilon f_0 \qquad (۱۵)$$

۳-۱- ارتعاشات آزاد

در این قسمت، معادله بی بعد شده حرکت حول محور طولی با فرض نیروی تحریک صفر $f = 0$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در اینصورت معادله (۱۵) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\ddot{x} + \varepsilon^2\delta_1\dot{x} + \varepsilon\delta_2\dot{x}^3 + x - \alpha x^3 = 0 \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطه

$$T_n = \varepsilon^n t \quad n = 0,1,2\ldots \qquad (۱۷)$$

مشتقات نسبت به زمان را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots$$
$$\frac{d^2}{dt^2} = {D_0}^2 + 2\varepsilon D_0D_1 + \varepsilon^2\left({D_1}^2 + 2D_0D_2\right) + 2\varepsilon^3(D_1D_2 + D_0D_3) + \cdots \qquad (۱۸)$$

در ادامه، پاسخ سیستم به صورت زیر بسط داده می‌شود.

$$x(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^n x_n(t) + o(\varepsilon^4) \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) و (۱۹) در معادله بی‌بعد شده (۱۶) معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$\left({D_0}^2 + 2\varepsilon D_0D_1 + \varepsilon^2\left({D_1}^2 + 2D_0D_2\right) + 2\varepsilon^3(D_1D_2 + D_0D_3) + \cdots\right)(\varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \cdots) + \varepsilon^2\delta_1 (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots)(\varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \cdots) + \varepsilon\delta_2[(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots)(\varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) +)]^3 + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) - \alpha(\varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \cdots)^3 = 0 \qquad (۲۰)$$

با جدا کردن ضرایب ε^1، ε^2، ε^3 و ε^4 روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\varepsilon^1: {D_0}^2 x_1 + x_1 = 0 \qquad (۲۱)$$

$$\varepsilon^2: {D_0}^2 x_2 + 2D_0D_1x_1 + x_2 = 0 \qquad (۲۲)$$

$$\varepsilon^3: {D_0}^2 x_3 + 2D_0D_1x_2 + \left({D_1}^2 + 2D_0D_2\right)x_1 + \delta_1D_0x_1 + x_3 - \alpha {x_1}^3 = 0 \qquad (۲۳)$$

$$\varepsilon^4: {D_0}^2 x_4 + 2D_0D_1x_3 + \left({D_1}^2 + 2D_0D_2\right)x_2 + 2D_1D_2x_1 + 2D_0D_3x_1 + \delta_1D_0x_2 + \delta_1D_1x_1 + \delta_2(D_0x_1)^3 + x_4 - \alpha(3{x_1}^2x_2) = 0 \qquad (۲۴)$$

جواب عمومی معادله (۲۱) به صورت زیر می‌باشد.

$$x_1 = A(T_1,T_2,T_3)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1,T_2,T_3)e^{-iT_0} \qquad (۲۵)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در رابطه (۲۲) رابطه زیر بدست می‌آید.

$${D_0}^2 x_2 + x_2 = -2iD_1Ae^{iT_0} + c.c \qquad (۲۶)$$

برای حذف ترم نامحدود از معادله فوق باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$D_1A = 0 \qquad (۲۷)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$A = A(T_2,T_3) \qquad (۲۸)$$

و

$$x_2 = 0 \qquad (۲۹)$$

با جایگذاری روابط (۲۵) و (۲۹) در رابطه (۲۳) داریم:

$${D_0}^2 x_3 + x_3 = -2D_2Aie^{iT_0} + 2D_2\bar{A}ie^{-iT_0} - \delta_1Aie^{iT_0} + \delta_1\bar{A}ie^{-iT_0} + \alpha\left(A^3e^{3iT_0} + 3A^2\bar{A}e^{iT_0} + 3A\bar{A}^2e^{-iT_0} + \bar{A}^3e^{-3iT_0}\right) \qquad (۳۰)$$

برای حذف ترم‌های نامحدود از روابط فوق باید:

$$-2D_2Ai - \delta_1Ai + 3\alpha A^2\bar{A} = 0 \qquad (۳۱)$$

با فرض $A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و جایگذاری در رابطه قبل داریم:

$$-i\left(\frac{da}{dT_2}e^{i\beta} + ai\frac{d\beta}{dT_2}e^{i\beta}\right) - i\frac{\delta_1}{2}ae^{i\beta} + \frac{3}{8}\alpha a^3e^{i\beta} = 0 \qquad (۳۲)$$

با جدا کردن بخش های حقیقی و موهومی از رابطه (۳۲) روابط زیر حاصل می‌گردند.

$$\frac{da}{dT_2} + \frac{\delta_1}{2}a = 0$$
$$\frac{d\beta}{dT_2} + \frac{3}{8}\alpha a^2 = 0 \qquad (۳۳)$$

با حل معادلات بالا ضرایب a و β به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$a = c_1(T_3)e^{-\frac{\delta_1}{2}T_2}$$
$$\beta = \frac{3\alpha}{8\delta_1}{c^2}_1e^{-\delta_1T_2} + c_2(T_3) \qquad (۳۴)$$

پس از حذف ترم‌های نامحدود از رابطه (۳۰) رابطه زیر بدست می‌آید.

$${D_0}^2 x_3 + x_3 = \alpha A^3e^{3iT_0} + \alpha\bar{A}^3e^{-3iT_0} \qquad (۳۵)$$

جواب خصوصی رابطه فوق به صورت زیر می‌باشد.

$$x_3 = -\frac{\alpha}{8}\left(\frac{1}{8}{c_1}^3 e^{-\frac{3}{2}\delta_1 T_2} e^{3i\beta}\right) e^{3iT_0} - \frac{\alpha}{8}\left(\frac{1}{8}{c_1}^3 e^{-\frac{3}{2}\delta_1 T_2} e^{-3i\beta}\right) e^{-3iT_0} \qquad (۳۶)$$

