

تحلیل رفتار بعد از کمانش صفحات مدور سوراخدار، تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی  
با استفاده از روش ریلی - ریتز

عماد مظهري\*، احمد موسوي\*، آرش ثابت‌قدم\* و علیرضا شهیدی\*\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۹/۱۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۸/۱۲/۱۹)

چکیده -

-

واژگان کلیدی:

## Analysis of Post Buckling Behavior of Circular Plates under Uniform Loading Using Rayleigh – Ritz Method

E. Mazhari, A. Musavi, A. Sabetghdam and A. R. Shahidi

Isfahan University of Technology; Department of Mechanical Engineering

**Abstract:** *This paper is intended to analyse the post buckling behavior of annular plate under the effects of symmetric uniform loading using Rayleigh-Ritz method. This is done first by formulating the problem in large deflection using Von-Karman nonlinear theory. The geometry in natural coordinate system using the correct and useful mapping and the development of displacement fields in natural coordinate system using Hierarchic, Hermitian and Lagrange shape functions respectively*

\*\* - استادیار

\* - کارشناسی ارشد

in interpolation of out-of-plane and in-plane displacement field of plates are also considered. Finally, we deal with the presentation of a proper Hookian displacement field for controlling post buckling behavior of circular plates. To solve the problems, this method enjoys a number of advantages including continuity in stress and strain, few numbers of degree of freedom and application of boundary easy conditions.,

**Keywords:** Circular plate, Buckling, Post buckling, Large deflection, Shape functions, Hookian displacement field, Rayleigh-Ritz method.

بردار مختصات تعمیم یافته	$\Delta$	سختی خمشی ورق	D
ضریب پواسون	$\nu$	ماتریس تنش - کرنش	$D_b$
بردار انحنا	K	مدول الاستیسیته	E
مختصات قطبی	$r, \theta$	ماتریس سختی خمشی	$K_b$
مختصات طبیعی	$\xi, \eta$	ماتریس سختی هندسی	$K_G$
کرنشهای هوکین	$\epsilon_{Hr}, \epsilon_{H\theta}$	توابع شکل	N
کرنشهای گرین	$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	ضخامت ورق	t
کرنشهای کلی	$\bar{\epsilon}_r, \bar{\epsilon}_\theta$	میدان جابه‌جایی در جهت r	u
بردار تنش	$\sigma$	میدان جابه‌جایی در جهت z	w

## ۱- مقدمه

شود. مقاومت بعد از کمانش ورقها دارای چنان اهمیتی است که گفته می‌شود اگر در طراحی بدنه هواپیما از این مقاومت استفاده نمی‌شد هیچ هواپیمایی قادر به بلند شدن از زمین نبود. تحلیل چنین رفتاری که بعد از کمانش به وقوع می‌پیوندد با فرمولبندی مسئله در تغییر شکلهای بزرگ امکانپذیر است.

بنا به دلایل فوق در مورد اهمیت مسئله مقاومت بعد از کمانش صفحات، تحقیقات در این خصوص از سال ۱۹۱۰ شروع شد و تا کنون در این زمینه پیشرفتهای قابل توجهی حاصل شده است. ورق مربع مستطیل با تکیه گاه ساده که از اطراف کاملاً مهار شده باشد، به علت سادگی در هندسه و درونیابی میدانهای جابه‌جایی از جمله اولین مسائل تحقیقاتی است که در این زمینه انجام شده؛ و ارجاع به کتابهای نظریه صفحات و پوسته‌ها مانند تیموشنکو [۱ و ۲]، یوگرال [۳]، ردی [۴] و داگلاس [۵] خواننده را به تاریخچه موضوع آشنا می‌سازد. راثو و راجو [۶] ۱۹۷۸ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای مدور ایزوتروپیک، با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی و

آزمایشات و تجربیات نشان داده است که رفتار بعد از کمانش ورقها با رفتار بعد از کمانش ستونها متفاوت است، به طوری که بار بحرانی برای یک ستون را می‌توان به عنوان بار نهایی در نظر گرفت ولی یک ورق نازک بعد از کمانش خود می‌تواند باری به مراتب بزرگتر از بار بحرانی خود را که در آن بار کمانش شروع می‌شود تحمل کند؛ که علت این امر مهم رفتار غشایی و تغییر شکل ورق به سمت یک سطح ناگستردنی است که مورد اخیر نیز به نوعی رفتار غشایی محسوب شده و به طور خلاصه می‌توان رفتار غشایی را به عنوان عاملی در کنار رفتار خمشی ورق مؤثر دانست.

طبیعتاً مقاومت چشمگیر پس از کمانش صفحات، دست اندرکاران علوم مهندسی و صنعتی را در این فکر فرو می‌برد که در مورد سازه‌هایی که در آنها محدودیت وزن وجود دارد مانند هواپیما، سفینه‌های فضایی، میکروسویچها و تیر ورقها حتی‌المقدور از ظرفیت یا استحکام بعد از کمانش آن استفاده

گیردار، تحت بارگذاری یکنواخت شعاعی پرداختند. ردی و همکاران [۷] ۱۹۸۰ با استفاده از روش *تفاضل محدود* رفتار بعد از کمانش ورقهای حلقوی ایزوتروپیک و اورتوتروپیک را تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی در داخل وخارج، با شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بررسی قرار دادند. دومر و همکاران [۸] ۱۹۸۴ با استفاده از روش *ترتیب نقاط متعامد* به تحلیل رفتار بعد از کمانش ورقهای حلقوی اورتوتروپیک در حالت متقارن پرداختند و نتایج خود را برای حالت‌های مختلف شرایط مرزی ارائه کردند. راثو و راجو [۹] ۱۹۸۵ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای مدور ایزوتروپیک، با در نظر گرفتن اثر برش، تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی، بر روی بستر الاستیک پرداختند و نتایج خود را برای مقادیر مختلف ضخامت و سختی بستر الاستیک ارائه کردند. راثو و راجو [۱۰] ۱۹۸۷ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای حلقوی ایزوتروپیک، تحت بارگذاری یکنواخت شعاعی در داخل حلقه پرداختند. رامچاندرا و همکاران [۱۱] ۱۹۸۹ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی کمانش و رفتار بعد از کمانش ورقهای مدور و حلقوی تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی پرداختند، در تحقیق ایشان از ماده‌ای که رفتارش در کشش و فشار متفاوت بود استفاده شده است و آنها نتایج خود را برای حالت‌های مختلف شرایط مرزی ارائه کردند. راثو و راجو [۱۲] ۱۹۹۱ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای مدور ایزوتروپیک، تحت اثر دمای یکنواخت شعاعی، بر روی بستر الاستیک که در مقابل چرخش مقاومت می‌کند، پرداختند و نتایج خود را برای مقادیر مختلف ضخامت و سختی بستر الاستیک ارائه کردند. راثو و راجو [۱۳] ۱۹۹۱ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای مدور اورتوتروپیک، در حالت متقارن، بر روی بستر الاستیک که در مقابل چرخش مقاومت می‌کند را بررسی و نتایج خود را برای حالت‌های مختلف بستر ارائه کردند. همچنین ایشان [۱۴] ۱۹۹۳ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش

ورقهای مدور با تغییر ناگهانی ضخامت (پله ای) تحت اثر بارگذاری یکنواخت پرداختند و نتایج خود را برای حالت‌های مختلف شرایط مرزی ارائه و مشاهده کردند که اندازه پله تأثیر بسیار مهمی در کمانش و رفتار بعد از کمانش ورق دارد. همچنین ایشان [۱۵] ۱۹۹۴ با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای مدور ایزوتروپیک، با در نظر گرفتن اثر برش، بر روی بستر الاستیک که در مقابل چرخش مقاومت می‌کند را در حالت‌های ورق تحت اثر بارگذاری و دمای یکنواخت شعاعی مورد بررسی قرار دادند. ازهری و همکاران [۱۶] ۱۹۹۵ با استفاده از روش *نوار محدود* رفتار بعد از کمانش ورقهای مربع مستطیل با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. وانگ [۱۷] ۱۹۹۸ با استفاده از روش *سریهای توانی* به بررسی رفتار بعد از کمانش ورقهای لایه لایه‌ای مدور در حالت متقارن پرداخت و میزان رهایی انرژی در حالت‌های قبل و بعد از کمانش برای وقتی که ورق دارای یک ترک ریز است را محاسبه کرد. برادفورد و همکاران [۱۸] ۱۹۹۸ با استفاده از روش *گالرکین* به تحلیل رفتار کمانشی ورقهای مربع مستطیل و مثلی پرداختند و بار بحرانی را برای آنها محاسبه نمودند. سعادتپور و همکاران [۱۹] ۱۹۹۸ با استفاده از روش *گالرکین* تحلیل استاتیکی غیرخطی ورقهای مربع مستطیل با تکیه‌گاه مفصلی را مورد بررسی قرار دادند. شهیدی [۲۰] ۲۰۰۰ با استفاده از روش *گالرکین* تحلیل رفتار بعد از کمانش ورق متوازی الاضلاع و یا چهار ضلعی دلخواه را با شرط مرزی مفصلی مورد بررسی قرار داد. وانگ [۲۱] ۲۰۰۰ با استفاده از روش *سریهای توانی* به بررسی رفتار بعد از کمانش ورق مدور در حالت متقارن پرداخت و پدیده *کمانش ثانویه* را مورد مطالعه قرار داد و در انتها بار بحرانی را برای این حالت محاسبه کرد. سین و پائول [۲۲] ۲۰۰۳ با استفاده از روش *ریلی-ریتر* تغییر شکل متقارن بزرگ ورق در حالت استاتیکی برای ورقهای با هندسه‌های زیر مورد بررسی قرار دادند:

۱- ورق مربعی با سوراخهای مربع و مدور در مرکز

۲- ورق مدور با سوراخهای مربع و مدور در مرکز

بزرگ می‌شود و کشیدگی در میان صفحه ورق به وجود می‌آید دیگر از نظریه تغییر شکل‌های کوچک کیرشلف-لاو<sup>۱</sup> نمی‌توان استفاده کرد و باید به سراغ نظریه‌ای رفت که بتواند تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک را مدل کند که در این مقاله از نظریه ون-کارمن<sup>۲</sup> برای این منظور استفاده و فرمولبندی مسئله بر این اساس انجام شده است. نکته مهمی که در استفاده از این نظریه باید به آن توجه کرد، محدود بودن جابه‌جاییها است به طوری که در این نظریه برای نسبت ماکزیمم خیز به ضخامت ورق کمتر از ۲ جوابها مورد قبول است و برای بیشتر از این نسبت دیگر نمی‌توان از این نظریه استفاده کرد [۳].

## ۲- دستگاه مختصات

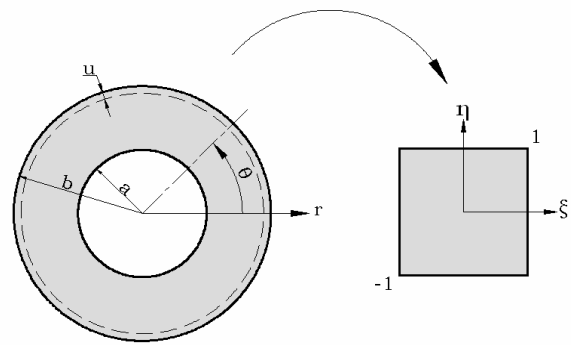
در بسیاری از مسائل مکانیک محیط‌های پیوسته که در عمل با آن مواجه‌ایم، شکل هندسی سیستم مورد مطالعه به گونه‌ای است که تحلیل مسئله در دستگاه مختصات کارترین، مشکل و شاید ناممکن باشد. لذا انتخاب دستگاه محورهای مختصات دیگر ضروری است. به عنوان مثال در حل ورق‌های دایره‌ای از دستگاه مختصات قطبی استفاده می‌شود. ولی در این مقاله برای سادگی بیشتر در محاسبات و استفاده از انتگرال‌گیری عددی به روش گوس، از دستگاه مختصات طبیعی که بین -۱ تا ۱ تغییر می‌کند استفاده شده؛ که با استفاده از یک نگاشت به صورت رابطه (۱) ارتباط بین دو دستگاه مشخص می‌شود. مراحل نگاشت در شکل (۱) مشخص است.

$$r = \frac{a}{2}(1-\xi) + \frac{b}{2}(1+\xi) \quad \theta = \pi(1+\eta) \quad (1)$$

