

تعیین محدوده شتاب قابل قبول برای ربات کابلی معلق

محمود رسولی^۱ و امین نیکوبین^{۲*}

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله روشی جهت تعیین محدوده شتاب قابل قبول برای مجری نهایی ربات‌های کابلی معلق در نقاط مختلف فضای کاری ارائه می‌شود. این تحلیل شتاب برای ربات‌های کابلی با فضای کاری دینامیکی ربات‌ها متفاوت می‌باشد. در حقیقت در فضای کاری دینامیکی، آن محدوده از فضای کاری ربات که نقطه انتهایی می‌تواند با شتاب مورد نظر حرکت کند بدست می‌آید. در صورتی که در تحلیل پیشنهادی در این مقاله محدوده شتابی که نقطه انتهایی ربات در هر نقطه از فضای کاری در جهات مختلف می‌تواند داشته باشد بدست می‌آید. به این منظور بعد از استخراج روابط سینماتیک یک ربات چهار کابلی معلق، معادله‌های دینامیکی این ربات با استفاده از رابطه لاگرانژ استخراج می‌شود. سپس با توجه به قید مثبت بودن کشش کابل‌ها و همچنین قید محدود بودن گشتاور تولیدی موتورها، روابط بدست آمده به گونه‌ای ساده خواهند شد که ارتباط بین این قیدها و شتاب‌های مجری نهایی ربات، نمایان گردد به طوری که به ازای برقراری قید اول، حد پایین شتاب‌ها و به ازای برقراری قید دوم، حد بالای شتاب‌ها بدست خواهند آمد. با شبیه سازی‌های انجام گرفته محدوده شتاب قابل قبول در نقاط مختلف فضای کاری بدست می‌آید. از نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که محدوده شتاب به صورت یک هرم با قاعده لوزی شکل می‌باشد. بنابراین محدوده مجاز شتاب در جهات مختلف کاملاً متفاوت می‌باشد.	دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۴/۱۸ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۲۵
	واژگان کلیدی: ربات کابلی، شتاب مجری نهایی، فضای کاری دینامیکی، محدوده شتاب قابل قبول، قید مثبت بودن کشش، قید محدودیت گشتاور موتورها.

۱- مقدمه

مکانیزم‌های مختلفی برای ربات‌های کابلی ارائه شده است. اولین نمونه از ربات‌های کابلی در سال ۱۹۹۳ توسط آلپوس و همکارانش به نام روبو کرین^۳ در مؤسسه ملی استاندارد و تکنولوژی آمریکا برای صنعت کشتی سازی و بندرها ارائه گردید. در این ربات نیروی گرانش باعث ایجاد کشش در کابل‌ها در تمامی فضای کاری ربات می‌شود. این ربات از نوع ربات‌های کابلی فضایی و مقید ناقص بوده که مجری نهایی^۴ آن به صورت یک جسم صلب مدل شده است [۱]. در سال ۲۰۰۰ کاوامورا و همکارانش یک ربات کابلی سرعت بالا به نام فالکون^۵ که دارای شش درجه آزادی بوده و

ربات‌هایی با محرک‌های کابلی یا ربات‌های کابلی، نوع خاصی از ربات‌های موازی هستند که در آن‌ها کابل‌ها به جای مفصل بندی بازوهای صلب مورد استفاده قرار می‌گیرند. نکته مهم در رابطه با ربات‌های کابلی آن است که در آن‌ها باید همواره کابل‌ها تحت کشش باشند زیرا یک کابل توانایی مقاومت در برابر بارهای فشاری را ندارد. از طرفی ربات‌های کابلی در مقایسه با ربات‌های موازی دارای ویژگی‌های مطلوبی مثل فضای کاری^۲ بزرگ، اینرسی پایین، مصرف کم انرژی و بازده‌ای بالا هستند. تا کنون

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: anikoobin@semnan.ac.ir

۱. دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی

مکانیک، دانشگاه سمنان

۲. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

2 workspace

3 robocrane

1 end-effector

5 falcon 7

متحرک به صفحه پایه و تغییر در زاویه چرخش صفحه متحرک، نشان داده‌اند که به ازای برابر بودن ابعاد صفحه متحرک با صفحه پایه و همچنین صفر بودن زاویه چرخش صفحه متحرک، بزرگترین فضای کاری استاتیکی ربات بدست خواهد آمد [۶]. فضای کاری دینامیکی توسط گازلین و همکارانش در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است. در این نوع فضای کاری با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از شتاب‌های مورد نظر برای حرکت مجری نهایی، به بررسی وضعیت‌هایی از ربات که در آن مجری نهایی بتواند این نوع نیروها را تولید نماید و کابل‌ها نیز همواره تحت کشش باشند، پرداخته شده و مرز آن برای یک ربات شش کابلی صفحه ای که مجری نهایی آن یک میله صلب است، به صورت تحلیلی بررسی شده است [۷]. فام و همکارانش در سال ۲۰۰۹ با توجه به شرایط و محدودیت‌های کششی کابل‌ها، برای ربات‌های مقید کامل دو نوع فضای کاری تعریف کرده‌اند. در نوع اول با توجه به شرط بزرگتر از صفر بودن مقدار نیروی کششی کابل‌ها و نامحدود بودن آن، به بررسی وضعیت‌هایی پرداخته‌اند که تعادل استاتیکی ربات با وجود نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر مجری نهایی، حفظ شود. این نوع فضای کاری تنها به پارامترهای هندسی ربات وابسته است. در نوع دوم با توجه به محدود بودن شرط نیروی کششی کابل‌ها، به بررسی وضعیت‌هایی پرداخته‌اند که تعادل استاتیکی ربات به ازای هر مقدار و همچنین کمترین مقدار نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر مجری نهایی، حفظ شود. این نوع فضای کاری نه تنها به پارامترهای هندسی ربات بستگی دارد بلکه به محدوده کشش کابل‌ها، اثر گرانش و بارهای دینامیکی نیز وابسته است [۸]. در سال ۲۰۱۵ میری‌پور فرد و همکارش با هدف توان بخشی بیماران، مدل دینامیک یک بیمار را بر روی تردمیل شبیه سازی کرده و معادلات سینماتیک و دینامیک مدل را به گونه‌ای حل کرده که در طول راه رفتن، مدل همواره در فضای کنترل پذیر ربات باقی بماند تا عمل توان بخشی به طور مؤثر انجام شود [۹]. در سال ۲۰۱۵ قاسمی به طراحی کنترلر تطبیقی برای یک ربات شش کابلی فضایی با شش درجه آزادی به منظور ردیابی مسیر مطلوب از پیش تعیین شده و همچنین تضمین پایداری ربات با وجود عدم قطعیت در جرم و ممان‌های اینرسی مجری

شتاب آن تا ۴۰ برابر شتاب جاذبه رسانده می‌شود، ارائه نمودند. این ربات از نوع ربات‌های کابلی فضایی بوده و دارای فضای کاری محدود می‌باشد که به منظور ایجاد کشش در کابلها از هفت کابل استفاده شده است. بنابراین ربات فوق دارای یک درجه افزونگی محرکی است و مقید کامل می‌باشد [۲]. می‌هیو و همکارانش در سال ۲۰۰۵ ربات مک آرم^۶ را که در زمینه توان بخشی عصبی اندام فوقانی قابل استفاده است، ارائه کردند. موقعیت مجری نهایی این ربات توسط هشت کابل کنترل می‌شود. این ربات از نوع ربات‌های کابلی فضایی مقید کامل می‌باشد که مجری نهایی آن به صورت یک جسم صلب مدل شده است [۳]. در سال ۲۰۰۷ بوشر و همکارانش یک مکانیزم کابلی به نام سی ۲۴ را برای کاربرد در صنعت ساختمان سازی ارائه نمودند. این ربات کابلی از نوع فضایی و مقید کامل بوده که مجری نهایی آن به صورت یک جسم صلب می‌باشد [۴].

تعریف فضای کاری برای ربات‌های کابلی با توجه به قید یک طرفه بودن نیروی کششی کابل‌ها، متفاوت با سایر ربات‌هاست. فضای کاری در ربات‌های غیر کابلی، به نقاطی گفته می‌شود که در آن‌ها معادلات سینماتیک معکوس و مستقیم دارای جواب هستند اما در مورد ربات‌های کابلی غیر از شرط دسترسی ربات به نقاط فضای کاری، همواره باید شرط مثبت بودن نیروی کششی کابلها را نیز در نظر گرفت. بنابراین فضای کاری یکی از مباحث‌های مهم در زمینه طراحی ربات‌های کابلی است که تا کنون توسط محققان مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای ربات‌های کابلی انواع مختلفی از فضای کاری ارائه شده که متداول‌ترین آن‌ها عبارت است از: فضای کاری استاتیکی، فضای کاری چرخشی، فضای کاری کنترل پذیر و فضای کاری دینامیکی. ویلیامز و همکارانش در سال ۲۰۰۱ با معرفی فضای پوچی ماتریس ژاکوبین، به توضیح روشی برای مثبت کردن نیروی کششی کابل‌ها پرداخته و فضای کاری استاتیکی دو نوع ربات کابلی صفحه‌ای را بدست آورده‌اند [۵]. پوزی و همکارانش در سال ۲۰۰۴ با معرفی داشتن بزرگترین فضای کاری به عنوان یکی از هدف‌های طراحی ربات‌های کابلی، به بررسی فضای کاری استاتیکی یک ربات کابلی معلق شش درجه آزادی که دارای شش کابل می‌باشد، پرداخته‌اند. آن‌ها با تغییر نسبت ابعاد هندسی صفحه

7 C4

6 macarm

یافت. همچنین این روش برای تشریح مسیر حرکت متناوب و انتقالی برای نوسان در طول یک مسیر مستقیم نیز پیشنهاد می‌شود [۱۴]. در سال ۲۰۱۷ برابزا و همکارانش به طراحی مسیر برای نوع خاصی از ربات‌های کابلی که قابلیت پیکربندی مجدد دارند، پرداخته‌اند. در این پژوهش نقاط اتصال کابل بر روی مجری نهایی ربات به گونه‌ای تغییر می‌کند که احتمال برخورد بین کابل‌ها و همچنین برخورد مجری نهایی با موانع موجود در مسیر حرکت ربات کاهش می‌یابد. برابزا با بهینه سازی مسیر حرکت ربات، زمان کلی جابجایی مجری نهایی از نقطه‌ای به نقطه دیگر را کاهش داده و از طرفی با تغییر به موقع نقاط اتصال کابل بر روی مجری نهایی و ترکیب کردن پیکربندی‌های جدید حاصل، فضای کاری ربات را افزایش داده است. این نتایج بر روی یک ربات چهار کابلی معلق مقید ناقص با سه درجه آزادی بررسی شده‌اند [۱۵]. در سال ۲۰۱۷ کوچ و همکارانش به طراحی حل کننده مسیر حرکت برای یک ربات چهار کابلی فضایی که مجری نهایی آن یک دوربین است پرداخته‌اند. این حل کننده با دانستن موقعیت و جهت سرعت فعلی دوربین و شیء مدنظر، به تعریف موقعیت و جهت سرعت هدف برای دوربین می‌پردازد. هنگام شناسایی موقعیت شیء، این حل کننده مسیر حرکت دوربین را با انتخاب و ترکیب یکی از چهار مسیر از پیش تعریف شده طراحی می‌کند. این حل کننده بر روی یک سیستم ایده‌آل و بدون در نظر گرفتن اغتشاشات خارجی آزمایش شده است [۱۶].

