

تعیین محتوای آب لنز برای چند چیدمان مختلف از ذرات بیضوی در خاک‌های غیراشباع

محمد حسین جهانگیر^{۱*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱۱/۰۸ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۹/۱۷	تا به امروز کلیه محاسبات مربوط به تعیین مقدار محتوای آب موجود در بین ذرات خاک در حالت غیراشباع براساس فرض دایروی بودن دانه‌های جامد خاک انجام گرفته است و با استفاده از این فرض ساده کننده بسیاری از کمیت‌های دیگر نظیر مکش ماتریسی و تنش مؤثر ناشی از کشش آب اطراف ذرات نیز مورد بررسی قرار گرفته است. لکن در مقاله حاضر با فرض بیضوی بودن دانه‌های خاک برای سه حالت مختلف از چیدمان ذرات بر روی هم، مقدار محتوای آب لنز به روش حجمی مورد محاسبه قرار گرفته است و نتایج بدست آمده با حالت کروی ذرات مقایسه شده است. همچنین با تغییر کمیت‌هایی نظیر شعاع‌های کوچک و بزرگ ذرات بیضوی، زاویه پرکنندگی، شعاع‌های لنز آب و مکش ماتریسی مقدار محتوای آب موجود در بین ذرات مورد مطالعه قرار گرفته و منحنی مشخصه آب و خاک نیز در چندین حالت ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش زاویه پرکنندگی محتوای حجمی لنز برای چینش افقی حدود ۲ تا ۵ برابر بیشتر از سایر حالات است، در حالیکه با تغییر نسبت شعاع لنز، این مقدار برای چیدمان قائم بیشتر می‌باشد. همچنین مکش ماتریسی برای ذرات بیضوی با شیب اندکی نسبت به تغییر محتوای حجمی مقدار خواهد یافت که این موضوع برای نسبت قطر دوبرابری، با مکشی ۴ برابر بزرگتر بدست می‌آید.

واژگان کلیدی:

خاک غیراشباع،
محتوای آب لنز،
مکش ماتریسی،
زاویه پرکنندگی،
منحنی مشخصه آب و خاک.

۱- مقدمه

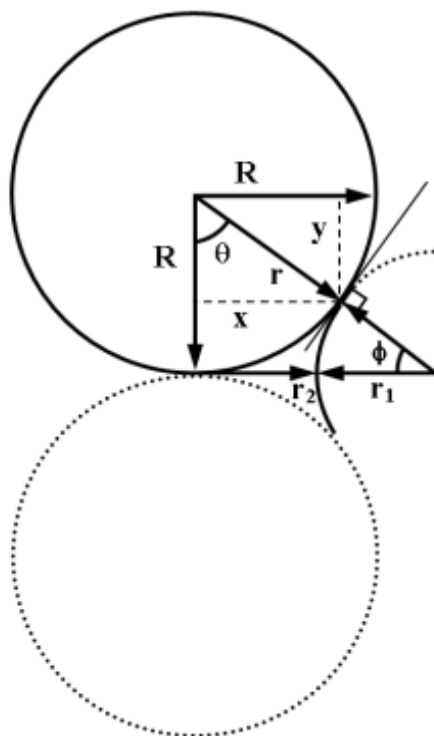
شکل ذرات و نحوه چیدمان آنها در کنار هم نقش مهمی در تعیین میزان بسیاری از خواص فیزیکی مواد متخلخل ایفا می‌کند. رسانایی الکتریکی، پخشودگی، رسانش گرمایی و ضریب هدایت هیدرولیکی همگی وابسته به شکل و حفرات شبکه تشکیل شده می‌باشند به طوری که خود تا حد زیادی به هندسه ذرات در ماتریس محیط دانه‌ها بستگی دارد [۵-۱]. همچنین مقدار زاویه اصطکاک داخلی ذرات با اشکال متفاوت بوسیله آزمایش سه‌محوری استاندارد توسط شینوهارا و همکاران (۲۰۰۰) مورد ارزیابی قرار گرفت [۶]. دودس (۲۰۰۳) نیز اثر شکل و سختی ذرات بر رفتار خاک را مورد مطالعه قرار داد [۷]. لیو و همکاران (۲۰۱۱) اشکال ذرات را با استفاده از روش تصاویر دیجیتالی به صورت عدد تعریف کردند و کارایی مکانیکی ضرایب شکل را در مقاله خود تشریح نمودند [۸]. بواسطه وجود اشکال مختلف از ذرات در مواد، بررسی تأثیر شکل آن را بسیار دشوار است.

در بسیاری از مطالعات بجای کروی بودن ذرات جامد خاک، اشکال مختلفی برای ذرات به منظور بهبود مدل‌سازی عددی جهت استفاده در محاسبات خاک غیراشباع پیشنهاد شده است. برای این منظور جوهانسون (۲۰۰۹) از گلوله‌های پلاستیکی با شکل‌های متفاوت (گرد، قلبی و ستاره) آغشته به موم استفاده کرد و نمونه‌هایی را اجرا کرد. هر چند این روش می‌تواند نمونه سازگاری با شکل مشخص حاصل نماید، اما عدم دستیابی به نمونه‌های سنگی و یا شن و ماسه به دلیل عملکردهای مختلف بین گلوله‌های پلاستیکی در این مواد وجود خواهد داشت [۹]. همچنین محاسبه و استفاده از ذرات چند ضلعی برای اولین بار توسط باربوسا و قابوسی (۱۹۹۲) و ماتوتیس و همکاران (۲۰۰۰) ارائه شد. لذا با استفاده از ذرات با اشکال چند ضلعی می‌توان یک مدل فوق ایده‌آل از رفتار ذرات بدست آورد که البته کیفیت این روش به شدت محاسباتی است [۱۱ و ۱۸]. تینگ و همکاران (۱۹۹۳) دریافتند که ذرات با شکل بیضی

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mh.jahangir@ut.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران

شعاع داخلی r_2 و شعاع خارجی r_1 نشان داد. همان طور که در شکل مشاهده می شود، در محل تماس کمان لنز آب و دایره دانه خاک، می توان یک مماس رسم نمود به طوری که شعاع میانی r بر آن عمود بوده و البته شعاع بیرونی لنز r_1 نیز بر آن قائم خواهد شد. یعنی هر دو شعاع r و r_1 در یک راستا قرار خواهند گرفت. لذا در این حالت شعاع میانی r با راستای قائم زاویه θ را می سازد و شعاع خارجی لنز نیز با راستای افق، زاویه ϕ را خواهد ساخت.