## ۳- درون‌یابی میدانهای جابه‌جایی و توابع شکل

میدانهای جابه‌جایی در میان تار ورق دارای دو مؤلفه مستقل جابه‌جایی  $w, u$  به ترتیب در امتدادهای  $z, r$  هستند که به شکل زیر بیان می‌شود

$$U_p = \langle u \quad w \rangle^T \quad (2)$$



شکل ۱

آنها نتایج خود را در مقایسه با اجزای محدود بسیار دقیق دیدند. وانگ و همکاران [۲۳] ۲۰۰۳ با استفاده از روش شوتینگ به بررسی خمش و رفتار بعداز کمانش ورق‌های مدور از جنس *اف جی ام*، تحت اثر بارهای گرمایی و مکانیکی متقارن پرداختند و یکی از نتایج آنها این بود که این ماده مقاومت بیشتری نسبت به فلزات در مقابل خمش از خود نشان می‌دهد. یانگ پینگ و همکاران [۲۴] ۲۰۰۳ با ترکیب روش نیوتون و هارمونیک بالانس روش تحلیلی تقریبی را برای تحلیل رفتار بعداز کمانش ورق حلقوی تحت اثر فشار یکنواخت هیدرواستاتیکی پایه گذاری کردند و نتایج خود را در مقایسه با حل دقیق بسیار عالی دیدند. ازهری، شهیدی و سعادتپور [۲۵] ۲۰۰۴ با استفاده از روش ریلی-ریتز رفتار بعداز کمانش ورق‌های مربع مستطیل با تغییرات ناگهانی ضخامت و شرایط تکیه‌گاهی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. وانگ و همکاران [۲۶] ۲۰۰۵ برای معادلات سه بعدی حاکم بر رفتار کمانشی ورق، حلی مناسب ارائه کردند و بار بحرانی را برای ورق با شرایط مرزی مفصلی و گیردار محاسبه کردند.

هدف از انجام این مقاله تحلیل رفتار بعداز کمانش ورق مدور تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی داخل سطح (*In-plane*) با استفاده از روش ریلی-ریتز است که در حالت‌های مختلف این بارگذاری بر روی مرز داخلی یا خارجی قرار می‌گیرد. در تحلیل رفتار بعداز کمانش به دلیل اینکه تغییر شکلها

با استفاده از توابع درونیابی مناسب، میدان جابه‌جایی به صورت زیر درونیابی می‌شود

$$u = \sum_{i=1}^n N_{ui} \hat{u}_i \quad (3)$$

$$w = \sum_{i=1}^n N_{wi} \hat{w}_i$$

که در روابط فوق  $\hat{u}, \hat{w}$  مختصات تعمیم یافته نامیده می‌شوند. همچنین توابع شکل داخل سطح و  $N_{wi}$  توابع شکل خارج سطح‌اند. در ادامه رابطه (۳) به شکل ماتریسی زیر

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{wi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{w}_i \end{Bmatrix} \quad (4)$$

و یا به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$U_p = \sum_{i=1}^n N_i \Delta_i \quad (5)$$

همچنین در حالت کلی می‌توان نوشت

$$U_p = N \Delta \quad (6)$$

توابع شکل به‌کار رفته در خارج از سطح در جهت شعاعی  $\xi$  شامل ده تابع چند جمله‌ای بوده که چهار تابع اول آن، توابع هرمیت درجه سه هستند که در شرایط مرزی مختلف، ممکن است تعدادی از آنها حذف شوند. شش تابع دیگر نیز از نوع توابع شکل طبقاتی‌اند که در مختصات طبیعی از فرمول کلی زیر تبعیت می‌کنند.

$$N_r(\xi) = \sum_{n=0}^{\frac{r}{2}} \frac{(-1)^n (2r-2n-7)!!}{2^n n!(r-2n-1)!} (\xi)^{r-2n-1} \quad (7)$$

$r > 4$

توابع شکل به‌کار رفته در داخل سطح در جهت شعاعی  $\xi$  شامل ده تابع چند جمله‌ای بوده که دو تابع اول آن، توابع لاگرانژ مرتبه اول بوده که در شرایط مرزی مختلف، ممکن است یکی از آنها حذف شود. هشت تابع دیگر نیز از نوع توابع شکل طبقاتی‌اند [۲۸].

#### ۴- فرمولبندی مسئله بر اساس روش ریلی- ریتز

##### ۴-۱- کماتش

انرژی کرنشی ناشی از خمش ورق با شعاع داخلی a و خارجی b را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲]

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_A \kappa^T D_b \kappa \, dA \quad (8)$$

که در آن  $D_b$  ماتریس تنش کرنش مسئله ورق بوده که به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

که  $\nu$  ضریب پواسون و  $t$  ضخامت ورق و  $E$  مدول الاستیسیته می‌باشد. همچنین بردار انحنا در میان صفحه ورق  $K$  به صورت روابط زیر ارائه می‌شود

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_r \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (10)$$

با جاگذاری رابطه (۷) در رابطه فوق داریم

$$\kappa = L_b U_p = L_b N \Delta = B_b \Delta \quad (11)$$

که در رابطه فوق  $L_b, B_b$  به ترتیب اپراتورهای مشتق‌گیری در رفتار غشایی و ماتریس حاصل از اثر آن بر توابع شکل هستند. حال می‌توان معادله (۸) را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_A \Delta^T B_b^T D_b B_b \Delta \, dA = \frac{1}{2} \Delta^T K_b \Delta \quad (12)$$

که در آن  $K_b$  ماتریس سختی خمش ورق، به صورت زیر بیان می‌شود

$$K_b = \iint_A B_b^T D_b B_b \, dA \quad (13)$$

کارانجام شده ناشی از بار شعاعی  $N_r$  وارد شده به میان صفحه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W = -\frac{1}{2} \iint \Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} d\Omega \quad (14)$$

که در رابطه فوق  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  مقادیر تنشهای داخل سطح اند که برای ورق تحت فشار خارجی به صورت زیر و برای ورق تحت فشار داخلی به صورت رابطه (۱۶) تعریف می شوند [۲۹]

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 N_{ro}}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} - \frac{b^2 N_{ro}}{b^2 - a^2} \quad (15)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 N_{ro}}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} - \frac{b^2 N_{ro}}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_r = -\frac{a^2 b^2 N_{ri}}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 N_{ri}}{b^2 - a^2} \quad (16)$$

$\sigma_\theta = \frac{a^2 b^2 N_{ri}}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 N_{ri}}{b^2 - a^2}$

که در روابط فوق  $N_{ro}$  و  $N_{ri}$  به ترتیب نیروهای داخلی و خارجی بر واحد طول وارد شده به میان صفحه اند. با استفاده از تعریف ماتریس مشتقات توابع شکل در رفتار کمانشی به شکل زیر

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = B_G \Delta \quad (17)$$

رابطه (۱۴) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$W = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \Delta^T B_G^T \sigma B_G \Delta \, d\Omega = \frac{1}{2} \Delta^T K_G \Delta \quad (18)$$

که در آن ماتریس سختی هندسی بوده و به شکل زیر محاسبه می شود

$$K_G = \iint_A B_G^T \sigma B_G \, dA \quad (19)$$

که در روابط فوق  $\sigma$ ، ماتریس شامل مؤلفه های تنش داخل سطح است. انرژی پتانسیل کل ورق ناشی از نیروهای خارجی وارد به میان صفحه و خمش به شکل زیر بیان می شود

$$\Pi = U_b - W = \frac{1}{2} \Delta^T K_b \Delta - \frac{1}{2} \Delta^T K_G \Delta \quad (20)$$