با قرار دادن روابط (۲۵)، (۲۹) و (۳۶) در (۲۴) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} {D_0}^2 x_4 + x_4 &= -2D_0D_3x_1 - \delta_2(D_0x_1)^3 = \\ &-2D_3Aie^{iT_0} + 2D_3\bar{A}ie^{-iT_0} - \delta_2\left(iAe^{iT_0} - i\bar{A}e^{-iT_0}\right)^3 = \\ &(-2iD_3A - 3\delta_2 iA^2\bar{A})e^{iT_0} + (2iD_3\bar{A} + 3\delta_2 iA\bar{A}^2)e^{-iT_0} + \\ &i\delta_2A^3e^{3iT_0} + \cdots \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

برای حذف ترم‌های نامحدود از رابطه (۳۷) باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$2D_3A + 3\delta_2A^2\bar{A} = 0 \qquad (۳۸)$$

با جایگذاری A به صورت قطبی در معادله بالا داریم:

$$\left(\frac{da}{dT_3}e^{i\beta} + ai\frac{d\beta}{dT_3}e^{i\beta}\right) + \frac{3}{8}\delta_2a^3e^{i\beta} = 0 \qquad (۳۹)$$

با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی معادله فوق، رابطه (۴۰) به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{da}{dT_3} + \frac{3}{8}\delta_2a^3 = 0 \qquad (۴۰\text{-الف})$$

$$a\frac{d\beta}{dT_3} = 0 \qquad (۴۰\text{-ب})$$

با جایگذاری رابطه (۳۴) در رابطه (۴۰- الف) مقدار c_1 به صورت زیر بدست می‌آید.

$$c_1 = \frac{1}{\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3 + c_3{}^{0.5}} \qquad (۴۱)$$

با جایگذاری c_1 در رابطه (۳۴)، ضرایب a و β به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$\begin{aligned} a &= c_1(T_3)e^{-\frac{\delta_1}{2}T_2} = \frac{e^{-\frac{\delta_1}{2}T_2}}{\left(\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3\right)^{0.5}} \\ \beta &= \frac{3\alpha}{8\delta_1}\left(\frac{e^{-\delta_1T_2}}{\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3}\right) + c_2(T_3) \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

مطابق رابطه (۴۰- ب) ، $\frac{d\beta}{dT_3} = 0$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{d\beta}{dT_3} = \frac{3\alpha}{8\delta_1}\left(\frac{\left(-\frac{3}{8}\delta_2e^{-2\delta_1T_2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3\right)^2}\right) + \frac{dc_2}{dT_3} = 0 \qquad (۴۳)$$

از رابطه فوق مقدار c_2 به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$c_2 = -\frac{\frac{3\alpha}{8\delta_1}e^{-\delta_1T_2}}{\left(\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3\right)} + c_4 \qquad (۴۴)$$

در نتیجه:

$$\beta = \frac{3\alpha}{8\delta_1}\left(\frac{e^{-\delta_1T_2}}{\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3}\right) - \frac{\frac{3\alpha}{8\delta_1}e^{-\delta_1T_2}}{\left(\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3\right)} + c_4 = c_4 \qquad (۴۵)$$

با جایگذاری ضرایب a و β در A داریم:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta} = \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{\delta_1}{2}T_2}}{\left(\frac{3}{8}\delta_2e^{-\delta_1T_2}T_3+c_3\right)^{.5}}e^{ic_4} \qquad (۴۶)$$

با فرض مقدار ثابت $\overline{c_3} = \varepsilon c_3$ و با محاسبه x_1 و x_3 از روابط (۲۵) و (۳۶) و جایگذاری آن در رابطه (۱۹) مقدار x محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{-\frac{B\omega_0}{2\Delta c_1}t}}{2\left(\frac{3B_q\omega_0}{8I}e^{-\frac{B\omega_0}{\Delta c_1}t}+c_3\right)^{0.5}}e^{i(c_4+t)} - \\ &\frac{\alpha}{64}\frac{e^{-\frac{3B\omega_0}{2\Delta c_1}t}}{\left(\frac{3B_q\omega_0}{8I}e^{-\frac{B\omega_0}{\Delta c_1}t}+c_3\right)^{\frac{3}{2}}}e^{3i(c_4+t)} + c.c \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

و یا:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{-\frac{B\omega_0}{2\Delta c_1}t}}{\left(\frac{3}{8}\frac{B_q\omega_0}{I}e^{-\frac{B\omega_0}{\Delta c_1}t}+\overline{c}_3\right)^{0.5}}\cos\left(t+c_4\right) \\ &-\frac{\alpha}{32}\frac{e^{-\frac{3B\omega_0}{2\Delta c_1}t}}{\left(\frac{3}{8}\frac{B_q\omega_0}{I}e^{-\frac{B\omega_0}{\Delta c_1}t}+\overline{c}_3\right)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(3\left(t+c_4\right)\right) \end{aligned} \qquad (۴۸)$$

در رابطه فوق، ضرایب $\overline{c_3}$ و c_4 از شرایط اولیه مسأله محاسبه می‌شوند.