شکل ۱: حجم لنز آب اطراف ذرات کروی از دانه های خاک

لازم به توضیح است که مقدار مکش ماتریسی به کشش سطحی T و مقادیر شعاع های r_1 و r_2 از هندسه لنز آب بین ذرات با شعاع های مساوی R ، بستگی دارد. البته از قبل رابطه ای برای کشش سطحی به صورت زیر موجود است، که به مکش ربط دارد:

$$T_s = \frac{P_a - P_w}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad (1)$$

اولین بار دالوال (۱۹۴۳)، با شرط اینکه $0 \leq \theta \leq 85^\circ$ باشد، روابطی برای شعاع های مشخصه لنز آب به صورت (۲) و (۳) ارائه نمود:

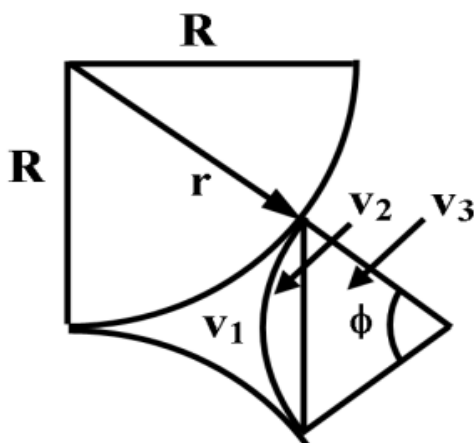
$$r_1 = R \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \quad (2)$$

گرایش کمتری به دوران داشته و همچنین یک بردار نرمال واحد به سمت بیرون دارند. بدین ترتیب آنها یک الگوریتم عددی براساس روش المان های مجزا (DEM) برای استفاده از ذرات بیضوی شکل خاک در حالت دوبعدی تعریف کردند. نتایج آزمایشات اعتبارسنجی نشان داد که در پیش بینی رفتار مکانیکی خاک، استفاده از روش اجزای مجزا بر پایه شکل بیضوی اجزا بسیار مشابه با نمونه واقعی خاک است، اگرچه دانه های بیضوی شکل به طور دقیق شکل واقعی ذرات خاک را ارائه نمی کنند [۱۰]. از طرفی انتخاب شکل بیضی برای سنگ ریزه و کنترل توزیع تنش برای تنظیم بارگذاری ممکن است اثر قابل توجهی در گرایش آن به شکستگی ایجاد نماید، به طوری که نتایج حاصل از این تحقیق توسط توپز و همکاران (۲۰۱۲) بررسی و اعلام شد [۲۱]. تینگ و همکاران (۱۹۹۵) اثر تماس دوبعدی ذرات بیضی شکل را نسبت به واکنش متقابل برهم مورد مطالعه قرار دادند. نمونه ها به طور همسان متراکم شدند و سپس بوسیله فشار در دو راستا تحت برش قرار گرفتند. به منظور دسترسی به مقدار نسبی چرخش و لغزش، تغییر شکل محل تماس به دو بخش تقسیم شد: (۱) ناشی از دوران تک تک ذرات و (۲) به علت حرکت انتقالی ذرات بر روی هم. این تجزیه و تحلیل نشان داد که دوران ذرات به علت حرکت تماسی در اطراف ذرات دو مرتبه بیشتر از دوران ناشی از حرکت انتقالی شمارش می شود [۲۱]. لین و این جی (۱۹۹۷) نیز یک مدل جدید از ذرات در حالت سه بعدی را براساس روش اجزای مجزا ارائه کردند، لذا یک مطالعه عددی بر روی رفتار مکانیکی ذرات هم اندازه با استفاده از این روش توسط ایشان ارائه شد. با این روش در خلال آزمایش سه محوری، مقاومت برشی و اتساع بیشتر، مدول اینرسی بزرگتر و دوران کمتری برای ذرات مشاهده شد. نتایج نشان داد که استفاده از ذرات غیرکروی در روش المان های مجزا برای بهبود شبیه سازی دانه های جامد خاک غیراشباع ضروری است [۱۶].

۲- محاسبه محتوای آب ذرات کروی

در ساده ترین حالت که از ذرات کروی بجای دانه های جامد خاک استفاده می شود، نحوه قرارگیری هر دو ذره کروی بر روی هم اهمیتی نداشته و در هر صورت چیدمان ذرات در تماس با هم مطابق شکل (۱) خواهد بود. لذا چنانچه لنز آبی مابین این دو ذره تشکیل شود، می توان آن را با دو

تبدیل شده است که همگی قابل محاسبه هستند.



شکل ۲: حجم لنز آب اطراف ذرات کروی با شعاع مشخص

لذا حجم کلی لنز آب به صورت رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$V = V_1 - V_2 + V_3 \quad (7)$$

با استفاده از انتگرال گیری حجمی در جهت محور ها می توان حجم را به صورت رابطه (۸) محاسبه کرد:

$$V_1 = 2\pi R \int_{x=0}^{x=R \cos \theta} x \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx \quad (8)$$

برای محاسبه حجم بایستی ابتدا مساحت قطعه مورد نظر با زاویه مرکزی را حساب نموده و انتگرال حجمی آن را با استفاده از فاصله مرکز سطح این قطعه تا مرکز ذره جامد کروی بدست آورد. مساحت این قطعه برابر است با:

$$A_2 = r_1^2 (2\phi) \quad (9)$$

برای بدست آوردن مرکز سطح مساحت این قطعه می‌توان از نسبت گشتاور سطح به مساحت آن استفاده کرد. بدین ترتیب با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$d_2 = \frac{2}{3} r_1 \frac{\sin 2\phi}{2\phi} \quad (10)$$

لذا حجم توسط چرخش مساحت قطعه مورد نظر حول محور ها به صورت رابطه (۱۱) قابل محاسبه است:

$$V_2 = 2\pi A_2 (r_1 + r_2 - d_2) \quad (11)$$

حجم مثلث دوران یافته به دور دانه خاک، با استفاده از چرخش مساحت مثلث بدست می‌آید. لذا مساحت مثلث به صورت رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود:

$$A_3 = r_1^2 \cos 2\phi \sin 2\phi \quad (12)$$

و همچنین:

$$r_2 = R \tan \theta - r_1 \quad (3)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (۱) از کشش سطحی، می‌توان به رابطه‌ای برای مکش به شکل زیر دست یافت:

$$P_a - P_w = \frac{T_s \cos \theta (\sin \theta + 2 \cos \theta - 2)}{R (1 - \cos \theta) (\sin \theta + \cos \theta - 1)} \quad (4)$$

همچنین دالوال نشان داد که حجم آب لنز V_1 در صفحه عمود بر ذرات کروی مرتبط با هم به صورت رابطه (۵) تخمین زده می‌شود:

$$V_1 = 2\pi R^3 \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \tan \theta \right] \quad (5)$$

