بررسی عددی انتقال گرمای جابه جایی سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مربعی

(دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۴/۲۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۹/۱۷)

واژگان کلیدی :

# A Numerical Investigation of Conductive Heat Transfer of Viscoelastic Fluid in a Curved Square Duct

#### M. Norouzi, M. H. Kayhani, M. R. H. Nobari and F. Talebi

Mechanical Engineering Department Shahrood Univ. of Tech. Mechanical Engineering Department Amirkabir Univ. of Tech. Engineering Faculty Semnan Univ.

Abstract: In this paper, fully developed flow and heat transfer of viscoelastic fluid in a curved pipe with square cross section is investigated. To that end, Criminale-Eriksen-Filbey (CEF) constitutive equation is used as viscoelastic model and heat transfer is \*\*\* – دانشجه ی دکتری \*\* = دانشجه ی دکتری (CEF) در ۲۰۰۰ - ۲۰۰۰

*** –استاديار	** – دانشیار	* - دانشجوي دکتري

studied at constant heat flux and in constant temperature conditions. Here, the governing equations are discreted using finite difference method. Also, staggered grids are used as mesh, and Marker and Cell method is applied for allocating the flow parameters on staggered grids. Here, the effect of the stress fields' work of visoelastic fluid and Brinkman number on convective heat transfer inside a curved duct is studied for the first time. Overall, the inverse effect of the first and second normal stress differences on secondary flows intensity and heat transfer is the main result of the current research.

Keywords: Convective heat transfer, Viscoelastic fluid, CEF model, Curved duct, Square cross section.

متوسط سرعت محوری جریان اصلی، m/s	U	طول هر ضلع مقطع کانال، m	ã
مولفههای سرعت، m/s	$\tilde{v}_i$	ظرفیت گرمایی ویژه، J/kg.K	с
مولفههای سرعت بی بعد	$v_i = \tilde{v}_i \ / \ W_0$	عدد برینکمن برای حالت شار ثابت	$Br_{H}=\eta_{0}W_{0}^{2}/\left(\tilde{a}q''\right)$
بردار سرعت، m/s	Ũ	عدد برینکمن برای حالت دما ثابت	$Br_{T} = \eta_{0} {W_{0}}^{2}  /  (k(\tilde{T}_{m} - \tilde{T}_{w}))$
سرعت مرجع، m/s	$W_0 = G\tilde{a}^2 / (16\eta)$	عدد دین بر مبنای سرعت مرجع	$Dn = Re  \delta^{1/2}$
مولفههای دستگاه مختصات، m	$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}$	عدد الاستيک	$En = \Psi_1 / Re$
مولفههای بی بعد دستگاه مختصات	$\mathbf{x}_i = \tilde{\mathbf{x}}_i  /  \tilde{\mathbf{a}}$	ضریب انتقال گرمای جابهجایی، W/m².K	h
		ضریب انتقال گرمای هدایتی، W/m.K	k
		عدد ناسلت	$Nu = h\tilde{a} / k$
نسبت انحناي كانال خميده	$\delta = \tilde{a} / (2\tilde{R})$	فشار استاتیکی، pa	P
کار میدان تنش، W	$ ilde{\Phi}$	فشار استاتیکی بی بعد	$P=\widetilde{P}\widetilde{a}/\eta W_0$
نرخ برش مرتبه اول، <sup>1-</sup> s	$\tilde{\gamma}_{(1)}$	محيط مقطع كانال، m	p'
نرخ برش مرتبه دوم، <sup>2-</sup> s	$\tilde{\gamma}_{(2)}$	عدد پرانتل	$Pr = \eta / (\rho \alpha)$
نرخ برش مرتبه اول بی بعد	$\gamma_{(1)} \equiv \tilde{\gamma}_{(1)}\tilde{a} \ / \ W_0$	شار گرمایی، W/m <sup>2</sup>	q''
نرخ برش مرتبه دوم بی بعد	$\gamma_{(2)} = \tilde{\gamma}_{(2)} \tilde{a}^2  /  {W_0}^2$	عدد رینولدز بر مبنای سرعت مرجع	$Re=\rho W_0 \widetilde{a} \ / \ \eta$
ويسكوزيته، pa.s	η	عدد رینولدز بر مبنای سرعت متوسط	$Re_{b}=\rho U\widetilde{a}/\eta$
مختصه زاويهاي دستگاه استوانهاي	θ	شعاع گام کانال خمیده، m	Ñ
چگالى،kg/m <sup>3</sup>	ρ	شعاع گام بی بعد کانال خمیدہ	$\mathbf{R} = \mathbf{\tilde{R}} / \mathbf{a}$
تانسور تنش، pa	τ	ماکزیمم سرعت بی بعد جریانهای ثانویه	S <sub>max</sub>
تانسور تنش بی بعد	$\tau = \tilde{\tau} \tilde{a}  /  \eta W_0$	دمای سیال، K	Ĩ
ثابت اختلاف تنش نرمال اول pa.s <sup>2</sup>	$ ilde{\Psi}_1$	دمای متوسط سیال، K	$\tilde{T}_{m} = 1/(UA)\int \tilde{v}_{\theta}\tilde{T}dA$
ثابت اختلاف تنش نرمال دوم pa.s <sup>2</sup>	$\tilde{\Psi}_2$	دمای دیواره کانال، K	$ ilde{T}_{w}$
ثابت بی بعد اختلاف تنش نرمال اول	$\Psi_{1}=\tilde{\Psi}_{1}W_{0}/(\eta\tilde{a})$	دمای بی بعد برای حالت دما ثابت	$T_{\rm H}=(\tilde{T}_{\rm w}-\tilde{T})/(\tilde{T}_{\rm w}-\tilde{T}_{\rm m})$
ثابت بی بعد اختلاف تنش نرمال دوم	$\Psi_2 = \tilde{\Psi}_2 W_0 / (\eta \tilde{a})$	دمای بی بعد برای حالت شار ثابت	$T_{T} = (\tilde{T} - \tilde{T}_{w}) / (q''\tilde{a} / k)$