بر اساس روش ریتز، برای برقراری تعادل، تغییرات انرژی پتانسیل ارائه شده در رابطه فوق به صورت زیر و مساوی صفر است

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W = \delta \Delta^T (K_b - K_G) \Delta = 0 \quad (21)$$

با توجه به اختاری بودن  $\delta \Delta$  رابطه فوق به شکل رابطه زیر

نوشته می شود

$$(K_b - \lambda K_G) \Delta = 0 \quad (22)$$

رابطه فوق یک مسئله مقدار ویژه است که با حل آن،  $\lambda$  مینیمم مقدار ویژه بار بحرانی ورق و بردار ویژه نظیر آن، مود اول کمانشی است. ارتباط بار بحرانی با ضریب بار بحرانی به صورت زیر است.

$$N_{cr} = \lambda_{cr} \frac{D}{b^2} \quad (23)$$

#### ۲-۴- رفتار بعداز کمانش

##### ۲-۴-۱- میدان جابه جایی هوکین

میدان جابه جایی هوکین در اکثر موارد کاربردهای صفحات نازک در صنعت، سخت کننده هایی روی جداره آنها تعبیه می کنند که موجب افزایش توان باربری ورق می شود. این سخت کننده ها ممکن است شامل صفحات ضخیمی باشد که به ورق جوش شده اند و یا می تواند لبه تاشده خود ورق باشد. عمدتاً سختی این سخت کننده ها در مقابل سختی ورق بسیار زیاد است به طوری که می توان برای تحلیل رفتار پس از کمانش صفحات فرض را بر این گذاشت که صفحه از اطراف به قطعات صلب متصل است و یا حداقل بار از طریق قطعات صلب به ورق منتقل می شود که بسته به نوع محل قرار گرفتن این سخت کننده ها مسائل متفاوتی مطرح می شود. با توجه به این که عمدتاً در کاربرد صفحات نازک در صنعت بار از طریق سخت کننده ها به ورق منتقل می شود می توان برای تحلیل رفتار بعد از کمانش صفحات کنترل مسئله را روی جابه جاییهای مرزی که به میدان جابه جایی هوکین معروف است قرار داد.

در تحلیل رفتار بعد از کمانش به علت اینکه خیز یا جابه جاییها بزرگتر از ضخامت ورق می شوند، دیگر نمی توان از تنش و کرنش که در میان صفحه به وجود می آید صرف نظر کرد. پس با تعریف انرژی کرنشی ناشی از کشیدگی میان صفحه در

رابطه (۲۴) به ادامه فرمولبندی مسئله می پردازیم [۱]

$$U_m = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_A (\bar{\epsilon}_r^2 + \bar{\epsilon}_\theta^2 + 2\nu \bar{\epsilon}_r \bar{\epsilon}_\theta) \, dA \quad (24)$$

جدول ۱- مقادیر ضریب بار بحرانی برای دو حالت ورق با تکیه‌گاه مفصلی و گیردار (بارگذاری روی مرز خارجی)

		تکیه‌گاه ساده			تکیه‌گاه گیردار			
		حل حاضر	Abaqus	[۲۹]	حل حاضر	Abaqus	[۲۹]	[۱۱]
a/b	۰/۰	۴/۱۹۷۸	۴/۱۹۸۰	۴/۲۰	۱۴/۶۸۲۰	۱۴/۶۸۰۰	۱۴/۶۴	۱۴/۶۸۲
	۰/۱	۳/۹۸۲۳	۳/۹۸۱۷	۳/۹۶	۱۳/۹۴۷۸	۱۳/۹۷۱۰	۱۴/۰۴	۱۳/۷۴۱
	۰/۲	۳/۵۳۵۰	۳/۵۳۷۹	۳/۶۰	۱۳/۶۰۳۹	۱۳/۶۱۲۱	۱۳/۳۲	۱۳/۲۸۹
	۰/۳	۳/۱۰۵۴	۳/۱۰۵۲	۳/۲۴	۱۴/۹۶۲۹	۱۴/۹۶۳۷	۱۴/۵۲	۱۴/۶۹۴
	۰/۴	۲/۷۶۳۰	۲/۷۶۲۸	۲/۷۶	۱۸/۵۵۵۷	۱۸/۵۵۶۴	۱۷/۶۴	-
	۰/۵	۲/۵۰۰۲	۲/۵۰۰۱	۲/۵۲	۲۵/۷۵۸۹	۲۵/۷۶۰۳	۲۴/۸۴	-
	۰/۶	۲/۲۹۷۳	۲/۲۹۷۲	۱/۸۰	۳۳/۵۱۲۳	۳۳/۲۲۱۹	-	-
	۰/۷	۲/۱۳۸۰	۲/۱۳۷۹	۲/۱۶	۴۳/۶۹۰۰	۴۳/۱۶۹۵	-	-

بردار ویژه نظیر مود اول کمانشی برای تسریع در همگرایی استفاده شده است.

### ۵- نتایج عددی

در این بخش به ارائه مثالهای حل شده و بررسی نتایج به دست آمده می‌پردازیم؛ لازم به ذکر است کدنویسی این مقاله در نرم افزار MATLAB انجام شده و در کلیه مثالهای حل شده تعداد توابع شکل داخل و خارج سطح در جهت  $x$  ده تابع شکل بوده و تعداد نقاط گوس به کار رفته در انتگرال گیری عددی شامل ۱۰ نقطه گوس و نسبت پواسون در کلیه مثالها ۰/۳ است.

در جدول (۱) و (۲) به بررسی تأثیر شعاع سوراخ بر ضریب بار بحرانی ورق مدور  $\lambda$ ، تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی (In-plane)، با شرط تکیه‌گاهی گیردار و ساده، روی مرز خارجی، پرداخته و مقادیر به دست آمده با نرم‌افزار Abaqus و مراجع [۱۱ و ۲۲] مورد مقایسه قرار گرفته است.