که با استفاده از مقدار حجم موجود از یک دانه جامد کروی به صورت $V_s = 4/3\pi R^3$ ، مقدار حجم آب لنز به شکل رابطه (۶) نرمالیزه خواهد شد:

$$\frac{V_l}{V_s} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \tan \theta \right] \quad (6)$$

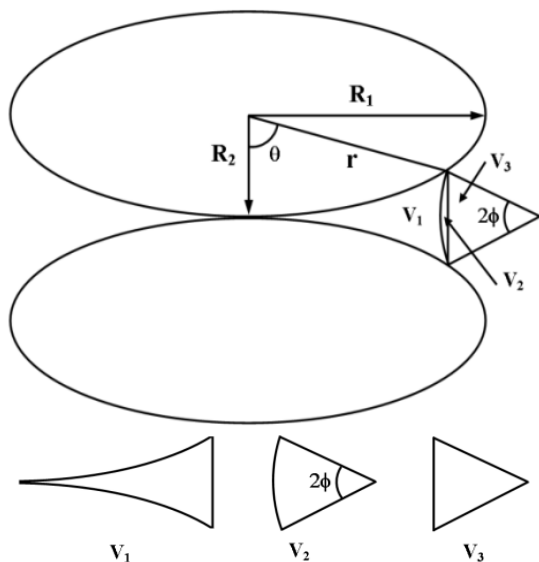
لذا به راحتی می‌توان مقدار درصد رطوبت خاک را با استفاده از چگالی دانه‌های جامد، G_s و نسبت تخلخل، e برای چینش‌های مختلف از ذرات کروی در کنار هم بدست آورد [۱۷]. در ادامه چگونگی محاسبه محتوای آب در بین ذرات به روش حجمی و به صورت تحلیلی دنبال خواهد شد.

۳- محاسبه محتوای آب ذرات کروی به روش محاسبه حجمی

مقدار مکش موجود در بین ذرات خاک ناشی از وجود موئینگی و فشار آب جذبی می‌باشد. لذا یافتن مقدار آب جذبی اطراف ذرات اهمیت پیدا می‌کند. همان طوری که در شکل (۱) نشان داده شده است، زاویه پرشدگی θ می‌تواند مقدار حجم آب لنز اطراف ذرات را به هندسه دانه‌ها مرتبط سازد. لذا زمانی که زاویه θ صفر باشد، یعنی حجم لنز آب بین دانه‌ها صفر است و با افزایش مقدار این زاویه، مقدار محتوای آب نیز زیاد می‌شود.

برای محاسبه مقدار حجمی لنز آب موجود در اطراف ذرات کروی از دانه‌های جامد خاک با شعاع معین، می‌توان مطابق شکل (۲) حجم مورد نظر را به قطعاتی کوچکتر تقسیم نموده و با محاسبه هرکدام به طور جداگانه، حجم کلی محتوای آب را بدست آورد. بنابراین همان طور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، محتوای آب لنز به سه حجم کوچکتر

تقسیم نموده و با محاسبه هر کدام به طور جداگانه، حجم کلی محتوای آب را بدست آورد. بنابراین مطابق این شکل، محتوای آب لنز به سه حجم کوچکتر تبدیل شده است که هر یک جداگانه قابل محاسبه هستند.



شکل ۳: حجم لنز تشکیل شده آب اطراف ذرات بیضوی خاک در راستای شعاع کوچکتر

معادله ترسیم بیضی در فضای دوبعدی براساس شعاعهای آن به صورت رابطه (۱۵) قابل بیان است:

$$\left(\frac{x}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_2}\right)^2 = 1 \quad (15)$$

با استفاده از انتگرال گیری حجمی در راستای محورهای می توان حجم را به صورت رابطه (۱۶) محاسبه کرد:

$$V_1 = 2\pi R_2 \int_{x=0}^{x=r \cos \theta} x \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{R_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx \quad (16)$$

برای محاسبه حجم V_2 بایستی ابتدا مساحت قطعه مورد نظر با زاویه مرکزی 2ϕ را حساب نموده و انتگرال حجمی آن را با استفاده از فاصله مرکز سطح این قطعه تا مرکز ذره جامد بیضوی بدست آورد. بنابراین مساحت قطعه مورد نظر برابر است با:

$$A_2 = r_1^2 (2\phi) \quad (17)$$

برای بدست آوردن مرکز سطح مساحت این قطعه می توان از نسبت گشتاور سطح به مساحت آن استفاده کرد. بدین ترتیب با توجه به شکل (۳) می توان نوشت:

همچنین فاصله مرکز سطح مثلث از مرکز دانه جامد خاک d_3 به صورت رابطه (۱۳) قابل بیان است:

$$d_3 = \frac{2}{3} r_1 \cos 2\phi \quad (13)$$

و در نتیجه حجم V_3 با دوران مساحت مثلث حول محورها به صورت رابطه (۱۴) بدست می آید:

$$V_3 = 2\pi A_3 (r_1 + r_2 - d_3) \quad (14)$$

و در نهایت حجم کلی محتوای آب اطراف ذرات کروی با شعاع مشخص قابل محاسبه و ارزیابی خواهد بود.

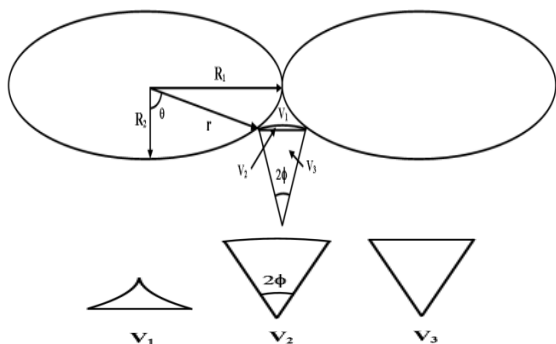
۴- محاسبه محتوای آب ذرات بیضوی

برای محاسبه مقدار مکش در بین ذرات با شکل فضائی بیضی، فرض بر این است که هر ذره از دانه های جامد خاک دارای دو شعاع متفاوت است که مطابق شکل (۳) شعاع بزرگتر R_1 و دیگری R_2 نام گذاری شده است. همچنین نحوه قرارگیری هر دو ذره بیضوی بر روی هم عمدتاً در سه حالت امکان پذیر است. حالت اول زمانی است که هر دو ذره در راستای شعاع کوچکتر بر روی هم قرار بگیرند (شکل (۳)). حالت دوم در صورتی اتفاق می افتد که هر دو ذره از طرف شعاع بزرگتر بر هم سوار شوند و در حالت سوم این امکان وجود دارد که دو ذره به صورتی در کنار هم قرار بگیرند که یکی با شعاع کوچکتر و دیگری با شعاع بزرگتر در یک راستا بر هم نیرو وارد کنند (شکل های (۴) و (۵)). اگرچه در واقعیت فرض بر بیضوی بودن ذرات با کمی خطا مورد پذیرش است، اما همواره این حقیقت وجود دارد که هر دو ذره ای که مورد تحلیل قرار می گیرند لزوماً دارای شعاع های یکسان در هر دو راستا نمی باشند. بنابراین فرض بر هم اندازه بودن ذرات بیضوی نیز از دیگر ملزومات در انجام محاسبات مربوط به مکش آب و تعیین محتوای آب لنز است. البته همان طور که اشاره شد، با کمی اغماض کیفیت قرارگیری ذرات در کنار هم نیز به سه شیوه در نظر گرفته شد، که شاید در واقعیت تعدادی از حالات را پوشش ندهد.