با بررسی و مرور کارهای قبلی مشاهده می‌شود که تا کنون تحلیل کامل و دقیق از محدوده شتاب قابل قبول برای ربات‌های کابلی ارائه نشده است. همانطور که اشاره شد در تحلیل فضای کاری دینامیکی، محدوده‌ای از فضای کاری ربات که بتواند با شتاب مورد نظر حرکت کند بدست می‌آید [۷]. اما اینکه ربات در یک نقطه از فضای کاری حداقل و حداکثر چه شتابی می‌تواند داشته باشد، تاکنون بررسی نشده است. با داشتن محدوده مجاز شتاب در هر نقطه کاری از ربات می‌توان در طراحی مسیر ربات در حرکت‌های سریع و همچنین کنترل ربات استفاده نمود. به عنوان مثال دوربین عنکبوتی که برای فیلم برداری در استادیوم‌ها استفاده می‌شود، لازم است علاوه بر داشتن سرعت بالا، کابل‌ها همواره در حالت کشش باقی بمانند تا حداقل تکان و لرزش دوربین را داشته باشیم. در این نوع ربات با توجه به کاربرد آن، ممکن است جهت حرکت آن به صورت ناگهانی

نهایی، پرداخته است [۱۰]. در سال ۲۰۱۵ سریانی و همکارانش در مقاله‌ای به موضوع رنگ کاری یک ناحیه بزرگ به کمک یک سیستم ربات کابلی پرداخته و اذعان داشته‌اند که همواره داشتن رباتی با فضای کاری بزرگ برای کار در یک منطقه وسیع مناسب نیست. لذا با معرفی ضریب فضای کاری تکراری، به بهینه سازی پارامترهای موثر در طراحی یک ربات کابلی صفحه‌ای معلق با دو لینک صلب پرداخته‌اند به طوری که با تغییر این پارامترها، بهترین فضای کاری ربات حاصل می‌شود [۱۱].

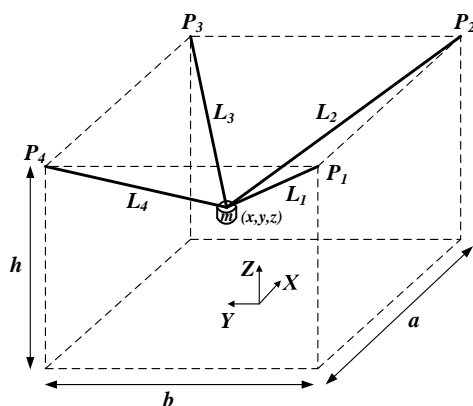
در سال ۲۰۱۶ جیانگ و همکارش بر اساس مدل سینماتیک و دینامیک یک ربات کابلی معلق صفحه‌ای با سه درجه آزادی، مجموعه‌ای از مسیرهایی که مثبت بودن و ثابت بودن نسبت بین نیروی کششی کابل‌ها و طول آنها را تضمین می‌کند بدست آورده‌اند. در طول این مسیرها، کابل‌ها همواره تحت کشش بوده به طوری که با قرارگیری بردار شتاب مجری نهایی در ماتریس ژاکوبین، ربات به نرمی از حالت تکینگی عبور می‌کند [۱۲]. در سال ۲۰۱۶ جیانگ و همکارش به منظور برقراری قید تحت کشش بودن کابل‌ها، مسیر حرکت نقطه به نقطه را ارائه کرده‌اند. مسیر حرکت نقطه به نقطه مجموعه‌ای از نقاط به هم پیوسته است که سرعت نقاط ابتدا و انتهای مسیر صفر بوده درحالی که شتاب پیوسته است. با استفاده از شرایط مرزی فوق و جایگزین کردن کابل‌های یک ربات کابلی معلق سه درجه آزادی با فنرهای دارای سختی ثابت و سپس با حل کردن معادلات دیفرانسیل خطی مربوط به حرکت این سیستم دینامیکی معادل، فرکانس‌های طبیعی سیستم را بدست آوردند. در ادامه با استفاده از این فرکانس‌های طبیعی به طراحی مسیر حرکت نقطه به نقطه پرداخته‌اند. [۱۳]

در سال ۲۰۱۶ ژانگ و همکارانش روش صفحه $\dot{S} - S$ را برای طراحی مسیرهای حرکت نقطه به نقطه و متناوب که به طور کامل در فضای کاری استاتیکی ربات قرار ندارند، ارائه کردند. در این روش ابتدا قید تحت کشش بودن کابل‌ها به قیدهایی هندسی صفحه $\dot{S} - S$ تبدیل شده و سپس مجموعه‌ای از فضاهای کاری قابل دسترسی تعریف شده است که فضایی بزرگتر از فضای کاری استاتیکی ربات دارند. با طراحی مسیر حرکت نقطه به نقطه دینامیکی در صفحه $\dot{S} - S$ به هر نقطه در فضاهای کاری قابل دسترسی به صورت زنجیره‌ای از نقاط فضای کاری استاتیکی، می‌توان دست

پولی‌ها را که در ارتفاع h نصب شده‌اند، نشان می‌دهند. مختصات محل قرار گیری این چهار پولی به صورت رابطه (۱) می‌باشد:

$$P_1 = \left[-\frac{a}{2} \quad -\frac{b}{2} \quad h \right]^T, \quad P_2 = \left[\frac{a}{2} \quad -\frac{b}{2} \quad h \right]^T$$

$$P_3 = \left[\frac{a}{2} \quad \frac{b}{2} \quad h \right]^T, \quad P_4 = \left[-\frac{a}{2} \quad \frac{b}{2} \quad h \right]^T \quad (1)$$



شکل ۱- ربات چهار کابلی معلق

طرحی که برای ساخت این ربات در نظر گرفته شده در شکل (۲) نشان داده شده است. مجری نهایی ربات توسط چهار کابل در فضا به صورت معلق قرار گرفته که حرکت آن توسط چهار سرو موتور کنترل می‌شود. هر کابل به دور قرقره‌ای که با یک سرو موتور کوپل شده است، پیچیده شده است. طول کابلی که به دور قرقره جمع می‌شود، از رابطه (۲) قابل محاسبه است:

$$L = \pi dn \quad (2)$$

که در آن d قطر قرقره و n تعداد دوری است که کابل بر روی قرقره پیچیده شده است. مطابق با شکل (۲) کابل‌ها بعد از جدا شدن از سطح قرقره، از روی یک پولی که دارای دو درجه آزادی چرخشی می‌باشد، عبور کرده و به مجری نهایی متصل می‌شوند.

در شکل (۳) نماهایی از سیستم درام و انتقال نیرو برای ربات کابلی ساخته شده طبق این طرح، نشان داده شده است. در پایان به چهار سری از این مجموعه نیاز است تا ساخت این ربات چهار کابلی معلق تکمیل شود.

۴- استخراج معادلات دینامیک ربات

در این بخش مدل دینامیکی ربات چهار کابلی معلق ارائه می‌شود. جرم مجری نهایی با m نشان داده می‌شود که به

توسط کاربر عوض شود. طبق تحلیل‌های انجام گرفته، شتاب فعلی ربات در شتاب قابل قبول بعدی تاثیرگذار است. همچنین اگر محدوده پایین شتاب رعایت نشود، کشش در کابلها منفی شده (کابل شل می‌شود) و عملگر انتهایی دچار تکان و لرزش شدید می‌شود. بنابراین از محدوده شتاب قابل قبول می‌توان در طراحی مسیر بلادرنگ این نوع ربات استفاده نمود.

در این مقاله بعد از معرفی ربات چهار کابلی معلق مورد بحث و تشریح قطعه‌ها و اجزای بکار رفته در ساخت آن، معادله‌های دینامیکی این ربات با استفاده از رابطه لاگرانژ، استخراج شده و نیروی کششی کابل‌ها و همچنین گشتاور تولیدی موتورها به صورت تابع‌هایی بر حسب شتاب‌های کارترین مجری نهایی، بدست می‌آیند. در ادامه با توجه به قیدهای در کشش بودن کابل‌ها و محدودیت گشتاور تولیدی موتورها، توابع دینامیکی در سه صفحه کاری ربات، ساده می‌شوند.

بدین ترتیب رابطه‌هایی بدست می‌آیند که ارتباط بین پارامترهای سینماتیکی ربات و نیروی کششی کابل‌ها و همچنین گشتاور موتورها را بیان می‌کنند که با استفاده از آن‌ها می‌توان حد پایین و بالای شتاب‌های مجری نهایی ربات را بدست آورد به گونه‌ای که به ازای برقراری قید اول، حد پایین شتاب‌ها و به ازای برقراری قید دوم، حد بالای شتاب‌ها بدست خواهند آمد.

۲- توصیف مکانیزم ربات چهار کابلی معلق

شماتیکی از ربات فوق در شکل (۱) نشان داده شده است. فضای کاری استاتیکی این ربات، مکعب مستطیلی به طول a ، عرض b و ارتفاع h است. دستگاه مختصات ثابت و مرجع، در مرکز مستطیل پایین قرار گرفته است که مختصات محل قرارگیری تمام پولی‌ها و همچنین موقعیت مجری نهایی، نسبت به این دستگاه سنجیده می‌شود.

مجری نهایی این ربات که به صورت یک جرم نقطه‌ای و با جرم m مدل شده، دارای سه درجه آزادی انتقالی در راستای محورهای X, Y, Z می‌باشد که حرکت آن توسط چهار کابل کنترل می‌شود. بنابراین ربات فوق دارای یک درجه افزونگی محرکی بوده و از نوع ربات‌های کابلی معلق مقید ناقص می‌باشد.