۳-۲- پاسخ سیستم تحت تأثیر نیروی هارمونیک

در تعیین پاسخ اجباری سیستم در این قسمت فرض شده است که فرکانس تحریک از فرکانس طبیعی سیستم خطی شده به اندازه کافی دور باشد. در این قسمت معادله حرکت مطابق [5] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + b_1\dot{\varphi} + b_3\dot{\varphi}^3 + \left(C_1\varphi - \acute{C}_3\varphi^3\right) \\ = F\cos(\omega_e t + \varphi_c) + F_0 \end{aligned} \qquad (۴۹)$$

در رابطه قبل $C_3' = -C_3$ است و فرکانس طبیعی سیستم خطی شده به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\omega_0 = \sqrt{C_1} \qquad (۵۰)$$

معادله بی‌بعد شده ارتعاشات شناور حول محور طولی آن به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{b_1\omega_0}{{\omega_0}^2}\frac{dx}{d\tau} + \frac{b_3\omega_0}{{\omega_0}^2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^3 + x - \frac{\acute{C}_3}{C_1}x^3 = \frac{F}{{\omega_0}^2}\cos\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\tau + \varphi_c\right) + \frac{F_0}{{\omega_0}^2} \qquad (۵۱)$$

برای حل معادله غیرخطی (۴۹) تحت تأثیر نیروی هارمونیک پارامترهای رابطه (۱۳) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{b_1}{\omega_0} = \varepsilon\,\delta_1 \qquad b_3\omega_0 = \varepsilon^2\delta_2 \qquad \frac{\acute{C}_3}{C_1} = \varepsilon\hat{\alpha} \qquad (۵۲)$$

با جایگذاری رابطه (۵۲) در رابطه (۵۱) معادله بی‌بعد شده برای این قسمت به شکل زیر تبدیل می‌گردد.

$$\ddot{x} + \varepsilon\delta_1\dot{x} + \varepsilon^2\delta_2\dot{x}^3 + x - \varepsilon\hat{\alpha}x^3 = \varepsilon f cos(\Omega\tau + \varphi_c) + \varepsilon f_0 \qquad (۵۳)$$

پاسخ سیستم به صورت زیر بسط داده می‌شود.

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots \qquad (۵۴)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) و (۵۴) در معادله (۵۳) معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$\left({D_0}^2 + 2\varepsilon D_0D_1 + \varepsilon^2\left({D_1}^2 + 2D_0D_2\right) + \cdots\right)(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots) + \varepsilon\delta_1(D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots) + \varepsilon^2\delta_2\left((D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)\right)^3 + x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots - \varepsilon\hat{\alpha}(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)^3 = \varepsilon f cos(\Omega\tau + \varphi_c) + \varepsilon f_0 \qquad (۵۵)$$

با جدا کردن ضرایب ε^0 و ε^1 روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\varepsilon^0: {D_0}^2x_0 + x_0 = 0 \qquad (۵۶)$$

$$\varepsilon^1: {D_0}^2x_1 + 2D_0D_1x_0 + \delta_1D_0x_0 + x_1 - \hat{\alpha}{x_0}^3 = \varepsilon f cos(\Omega\tau + \varphi_c) + \varepsilon f_0 \qquad (۵۷)$$

در نتیجه جواب عمومی رابطه (۵۶) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x_0 = A(T_1)e^{iT_0} + c.c \qquad (۵۸)$$

با جایگذاری روابط (۵۸) در رابطه (۵۷) رابطه زیر بدست می‌آید.

$${D_0}^2x_1 + x_1 = -2\left(iD_1Ae^{iT_0} + c.c\right) - \delta_1\left(iAe^{iT_0} + c.c\right) + \hat{\alpha}\left[A^3e^{3iT_0} + 3A^2\bar{A}e^{iT_0} + c.c\right] + \frac{f}{2}\left(e^{i(\Omega t + \varphi_c)} + c.c\right) + f_0 \qquad (۵۹)$$

برای حذف ترم‌های نامحدود از رابطه فوق باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$-2iD_1A - \delta_1 iA + 3\hat{\alpha}A^2\bar{A} = 0 \qquad (۶۰)$$

با فرض $A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و جایگذاری در معادله (۶۰) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$-i\left(\frac{da}{dT_1}e^{i\beta} + ai\frac{d\beta}{dT_1}e^{i\beta}\right) - \delta_1 i\frac{a}{2}e^{i\beta} + 3\hat{\alpha}\frac{a^3}{8}e^{i\beta} = 0 \qquad (۶۱)$$

با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی معادله فوق داریم:

$$-\frac{da}{dT_1} - \frac{\delta_1 a}{2} = 0 \qquad a\frac{d\beta}{dT_1} + \frac{3\hat{\alpha}a^3}{8} = 0 \qquad (۶۲)$$

با حل معادله فوق، مقادیر a و β به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$a = c_1e^{-\frac{\delta_1}{2}T_1} \qquad \beta = \frac{3}{8\delta_1}\hat{\alpha}{c_1}^2e^{-\delta_1T_1} + c_2 \qquad (۶۳)$$

جواب خصوصی رابطه (۵۹) به صورت زیر می‌باشد:

$$x_1 = \hat{\alpha}\left[A^3e^{3iT_0} + c.c\right] + \frac{f}{2(1-\Omega^2)}\left(e^{i(\Omega t + \varphi_c)} + c.c\right) + f_0 \qquad (۶۴)$$

در نتیجه با جایگذاری (۵۸) و (۶۴) در رابطه (۵۴) جواب x به صورت زیر می‌باشد.

$$x = a\,cos(t + \beta) + \frac{\acute{C}_3}{32C_1}a^3\cos\left(3(t + \beta)\right) + \frac{F}{{\omega_0}^2(1-\Omega^2)}\cos(\Omega t + \varphi_c) + \frac{F_0}{\omega_0^2} \qquad (۶۵)$$

که در آن مقادیر c_1 و c_2 از شرایط اولیه مسأله بدست می‌آیند.