همان‌طور که در جدول (۱) مشخص است در ورق مدور روی تکیه‌گاه مفصلی با افزایش نسبت  $a/b$  مقادیر بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند ولی این مقدار برای ورق با تکیه‌گاه گیردار از یک نسبتی کاهش و بعد افزایش پیدا می‌کند که علت این امر تغییر در مود کمانشی ورق و میل کردن رفتار ورق به سمت

در رابطه فوق  $\bar{\varepsilon}$  ها از مجموع کرنشهای گرین و هوکین به منظور کنترل رفتار بعد از کمانش ورق، تشکیل شده است که به صورت زیر بیان می‌شود

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + \varepsilon_{Hr} \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + \varepsilon_{H\theta} \quad (25)$$

با توجه به نظریه ون-کارمن کرنشهای گرین در حالت متقارن به صورت زیر ارائه می‌شود [۴]

$$\varepsilon_r = u_{,r} + \frac{1}{2} w_{,r}^2 \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (26)$$

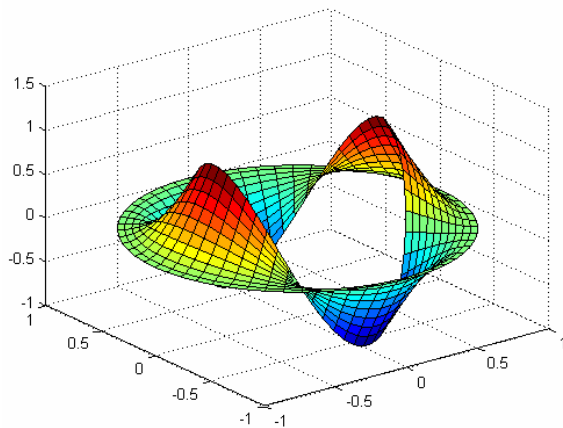
پس با جاگذاری روابط (۲۵) و (۲۶) در (۲۴) و با توجه به اینکه تغییرات انرژی پتانسیل کل ورق در تغییر شکل‌های بزرگ به صورت  $\delta \Pi = \delta U_m + \delta U_b = 0$  است، با برابر صفر قرار دادن ضرایب  $\delta w, \delta u$  نهایتاً به دستگاه معادلات غیر خطی به صورت زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} K_{m11} & K_{m12}(\hat{w}) \\ K_{m21}(\hat{w}) & K_{m22}(\hat{w}) + K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

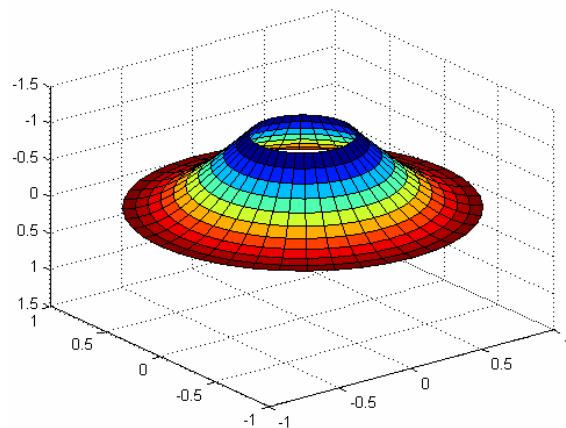
که در رابطه فوق  $F_u$  نیروی به وجود آمده ناشی از میدان جابه‌جایی هوکین است،  $K_b$  و  $K_m$  به ترتیب ماتریس سختیهای به دست آمده از انرژی خمشی و کشیدگی میان صفحه است. در این مقاله برای حل دستگاه معادلات فوق از روش نیوتن-رافسن استفاده شده است که برای شروع اولین تکرار از

جدول ۲- مقادیر ضریب بار بحرانی برای دو حالت ورق با تکیه‌گاه مفصلی و گیردار (بارگذاری روی مرز داخلی)

		تکیه‌گاه ساده		تکیه‌گاه گیردار	
		حل حاضر	Abaqus	حل حاضر	Abaqus
<b>a/b</b>	۰/۱	۱۰۲/۶۹۲۱	۱۰۲/۸۲۲۷	۱۲۱/۹۰۶۴	۱۲۲/۰۵۲۸
	۰/۲	۲۸/۰۹۳۶	۲۸/۰۸۴۶	۴۲/۰۶۰۳	۴۲/۰۴۰۴
	۰/۳	۱۳/۵۲۹۷	۱۳/۵۲۷۲	۲۷/۳۴۱۶	۲۷/۳۳۳۳
	۰/۴	۸/۱۸۴۸	۸/۱۸۴۰	۲۳/۹۳۰۳	۲۳/۹۲۴۶
	۰/۵	۵/۵۹۸۴	۵/۵۹۸۱	۲۵/۵۶۰۹	۲۵/۵۵۵۰
	۰/۶	۴/۱۳۲۵	۴/۱۳۲۳	۳۲/۳۹۴۷	۳۲/۳۸۱۱
	۰/۷	۳/۲۱۲۰	۳/۲۱۱۸	۴۹/۵۶۷۱	۴۹/۵۳۴۲



ب-  $\frac{a}{b} = 0.6$



الف-  $\frac{a}{b} = 0.3$

شکل ۲- مود اول کمانشی برای ورق بر روی تکیه‌گاه گیردار (بارگذاری روی مرز خارجی)

جابه‌جایی (در مرکز ورق) حدود ۳، نسبت جابه‌جایی به جابه‌جایی بحرانی برابر ۱۵ است ولی این مقدار برای ورق با تکیه‌گاه گیردار ۵ است.

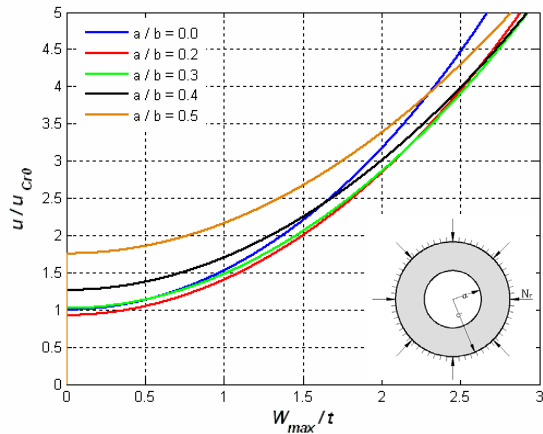
در شکل‌های (۵) و (۶) مسیر بعداز کمانش ورق مدور با شرایط مرزی خارج سطح مفصلی و گیردار و داخل سطح گیردار برای بارگذاری روی مرز داخلی مورد بررسی قرار گرفته است.

در شکل‌های (۷) و (۸) نمودار تنش در جهت  $x$  اندازه‌گیری شده بر روی مرز خارجی بر حسب جابه‌جایی به جابه‌جایی بحرانی برای ورق با بارگذاری روی مرز خارجی و شرایط مرزی مفصلی و گیردار با نسبت‌های مختلف  $a/b$  مورد بررسی قرار گرفته است.

رفتار ستون است. شکل‌های (۲-الف) و مود اول کمانشی را برای ورق بر روی تکیه‌گاه گیردار برای نسبت‌های  $a/b = 0/3$  و  $0/6$  نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که شکل مود اول کمانشی برای ورق با تکیه‌گاه ساده برای کلیه نسبت‌های  $a/b$  همانند شکل (۲) به صورت گنبدی شکل است.