برای تغییر طول هر کابل به یک موتور و پولی نیاز است که در شکل (۱) نقاط ثابت $P_i ; i = 1, \dots, 4$ محل قرارگیری

$$L_i = \sqrt{(x - P_{ix})^2 + (y - P_{iy})^2 + (z - P_{iz})^2} \quad (3)$$

$$; \quad i = 1, \dots, 4$$

با تغییر طول کابل نام، قرقره مربوطه نیز می‌چرخد. زاویه چرخش قرقره را هنگامی که مجری نهایی در مبدأ مختصات قرار دارد، صفر در نظر می‌گیریم. از طرفی یک چرخش مثبت قرقره، باعث تغییر طول منفی در کابل نام می‌شود یعنی: $r_i \beta_i = -\Delta L_i$ که در آن β_i زاویه چرخش قرقره نام و r_i شعاع آن می‌باشد. تغییر طول کابل نام برابر است با: $\Delta L_i = L_i - L_{0i}$ که در آن L_i از رابطه (۳) بدست

می‌آید و $L_{0i} = \sqrt{(P_{ix})^2 + (P_{iy})^2 + (P_{iz})^2}$ لذا تغییر زاویه قرقره‌ها با تغییر طول کابل‌ها از رابطه (۴) پیروی می‌کند:

$$\beta_i = \left(\frac{1}{r}\right) (L_{0i} - L_i) \quad ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4)$$

با دو بار مشتق‌گیری از رابطه (۴) نسبت به زمان، می‌توان سرعت و شتاب دورانی قرقره‌ها را به ترتیب توسط رابطه‌های (۵) و (۶) بدست آورد:

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial X} \dot{X} \quad ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (5)$$

$$\ddot{\beta}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial X} \right) \dot{X} + \frac{\partial \beta_i}{\partial X} \ddot{X} \quad ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (6)$$

که در آن \dot{X}, \ddot{X} ، سرعت و شتاب خطی مجری نهایی ربات می‌باشد. برای بدست آوردن معادلات دینامیک مجری نهایی، لازم است که نیروی کششی کابل‌ها را در راستای محورهای X, Y, Z تجزیه کرد که این کار توسط ماتریس ژاکوبین J انجام می‌گیرد. بعد این ماتریس 4×3 بوده و از رابطه (۷) قابل محاسبه می‌باشد:

$$J = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\gamma_1 & c\theta_1 s\gamma_1 & s\theta_1 \\ c\theta_2 c\gamma_2 & c\theta_2 s\gamma_2 & s\theta_2 \\ c\theta_3 c\gamma_3 & c\theta_3 s\gamma_3 & s\theta_3 \\ c\theta_4 c\gamma_4 & c\theta_4 s\gamma_4 & s\theta_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن منظور از c ، \cos و s ، \sin می‌باشد. با توجه به شکل (۴)، زاویه‌های θ و γ توسط رابطه (۸) محاسبه می‌شوند:

$$\Delta h = z - h$$

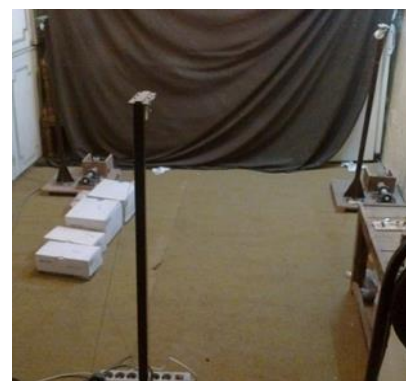
$$\theta_i = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta h}{L_i} \right) \quad ; \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\gamma_i = \tan^{-1} \left(\frac{y - P_{iy}}{x - P_{ix}} \right) \quad (8)$$

صورت نقطه‌ای در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- طرح ربات چهار کابلی معلق



شکل ۳- ربات کابلی معلق ساخته شده در آزمایشگاه رباتیک دانشگاه سمنان

لختی دورانی قرقره‌های کوپل شده به موتور الکتریکی که همراه با آن‌ها بر روی زمین نصب شده‌اند و کابل‌ها به دور آن می‌چرخند، با J_i و شعاع آن‌ها با r_i ; $i = 1, \dots, 4$ نشان داده شده است. همچنین ضریب دمپینگ ویسکوز برای شفت هر موتور، با c_i ; $i = 1, \dots, 4$ بیان شده است. برای استخراج معادلات دینامیک فرض شده که کابل‌ها بدون جرم بوده و از اینرسی و فنری آن‌ها چشم‌پوشی شده است. مجری نهایی این ربات دارای سه درجه آزادی انتقالی در راستای محورهای X, Y, Z است.

طول چهار کابل متصل به آن، هنگامیکه مجری نهایی در موقعیت $X = [x \quad y \quad z]^T$ قرار دارد، توسط رابطه (۳) محاسبه می‌شود:

می باشد که به صورت رابطه (۱۳) قابل محاسبه است:

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T \quad (13)$$

در ادامه معادله دینامیک شفت موتور و قرقره کوپل شده با آن محاسبه می شود. طبق شکل ۶ و با توجه به گشتاورهای خارجی وارد بر شفت موتور، معادله دینامیکی آن به صورت رابطه (۱۴) خواهد بود:

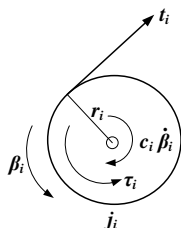
$$\tau = rT + j\ddot{\beta} + c\dot{\beta} \quad (14)$$

که در آن J و C به ترتیب ماتریس های قطری 4×4 با المان های قطری لختی دورانی قرقره ها و ضریب دمپینگ ویسکوز شفت موتور هستند که به صورت رابطه (۱۵) بوده و Γ شعاع قرقره هاست که با یکدیگر برابر می باشند:

$$j = \begin{bmatrix} j_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

τ بردار گشتاوری است که از جانب موتور تأمین می شود و به صورت: $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4]^T$ می باشد. در ادامه با استفاده از رابطه های (۱۲) و (۱۴)، حد پایین و بالای شتاب های مجری نهایی ربات محاسبه خواهد شد.



شکل ۶- دیاگرام آزاد شفت موتور و قرقره آم

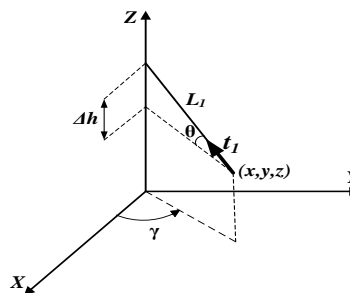
۴- تحلیل شتاب مجری نهایی ربات

در این بخش شتاب های کارترین مجری نهایی ربات چهار کابلی معلق به گونه ای محاسبه می شود که به ازای آن ها دو قید زیر برقرار باشند:

(۱) در کشش بودن کابل ها

(۲) محدود بودن گشتاور تولیدی موتورها

با توجه به شکل ۵، مؤلفه Z برآیند نیروی کششی چهار کابل متصل به مجری نهایی به سمت بالا و در جهت مثبت محور Z می باشد. پس مجری نهایی این ربات کابلی قادر است با هر شتابی متناسب با این مؤلفه در راستای مثبت محور Z حرکت کند. از طرفی با توجه به آنکه تنها نیروی



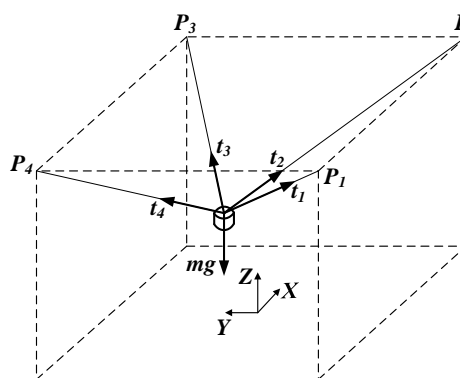
شکل ۴- زوایای کابل ها با محورهای X, Y, Z

معادله دینامیک حاکم بر مجری نهایی ربات طبق شکل (۵) و با توجه به نیروی وزن آن و نیروهای کششی چهار کابل متصل به آن به صورت رابطه (۹) خواهد بود:

$$-J^T T = M\ddot{X} + W \quad (9)$$

که در آن منظور از $-J^T T$ تصویر نیروی کششی کابل ها در راستای محورهای X, Y, Z است که به صورت رابطه (۱۰) محاسبه می شود:

$$-J^T T = [t_{ix} \ t_{iy} \ t_{iz}]^T ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (10)$$



شکل ۵- دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر مجری نهایی

حال با استفاده از رابطه (۹)، معادله دینامیک مجری نهایی ربات به صورت رابطه (۱۰) استخراج می شود:

که در رابطه (۹) M یک ماتریس قطری 3×3 با المان های قطری m بوده و ماتریس ژاکوبین [از رابطه (۷) جایگذاری می شود. همچنین بردارهای T, \ddot{X}, W به صورت رابطه (۱۱) می باشند

$$T = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4]^T$$

$$\ddot{X} = [a_x \ a_y \ a_z]^T \quad (11)$$

$$W = [0 \ 0 \ mg]^T$$

حال با استفاده از رابطه (۹)، بردار نیروی کششی کابل ها به صورت رابطه (۱۲) بدست می آید:

$$T = -(J^+)^T (M\ddot{X} + W) \quad (12)$$

که در آن منظور از J^+ ، شبه معکوس ماتریس ژاکوبین J

$$t_i = r_{ix}a_x + r_{iy}a_y + r_{iz}a_z + r_i \quad (16)$$

$$; \quad i = 1, \dots, 4$$

حال شتاب‌هایی قابل قبول هستند که به ازای آنها $t_i \geq 0$; $i = 1, \dots, 4$ باشد. بنابراین برای بدست آوردن مرز حد پایین شتاب‌ها، باید رابطه (۱۶) را برابر با صفر قرار داد. سپس ضرایب $r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_i$ را که توابعی بر حسب زاویه‌های θ, γ هستند، بدست آورد. چنانچه از رابطه (۱۶) دیده می‌شود، کشش کابل‌ها نه تنها به شتاب مجری نهایی بستگی دارد، بلکه به موقعیت آن نیز وابسته است. به عبارت دیگر در هر نقطه از فضای کاری، محدوده خاصی از شتاب‌های قابل قبول بدست آورده می‌شود. از آنجا که روابط در حالت کلی بسیار طولانی و پیچیده می‌باشند، به منظور اینکه بتوان به شکل ساده‌تری از معادلات دست یافت و تحلیل‌های لازم را ارائه نمود، باید روش مناسبی در حل مسأله و نمایش محدوده شتاب‌های قابل قبول ارائه نمود. در حالت کلی مجری نهایی ربات دارای سه مؤلفه شتاب a_x, a_y, a_z در راستای محورهای X, Y, Z می‌باشد. حال با صفر قرار دادن رابطه (۱۶)، سه حالت قابل بررسی خواهد بود. در حالت اول با فرض معلوم بودن a_y می‌توان معادله خط a_z را بر حسب a_x بدست آورد. در حالت دوم با فرض معلوم بودن a_x می‌توان معادله خط a_z را بر حسب a_y بدست آورد و در حالت سوم با فرض معلوم بودن a_z ، می‌توان معادله خط a_y را بر حسب a_x بدست آورد. البته به دلیل تقارن فضای کاری نسبت به صفحه $X-Z$ و صفحه $Y-Z$ ، نتایج حالت‌های اول و دوم شبیه یکدیگر خواهد شد.