۳-۳- پاسخ سیستم تحت تأثیر نیروی هارمونیک در حالت تشدید اول ($\Omega \approx \omega_0$)

در این حالت فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \qquad (۶۶)$$

در معادله (۵۹) علاوه بر ترم‌های متناسب با e^{iT_0} که ترم نامحدود بودند، ترم $\frac{f}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_0+i\varphi_c}$ ایجاد ترم نامحدود می‌کند. با جایگذاری آن در رابطه (۶۰) و حذف ترم نامحدود باید داشته باشیم:

$$-2iD_1A-\delta_1 iA+3\hat{\alpha}A^2\bar{A}+\frac{f}{2}e^{i\sigma T_1+i\varphi_c}=0 \qquad (۶۷)$$

با جایگذاری A به شکل قطبی و جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$a\frac{d\beta}{dT_1}+\frac{3\hat{\alpha}a^3}{8}+\frac{f}{2}cos(\sigma T_1+\varphi_c-\beta)=0 \qquad (\text{۶۸- الف})$$

$$-\frac{da}{dT_1}-\frac{\delta_1 a}{2}+\frac{k}{2}sin(\sigma T_1+\varphi_c-\beta)=0 \qquad (\text{۶۸ - ب})$$

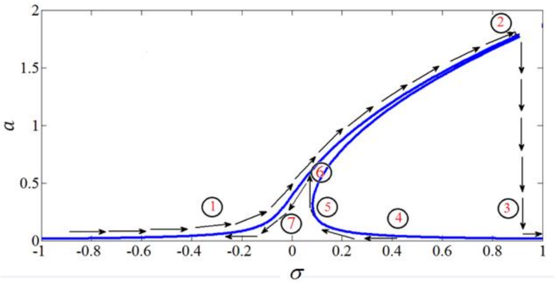
با فرض $\gamma=\sigma T_1+\varphi_c-\beta$ و جایگذاری آن در رابطه (۶۸) روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} a\dot{\gamma} &= a\sigma+\frac{3\hat{\alpha}}{8}a^3+\frac{f}{2}\cos\gamma \\ \dot{a} &= -\frac{\delta_1 a}{2}+\frac{f}{2}\sin\gamma \end{aligned} \qquad (۶۹)$$

برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی برای حالت پایدار باید $(\dot{a},\dot{\gamma}=0)$. با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۶۹) و حذف γ رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\left(a\sigma+\frac{3\hat{\alpha}}{8}a^3\right)^2+\left(\frac{\delta_1 a}{2}\right)^2=\frac{f^2}{4} \qquad (۷۰)$$

معادله (۷۰) معادله پاسخ فرکانسی سیستم بوده و مقدار دامنه a را برحسب پارامتر σ و دامنه تحریک f می‌دهد. شکل ۲ منحنی پاسخ فرکانسی را برای دامنه تحریک $f=$ ۰/۰۳۴۲ Nm و مقادیر پارامترهای جدول ۲ برای یک نمونه شناور نشان می‌دهد. مطابق شکل ۲ به علت غیر خطی بودن سیستم پدیده پرش در نمودار پاسخ فرکانسی مشاهده می‌شود بطوریکه با افزایش فرکانس، منحنی پاسخ فرکانسی مسیر ۱ تا ۲ را طی کرده و در نقطه ۲ به دامنه ماکزیمم می‌رسد. در این هنگام با اتفاق پدیده پرش، منحنی پاسخ فرکانسی از نقطه ماکزیمم به نقطه ۳ می‌رسد. در حالت کاهش فرکانس، منحنی پاسخ فرکانسی مسیر ۴ تا ۵ را طی کرده و سپس، با اتفاق پدیده پرش، به نقطه ۶ می‌رسد. در ادامه، با کاهش بیشتر فرکانس، مسیر ۶ تا ۷ را طی می‌کند.



شکل۲- منحنی پاسخ فرکانسی برای حالت ($\Omega\approx\omega_0$)

۳-۴- پاسخ سیستم تحت تأثیر نیروی هارمونیک در حالت تشدید سوپرهارمونیک ($\Omega\approx\frac{\omega_0}{3}$)

در این حالت فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$3\Omega=1+\varepsilon\sigma \qquad (۷۱)$$

به منظور بررسی نوسانات غلت شناور در این حالت، معادله ارتعاشی شناور به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\ddot{x}+\varepsilon\delta_1\dot{x}+\varepsilon^2\delta_2\dot{x}^3+x-\varepsilon\hat{\alpha}x^3= f cos(\Omega\tau+\varphi_c)+\varepsilon f_0 \qquad (۷۲)$$

با جایگذاری روابط (۱۷)، (۱۸) و (۵۱) در معادله (۷۲) معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$\left(D_0{}^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2\left(D_1{}^2+2D_0D_2\right)+\cdots\right)(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)+\varepsilon\delta_1(D_0+\varepsilon D_1+\cdots)(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)+\varepsilon^2\delta_2\left((D_0+\varepsilon D_1+\cdots)(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)\right)^3+x_0+\varepsilon x_1+\cdots-\varepsilon\hat{\alpha}(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^3=f cos(\Omega\tau+\varphi_c)+\varepsilon f_0 \qquad (۷۳)$$

با جدا کردن ضرایب ε^0 و ε^1 روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\varepsilon^0: D_0{}^2x_0+x_0=f cos(\Omega\tau+\varphi_c) \qquad (۷۴)$$

$$\varepsilon^1: D_0{}^2x_1+2D_0D_1x_0+\delta_1D_0x_0+x_1-\hat{\alpha}x_0{}^3=f_0 \qquad (۷۵)$$

جواب عمومی رابطه (۷۴) به صورت زیر می‌باشد.

$$x_0=A(T_1)e^{iT_0}+\Lambda e^{i\Omega t+\varphi_c}+c.c \qquad (۷۶)$$

که در آن:

$$\Lambda=\frac{1}{2}f(1-\Omega^2)^{-1} \qquad (۷۷)$$

با جایگذاری روابط (۷۶) و (۷۷) در رابطه (۷۵) رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &D_0{}^2x_1 + x_1 = -2\left(iD_1Ae^{iT_0} + c.c\right) - \\ &\delta_1\left(iAe^{iT_0} + \Lambda i\Omega e^{i(\Omega t+\varphi_c)} + c.c\right) + \\ &\hat{\alpha}\left[A^3e^{3iT_0} + \Lambda^3e^{3(i\Omega T_0+\varphi_c)} + \right. \\ &3A^2\Lambda e^{2iT_0+i(\Omega T_0+\varphi_c)} + 3A\Lambda^2e^{iT_0+2i(\Omega T_0+\varphi_c)} + \\ &3\left(A^2e^{2iT_0} + 2A\Lambda e^{iT_0+i(\Omega T_0+\varphi_c)} + \right. \\ &\left.\Lambda^2e^{2i(\Omega T_0+\varphi_c)}\right)\left(\bar{A}e^{-iT_0} + \Lambda e^{-i(\Omega T_0+\varphi_c)}\right) + \\ &\left. c.c\right] + f_0 \end{aligned} \qquad (۷۸)$$