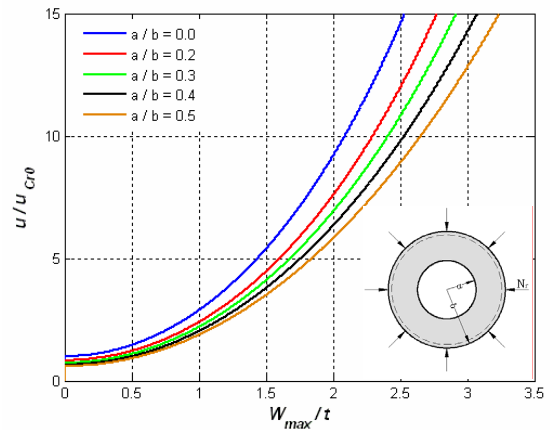
در شکل‌های (۳) و (۴) مسیر بعداز کمانش ورق مدور با شرایط مرزی خارج سطح مفصلی و گیردار و داخل سطح گیردار برای بارگذاری روی مرز خارجی مورد بررسی قرار گرفته که به وضوح نمایانگر این است که ورقها بعداز کمانش نیز از خود مقاومت نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در ورق با تکیه‌گاه مفصلی، برای رسیدن به حداکثر





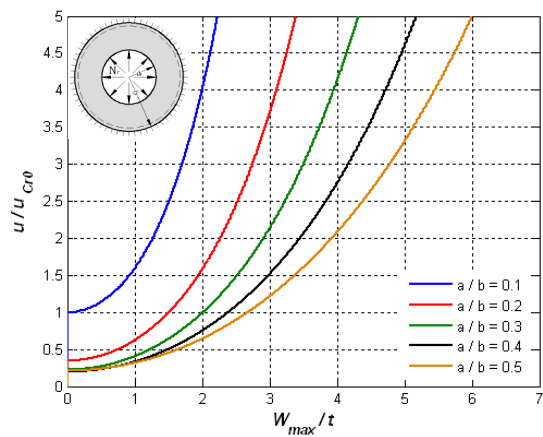
شکل ۴- مسیر بعداز کماتش ورق مدور با تکیه گاه گیردار

$$u_{cr0} = \frac{14.682}{12(1+\nu)} \frac{t^2}{b}$$



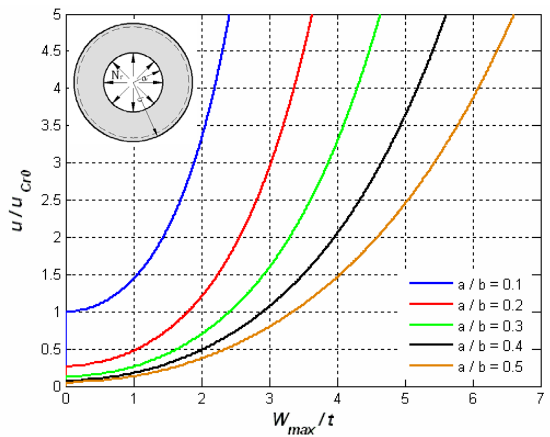
شکل ۳- مسیر بعداز کماتش ورق مدور با تکیه گاه مفصلی

$$u_{cr0} = \frac{4.1978}{12(1+\nu)} \frac{t^2}{b}$$



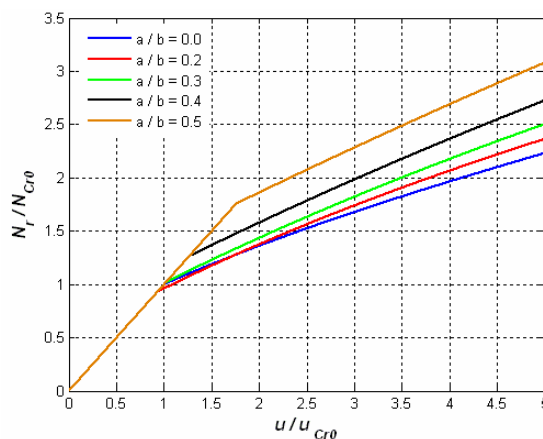
شکل ۶- مسیر بعداز کماتش ورق مدور با تکیه گاه خارج

$$u_{cr0} = \frac{121.9064}{12(1+\nu)} \frac{t^2}{b} \text{ سطح گیردار}$$



شکل ۵- مسیر بعداز کماتش ورق مدور با تکیه گاه سطح

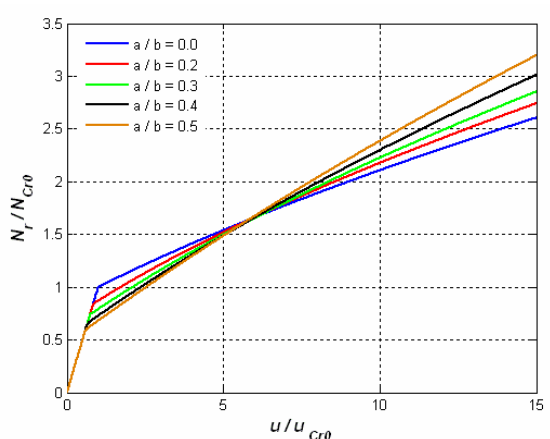
$$u_{cr0} = \frac{102.6921}{12(1+\nu)} \frac{t^2}{b} \text{ مفصلی}$$



شکل ۸- نمودار نسبت تنش ۲ به تنش بحرانی بر حسب جابه جایی

به جابه جایی بحرانی برای ورق با تکیه گاه

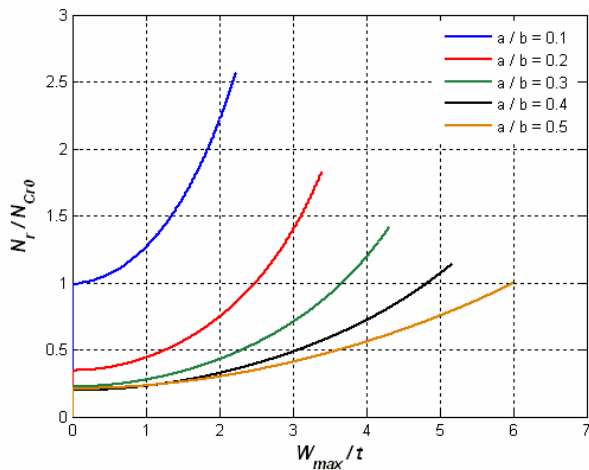
$$N_{cr0} = 14.682 \frac{D}{b^2} \text{ گیردار}$$