#### ۱- مقدمه

است. این جریان یکی از جریانهای مهم و پایه در مکانیک از سالها پیش تاکنون، مطالعه جریان و انتقال گرما در سیالات محسوب می شود. هرچند تاکنون تحقیقات فراوانی کانالهای خمیده یکی از موضوعات مورد علاقه محققان بوده 💿 بهصورت تحلیلی، عددی و آزمایـشگاهی در خـصوص ایـن

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال)

جریان انجام شده اما بیشتر این تحقیقات مربوط به سیالات نیوتنی بوده و تعداد تحقیقات صورت گرفته در خصوص سیالات غیرنیوتنی و به ویژه سیالات ویسکوالاستیک بسیار اندک بوده است. از جمله کاربردهای جریان سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده می توان به خطوط انتقال این مواد در صنایع نفت و پتروشیمی، صنایع تولید مواد غذایی، تولید مواد شیمیایی و شوینده، کاربرد در زیست سیالات، تزریق مواد پلیمری و ... اشاره کرد.

اولین تحقیق در مورد جریان سیالات نیوتنی در مجاری خمیده توسط دین<sup>۱</sup> [۱ و ۲] و با استفاده از حساب اختلالات<sup>۲</sup> انجام شده است. وی نشان داد که اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا منجر به ایجاد جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر<sup>۳</sup> می شود. وی عدد دین را به عنوان معیار مناسبی برای این جریان معرفی کرد که این عدد به صورت نسبت نیروهای زیر تعریف می شود:

$$Dn = \frac{\sqrt{Centrifugal \times Inertial}}{Viscous}$$
(1)

در واقع عدد دین، همان عدد رینولدز است که در آن انحنای مسیر جریان تصحیح شده است. روشی را کـه دیـن بـرای حـل 🌔 جریان سیال نیوتنی ارائه کرد، بعدها توسط برخبی از محققان برای مطالعه جریان سیال ویسکوالاستیک در لولـههـای خمیـده مورد استفاده قرار گرفت. از آن جملـه مـی تـوان بـه تحقیقـات توماس و والترز<sup>\*</sup> [۳]، رابرتسون و مولر<sup>°</sup> [۴] و سارین<sup>°</sup> [۵ و ۶] در خـصوص جريـان سـيال اولدرويــد-بـــي<sup>۷</sup>، جيتچــوت و رابرتسون^ [٧]، بون و همکاران [٨] و شارما و پراکاش '' [٩] در مورد جریان سیال مرتبه دو و ایمتو'' [۱۰و ۱۱] در مورد جریان سیالات توانی و وایت- متزنر<sup>۲۲</sup> در لولههای خمیده اشاره نمود. مطابق این تحقیقات، ازدیاد عدد وایزنبرگ و خاصیت الاستیک سیال سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه و متمایل شدن موقعیت مرکز گردابه ها به سمت دیـواره های جانبی مجـرا میشود. همچنین در محلولهای پلیمری با ازدیاد زمان رهایی از تنش" محلول، میزان افت فشار مجرا افزایش می یابد. هر چند استفاده از حساب اختلالات منجر به یاستخهای تحلیلی برای