۵- محاسبه محتوای آب ذرات بیضوی در راستای

شعاع کوچکتر

برای محاسبه حجم لنز آب موجود در اطراف ذرات بیضوی از دانه های جامد خاک در راستای شعاع کوچکتر، می توان مطابق شکل (۳) حجم مورد نظر را به قطعاتی کوچکتر



شکل ۴: حجم لنز تشکیل شده آب اطراف ذرات بیضوی خاک در راستای شعاع بزرگتر

حجم مثلث دوران یافته به دور دانه جامد خاک، V_3 با استفاده از چرخش مساحت مثلث بدست می‌آید. در نتیجه حجم V_3 مطابق رابطه (۲۵) با دوران مساحت مثلث حول محور x ها به صورت رابطه (۲۵) بدست می‌آید:

$$V_3 = \pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{2}{3} r_1 \cos 2\phi \right) \sin 4\phi \quad (25)$$

۷- محاسبه محتوای آب ذرات بیضوی در راستای

شعاع بزرگ و کوچک

برای محاسبه حجم لنز آب موجود در اطراف ذرات بیضوی از دانه‌های جامد خاک در راستای شعاع بزرگ و کوچک بصورت توأمان، باید مطابق شکل (۵) حجم مورد نظر را به قطعاتی کوچکتر تقسیم نموده و با محاسبه هر حجم، میزان محتوای آب لنز را بدست آورد. بنابراین حجم کلی لنز آب به صورت رابطه (۲۶) بدست می‌آید:

$$V = (V_{1a} - V_{2a} + V_{3a}) + (V_{1b} - V_{2b} + V_{3b}) \quad (26)$$

با استفاده از انتگرال گیری حجمی در راستای محور x_1 ها می‌توان حجم V_{1a} را به صورت رابطه (۲۷) محاسبه کرد:

$$V_{1a} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=r \sin \theta_1} 2\pi y_1 (R_1 - x_1) dy_1 \quad (27)$$

حجم V_{1b} نیز مشابه انتگرال فوق حول محور x_2 ها بدست خواهد آمد:

$$V_{1b} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=r \sin \theta_2} 2\pi y_2 (R_2 - x_2) dy_2 \quad (28)$$

برای محاسبه حجم V_{2a} بایستی ابتدا مساحت قطعه مورد نظر با زاویه مرکزی ϕ_1 را حساب نموده و انتگرال حجمی آن را با استفاده از فاصله مرکز سطح این قطعه تا مرکز ذره

$$d_2 = \frac{2}{3} r_1 \frac{\sin 2\phi}{2\phi} \quad (18)$$

لذا حجم V_2 توسط چرخش مساحت قطعه مورد نظر حول محور y ها به صورت رابطه (۱۹) قابل محاسبه است:

$$V_2 = 4\pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{r_1 \sin 2\phi}{3\phi} \right) \phi \quad (19)$$

حجم مثلث دوران یافته حول دانه خاک V_3 ، با استفاده از چرخش مساحت مثلث به صورت رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود:

$$A_3 = r_1^2 \cos 2\phi \sin 2\phi \quad (20)$$

همچنین فاصله مرکز سطح مثلث از مرکز دانه جامد خاک به طریق رابطه (۲۱) قابل بیان است:

$$d_3 = \frac{2}{3} r_1 \cos 2\phi \quad (21)$$

و در نتیجه حجم V_3 به صورت زیر با دوران مساحت مثلث حول محور y ها بدست می‌آید:

$$V_3 = 2\pi A_3 (r_1 + r_2 - d_3) \quad (22)$$

۶- محاسبه محتوای آب ذرات بیضوی در راستای

شعاع بزرگتر

جهت محاسبه مقدار حجم لنز آب موجود در اطراف ذرات بیضوی از دانه‌های جامد خاک در راستای شعاع بزرگتر، می‌توان مطابق شکل (۴) حجم مورد نظر را به قطعاتی کوچکتر تقسیم نموده و با محاسبه هر کدام به طور جداگانه، حجم کلی محتوای آب را بدست آورد.

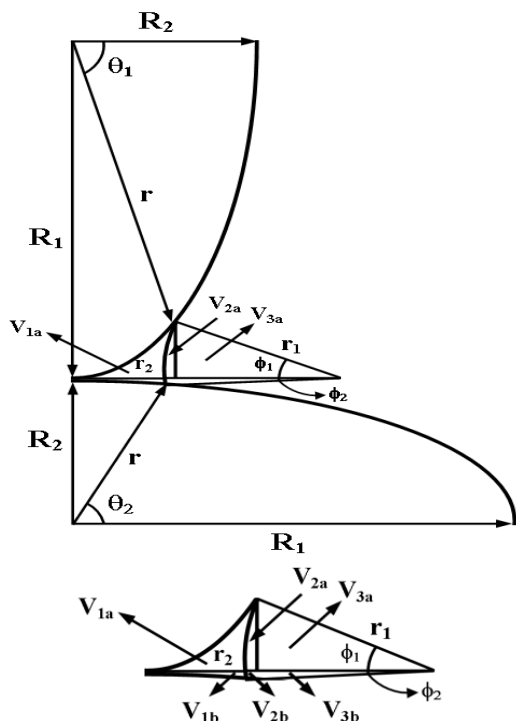
با استفاده از انتگرال گیری حجمی در راستای محور y ها می‌توان حجم V_1 را به صورت رابطه (۲۳) محاسبه کرد:

$$V_1 = \int_{y=0}^{y=r \sin \theta} 2\pi y (R_1 - x) dy \quad (23)$$

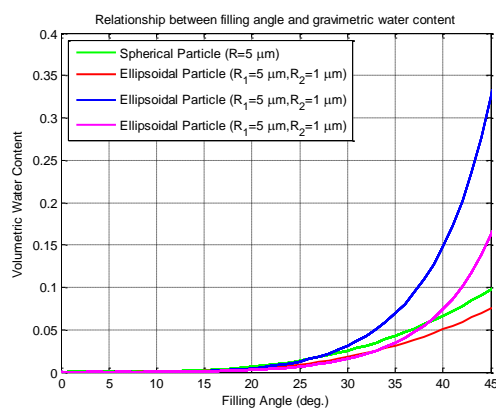
برای محاسبه حجم V_2 بایستی ابتدا مساحت قطعه مورد نظر با زاویه مرکزی 2ϕ را حساب نموده و انتگرال حجمی آن را با استفاده از فاصله مرکز سطح این قطعه تا مرکز ذره جامد بیضوی بدست آورد. از این رو حجم V_2 با چرخش مساحت قطعه مدنظر حول محور x ها مطابق رابطه (۲۴) قابل محاسبه است:

$$V_2 = 4\pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{r_1 \sin 2\phi}{3\phi} \right) \phi \quad (24)$$

تا حدود ۰.۰۷۵ افزایش می‌یابد. لذا در مقایسه با ذرات کروی افزایش زاویه θ باعث کاهش در مقدار محتوای حجمی آب می‌شود، که این به دلیل تغییر هندسه ذرات است.



شکل ۵: تشکیل شده آب اطراف ذرات بیضوی خاک در حالت شعاع بزرگ و کوچک در راستای هم



شکل ۶: محتوای حجم لنز آب اطراف ذرات بیضوی در مقابل افزایش زاویه پرکنندگی

همان‌طور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود، مقدار محتوای حجمی آب لنز اطراف ذرات بیضوی در راستای شعاع بزرگتر با افزایش زاویه پرکنندگی θ ، به نسبت ذرات بیضوی که در راستای شعاع کوچکتر بر هم قرار دارند، رشدی در حدود دو برابر دارد. علت این امر نحوه قرارگیری ذرات بیضوی بر روی هم در دو حالت مختلف است که به نظر

جامد بیضوی بدست آورد. لذا حجم V_{2a} توسط چرخش مساحت قطعه مورد نظر حول محور x_1 ها به صورت رابطه (۲۹) قابل محاسبه است:

$$V_{2a} = 2\pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{2r_1 \sin \phi_1}{3} \right) \phi_1 \quad (29)$$

همچنین حجم V_{2b} با دوران مساحت قطعه مورد نظر حول محور x_2 ها به صورت رابطه (۳۰) محاسبه می‌شود:

$$V_{2b} = 2\pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{2r_1 \sin \phi_2}{3} \right) \phi_2 \quad (30)$$

حجم مثلث دوران یافته به دور دانه جامد خاک V_{3a} ، با استفاده از چرخش مساحت مثلث فوقانی در شکل (۵) بدست می‌آید. لذا حجم V_{3a} با دوران مساحت مثلث حول محور x_1 ها به صورت رابطه (۳۱) بدست می‌آید:

$$V_{3a} = \pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{2}{3} r_1 \cos \phi_1 \right) \sin 2\phi_1 \quad (31)$$

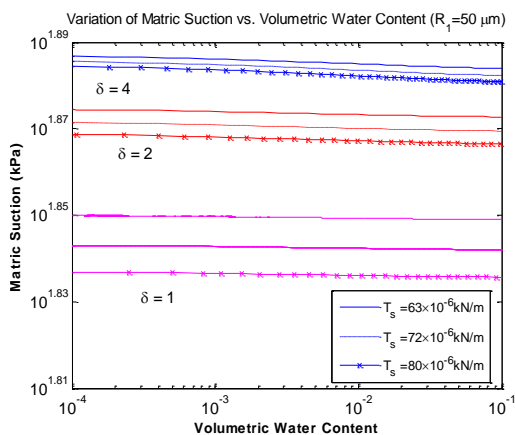
حجم مثلث دوران یافته پیرامون دانه جامد V_{3b} ، با استفاده از چرخش مساحت مثلث تحتانی حول محور x_2 ها به صورت رابطه (۳۲) بدست می‌آید:

$$V_{3b} = \pi r_1^2 \left(r_1 + r_2 - \frac{2}{3} r_1 \cos \phi_2 \right) \sin 2\phi_2 \quad (32)$$

و در نهایت با مشخص شدن احجام، حجم کلی محتوای آب اطراف ذرات بیضوی در راستای شعاع بزرگ و کوچک نیز محاسبه خواهد شد.

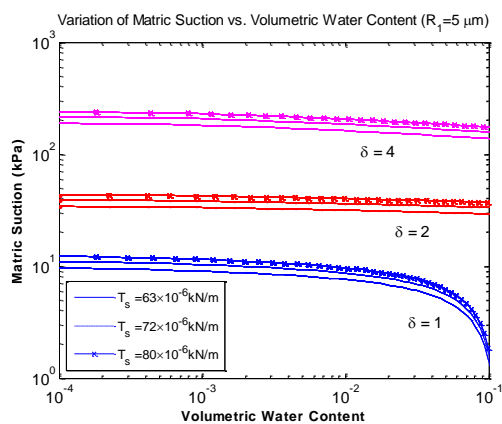
۸- ارزیابی تغییرات محتوای آب لنز به ازای افزایش زاویه پرکنندگی

در این قسمت مقدار محتوای آب لنز اطراف ذرات برای حالات مختلف نسبت به افزایش زاویه پرکنندگی مورد بررسی قرار گرفته است. لذا با ثابت نگاه داشتن دو شعاع R_1 و R_2 ، می‌توان با تغییر چیدمان ذرات، تغییرات حجم لنز را جستجو نمود. لذا مطابق شکل (۶)، در حالت کلی فارغ از هندسه ذرات با افزایش مقدار زاویه پرکنندگی، مقدار محتوای حجمی لنز افزایش می‌یابد. بنابراین شکل برای ذرات دایروی، تغییرات محتوای آب لنز از مقدار صفر در $\theta = 0^\circ$ به مقدار ۰.۱ در زاویه $\theta = 45^\circ$ می‌رسد. با توجه به شکل این مقدار برای ذرات بیضوی که در راستای شعاع کوچکتر بر روی هم قرار گرفته‌اند، از حداقل مقدار



شکل ۷: تغییرات مکش ماتریسی ذرات بیضوی در مقابل افزایش محتوای آب لنز ($R_1 = 5 \mu m$)

با توجه به شکل (۷) مشاهده می‌شود که مقادیر مکش ماتریسی برای حالات مختلف از ذرات خاک غیراشباع، مقداری مثبت بدست آمده است. لذا به راحتی می‌توان دریافت که شعاع خارجی لنز از شعاع داخلی آن کوچکتر انتخاب شده است ($r_1 < r_2$). در شکل (۸) نیز تغییرات مکش ماتریسی برای مقدار کوچکتری از شعاع R_1 در مقابل محتوای آب ترسیم شده است، اما روند تغییرات مکش مشابه شکل (۷) می‌باشد. ولی با مقایسه دو شکل (۷) و (۸) می‌توان فهمید که با کاهش مقدار شعاع بزرگ‌تر از ذرات بیضوی، مقدار مکش ماتریسی بسیار بزرگ‌تر خواهد شد. بنابراین می‌توان گفت که اعمال مقادیر مکش برای شعاع‌های کوچکتر بسیار لازم به نظر می‌رسد.