در ادامه به منظور ساده شدن معادلات، یک حالت خاص که در آن حرکت مجری نهایی در صفحه $X-Z$ می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. در این صفحه با فرض معلوم بودن a_z, a_y بر حسب a_x به صورت رابطه (۱۷) استخراج می‌شود:

$$a_z = C_{1i}a_x + C_{2i} \quad ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (17)$$

که در آن ثابت‌های C_{1i} و C_{2i} به ترتیب شیب و عرض از مبدأ نمودارها بوده که به صورت رابطه (۱۸) می‌باشند:

$$C_{1i} = -\frac{r_{ix}}{r_{iz}} \quad ; \quad i = 1, \dots, 4$$

$$C_{2i} = -\left(\frac{r_{iy}}{r_{iz}}\right)a_y - \frac{r_i}{r_{iz}} \quad (18)$$

این ثابت‌ها، تابع‌هایی بر حسب زاویه‌های θ, γ هستند که

خارجی وارد بر مجری نهایی که به سمت پایین و در جهت منفی محور Z است، نیروی وزن آن می‌باشد پس مجری نهایی این ربات کابلی نمی‌تواند با شتابی بیشتر از شتاب جاذبه به سمت پایین حرکت کند. زیرا برای حرکت به سمت پایین و با شتابی بیشتر از شتاب جاذبه، لازم است که مؤلفه Z برآیند نیروی کابل‌ها به سمت پایین باشد. یعنی کابل‌ها همانند یک لینک صلب، به مجری نهایی نیروی فشاری وارد کنند در حالی که کابل‌ها قادر به ایجاد نیروهای فشاری نیستند. پس مجری نهایی این ربات کابلی نمی‌تواند با شتابی بیشتر از شتاب جاذبه به سمت پایین حرکت کند. از طرفی با توجه به محدود بودن گشتاور تولیدی موتورها، شتاب مجری نهایی ربات نباید از حدی افزایش یابد به طوری که موتورهای بکار رفته در ساخت ربات قادر به تولید گشتاور مورد نیاز، نباشند. بنابراین در ربات‌های کابلی بدست آوردن شتاب کارترین مجری نهایی بگونه‌ای که اولاً قید مثبت بودن نیروی کششی کابل‌ها و ثانیاً قید محدود بودن گشتاور تولیدی موتورها را تضمین کنند، از اهمیت بالایی برخوردار است که به ازای برقراری قید اول، حد پایین و به ازای برقراری قید دوم، حد بالای شتاب‌ها بدست خواهند آمد. ذکر این نکته لازم است که برای برقراری قید اول، شتاب‌های قابل قبول بزرگتر و مساوی حد پایین شتاب‌ها و برای برقراری قید دوم، شتاب‌های قابل قبول کوچکتر و مساوی حد بالای شتاب‌ها خواهند بود. بنابراین فضای بین این حدود، محدوده شتاب‌های قابل قبول مجری نهایی ربات را مشخص می‌کند. چنانچه از رابطه (۱۲) دیده می‌شود، کشش کابل‌ها فقط به شتاب مجری نهایی بستگی دارد، بنابراین در ادامه برای بدست آوردن محدوده مجاز شتاب‌ها، از سرعت خطی مجری نهایی صرف نظر شده و فقط شتاب آن در نظر گرفته شده است. البته سرعت مجری نهایی چنانچه از رابطه‌های (۵)، (۶) و (۱۴) دیده می‌شود در گشتاور اعمالی موتور تأثیر گذار است، اما تأثیر آن نسبت به نیروی کشش کابل‌ها ناچیز می‌باشد.

۴-۱- حد پایین شتاب‌ها

برای بدست آوردن حد پایین شتاب‌ها، از رابطه (۱۲) استفاده می‌شود. با جایگذاری رابطه‌های (۱۱) و (۱۳) در رابطه (۱۲) و ساده سازی آن، نیروی کششی کابل‌ها به صورت تابعی بر حسب شتاب‌های کارترین مجری نهایی بدست خواهند آمد:

جایگذاری رابطه (۱۲) به جای بردار T و همچنین ماتریس-های $\hat{\beta}, \hat{c}, j$ در رابطه (۱۴)، گشتاور موتورها به صورت تابعی بر حسب شتاب‌های کارترین مجری نهایی بدست خواهند آمد:

$$\tau_i = r_{ix}a_x + r_{iy}a_y + r_{iz}a_z + r_i \quad (24)$$

$$; i = 1, \dots, 4$$

حال شتاب‌هایی قابل قبول هستند که به ازای آن‌ها $\tau_i \leq \tau_r$; $i = 1, \dots, 4$ گشتاور نامی موتور می‌باشد. بنابراین برای بدست آوردن مرز حد بالای شتاب‌ها، باید رابطه (۲۵) برقرار باشد:

$$r_{ix}a_x + r_{iy}a_y + r_{iz}a_z + r_i - \tau_r = 0 \quad (25)$$

در ادامه روابط کلی محدوده قابل قبول شتاب‌ها جهت اعمال نشدن گشتاور بیش از حد به موتورها، در صفحه $X-Z$ ارائه خواهد شد. با استفاده از رابطه (۲۵) و با فرض معلوم بودن a_y ، شتاب‌ها مانند رابطه (۱۷) محاسبه می‌شوند که در آن، ثابت‌های C_{2i} و C_{1i} از رابطه (۲۶) بدست می‌آیند:

$$C_{1i} = -\frac{r_{ix}}{r_{iy}}$$

$$C_{2i} = -\left(\frac{r_{iz}}{r_{iy}}\right)a_y - \frac{r_i - \tau_r}{r_{iz}} \quad ; i = 1, \dots, 4 \quad (26)$$

این ثابت‌ها، تابع‌هایی بر حسب زاویه‌های θ, γ می‌باشند که با توجه به شکل (۴)، زاویه‌های فوق از رابطه (۸) قابل محاسبه‌اند. با محاسبه و جایگذاری این زاویه‌ها در رابطه (۷)، C_{2i} و C_{1i} که به ترتیب شیب و عرض از مبدأ نمودارها هستند به صورت رابطه‌های (۲۷) و (۲۸) بدست می‌آیند:

$$C_{11} = \frac{mr^2 L_1 \sin(\theta_2) + j(2x+a)f_1}{2f_3 + 2j(h-z)f_1}$$

$$C_{12} = \frac{mr^2 L_2 \sin(\theta_1) - j(2x-a)f_1}{2f_4 - 2j(h-z)f_1} \quad (27)$$

$$C_{13} = \frac{mr^2 L_2 \sin(\theta_1) - j(2x-a)f_1}{2f_4 - 2j(h-z)f_1}$$

$$C_{14} = \frac{mr^2 L_1 \sin(\theta_2) + j(2x+a)f_1}{2f_3 + 2j(h-z)f_1}$$

$$C_{21} = \left[\frac{f_1 f_5 + b j f_1 f_2}{f_2 f_3 + 2j(h-z)f_1 f_2} \right] a_y$$

$$+ \left[\frac{r L_1 f_1}{f_3 + j(h-z)f_1} \right] \tau_r$$

$$- \left[\frac{f_3}{f_3 + 2j(h-z)f_1} \right] g$$

با توجه به شکل (۴)، این زاویه‌ها از رابطه (۸) محاسبه می‌شوند.

با محاسبه این زاویه‌ها و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۷) ثابت-های C_{2i} و C_{1i} به ترتیب به صورت رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) بدست می‌آیند:

$$C_{11} = \frac{\tan(\theta_2)}{\cos(\gamma_2)} \quad , \quad C_{12} = \frac{\tan(\theta_1)}{\cos(\gamma_1)}$$

$$C_{13} = \frac{\tan(\theta_1)}{\cos(\gamma_1)} \quad , \quad C_{14} = \frac{\tan(\theta_2)}{\cos(\gamma_2)} \quad (19)$$

$$C_{21} = \left[\frac{\cos(\theta_1) \sin(\gamma_1) f_1}{\cos(\theta_2) \cos(\gamma_2) f_2} \right] a_y - g$$

$$C_{22} = \left[-\frac{\cos(\theta_2) \sin(\gamma_2) f_1}{\cos(\theta_1) \cos(\gamma_1) f_2} \right] a_y - g \quad (20)$$

$$C_{23} = \left[\frac{\cos(\theta_2) \sin(\gamma_2) f_1}{\cos(\theta_1) \cos(\gamma_1) f_2} \right] a_y - g$$

$$C_{24} = \left[-\frac{\cos(\theta_1) \sin(\gamma_1) f_1}{\cos(\theta_2) \cos(\gamma_2) f_2} \right] a_y - g$$

که در آن f_2, f_1 به صورت رابطه (۲۱) خواهند بود:

$$f_1 = \cos(\gamma_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

$$- \cos(\gamma_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)$$

$$f_2 = \cos^2(\theta_1) \sin^2(\gamma_1)$$

$$+ \cos^2(\theta_2) \sin^2(\gamma_2) \quad (21)$$

در صفحه $X-Y$ نیز روابط مربوط به حد پایین شتاب‌ها به صورت رابطه (۲۲) می‌باشند:

$$a_y = C_{1i}a_x + C_{2i} \quad ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (22)$$

که در آن ثابت‌های C_{2i} و C_{1i} به صورت رابطه (۲۳) خواهند بود:

$$C_{1i} = -\frac{r_{ix}}{r_{iy}} \quad ; i = 1, \dots, 4 \quad (23)$$

$$C_{2i} = -\left(\frac{r_{iz}}{r_{iy}}\right)a_z - \frac{r_i}{r_{iy}}$$

این ثابت‌ها همانند رابطه‌های (۱۹) و (۲۰)، عباراتی طولانی بر حسب زاویه‌های θ, γ هستند که مستقیماً با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۱۳) و سپس با محاسبه شتاب‌ها از رابطه (۱۲) بدست می‌آیند.

۴-۲- حد بالای شتاب‌ها

برای بدست آوردن حد بالای شتاب‌ها از رابطه (۱۴) استفاده می‌شود با این تفاوت که در اینجا به دلیل آنکه $\dot{X} = 0$ فرض شده، $\dot{\beta} = 0$ بوده و $\ddot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial X} \ddot{X}$ خواهد بود. حال با

در هر نقطه چهار نمودار خطی رسم می‌شود. با توجه به اینکه بازه قابل قبول شتاب‌ها، بزرگتر و مساوی حد پایین و همچنین کوچکتر و مساوی حد بالای شتاب‌ها هستند، بنابراین در هر نقطه، ناحیه اشتراک این چهار نمودار بدست می‌آید و نمودار پایه‌ای که این ناحیه اشتراک را می‌سازد، مرز شتاب‌های قابل قبول را ایجاد خواهد کرد. حال در این بخش به بررسی این موضوع پرداخته شده که حد پایین شتاب‌ها به ازای کدام کابل و حد بالای شتاب‌ها به ازای کدام موتور محاسبه می‌شوند.