برای حذف ترم‌های نامحدود از معادله فوق باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$-2iD_1A - \delta_1 iA + \hat{\alpha}\Lambda^3e^{i\sigma T_1+i\varphi_c} + 3\hat{\alpha}A^2\bar{A} + 6A\Lambda^2 = 0 \qquad (۷۹)$$

با جایگذاری A به شکل قطبی و جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\begin{aligned} &-\frac{da}{dT_1} - \delta_1\frac{a}{2} + \hat{\alpha}\Lambda^3\sin\left(\sigma T_1 + \varphi_c - \beta\right) = 0 \\ &a\frac{d\beta}{dT_1} + \hat{\alpha}\Lambda^3\cos\left(\sigma T_1 + \varphi_c - \beta\right) + \frac{3}{8}\hat{\alpha}a^3 + 3a\Lambda^2 = 0 \end{aligned} \qquad (۸۰)$$

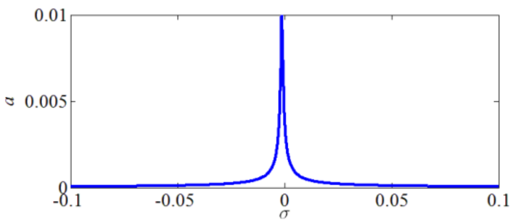
با فرض $\gamma = \sigma T_1 + \varphi_c - \beta$ و جایگذاری آن در رابطه بالا روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} &\dot{a} = -\delta_1\frac{a}{2} + \hat{\alpha}\Lambda^3\sin\gamma \\ &a\dot{\gamma} = a\sigma + \hat{\alpha}\Lambda^3\cos\gamma + \frac{3}{8}\hat{\alpha}a^3 + 3a\Lambda^2 \end{aligned} \qquad (۸۱)$$

با قرار دادن $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$ در حالت پایدار و با حذف γ معادله پاسخ فرکانسی به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\left(\frac{\delta_1 a}{2}\right)^2 + \left(a\sigma + \frac{3}{8}\hat{\alpha}a^3 + 3a\Lambda^2\right)^2 = \left(\hat{\alpha}\Lambda^3\right)^2 \qquad (۸۲)$$

معادله (۸۲) معادله پاسخ فرکانسی سیستم در این حالت بوده و مقدار دامنه a را برحسب پارامتر σ و دامنه تحریک Λ می‌دهد. شکل ۳ منحنی پاسخ فرکانسی را برای دامنه تحریک $f =$ ۰/۰۳۴۲ Nm و مقادیر پارامترهای جدول ۲ برای یک نمونه شناور نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود در این حالت پدیده پرش اتفاق نمی‌افتد.



شکل۳- منحنی پاسخ فرکانسی برای حالت ($\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$)

۴- اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی حل ارائه شده برای معادله (۱۵) در دو حالت ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری، پاسخ بدست آمده در این دو حالت به روش تحلیلی تحقیق حاضر با پاسخ بدست آمده از روش حل عددی مرجع [۵] در شکل‌های ۴ و ۵ با هم مقایسه شده‌اند. پارامترهای استفاده شده در حالت ارتعاشات آزاد و اجباری به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، پاسخ‌های بدست آمده از روش تحلیلی در هر دو حالت ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری تطابق بسیار خوبی با نتایج حل عددی مسأله دارند.

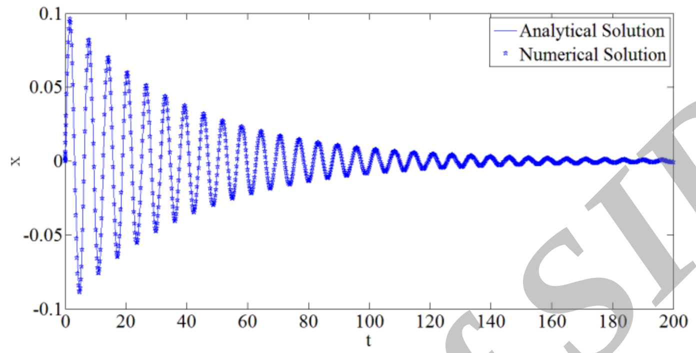
۵- بررسی تأثیر تغییر پارامترها بر پاسخ فرکانسی

در این قسمت تأثیر تغییر پارامترهای شناور بر پاسخ فرکانسی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب تأثیر میرایی خطی سیستم را بر پاسخ فرکانسی در حالت تشدید اول و حالت سوپر هارمونیک ($\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$) نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب میرایی خطی، فرکانس تشدید اولیه به فرکانس طبیعی سیستم خطی شده نزدیکتر می‌گردد. همچنین در شکل ۷ افزایش ضریب میرایی خطی باعث کاهش دامنه نوسانات می‌شود.