شکل ۸: تغییرات مکش ماتریسی ذرات بیضوی در مقابل افزایش محتوای آب لنز ($R_1 = 5 \mu m$)

به طور کلی در مورد ذرات کروی در خاک‌های غیراشباع با افزایش محتوای آب لنز اطراف ذرات جامد، مقدار مکش ماتریسی بوجود آمده به طور محسوسی کاهش می‌یابد. لذا مطابق شکل‌های (۷) و (۸) در مورد ذرات کروی به ترتیب

می‌رسد در چیدمان دوم به لحاظ هندسی، مقدار حجم ساخته شده حفرات بیشتر از حالتی است که ذرات از سمت شعاع کوچک خود بر روی هم قرار دارند. همچنین با افزایش زاویه θ ، مقدار محتوای حجمی لنز اطراف ذرات بیضوی در حالتی که یک ذره در راستای شعاع کوچک بر روی ذره ای در راستای شعاع بزرگ‌تر قرار گیرد نیز افزایش می‌یابد، اما روند این افزایش مقداری ما بین دو چیدمان قبلی می‌باشد.

۹- منحنی مشخصه آب و خاک

به طور کلی برای لنز آب با شعاع‌های r_1 و r_2 ، مقدار مکش ماتریسی به زاویه تماس آب و خاک α ، بستگی ندارد. لذا در مجموع سه رژیم متفاوت برای مقدار فشار $u_a - u_w$ امکان دارد که به مقادیر r_1 و r_2 وابسته‌اند:

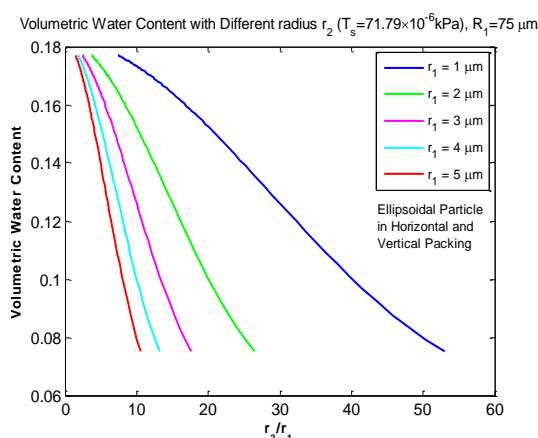
(الف) اگر $r_1 < r_2$ باشد، مقدار فشار آب کاهش می‌یابد، لذا مکش ماتریسی مقداری مثبت خواهد داشت.

(ب) چنانچه $r_1 = r_2$ برقرار شود، هیچ تغییر فشاری در سطح مشترک آب و هوا اتفاق نمی‌افتد. به عنوان مثال هنگامی که ماسه در آستانه اشباع شدن قرار می‌گیرد، چنین حالتی رخ می‌دهد.

(ج) زمانی که $r_1 > r_2$ اتفاق افتد، فشار آب افزایش یافته و در نتیجه مقدار مکش منفی می‌شود. این مورد بیشتر زمانی اتفاق می‌افتد که حفره‌ای بزرگ در بین ذرات خاک وجود داشته باشد.

همان‌طور که در شکل (۷) مشخص می‌باشد تغییرات مکش ماتریسی برای نسبت‌های متغیری از شعاع ذرات به ازای افزایش محتوای آب اطراف دانه‌ها توسط سه دسته منحنی ترسیم شده است. لذا در حالت کلی با افزایش مقدار محتوای آب لنز، مقدار مکش ماتریسی کاهش می‌یابد. دلیل این امر این است که با افزایش θ ، مقدار حجم آب لنز اطراف ذرات افزایش یافته و در نتیجه مقدار مکش کم می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر $\delta = R_1/R_2$ که منجر به تغییر هندسه ذرات از شکل دایروی به بیضوی می‌شود، مقدار مکش نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر این شکل زیر جهت بررسی کیفیت کشش سطحی بر تغییرات مکش، برای سه مقدار متفاوت از آن ترسیم شده است. بنابراین مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار کشش سطحی، مکش ماتریسی نیز در تمامی حالات افزایش یافته است، که البته با استفاده از رابطه (۱) قابل دریافت می‌باشد.

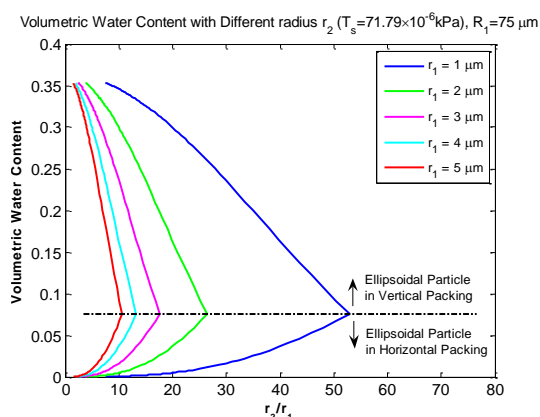
افقی بر روی هم قرار دارند، مقدار محتوای آب افزایش می‌یابد که این روند صعودی برای مقادیر کوچک از r_1 بسیار شدیدتر نیز می‌باشد. اما روند تغییرات محتوای آب برای ذرات بیضوی که به صورت قائم بر روی هم قرار دارند، با افزایش نسبت شعاع‌های لنز نزولی خواهد بود. البته این رفتار متفاوت در دو حالت به سبب محدودیت ایجاد شده در تغییر مقدار برای شعاع‌های لنز با توجه به هندسه چیدمان ذرات بیضوی بر روی هم می‌باشد. به طور مثال در حالتی که ذرات به صورت افقی بر روی هم قرار دارند در واقع از سمت شعاع کوچکتر برهم سوار شده‌اند و لذا افزایش شعاع r_2 نسبتاً امکان‌پذیر است. اما در حالت دیگر چون شعاع r_2 در جهت شعاع کوچک R_2 قرار دارد، افزایش آن با محدودیت مواجه خواهد شد.