با فرض معلوم بودن a_y و با توجه به رابطه‌های (۱۹) و (۲۷)، شیب نمودارهای مربوط به حدود پایین و بالای شتاب‌ها به ازای کابل‌های ۱ و ۴ و همچنین کابل‌های ۲ و ۳ برابر بوده اما عرض از مبدأ نمودارها با توجه به آنکه a_y مثبت، منفی یا صفر باشد، متفاوت خواهد بود. برای درک بهتر این موضوع، اگر از بالا به شکل (۱) نگاه شود، ربات به صورت شکل (۷) دیده خواهد شد. با توجه به شکل (۷)، اگر مجری نهایی دارای شتاب $+a_y$ باشد، موتورهای ۳ و ۴ با گردش پاد ساعتگرد باعث کاهش طول کابل‌های ۳ و ۴ می‌شوند بدین معنی که این کابل‌ها، جرم m را به سمت خود و در جهت مثبت محور y می‌کشند. پس به ازای شتاب‌های $+a_y$ ، این کابل‌ها تحت کشش هستند. از طرفی موتورهای ۱ و ۲ با گردش ساعتگرد باعث افزایش طول کابل‌های ۱ و ۲ می‌شوند. پس احتمال شکم دهی و شل شدن این کابل‌ها نسبت به کابل‌های ۳ و ۴ بیشتر بوده و حد پایین شتاب‌ها به ازای عرض از مبدأ حاصل از کابل‌های ۱ و ۲ رسم می‌شوند. به همین صورت به ازای شتاب‌های $-a_y$ ، کابل‌های ۳ و ۴ برای رسم حد پایین شتاب‌ها، فعال خواهند بود. از طرفی به ازای شتاب‌های $+a_y$ نیروی ایجاد شده در کابل‌های ۳ و ۴ نسبت به کابل‌های ۱ و ۲ بیشتر بوده و بنابراین گشتاور تولیدی موتورهای ۳ و ۴ نیز بیشتر از دو موتور دیگر خواهد بود. پس احتمال افزایش گشتاور این موتورها از τ_r بیشتر بوده و حد بالای شتاب‌ها به ازای عرض از مبدأ حاصل از موتورهای ۳ و ۴ رسم می‌شوند. به همین صورت به ازای شتاب‌های $-a_y$ ، موتورهای ۱ و ۲ برای رسم حد بالای شتاب‌ها، فعال خواهند بود. اگر $a_y = 0$ باشد، هر چهار کابل و هر چهار موتور در تعیین حدود پایین و بالای شتاب‌ها مؤثر هستند.

۵- شبیه سازی

در این قسمت، بدین منظور که درک روشن‌تری نسبت به

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= \left[\frac{-f_1 f_6 - b j f_1 f_2}{f_2 f_4 - 2j(h-z)f_1 f_2} \right] a_y \\
 &\quad - \left[\frac{r L_2 f_1}{f_4 - j(h-z)f_1} \right] \tau_r \\
 &\quad - \left[\frac{f_4}{f_4 - 2j(h-z)f_1} \right] g \\
 C_{23} &= \left[\frac{f_1 f_6 + b j f_1 f_2}{f_2 f_4 - 2j(h-z)f_1 f_2} \right] a_y \\
 &\quad - \left[\frac{r L_2 f_1}{f_4 - j(h-z)f_1} \right] \tau_r \\
 &\quad - \left[\frac{f_4}{f_4 - 2j(h-z)f_1} \right] g \\
 C_{24} &= \left[\frac{-f_1 f_5 - b j f_1 f_2}{f_2 f_3 + 2j(h-z)f_1 f_2} \right] a_y \\
 &\quad + \left[\frac{r L_1 f_1}{f_3 + j(h-z)f_1} \right] \tau_r \\
 &\quad - \left[\frac{f_3}{f_3 + 2j(h-z)f_1} \right] g
 \end{aligned} \tag{۲۸}$$

که در آن f_1, f_2 برابر با رابطه (۲۱) بوده و f_3, f_4, f_5, f_6 به صورت رابطه (۲۹) خواهند بود:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= 0.5mr^2 L_1 \cos(\theta_2) \cos(\gamma_2) \\
 f_4 &= 0.5mr^2 L_2 \cos(\theta_1) \cos(\gamma_1) \\
 f_5 &= mr^2 L_1 \cos(\theta_1) \sin(\gamma_1) \\
 f_6 &= mr^2 L_2 \cos(\theta_2) \sin(\gamma_2)
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

با توجه به تقارن فضای کاری نسبت به صفحه $X-Z$ و صفحه $Y-Z$ ، رابطه‌های بدست آمده برای حالت‌های اول و دوم شبیه یکدیگر خواهد بود. در پایان با فرض معلوم بودن a_z ، شتاب‌ها مانند رابطه (۲۲) می‌باشند. در این حالت ثابت‌های C_{1i} و C_{2i} از رابطه (۳۰) قابل محاسبه هستند:

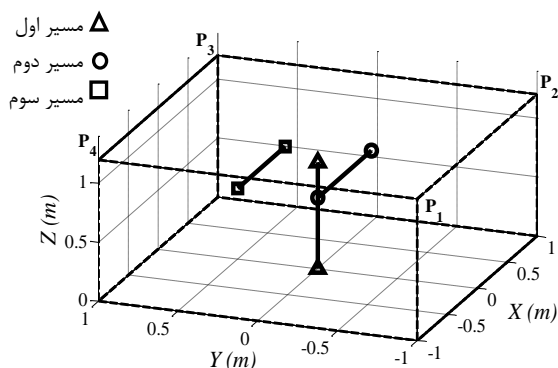
$$\begin{aligned}
 C_{1i} &= -\frac{r_{ix}}{r_{iy}} \\
 &\quad ; i = 1, \dots, 4 \\
 C_{2i} &= -\left(\frac{r_{iz}}{r_{iy}} \right) a_z - \frac{r_i - \tau_r}{r_{iy}}
 \end{aligned} \tag{۳۰}$$

این ثابت‌ها نیز همانند رابطه‌های (۲۷) و (۲۸)، عباراتی طولانی بر حسب زاویه‌های θ, γ هستند که مستقیماً با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۱۳) و سپس با محاسبه شتاب‌ها از رابطه (۱۴) بدست می‌آیند.

۴-۳- تعیین کابل‌ها و موتورهای بحرانی

در دو بخش قبل رابطه‌های مربوط به تعیین حدود پایین و بالای شتاب‌های کارترین مجری نهایی ربات بدست آورده شد. طبق این رابطه‌ها و با توجه به تعداد کابل‌ها و موتورها،

به مجری نهایی ربات، نشان داده شده است.

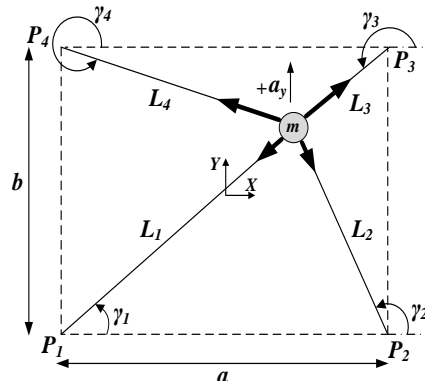


شکل ۸- مسیرهای حرکت مجری نهایی ربات کابلی معلق

به ازای شتابهایی که بر روی هر نمودار قرار گرفته‌اند، نیروی کابل مربوطه در آستانه صفر شدن و به ازای شتاب‌های بیشتر و کمتر از شتاب فوق، به ترتیب کابل در حالت کشش و فشار قرار خواهد گرفت. پس شتاب‌های قابل قبول برای هر کابل، بزرگتر و مساوی شتاب‌هایی هستند که بر روی نمودار مربوطه قرار گرفته است. حال به منظور برقراری قید تحت کشش بودن هر چهار کابل، در شکل (۹) ناحیه اشتراک شتاب‌ها با نقطه چین مشخص شده به گونه‌ای که به ازای این شتاب‌ها هر چهار کابل تحت کشش خواهند بود. همچنین مشخص است که عرض از مبدأ نمودارهای مربوط به هر چهار کابل برای حالتی که $a_y = 0$ باشد، برابر با شتاب جاذبه است بدین معنی که اگر مجری نهایی دارای حرکت شتاب داری در راستای محور Z و به سمت پایین باشد، بیشترین شتابی که در این راستا می‌تواند داشته باشد برابر با شتاب جاذبه خواهد بود. طبق شکل (۹) مرز حد پایین شتاب‌ها در نقطه فوق به ازای کابل‌های ۲ و ۴ بدست آمده است. با توجه به موقعیت مجری نهایی ربات، طول کابل ۴ نسبت به کابل ۲ بیشتر بوده و در نتیجه احتمال شل شدن و از دست رفتن نیروی کششی این کابل نسبت به کابل ۲، بیشتر خواهد بود. پس کابل ۴ نسبت به تغییرات شتاب حساس‌تر می‌باشد. با استفاده از حد بالای شتاب‌ها موتورهای بحرانی تعیین می‌شوند. در شکل (۱۰) حد بالای شتاب‌ها برای هر چهار موتور بکار رفته در ساخت ربات، نشان داده شده است.

به ازای شتاب‌هایی که بر روی هر نمودار قرار گرفته‌اند، گشتاور موتور مربوطه برابر با گشتاور نامی موتور و به ازای شتاب‌های بیشتر و کمتر از شتاب فوق، گشتاور موتور نیز بیشتر و کمتر از گشتاور نامی می‌شود. پس شتاب‌های قابل قبول برای هر موتور، کوچکتر و مساوی شتاب‌هایی هستند

محدوده شتاب‌های قابل قبول وجود داشته باشد و تغییرات این محدوده در نقاط مختلف فضای کاری بررسی شود، چندین شبیه سازی انجام می‌گیرد.



شکل ۷- نمای بالا از ربات چهار کابلی معلق

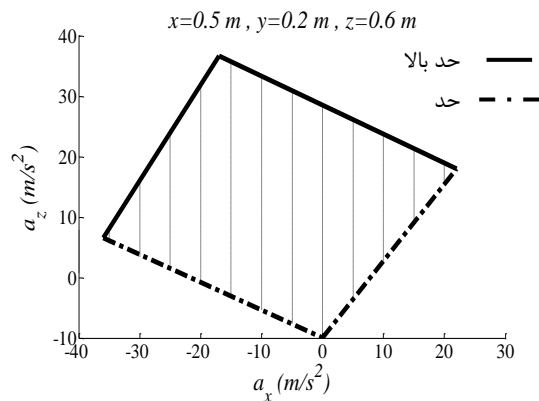
بدین منظور، سه مسیر خطی برای حرکت مجری نهایی ربات در نظر گرفته شده که در هر مسیر تعدادی نقطه برای تحلیل شتاب‌ها، انتخاب شده است. مطابق با شکل (۸)، مسیر اول در راستای محور Z است که مبدأ مختصات یعنی نقطه $(0 \ 0 \ 0)$ را به نقطه $(0 \ 0 \ 0.9)$ متصل می‌کند. مسیرهای دوم و سوم در راستای محور X و در ارتفاع ثابت $z = 0.6 \text{ m}$ بوده که به ترتیب نقاط $(0 \ 0 \ 0.6)$ و $(0 \ 0.5 \ 0.6)$ را به نقاط $(0.9 \ 0 \ 0.6)$ و $(0.8 \ 0.5 \ 0.6)$ متصل می‌کنند. دیگر اطلاعات لازم برای شبیه سازی در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- مقادیر لازم برای شبیه سازی رابطه‌ها