شکل ۷- نمودار نسبت تنش ۲ به تنش بحرانی بر حسب جابه جایی به

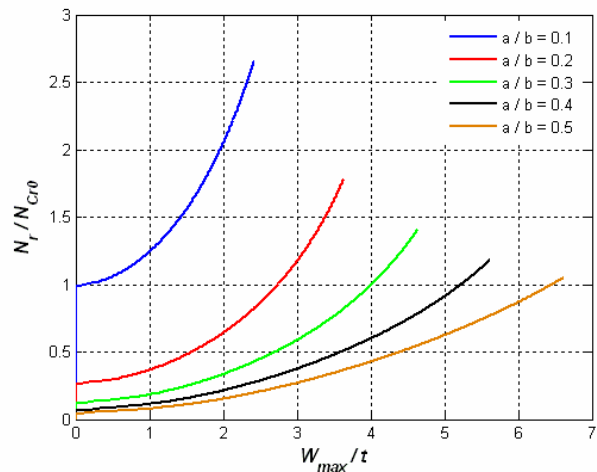
جابه جایی بحرانی برای ورق با تکیه گاه

$$N_{cr0} = 4.1978 \frac{D}{b^2} \text{ مفصلی}$$



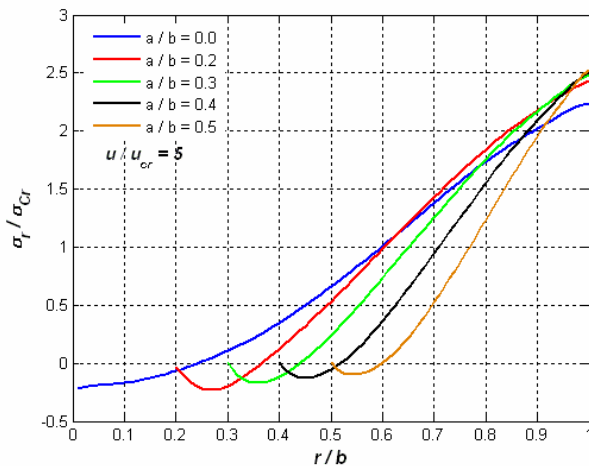
شکل ۱۰ - نمودار نسبت تنش  $r$  به تنش بحرانی بر حسب جابه‌جایی به جابه‌جایی بحرانی برای ورق با تکیه‌گاه گیردار

$$N_{cr0} = 121.9064 \frac{D}{b^2}$$

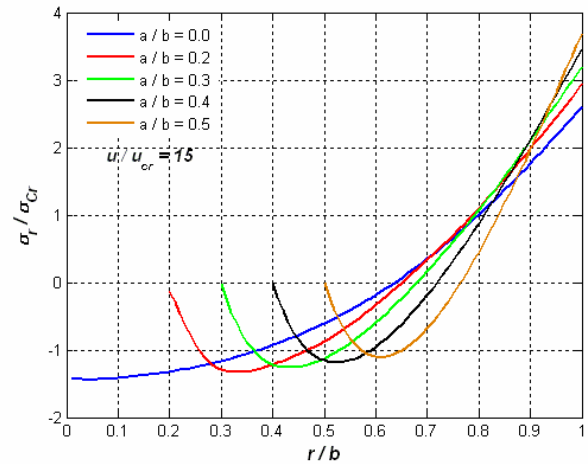


شکل ۹ - نمودار نسبت تنش  $r$  به تنش بحرانی بر حسب جابه‌جایی به جابه‌جایی بحرانی برای ورق با تکیه‌گاه مفصلی

$$N_{cr0} = 102.6921 \frac{D}{b^2}$$



شکل ۱۲ - نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده روی کل دامنه برای ورق با تکیه‌گاه گیردار



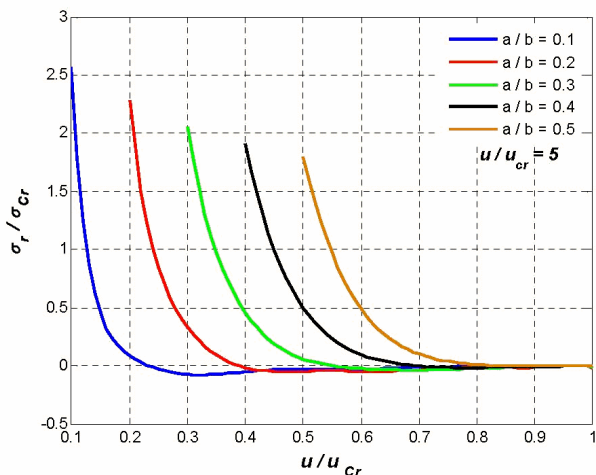
شکل ۱۱ - نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده روی کل دامنه برای ورق با تکیه‌گاه مفصلی

خارجی برای نسبت‌های  $a/b$  مختلف، در یک نسبت جابه‌جایی به جابه‌جایی بحرانی خاص، که این مقدار برای ورق با تکیه‌گاه مفصلی و گیردار به ترتیب ۱۵ و ۵ است، مورد بررسی قرار گرفته است.

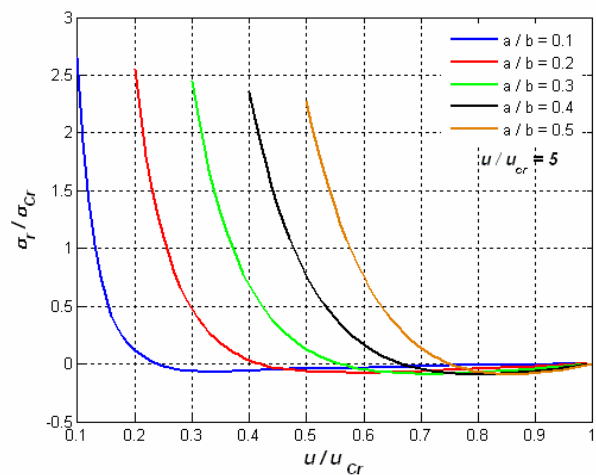
در شکل‌های (۱۳) و (۱۴) نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده روی کل دامنه ورق با بارگذاری روی مرز داخلی برای نسبت‌های  $a/b$  مختلف، در یک نسبت جابه‌جایی به

در شکل‌های (۹) و (۱۰) نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده بر روی مرز داخلی بر حسب جابه‌جایی به جابه‌جایی بحرانی برای ورق با بارگذاری روی مرز داخلی و شرایط مرزی مفصلی و گیردار با نسبت‌های مختلف  $a/b$  مورد بررسی قرار گرفته است.