شکل ۱۰: تغییرات افزایش محتوای آب لنز در مقابل تغییر نسبت شعاع‌های لنز برای حالت سوم از چیدمان ذرات بیضوی لازم به توضیح است که منحنی‌های موجود در شکل (۹) برای شعاع بزرگتر بیضی با مقدار $R_1 = 75 \mu\text{m}$ رسم شده است. نکته قابل توجه در این شکل آن است که مقدار حداقل محتوای آب لنز در حالت چیدمان قائم با حداکثر مقدار در چیدمان افقی در یک نقطه به هم می‌رسند، که علت این امر مشابه شدن هر دو حالت با افزایش نسبت شعاع‌های لنز می‌باشد.

همچنین با توجه به شکل (۱۰) تغییرات محتوای آب نسبت به افزایش شعاع r_2 برای حالتی که ذرات بیضوی در دو راستای شعاع بزرگ و کوچک بر روی هم قرار دارند، آورده شده است. مطابق حالت قبلی از چیدمان ذرات بیضوی که به صورت قائم بر روی هم قرار گرفته بودند، در این مورد نیز با افزایش نسبت شعاع‌های لنز r_2/r_1 مقدار محتوای آب کاهش می‌یابد، اما مقادیر آن نسبت به حالت مذکور

با شعاع ثابت ۵۰ و ۵ میکرومتر، با تغییر زاویه پراکنندگی θ ، مقدار محتوای لنز افزایش می‌یابد و به دنبال آن مکش از یک مقدار حداکثر روند نزولی خواهد یافت. به همین ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸)، با افزایش مقدار محتوای آب لنز اطراف ذرات بیضوی در راستای شعاع کوچکتر، مقدار مکش ماتریسی تولیدشده بین ذرات به طرز چشمگیری کاهش می‌یابد، به طوری که این کاهش مقدار به ازای افزایش ۰.۳ برابری محتوای آب لنز در حدود ۱۰۵ کیلوپاسکال خواهد بود. و چنانچه ذرات جامد خاک به شکل بیضوی فرض شده و در راستای شعاع بزرگتر بر روی هم قرار بگیرند، از آنجا که مقدار مکش محاسباتی مثبت خواهد شد، با افزایش محتوای آب، از بزرگی مکش کاسته شده و به سمت مقادیر کم پیش خواهد رفت. بنابراین تغییرات مقدار مکش نسبت به محتوای آب لنز بر طبق شکل‌های (۷) و (۸) برای ذرات بیضوی در راستای شعاع بزرگتر ترسیم می‌شود، که البته این تغییرات روند بسیار کندی را دارا است. لازم به توضیح است که تغییر مقدار محتوای آب براساس تغییر شعاع‌های لنز آب اطراف ذرات می‌باشد و ناشی از دگرگونی هندسی ذرات نیست. لذا منحنی‌های ترسیم شده در شکل‌های (۷) و (۸) برای شعاع بزرگتر ثابت و شعاع کوچکتر متغیر در ذرات بیضوی حاصل شده است.



شکل ۹: تغییرات محتوای آب لنز در مقابل نسبت شعاع‌ها

۱۰- ارزیابی تغییرات محتوای آب در مقابل تغییر نسبت شعاع‌های لنز

یکی از روش‌های اعمال تغییر در مقدار محتوای آب لنز ایجاد تغییرات در مقادیر شعاع‌های لنز آب با شرط ثابت نگهداشتن ابعاد ذرات است. مطابق شکل (۹)، با افزایش نسبت شعاع‌های لنز r_2/r_1 ، برای حالتی که ذرات به صورت

است. برای این کار نحوه قرارگیری ذرات بیضوی بر روی هم به سه حالت مختلف که بیشترین احتمال وقوع را دارند، در نظر گرفته شد و کلیه محاسبات برای هر کدام به طور مجزا انجام گرفت. سپس با استفاده از روابط بدست آمده مقدار محتوای آب اطراف ذرات نسبت به تغییرات شعاعهای لنز، زاویه پرکنندگی، مکش ماتریسی و نسبت شعاع ذرات مورد بررسی قرار گرفته و برای هر کدام از حالات چیدمان ذرات در کنار هم نمودارهایی ارائه شده است. به عنوان یک نتیجه مشاهده شد که برای حداکثر زاویه پرشدگی هر دو ذره در حالت اشباع خاک، محتوای حجمی آب برای چیدمان افقی ذرات بیضوی بیش از ۵ برابر چیدمان قائم بدست می‌آید، که این امر ناشی از افزایش حجم لنز خارجی آب در این حالت می‌باشد. اما این موضوع برای افزایش نسبت شعاع r_2/r_1 کاملاً عکس نتیجه می‌دهد. یعنی با افزایش نسبت مذکور حجم آب لنز حدود ۵ برابر برای چیدمان قائم بیشتر از حالت افقی است که در مورد چیدمان ترکیبی حدود ۵۰ درصد افت حجم وجود دارد. همچنین مطابق منحنی مشخصه آب و خاک بدست آمده مشاهده شد که با تغییر نسبت شعاع خود ذرات از حالت کروی به بیضوی، مکش ماتریسی بین دانه‌ها چند ده برابر تغییر کرده و با افزایش حجم لنز آب، اساساً هیچ تغییر ناگهانی برای کاهش مکش دیده نمی‌شود. هرچند این مطلب با فرض ذرات بزرگتر برای خاک غیراشباع به طور کامل برای ذرات کروی نیز صدق خواهد کرد که علت در مشابهت حجم‌های اضافه شده به آب میان بافتی است. بنابراین با توجه به اینکه فرض دایروی بودن ذرات خاک بسیار ساده‌کننده است، پیشنهاد ارائه شده در فرض ذرات به صورت دانه‌های بیضوی و نتایج حاصل شده در این مقاله افق تازه‌ای را پیش روی محاسبان میکرومکانیک قرار خواهد داد تا بدین ترتیب با در نظر گرفتن درصدی از هر حالت، نمونه واقعی‌تری از ذرات در خاک غیراشباع مدل‌سازی شود.