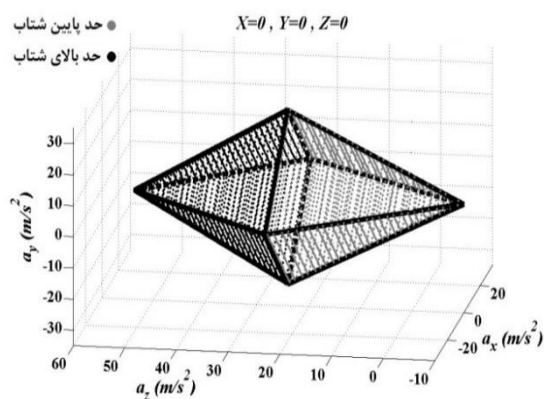
پارامتر	مقدار	واحد
a	۲	m
b	۲	m
h	۱/۲	m
r	۰/۰۳	m
m	۲	kg
g	۹/۸۱	ms ⁻²
τ_r	۲/۴	Nm
j	۰/۰۰۰۸	kgm ²

در ابتدا به تعیین کابل‌ها و موتورهای بحرانی در تحلیل شتاب‌ها پرداخته می‌شود. بدین منظور و به ازای $a_y = 0$ ، مکان مجری نهایی ربات در نقطه $(0.5 \ 0.2 \ 0.6)$ که در آن طول چهار کابل متصل به مجری نهایی ربات متفاوت می‌باشد در نظر گرفته شده است. کابل‌های بحرانی با توجه به حد پایین شتاب‌ها تعیین می‌شوند. در شکل (۹) حد پایین شتاب‌ها برای هر چهار کابل متصل

کاری مشخص شود، سه مسیر خطی برای حرکت مجری نهایی ربات منظور شده که در هر مسیر چندین نقطه برای تحلیل بازه قابل قبول شتابها در نظر گرفته شده است. ابتدا و در شکل (۱۲) بازه قابل قبول شتابها در نقطه $x=0, y=0, z=0$ به صورت سه بعدی و به ازای $-25 \leq a_y \leq +25 \text{ m/s}^2$ نشان داده شده است.



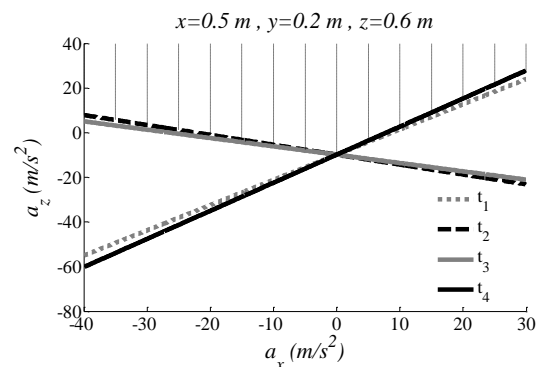
شکل ۱۱- بازه قابل قبول شتابها در نقطه مذکور به ازای $a_y = 0$



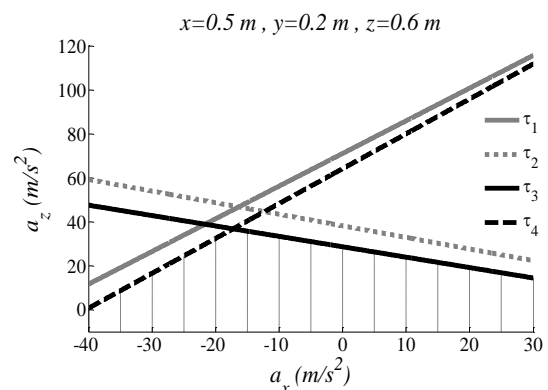
شکل ۱۲- نمایش سه بعدی بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0, y=0, z=0$

همانطور که مشخص است حد پایین و بالای شتابهای قابل قبول داخل هرمی با قاعده لوزی شکل قرار گرفته و بزرگترین بازه قابل قبول شتابها به ازای $a_y = 0$ بدست آمده به گونه‌ای که با کاهش و یا افزایش شتاب در راستای محور y ، سطح این لوزی کاهش یافته است. همچنین بازه قابل قبول شتابها نسبت به شتاب $a_y = 0$ قرینه بوده به طوری که به ازای شتابهای $\pm a_y$ بازه شتابها در راستای محورهای X و Z بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند. هر چند نمایش حدود پایین و بالای شتابها به صورت سه بعدی دید کلی نسبت به بازه قابل قبول شتابها بدست

که بر روی نمودار مربوطه قرار گرفته است. حال به منظور برقراری قید محدود بودن گشتاور تولیدی موتورها، در شکل (۱۰) ناحیه اشتراک شتابها با نقطه چین مشخص شده به گونه‌ای که به ازای این شتابها گشتاور تولیدی هر چهار موتور از گشتاور نامی کمتر خواهد شد. طبق شکل (۱۰) مرز حد بالای شتابها در نقطه فوق به ازای موتورهای ۳ و ۴ بدست آمده است. با توجه به موقعیت مجری نهایی ربات، طول کابل ۳ نسبت به کابل ۴ کمتر بوده و در نتیجه نیروی موجود در کابل ۳ بیشتر از کابل ۴ می‌باشد. بنابراین گشتاور تولیدی موتور ۳ نیز نسبت به موتور ۴ بیشتر می‌باشد.



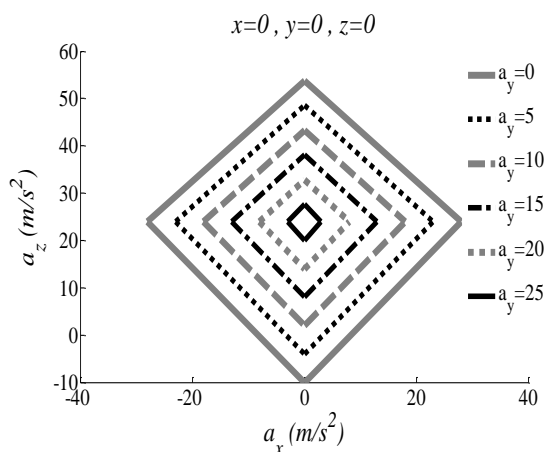
شکل ۹- حد پایین شتابها در نقطه مذکور به ازای $a_y = 0$



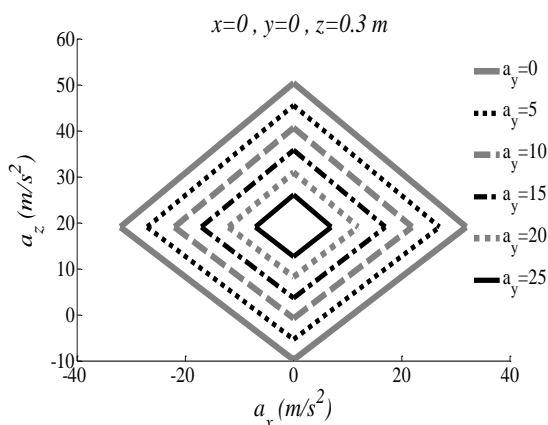
شکل ۱۰- حد بالای شتابها در نقطه مذکور به ازای $a_y = 0$

با مشخص شدن کابلها و موتورهای بحرانی در نقطه فوق، به ترتیب حدود پایین و بالای شتابها نیز مشخص شده و از داخل نمودارهای مربوط به این حدود، سطح بسته‌ای از شتابهای قابل قبول ایجاد خواهد شد. در شکل (۱۱) بازه شتابهای قابل قبول برای نقطه $(0.5 \ 0.2 \ 0.6)$ مشخص شده است. در ادامه به منظور اینکه محدوده شتابها در نقاط مختلف بدست آید و تغییرات این محدوده در نقاط مختلف فضای

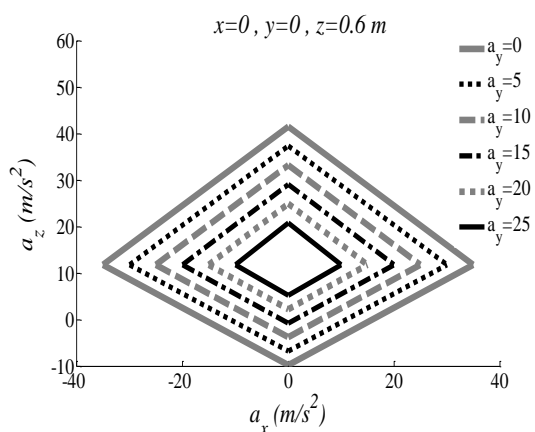
حدود پایین و بالای شتابها در چندین موقعیت مجری نهایی ربات و به ازای $a_y = 0$ محاسبه شده و در شکل (۱۷) نشان داده شده است.



شکل ۱۳- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0, y=0, z=0$



شکل ۱۴- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0, y=0, z=0.3 m$



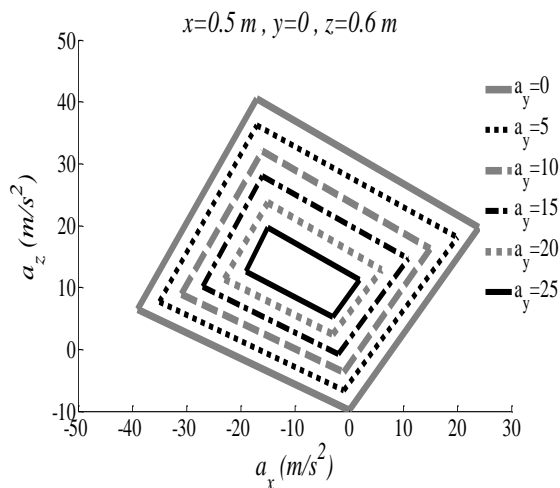
شکل ۱۵- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0, y=0, z=0.6 m$

می‌دهد اما برای بررسی جزئی‌تر و دقیق‌تر شتابها، نمایش آن به صورت دو بعدی کاربردی‌تر می‌باشد. لذا در ادامه، تحلیل شتابها بر روی نمودارهای دو بعدی صورت خواهد گرفت. شایان ذکر است با تجسم سه بعدی نمودار شتابها در هر نقطه از فضای کاری استاتیکی، شکلی مشابه با شکل (۱۲) بدست خواهد آمد.