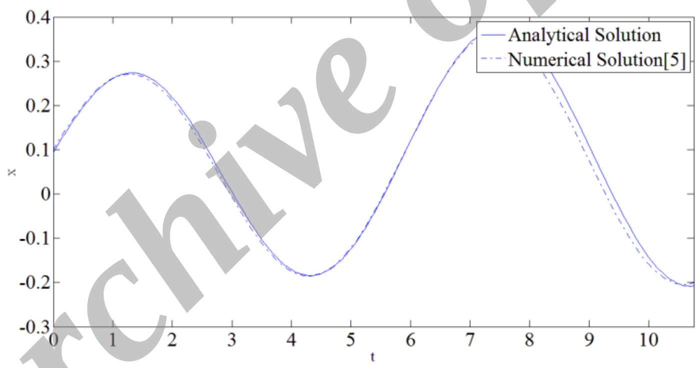
تأثیر ضریب غیرخطی ممان برگرداننده بر پاسخ فرکانسی سیستم در شکل ۸ و ۹ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب غیرخطی ممان برگرداننده، فرکانس تشدید اولیه از فرکانس طبیعی سیستم خطی شده فاصله بیشتری می‌گیرد. همانطور که در شکل ۹ نشان داده شده است، افزایش ضریب غیرخطی

در حالت تشدید سوپرهارمونیک باعث افزایش دامنه نوسانات می‌شود.

همچنین تأثیر تغییر ضریب خطی ممان برگرداننده در پاسخ فرکانسی تشدید اول و $\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$ در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که در حالت تشدید اولیه در شکل ۱۰، کاهش ضریب خطی ممان برگرداننده، فرکانس تشدید اول را از فرکانس طبیعی سیستم خطی شده دور می‌کند. مطابق شکل ۱۱ در حالت تشدید سوپرهارمونیک، کاهش ضریب خطی ممان برگرداننده موجب کاهش دامنه نوسانات می‌شود.



شکل ۴- مقایسه نتایج حل تحلیلی و حل عددی در حالت ارتعاشات آزاد شناور



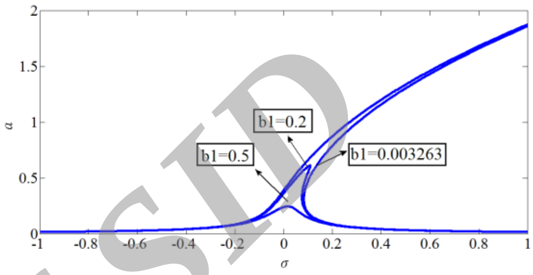
شکل ۵- مقایسه نتایج حل تحلیلی و حل عددی در حالت ارتعاشات اجباری شناور

جدول ۱- پارامترهای استفاده شده در حل تحلیلی و عددی [۴]

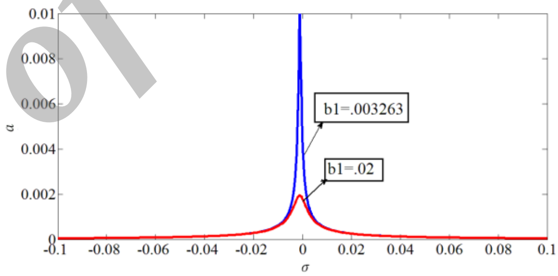
مشخصه	پارامتر	مقدار	مشخصه	پارامتر	مقدار
ضریب میرایی خطی [kg.m²/s]	B	۲/۲۴۲×۱۰^۴	ضریب غیرخطی ممان برگرداننده [m]	C_3	۰/۲۱۸
ضریب میرایی غیر خطی [kg.m²/s]	B_q	۱/۷۷۷×۱۰^۴	ممان اینرسی شناور [kg.m²]	I	۱/۰۷۸×۱۰^۶
ضریب خطی ممان برگرداننده [m]	C_1	۰/۹۶۲	مقدار سیال جابجا شده [ton]	Δ	۱۹۵

جدول ۲- پارامترهای استفاده شده در حل تحلیلی و عددی [۵]

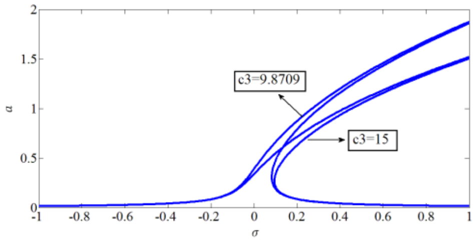
مشخصه	پارامتر	مقدار	مشخصه	پارامتر	مقدار
ضریب میرایی خطی [kg.m^2/s]	b_1	۰/۰۰۳۲۶۳	ضریب غیرخطی ممان برگرداننده [m]	C_3	۹/۸۷۰۹
ضریب میرایی غیرخطی [kg.m^2/s]	b_3	۰/۰۰۰۲۴۴۲	دامنه نیروی تحریک [Nm]	F	۰/۴۴۰۵
ضریب خطی ممان برگرداننده [m]	C_1	۱۲/۸۶۲	فرکانس نیروی تحریک $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	ω_e	۲/۱۲۵۲
اختلاف فاز [rad]	φ_0	-۲/۶۲۷۲	نیروی ثابت [Nm]	F_0	۰/۹۱۰۶



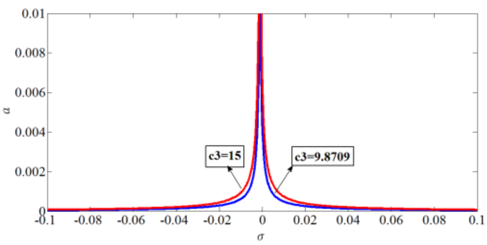
شکل ۶- تأثیر ضریب میرایی خطی در حالت تشدید اول



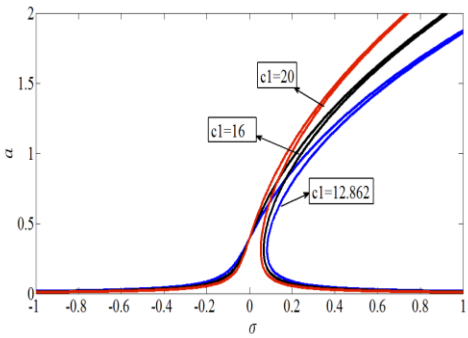
شکل ۷- تأثیر ضریب میرایی خطی در حالت $\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$