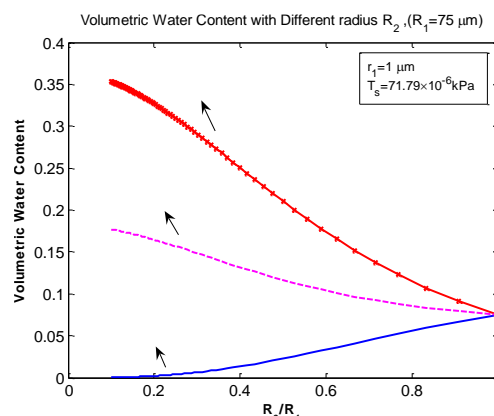
قبل از کاهش یافته است، که به علت نزدیکی چیدمان در حالت سوم به هر دو حالت قبلی است.

۱۱- ارزیابی تغییرات محتوای آب لنز در مقابل

تغییر نسبت شعاع ذرات بیضوی

یکی دیگر از روش‌های افزایش و یا کاهش مقدار محتوای آب لنز تشکیل شده در محل تماس بین هر دو ذره از خاک غیراشباع، اعمال تغییر در مقادیر شعاع‌های ذرات می‌باشد. در حالتی که دانه‌های جامد خاک بصورت بیضوی فرض شوند، با افزایش در مقدار شعاع کوچک R_2 نسبت به مقدار ثابت R_1 می‌توان مقادیر مختلفی از محتوای آب را بدست آورد. لذا مطابق شکل (۱۱)، در حالتی که ذرات بیضوی از سمت شعاع کوچک‌تر بر روی هم قرار گرفته‌اند، با افزایش شعاع R_2 مقدار محتوای آب لنز نیز طبیعتاً افزایش می‌یابد. اما در حالتی که ذرات بیضوی در راستای شعاع بزرگتر در کنار هم قرار دارند، مقدار محتوای آب با افزایش شعاع R_2 به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

همچنین در حالتی که ذرات در راستای دو شعاع بزرگ و کوچک بر روی هم قرار دارند، کاهش در مقدار محتوای آب لنز مشابه با حالت دوم بوده و حاصل از افزایش در مقدار شعاع کوچک R_2 است. نکته قابل توجه دیگر در شکل (۱۱) همگرایی منحنی‌های هر سه حالت در یک نقطه است. و این بدین معناست که مقدار محتوای آب برای ذرات کروی به چیدمان دانه‌ها بر روی هم بستگی ندارد.



شکل ۱۱: تغییرات افزایش محتوای آب لنز به ازای افزایش نسبت شعاع ذرات بیضوی

۱۲- نتیجه‌گیری

در این مقاله با فرض بیضوی بودن دانه‌های جامد، مقدار محتوای لنز آب تشکیل شده در محل تماس هر دو ذره از خاک غیراشباع با استفاده از روش حجمی محاسبه شده

۱۳- مراجع

- [1] H. Fricke, "The electric conductivity and capacity of disperse systems", *Physics*, Vol. 1, 1931, pp.106-115.
- [2] M.R.J. Wyllie, and A. R. Gregory, "Formation factors of unconsolidated porous media: Influence of particle shape and effect of cementation", *Journal of Petroleum Technology*, Vol. 5, 1953, pp.103-109.
- [3] R.E. Meredith, and C. W. Tobias, "Conduction in heterogeneous systems", *Adv. Electrochem. Electrochem. Eng.*, Vol. 2, 1962, pp.15-47.
- [4] R.W. Zimmerman, "Effective conductivity of a two-dimensional medium containing elliptical inhomogeneities", *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, Vol. 47, 1996, pp.1713-1727.
- [5] D. Coelho, J. F. Thovert, and P. M. Adler, "Geometrical and transport properties of random packings of spheres and aspherical particles", *Phys. Rev. E.*, Vol. 55, 1997, pp.1959-1978.
- [6] K. Shinohara, M. Oida, B. Golman, "Effect of particle shape on angle of internal friction by triaxial compression test", *Powder Technology*, Vol. 107, No. 1-2, 2000, pp.131-136.
- [7] J. Dodds, "Particle Shape and Stiffness-Effects on Soil Behavior", Atlanta, Ga, USA: Institute of Technology, 2003, pp.121-122.
- [8] Q-B.mLiu, W. Xiang, M. Budhu, D-S. Cui, "Study of particle shape quantification and effect on mechanical property of sand", *Rock and Soil Mechanics*, Vol. 32, No. 1, 2011, pp.190-197.
- [9] K. Johanson, "Effect of particle shape on unconfined yield strength", *Powder Technology*, Vol. 194, No. 3, 2009, pp. 246-251.
- [10] C. Tuitza, U. Exnera, M. Frehnera, B. Grasmanna, "The impact of ellipsoidal particle shape on pebble breakage in gravel", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 54, 2012, pp. 70-79.
- [11] R. Barbosa, and J. Ghaboussi, "Discrete finite element method", *Engineering Computations*, Vol. 9, 1992, pp. 253-266.
- [12] A.W. Bishop, "The principle of effective stress", *Teknisk Ukeblad I Samarbeide Med Teknisk, Oslo, Norway*, Vol. 106, No. 39, 1959, pp. 859-863.
- [13] A.W. Bishop, "The measurement of pore pressure in the triaxial test," *Conf. British Nat. Soc. Of Int. Soil Mech. and Found. Engrg.*, Butterworth's, London., 1961, pp. 38-46.
- [14] A.W. Bishop, I. Alpan, G.E. Blight, and I.B. Donald, "Factors controlling the shear strength of partially saturated cohesive soils," *ASCE Conf. Shear Strength of Cohesive Soils*, Boulder, CO, 1960, pp. 503-532.
- [15] D.G. Fredlund, and H. Rahardjo, "Soil Mechanics for Unsaturated Soils", *Wiley Inter Science*, 1993.
- [16] X. Lin, and T.T. NG, "A three-dimensional discrete element model using arrays of ellipsoids", *Geotechnique*, Vol. 47, No. 2, 1997, pp. 319-329.
- [17] N. Lu, and W. J. Likos, "Unsaturated Soil Mechanics", *John Wiley & Sons*, 2004.
- [18] H.G. Matuttis, S. Luding, and H.J. Herrmann, "Discrete element simulations of dense packings and heaps made of spherical and non-spherical particles", *Powder Technology*, Vol. 109, No. 1, 2000, pp. 278-292.
- [19] M. Sallam, Amr, "Studies on Modeling Angular Soil Particles Using the Discrete Element Method", Ph.D. Dissertation, University of South Florida, United State of America, 2004, pp. 182-185.
- [20] J. Ting, M. Khawaja, L. Meachum, and J. Rowell, "An ellipse-based discrete element model for granular materials", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 17, 1993, pp. 603-623.
- [21] J. Ting, L. Meachum, and J. Rowell, "Effect of particle shape on the strength and deformation mechanisms of ellipse-shaped granular assemblages", *Engineering Computations*, Vol. 12, 1995, pp. 99-108.