در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده روی کل دامنه ورق با بارگذاری روی مرز



شکل ۱۴ - نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده روی کل دامنه برای ورق با تکیه‌گاه گیردار



شکل ۱۳ - نمودار تنش در جهت  $r$  اندازه‌گیری شده روی کل دامنه برای ورق با تکیه‌گاه مفصلی

مسیرهای بعد از کمانش به صورت نمودار رسم شد. همان طور که از شکلها مشخص است مقاومت بعد از کمانش صفحات مدور در حالت سوراخدار نیز حائز اهمیت است. همان‌طور که مشاهده شد تنها با تعداد ده درجه آزادی اقدام به حل مسئله شده که به‌خاطر ماهیت غیرخطی بودن مسئله می‌تواند تأثیر به‌سزایی در همگرایی سریع در این گونه مسائل داشته باشد. همگرایی سریع، پیوستگی در مقادیر تنش و کرنشها به علت نوع و تعداد توابع شکل از جمله برتری این روش نسبت به روش اجزای محدود در حل این گونه مسائل است.

جابه‌جایی بحرانی خاص، که این مقدار برای ورق با تکیه‌گاه مفصلی و گیردار ۵ است، مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا به بررسی وضعیت مدهای کمانشی صفحات سوراخدار پرداخته شد و مشاهده شد که با افزایش قطر سوراخ در ورق با تکیه‌گاه گیردار مد کمانشی از حالت متقارن خارج گشته و شکل‌های موجدار ایجاد می‌شود. سپس به بررسی رفتار بعد از کمانش این صفحات پرداخته شد.

## واژه نامه

1. Kirchhoff-Love
2. Von-Karman

## مراجع

1. Timoshenko, S., and Woinowsky, S., *Theory of Plate and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1972.
2. Timoshenko, S., and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961
3. Ugural, A. C., *Stresses in Plates and Shell*, McGraw-Hill, New York, 1981.
4. Reddy, J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, CRC Press, 2007.
5. Bloom, F. and Coffin, D., *Handbook of Thin Plate Buckling and Post-Buckling*, Chapman & Hall, 2000.
6. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling Behavior of Elastic Circular Plates Using a Simple Finite Element Formulation," *Computer & Structure*, Vol. 10, pp. 911-913, 1978.
7. Reddy, B. S., and Alwar, R. S., "Post-Buckling Analysis of Orthotropic Annular Plates," *Acta Mechanica*, Vol. 39, pp. 289-296, 1980.
8. Dumir, P. C., and Shingal, L., "Axisymmetric Post-Buckling of Orthotropic Thick Annular Plates," *Acta Mechanica*, Vol. 56, pp. 229-242, 1984.
9. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling of Moderately Thick Circular Plates With Edge Elastic

- Restraint," *J. of Engineering Mechanics*, Vol. 120, 1985.
10. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling Behaviour of Isotropic Annular Plates Under Uniform Internal Radial Load," *Computer & Structure*, Vol. 29, No. 5, 5, pp. 927-928, 1987
  11. Srinivasan, R. S., and Ramachandra, L. S., "Axisymmetric Buckling and Post-Buckling of Bimodulus Annular Plates," *Eng. Structure*, Vol. 11, 1989.
  12. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling Behaviour of Circular Plates with Elastically Restrained Edges Subjected to Thermal Loads," *Computer & Structure*, Vol. 45, No.1, pp. 209-210, 1991.
  13. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling Behaviour of Circular Plates Resting on An Axisymmetric Elastic Partial Foundation Under Uniform Compressive Loads," *Computer & Structure*, Vol. 46, No.1, pp. 187-190, 1991.
  14. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling Behaviour of Stepped Circular Plates under Uniform Compression," *Computer & Structure*, Vol. 54, No.4, pp. 775-777, 1993.
  15. Rao, G. V., and Raju, K. K., "Post-Buckling of Moderately Thick Circular Plates with Edge Elastic Restraint," *J. of Engineering. Mech.*, Vol. 120, No. 10, pp. 2232-2238, 1994.
  16. Azhari, M., and Bradford, M. A., "The Use of Bubble Functions for the Post-Local Buckling of Plate Assemblies by Finite Strip Method," *Int. J. Numerical Method Engineering.*, Vol. 38, pp.955-968, 1995.
  17. Anwen, W., "Axisymmetric and Asymmetric Post-Buckling Response and Energy Release Rate of Delaminated Circular Film," *Int. Journal of Mech. Sciences*, Vol. 41, pp. 43-58, 1998.
  18. Bradford, M. A., Azhari, M., and Saadatpour, M. M., "Buckling of Arbitrary Quadrilateral Plates with Intermediate Supports using The Galerkin Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Energ.*, Vol. 164, pp. 297-306, 1998
  19. Saadatpour, M. M., and Azhari, M., "The Galerkin Method for Static Analysis of Simply Supported Plates of General Shape," *Computer & Structure*, Vol. 69, pp. 1-9, 1998.
  20. Shahidi A. R., "Galerkin Method for Post Bucklingbehavior Analysis of Quadrilateral Plates," M.S Thesis, Isfahan University of Technology 2000.
  21. Wang, A., "Axisymmetric Post-Buckling and Secondary Bifurcation Buckling of Circular Plates," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 35, pp. 279-292, 2000.
  22. Singh, A. V, and U., K., "Finite Displacement Static Analysis of Thin Plate with an Opening A Variational Approach," *Int. J. of Solid and Stru*, Vol. 40, pp. 4135-4151, 2003.
  23. Wang, T. J., and Ma, L.S., "Nonlinear Bending and Post-Buckling of a Functionally Graded Circular Plate Under Mechanical and Thermal Loadings," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 3311-3330, 2003.
  24. Yongping, Yu, "Analytical Approximations to Large Post-Buckling Deformation of Elastic Rings Under Uniform Hydrostatic Pressure," *Int. J. of Mech. Sciences*, Vol. 49, pp. 661-668, 2003.
  25. Azhari, M. ,Shahidi, A.R., and Saadatpour, M.M., "Local and Post Local Buckling of Stepped and Perforated Thin Plates," *Applied Mathematical Modelling* , Vol. 29, pp. 633-652, 2005
  26. Wang, C. M., "Buckling of Circular Plates under Intermediate and Edge Radial Loads" *Thin-Walled St.*, Vol. 39, pp. 1926-1933, 2005.
  27. Roark, Raymond, J., *Formulas for Stress and Strain*, McGraw-Hill, New York, 1965.
  28. Zienkiwicz, O. C., and Tylor, R. L., *The Finite Element Method*, Butterw Worth-Heinemann, Vol. 2, 2000.
  29. Sadd, M. H., *Elasticity*, Elsevier Inc, Vol. 1, 2005.