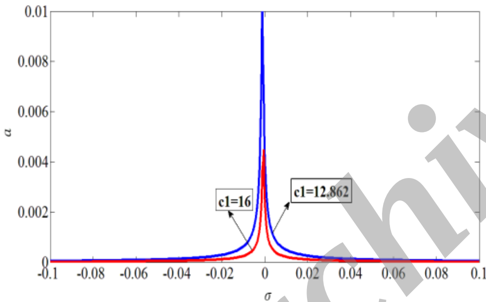
شکل ۸- تأثیر ضریب غیرخطی ممان برگرداننده در حالت تشدید اول



شکل ۹- تأثیر ضریب غیرخطی ممان برگرداننده در حالت $\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$



شکل ۱۰- تأثیر ضریب خطی ممان برگرداننده در تشدید اول



شکل ۱۱- تأثیر ضریب خطی ممان برگرداننده در حالت $\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$

۶- آنالیز حساسیت

آنالیز حساسیت برای تعیین مقدار وابستگی خروجی مدل مورد نظر به پارامترهای ورودی مورد استفاده قرار می‌گیرد و روش مهمی برای بررسی کیفیت مدل ارائه شده و اعتبار تحلیل مورد نظر شناخته می‌شود [۱۲]. روش‌های مختلفی برای تعیین حساسیت پارامترها وجود دارد. در این مقاله، آنالیز حساسیت با استفاده از دو روش انجام گرفته و در نهایت نتایج بدست آمده با هم مقایسه شده‌اند.

۶-۱- بررسی حساسیت پارامترها به روش موضعی

برای ارزیابی حساسیت مدل تابع J_{roll} به صورت زیر تعریف می‌شود. در اینجا تأثیر تغییر پارامترها روی جابجایی غلت تحت تأثیر نیروی هارمونیک بررسی شده است[۱۰ و ۱۳].

$$J_{roll}(\tilde{p}) = \left| 100 \frac{\sum_{t=0}^{N} x(t,\tilde{p})^2 - \sum_{t=0}^{N} x(t,p)^2}{\sum_{t=0}^{N} x(t,p)^2} \right| \qquad (۸۳)$$

در رابطه (۸۳) $x(t,\tilde{p})$ مقدار زاویه غلت به ازای مقدار تغییر یافته $\tilde{p}$ است. در اینجا N زمان شبیه‌سازی را نشان می‌دهد. در جدول ۳ مقادیر برای زمان ۱۰ ثانیه بدست آمده است و تمامی پارامترها در پاسخ غیرخطی $\pm ۵\%$ و $\pm ۱۰\%$ تغییر داده می‌شوند. نتایج بدست آمده از این روش در جدول ۳ ارائه شده است.

در روش دیگر، مشتق جزئی زاویه غلت x نسبت به پارامتر ورودی به صورت زیر خواهد بود:

$$S = \left.\frac{\partial x}{\partial p_i}\right|_{x_{i,0}} \qquad (۸۴)$$

که در اینجا $p_{i,0}$ مقدار پارامتر مرجع را نشان می‌دهد. به طور معمول برای مقایسه حساسیت به پارامترهای مختلف از نظر حساسیت نسبی، لازم است که مقدار نرمال شده حساسیت به صورت زیر تعریف شود [۱۴].

$$NS = \frac{\partial x / x}{\partial p_i / p_{i,0}} = \frac{\partial x(t,p)}{\partial p_i}\frac{p_{i,0}}{x(t,p)} = S(t,p)\frac{p_{i,0}}{x(t,p)} \qquad (۸۵)$$

در این رابطه S مقدار تغییر زاویه غلت کشتی نسبت به پارامترها در طول زمان شبیه‌سازی و x مقدار زاویه غلت در طول زمان مورد نظر می‌باشد. با توجه به اینکه در رابطه (۸۵) امکان تقسیم بر صفر به ازای مقادیر $x=0$ در یک زمان مشخص وجود دارد، می‌توان از رابطه (۸۶) با جمع مقادیر S و x در زمانهای مختلف به مقدار مشخص میزان حساسیت رسید [۱۵].

$$NS\_sum = \sum_{t=0}^{N} \left|S(t,p)\right| \frac{p_{i,0}}{\sum_{t=0}^{N} \left|x(t,p)\right|} \qquad (۸۶)$$

مجموع حساسیت نسبی NS_sum در طول زمان شبیه‌سازی برای هر پارامتر در جدول ۳ نشان داده شده است.

۶-۲- مقایسه نتایج حاصل از آنالیز حساسیت

با توجه به جدول ۳ با تغییر پارامترهای مؤثر در پاسخ غلت کشتی تحت تأثیر نیروی هارمونیک، با استفاده از روش اول مقدار J_{roll} برای ضریب خطی ممان میرایی b_1 و ضریب غیرخطی ممان برگرداننده C_3 بیشتر از سایر پارامترها است. از طرف دیگر، بر اساس روش دوم و مجموع حساسیت NS_sum مطابق با جدول ۳، پاسخ غلت کشتی به ضرایب b_1 و C_3 حساسیت بیشتری دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده از دو روش با هم تطابق دارند. در رابطه با پارامترهای F و ω_e بر اساس هر دو روش، مشاهده می‌شود که این دو پارامتر کمترین تأثیر را بر تغییرات زاویه غلت دارا می‌باشند.