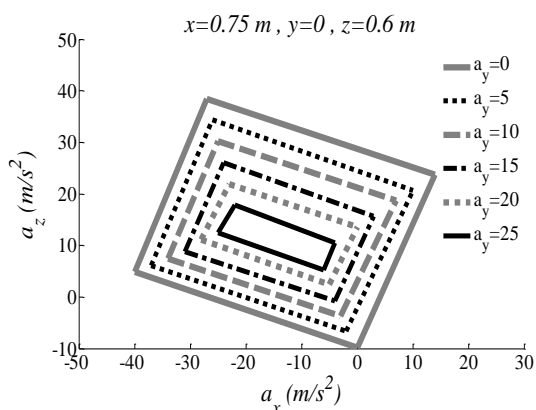
در شکل (۱۳) تصویر بازه قابل قبول شتابهای نشان داده شده در شکل (۱۲) بر روی صفحه X-Z آورده شده و شتاب در راستای محور Y در بازه $0 \leq a_y \leq +25 m/s^2$ در حال تغییر می‌باشد. با توجه به این شکل، عرض از مبدأ حد پایین شتابها برای حالتی که $a_y = 0$ می‌باشد، با توجه به رابطه (۲۰) برابر با شتاب جاذبه است که با افزایش a_y عرض از مبدأ حد پایین شتابها در جهت مثبت محور Z افزایش و عرض از مبدأ حد بالای شتابها با توجه به رابطه (۲۸) در جهت منفی محور Z کاهش یافته که به طبع آن بازه قابل قبول شتابها نیز کاهش خواهد یافت. از طرفی با توجه به رابطه (۱۹) شیب نمودارهای مربوط به حد پایین شتابها، مستقل از تغییرات a_y بوده و بنابراین شیب این نمودارها با یکدیگر برابر هستند. همچنین شیب نمودارهای مربوط به حد بالای شتابها نیز با توجه به رابطه (۲۷) مستقل از تغییرات a_y بوده و بنابراین شیب این نمودارها هم با یکدیگر برابر هستند. از طرفی با توجه به این شکل مشخص است که با افزایش a_y مساحت‌های حاصل از فضای بین حدود پایین و بالای شتابها، در حال کاهش می‌باشند به طوریکه بیشترین بازه قابل قبول شتابها در راستای محورهای X, Z به ازای $a_y = 0$ بدست آمده است. در شکل‌های (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) ارتفاع مجری نهایی ربات بر روی مسیر اول حرکت در حال افزایش بوده و به ترتیب نقاط $z = 0.3, 0.6, 0.9 m$ انتخاب شده است. با توجه به شکل (۴) و با افزایش ارتفاع مجری نهایی، زاویه θ کاهش می‌یابد و در نتیجه طبق رابطه (۱۹)، شیب نمودارهای مربوط به حد پایین شتابها کاهش یافته و شتاب مجری نهایی در راستای محور Z به سمت برابر شدن با شتاب جاذبه میل خواهد کرد. همچنین با توجه به رابطه‌های (۲۷) و (۲۸) با کاهش زاویه θ ، شیب و عرض از مبدأ نمودارهای مربوط به حد بالای شتابها به ترتیب کاهش و افزایش یافته است.

برای آگاهی از تأثیر تغییر ارتفاع مجری نهایی ربات بر بازه شتابهای قابل قبول، مساحت‌های حاصل از فضای بین

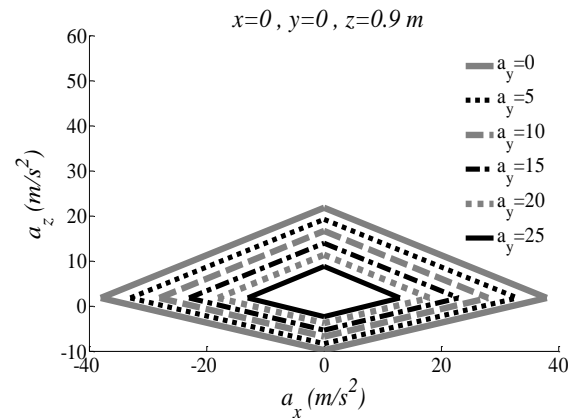
با توجه به شکل (۴) و رابطه (۸)، با افزایش مؤلفه x موقعیت مجری نهایی ربات، زاویه‌های γ_2, γ_3 به ترتیب به سمت $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ میل می‌کنند. بنابراین با توجه به رابطه (۱۹)، نمودارهای موجود در حد پایین شتاب‌ها که در آنها با افزایش x شیب نمودارهای افزایش یافته است، مربوط به کابل ۱ یا ۴ بوده و نمودارهایی که در آنها با افزایش x شیب کاهش یافته است، مربوط به کابل ۲ یا ۳ می‌باشند. همچنین با توجه به تغییر زاویه‌های γ_2, γ_3 و رابطه (۲۷) نمودارهای موجود در سمت راست حد بالای شتاب‌ها که در آنها با افزایش مؤلفه x شیب نمودارها کاهش یافته است، مربوط به موتورهای ۲ یا ۳ و نمودارهای موجود در سمت چپ حد بالای شتاب‌ها که در آنها با افزایش مؤلفه x شیب افزایش یافته است، مربوط به موتورهای ۱ یا ۴ می‌باشند.



شکل ۱۸- بازه قابل قبول شتاب‌ها برای نقطه $x=0.5 m, y=0, z=0.6 m$

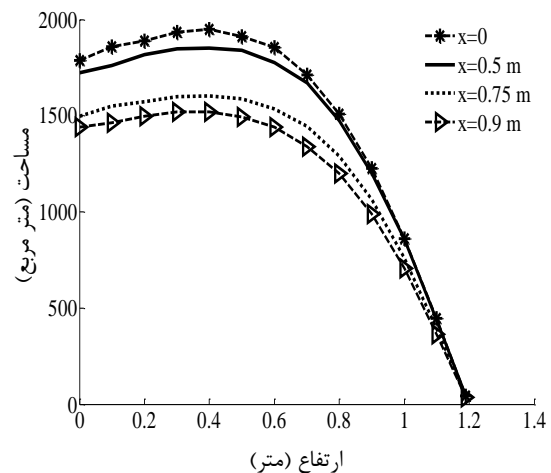


شکل ۱۹- بازه قابل قبول شتاب‌ها برای نقطه $x=0.75 m, y=0, z=0.6 m$



شکل ۱۶- بازه قابل قبول شتاب‌ها برای نقطه $x=0, y=0, z=0.9 m$

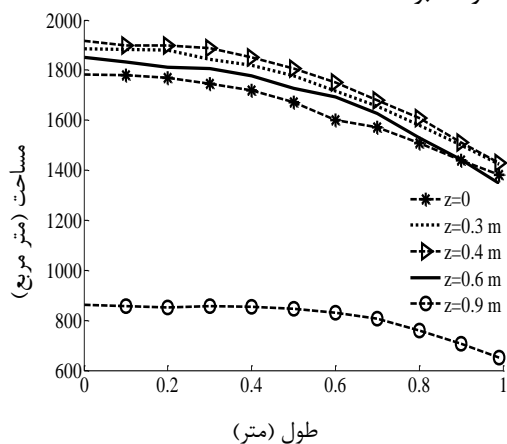
با توجه به این شکل مشخص است که با افزایش ارتفاع مجری نهایی ربات تا ارتفاع $z = \frac{1}{3}h = 0.4 m$ بازه شتاب‌های قابل قبول رو به افزایش بوده و بعد از آن سیر نزولی داشته به طوریکه در $z \approx h \approx 1.2 m$ بازه شتاب‌های قابل قبول در راستای محورهای x, z به سمت صفر میل کرده است که دلیل آن وجود تکینگی بر روی صفحات مرزی مکعب مستطیل نشان داده شده در شکل ۱ می‌باشد.



شکل ۱۷- تأثیر تغییر ارتفاع مجری نهایی ربات بر بازه قابل قبول شتاب‌ها

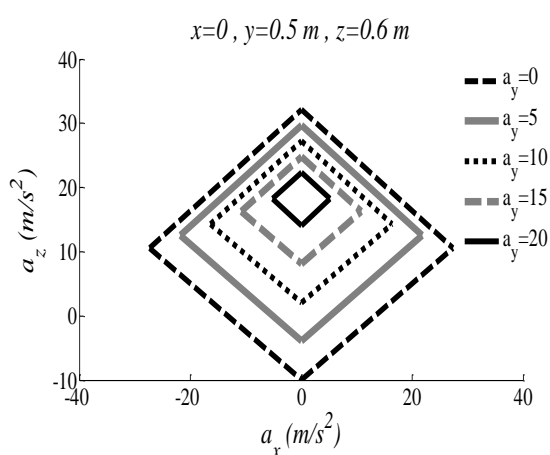
در ادامه این بخش به تعیین حدود قابل قبول شتاب‌ها در چندین نقطه انتخابی بر روی مسیر دوم حرکت مجری نهایی ربات، پرداخته شده است. در شکل‌های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) مجری نهایی ربات در ارتفاع $z = 0.6 m$ قرار دارد که در این ارتفاع، مؤلفه x موقعیت مجری نهایی در حال افزایش بوده و به ترتیب نقاط $x = 0.5, 0.75, 0.9 m$ انتخاب شده است.

توابعی بر حسب زاویه‌های θ, γ هستند. لذا بازه قابل قبول شتابها همانند آنچه که در این مقاله بیان شد، به صورت لوزی خواهد بود.

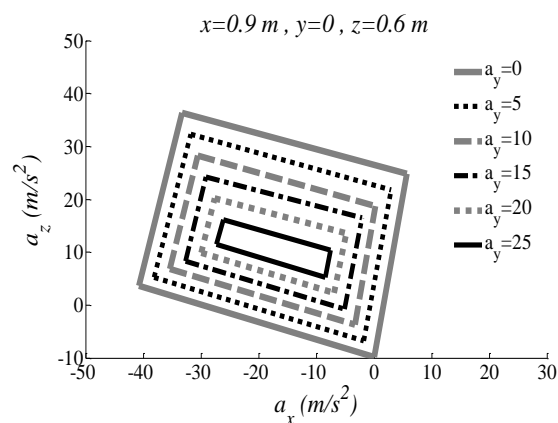


شکل ۲۰- تأثیر تغییر مؤلفه x مجری نهایی ربات بر بازه قابل قبول شتابها

در ادامه جهت تفهیم این موضوع و از طرفی کاهش تعداد نمودارها، دو نقطه در صفحه $Y-Z$ در نظر گرفته شده و بازه شتابهای قابل قبول در این نقاط نمایش داده می‌شود. برای این منظور نقاط $(0 \ 0 \ 0.6)$ و $(0 \ 0.9 \ 0.6)$ که در صفحه کاری $Y-Z$ قرار دارند، در نظر گرفته شده و بازه قابل قبول شتابها در این دو نقطه به ترتیب در شکل‌های (۲۵) و (۲۶) نشان داده شده است. با مقایسه این دو شکل با شکل‌های (۱۵) و (۲۰) که در صفحه کاری $X-Z$ قرار دارند تقارن فضای کاری ربات نسبت به صفحه‌های $Y-Z$ و $X-Z$ مشهود خواهد بود.



شکل ۲۱- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0, y=0.5 \text{ m}, z=0.6 \text{ m}$

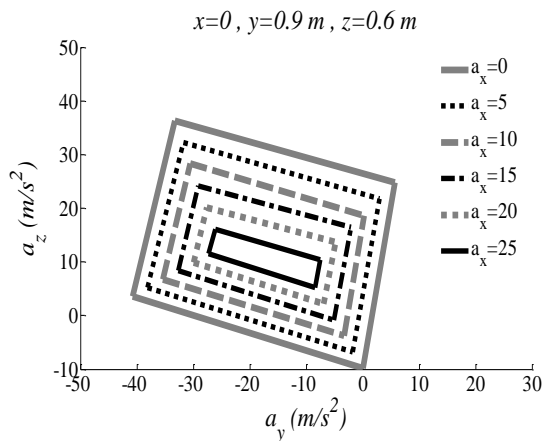


شکل ۲۲- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0.9 \text{ m}, y=0, z=0.6 \text{ m}$

برای آگاهی از تأثیر تغییر مؤلفه x مجری نهایی ربات بر بازه شتابهای قابل قبول، مساحت‌های حاصل از فضای بین حدود پایین و بالای شتابها در چندین موقعیت مجری نهایی ربات و به ازای $a_y = 0$ محاسبه شده و در شکل (۲۱) نشان داده شده است. با توجه به این شکل مشخص است که با افزایش مؤلفه x موقعیت مجری نهایی از $x=0$ تا $x \approx 1 \text{ m}$ بازه شتابهای قابل قبول کاهش یافته به طوریکه بیشترین بازه شتابها در راستای محورهای X و Z و در هر ارتفاع ثابت، در $x=0$ اتفاق افتاده است.

شکل‌های (۲۲)، (۲۳)، و (۲۴) مربوط به تحلیل شتابها بر روی مسیر سوم حرکت است که در آن مؤلفه‌های Y و Z ثابت بوده و به ترتیب مقادیر 0.6 m و 0.5 m به آنها اختصاص داده شده است. مجری نهایی ربات در این مسیر نیز همانند مسیر دوم در راستای محور x حرکت می‌کند که برای تحلیل شتابها، مؤلفه‌های $x=0, 0.4, 0.8 \text{ m}$ در نظر گرفته شده است. تنها تفاوت این دو مسیر جابجایی مجری نهایی در راستای محور y می‌باشد که البته با توجه به تقارن فضای کاری نسبت به صفحه $X-Z$ و صفحه $Y-Z$ ، تحلیل ارائه شده مسیر دوم، برای این مسیر نیز صادق است.

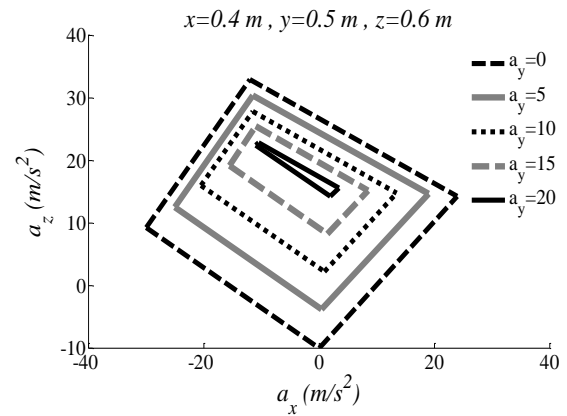
همانطور که در انتهای بخش‌های ۴-۱ و ۴-۲ بیان شد، با توجه به تقارن فضای کاری ربات نسبت به صفحه‌های $X-Z$ و $Y-Z$ و همچنین رابطه‌های (۱۶) و (۲۵)، مشخص خواهد بود که معادلات حاکم بر بازه شتابهای قابل قبول به ازای هر دو شتابی که نسبت به یکدیگر محاسبه شوند، خطی بوده و شیب و عرض از مبدأ تمامی این نمودارها



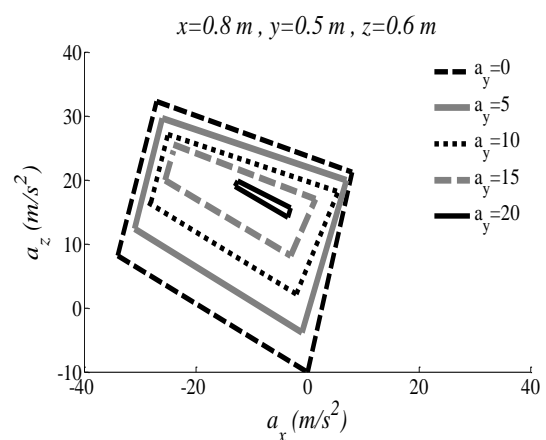
شکل ۲۶- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0, y=0.9$ m, $z=0.6$ m

۶- نتیجه گیری

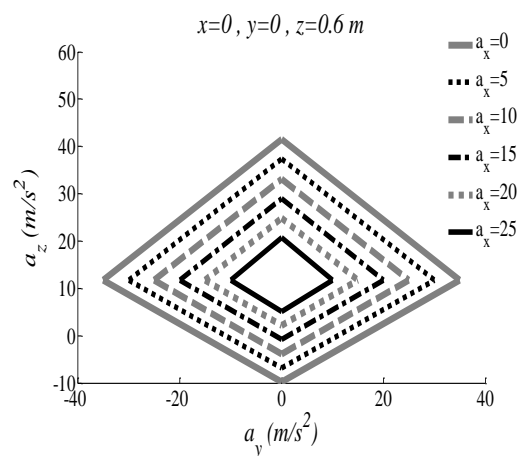
در این مقاله به طراحی و تحلیل یک ربات چهار کابلی معلق پرداخته شد و روشی برای محاسبه محدوده شتاب قابل قبول در نقاط مختلف فضای کاری ارائه گردید. با توجه به طولانی و پیچیده بودن رابطه های بدست آمده سعی شد که با ارائه یک روش مناسب، این رابطه ها را به شکلی ساده بیان نمود. در ادامه با انجام شبیه سازی های مختلف این محدوده شتاب مجاز به صورت گرافیکی و قابل فهم نمایش داده شد. از نتایج بدست آمده مشاهده شد که شتابی که مجری انتهایی ربات در یک نقطه از فضای کاری در جهات x, y, z می تواند داشته باشد کاملاً متفاوت است و این محدوده به شکل یک هرم با قاعده لوزی شکل می باشد که شکل و اندازه این لوزی در نقاط مختلف فضای کاری تغییر می کند. با ارائه نتایج شبیه سازی در نقاط مختلف فضای کاری سعی شد روند این تغییرات نشان داده شود. طبق نمودارهای بدست آمده، مشخص شد که کمترین بازه شتابهای قابل قبول برای $\frac{-a}{2} < x < \frac{+a}{2}$ و $\frac{-b}{2} < y < \frac{+b}{2}$ ، در $z \approx h$ و بیشترین در $x=0, y=0, z=\frac{1}{3}h$ اتفاق خواهد افتاد. با استفاده از نتایج ارائه شده در این مقاله می توان دید بهتری نسبت به فضای کاری دینامیکی پیدا کرد. در ادامه این کار، محدوده شتاب قابل قبول در کل فضای کاری به صورت برون خط محاسبه می گردد و در یک حافظه ذخیره می شود. سپس با استفاده از آن روشی جدید جهت طراحی مسیر بلادرنگ در حرکت های بسیار سریع ارائه خواهد شد.



شکل ۲۷- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0.4$ m, $y=0.5$ m, $z=0.6$ m



شکل ۲۸- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0.8$ m, $y=0.5$ m, $z=0.6$ m



شکل ۲۹- بازه قابل قبول شتابها برای نقطه $x=0$ m, $y=0$ m, $z=0.6$ m

مراجع

- [1] J. Albus, R. Bostelman, N. Dagalakis, "The NIST ROBOCRANE", Journal of Robotic systems, Vol. 10, No. 5, 1993, pp. 709-724.
- [2] S. Kawamura, H. Kino, C. Won, "High-Speed manipulation by using parallel wire-driven robots", Journal of Robotica, Vol. 18, No. 1, 2000, pp. 13-21.
- [3] D. Mayhew, B. Bachrach, W. Zev Rymer, R.F. Beer, "Development of the MACARM – a Novel Cable Robot for Upper Limb Neurorehabilitation", 9th International Conference on Rehabilitation Robotics, USA, 2005.
- [4] P. Bosscher, R.L. Williams, L.S. Bryson, D. Castro, "Cable-Suspended robotic Contour crafting system", Journal of Automation in construction, Vol. 17, No. 1, 2007, pp. 45-55.
- [5] R.L. Williams II, P. Gallina, "Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part I: Kinematics and Statics", Proc. 27th Design Automation Conf. of the ASME, 2001, pp. 1-9.
- [6] J. Pusey, A. Fattah, S. Agrawal, E. Messina, "Design and Workspace Analysis of A 6-6 Cable-Suspended Parallel Robot", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 39, 2004, pp. 761-778.
- [7] G. Barrette, C.M. Gosselin, "Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms", ASME J. of Mechanical Design, Vol. 127, No. 2, 2005, pp. 242-248.
- [8] C.B. Pham, S.H. Yeo, G. Yang, I.M. Chen, "Workspace analysis of fully restrained cable-driven manipulators", Robotics and Autonomous Systems, Vol. 57, No. 9, 2009, pp. 901-912.
- [۹] اب. میری پور فرد، ط. پادگان، "تولید فضای کنترل پذیر برای یک ربات کابلی توانبخشی راه رفتن به کمک شبکه عصبی و بر اساس پارامترهای آنتروپومتری بیمار"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۳، ۱۳۹۴، صفحه ۱۳۷-۱۴۵.
- [۱۰] م.ح. قاسمی، گ. جعفری چوگان، م. دردل، "تحلیل ژاکوبین، مدل سازی دینامیک و کنترل تطبیقی ربات شش کابلی با شش درجه آزادی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۴، ۱۳۹۴، صفحه ۳۹۱-۴۰۰.
- [11] S. Seriani, M. Seriani, P. Gallina, "Workspace optimization for a planar cable-suspended direct- driven robot", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 34, No. 1-7, 2015, pp. 1-7.
- [12] X. Jiang, C. Gosselin, "Trajectory Generation for Three- Degree-of-Freedom Cable- Suspended Parallel Robots Based on Analytical Integration of the Dynamic Equations", Journal of Mechanisms and Robotics, Vol. 8, No. 4, 2016, pp. 15-22.
- [13] X. Jiang, C. Gosselin, "Dynamic Point-to-Point Trajectory Planning of a Three-DOF Cable-Suspended Parallel Robot", Journal of IEEE Transaction on Robotics, Vol. 32, No. 6, 2016, pp. 1550-1557. .
- [14] N. Zhang, W. Shang, S. Cong, "Geometry-Based Trajectory Planning of a 3-3 Cable-Suspended Parallel Robot", Journal of IEEE Transaction on Robotics, Vol. 33, No. 2, 2016, pp. 484-491.
- [15] L. Barbazza, F. Oscari, S. Minto, G. Rosati, "Trajectory planning of a suspended cable driven parallel robot with reconfigurable end effector", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 48, 2017, pp. 1-11.
- [16] L. Kevac, M. Filipovic, A. Rakic, "The trajectory generation algorithm for the cable-suspended parallel robot—The CPR Trajectory Solver", Robotics and Autonomous Systems, Vol 94, 2017, pp. 25-33.