جدول ۳- حساسیت پاسخ بدست آمده تحت تحریک هارمونیک به تغییر پارامترها

پارامتر	J_{roll} $+5\%$	J_{roll} -5%	J_{roll} $+10\%$	J_{roll} -10%	$\mathrm{avg}(J_{roll})$ $\pm 5\%$	$\mathrm{avg}(J_{roll})$ $\pm 10\%$	NS_sum
b_1	۳/۸۵۱۸	۸/۴۰۷۸	۱۲/۲۸۲۷	۱۳/۷۰۱۵	۶/۱۲۹۸	۱۲/۹۹۲۱	۱۸/۴۶۹
c_1	۲/۳۰۰۹	۵/۲۳۴۹	۱/۰۵۶۴	۹/۳۰۸۲	۳/۷۶۷۹	۵/۱۸۲۳	۸/۹۴۳
c_3	۸/۳۰۱۱	۳/۴۹۴۲	۱۱/۳۳۰۱	۱۶/۱۶۹۱	۵/۸۹۷۶	۱۳/۷۴۹۶	۱۸/۳۸۱
F	۰/۳۶۷۳	۰/۶۶۶۶	۰/۷۲۰۳	۰/۶۵۲۷	۰/۵۱۶۹	۰/۶۸۶۵	۰/۱۹۲
ω_e	۱/۰۸۸۵	۱/۲۸۹۳	۴/۴۷۴۹	۱/۲۹۴۴	۱/۱۸۸۹	۲/۸۸۴۶۵	۰/۶۱۳

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله به مدلسازی ارتعاشات آزاد و اجباری غلت یک شناور با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پراخته شد. به منظور اعتبارسنجی حل ارائه شده، پاسخ بدست آمده در هر دو حالت ارتعاشات آزاد و اجباری به ترتیب با نتایج حل عددی و نتایج ارائه شده در دیگر مراجع مقایسه شدند. با توجه به نتایج حاصل مشاهده شد که حل تحلیلی ارائه شده دقت مناسبی در تعیین پاسخ سیستم دارد. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف سیستم مانند ضریب میرایی و ضریب ممان برگرداننده بر پاسخ فرکانسی سیستم در فرکانس تشدید اول و $\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$ بررسی شد.

افزایش ضریب میرایی خطی در هر دو حالت تشدید اول و سوپر هارمونیک موجب کاهش دامنه پاسخ فرکانسی و افزایش ضریب میرایی خطی ممان برگرداننده در تشدید اول موجب افزایش دامنه و چرخش منحنی از راست به چپ می‌شود و در حالت سوپرهارمونیک موجب کاهش دامنه می‌شود. افزایش ضریب غیرخطی ممان برگرداننده در تشدید اول موجب چرخش منحنی از چپ به راست می‌شود و کاهش دامنه و برای حالت سوپرهارمونیک باعث افزایش دامنه می‌شود.

در پایان، آنالیز حساسیت پارامترهای موثر در پاسخ سیستم تحت تأثیر نیروی هارمونیک به دو روش بررسی گردید. مشاهده شد که پاسخ غلت شناور در حالت ارتعاشات اجباری، به تغییرات ضریب خطی ممان میرایی و ضریب غیر خطی ممان برگرداننده حساسیت بیشتری دارد. از طرف دیگر، دامنه و فرکانس نیروی تحریک کمترین تاثیر را بر تغییرات زاویه غلت دارا می‌باشند.

۸- مراجع

[1] Bulian, G. (2004). “Approximate analytical response curve for a parametrically excited highly nonlinear 1-Dof system with an application to ship roll motion prediction”, Real world Applications, Vol.5, pp.725-748.

[2] Taylan, M. (1999), “Solution of the nonlinear roll model by a generalized asymptotic method”, Ocean Engineering, Vol.26, pp.1169-1181.

[3] Taylan, M. (2000), “The effect of nonlinear damping and restoring in ship rolling”, Ocean Engineering, Vol.27, pp.921-932.

[4] Gu, J.Y. (2004), “Nonlinear rolling motion of ship in random beam seas”, Journal of marine science and technology, Vol.4, pp.273-279.

[5] Xing, Z., McCue, L. (2011) “Modeling ship equations of roll motion using neural networks”, Technical Paper, American Society of Naval Engineers.

[6] Pesman, E., Bayraktra, D., Taylan, M. (2007) “Influence of damping on the roll motion of ships”, The 2nd International Conference on Marine Research and Transportation (ICMRT’07), Ischia Naples, Italy, pp.127-133.

[7] Eissa, M., EL-Bassiouny A.F. (2003) “Analytical and numerical solutions of a non-linear ship rolling motion”, Applied Mathematics and Computation, Vol.134, pp.243-270.

[8] Hui L.H, Fong, P.Y. (2010) “A Numerical study of ship’s rolling motion” , Conference on Mathematics, Statistics and its Applications, Universiti Tunku Abdul Rahman, Kuala Lumpur, Malaysia.

[9] Bikadash,M., Balachandran, B., Nayfeh, A. (1994) “Melnikov analysis for a ship with a general Roll-damping model”, Nonlinear Dynamic, Vol.6, pp.101-124.

[10] Perez, T., Blanke, M. (2002) “Mathematical ship modeling for control applications”, Technical Report, Technical University of Denmark.

[11] Wang, X.G., Zou, Z.J., Xu, F., Ren, R.Y. (2014) "Sensitivity analysis and parametric identification for ship manoeuvring in 4 degrees of freedom" , Journal of Marine Science and Technology, Vol.19, pp.394-405.

[12] Saltelli, A., Chan, K., Scott EM. (2000) "Sensitivity analysis", John Wiley & Sons.

[13] Feng, X., Zao-jian, Z., Jian-chuan, Y., Jian, C. (2012) "Parametric identification and sensitivity Analysis for Autonomous underwater vehicles in diving plane ", Journal of Hydrodynamics, Vol.24, pp.744-751.

[14] Cacuci D.G. (2003) "Sensitivity and uncertainty analysis: theory, Vol. I", Chapman & Hall.

[15] Eberhard P., Schiehlen, W., Sierts J. (2007) "Sensitivity analysis of inertial parameters in multibody dynamics simulations". 12th IFToMM World Congress, Besancon, Jun 18-21.