جریان سیالات ویسکوالاستیک در لولههای خمیده می شود، اما در عمل استفاده از این روش دارای محدودیتهایی است که از آن جمله می توان به غیرفیزیکی بودن پاسخهای این روش برای اعداد دیـن بزرگتـر از ۳۰ (کـه عـدد دیـن کـوچکي محـسوب می شود) اشاره کرد [۴]. همچنین بسته به نوع سیال و هندسه جریان، شرایط منفرد<sup>۱۲</sup> یکی از مسائلی است که در یافتن پاسخ یکتا برای این جریان مشکل آفرین است. شایان ذکر است که تمامی تحقیقات پیشین به مقطع هندسی مدور محدود بودهاند. با توجه به محدودیتهای ذکر شده برای روشهای تحلیلی، برخی از محققان با استفاده از روشهای عددی به مطالعه این جریان پرداختهاند. ژانگ<sup>۱۵</sup> و همکارانش [۱۲] با استفاده از روش المان محدود جریان سیال اولدروید-بی را در اعداد دین و وایزنبرگ بزرگ بررسی کردهاند. فن تین و ژنگ<sup>۱۶</sup> [۱۳] نیز معادلات خود تشابهی را برای جریان سیال اولدروید- بی در نسبتهای انحنای کوچک ارائه دادند و با استفاده از روشهای عددی و تحلیلی تقريبي اقدام به حل اين معادلات كردند. فـن " و همكـارانش [۱۴] تحقیقات خود را بر روی جریان توسعه یافتـه خزشـی و اينرسي سيال اولدرويد-بي و اولدرويد سه ثابته در يک لوله خمیده به انجام رساندهاند. آنها با استفاده از تحلیل مرتبه بزرگی نشان دادند که ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول منجر به ایجاد تنش نرمال محوری قدرتمندی در جریان می شود که افزایش شدت جریانهای ثانویه را در پی دارد. همچنین آنها نشان دادنـد که اختلاف تنش نرمال دوم منفی دارای اثر معکوسی بوده و ب کاهش شدت جریانهای ثانویه منجر می شود که این پدیده به خوبی با نتایج آزمایشگاهی [10–١٧] سازگار است. چـن<sup>۱۸</sup> و همکارانش [۱۸] نیز تحلیل مشابهی را برای جریان در لولههای خمیده چرخان انجام داده اند و داس<sup>۱۹</sup> [۱۹] نیـز جریـان سـیال بینگهام را بررسی کرده است. همچنین برخی از محققان جریان در مجاری خمیده نامدور را مورد بررسی قرار دادهانـد. هلـین <sup>°۲</sup> [۲۰] و بوتابا<sup>۲۱</sup> [۲۱] جریان سیال فن-تین-تنر<sup>۲۲</sup> را در یک کانال خمیده دارای مقطع مربعی مطالعه کردهاند و نـشان دادنـد که افزایش خاصیت الاستیک سیال مے توانید به تغییر شکل



شکل ۱ – هندسه کانال خمیده در تحقیق اخیر

جریانهای ثانویه از دو جفت به چهار جفت گردابه منجر شود. ژانـگ<sup>۳۳</sup> و همکـاران [۲۲] نیـز جریـان توسـعه یافتـه سـیال اولدروید- بی را در یـک کانـال خمیـده چرخـان دارای مقطع مربعی بررسی کـردهانـد. در خـصوص انتقـال گرمـای اجباری سیالات ویسکوالاستیک در کانالهای خمیده تحقیقـات انگـشت شماری صورت گرفته که از جمله آنها مـی تـوان بـه تحقیقـات ژانگ و همکاران [۲۳] و شن<sup>۴۲</sup> و همکاران [۲۴] در مورد انتقال گرمای اجباری سیال اولدروید-بی اشاره کرد.

در این تحقیق انتقال گرمای اجباری توسعه یافته سیال ويسكوالاستيك در يك كانال خميده داراي مقطع مربعي به روش عددی بررسی شده است. در شکل (۱) هندسه جریان نشان داده شده است. در اینجا از معادله متشکله کریمینال-اریکسون- فیلبی<sup>۲۵</sup> به عنوان مدل ویسکوالاستیک استفاده شده که این معادله متشکله قادر به مدلسازی اثر هر دو اختلاف تنش نرمال اول و دوم است. در اینجا انتقال گرمای جریان در حالتهای شار ثابت و دما ثابت بررسی شده است. پیشتر جریان این سیال در کانالهای خمیده توسط نوروزی و همکاران [۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است. همانند فان و همکاران [۱۴]، آنها نیز به مطالعه بر روی اثر متضاد اختلاف تنـ شهای نرمـال اول و دوم بر میدان جریان در مجاری خمیده پرداختهاند که مشاهدات آزمایشگاهی نیز بر این موضوع صحه گذاشته است [۱۵–۱۷]. در تحقیق حاضر بر اساس پاسخهای میدان جریان بهدست آمده توسط نوروزی و همکاران [۲۵] انتقال گرمای جریان سیال ويسكوالاستيك در كانال خميده مورد بررسي قرار گرفته است.

مهمترین نوآوریهای تحقیق حاضر عبارتاند از:

- در تحقیق حاضر برای اولین بار انتقال گرمای سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع نامدور (مربعی) مورد بررسی قرار گرفته است.
- تحقیق حاضر نخستین تحقیقی به شمار می آید که در آن اثر اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم بر انتقال گرمای اجباری سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده (اعم از مقاطع مدور و نامدور) در حالات شار ثابت و دما ثابت مطالعه شده است.
- در این تحقیق برای نخستین بار اثر کار میدان تنش سیال ویسکوالاستیک و عدد برینکمن بر انتقال گرمای اجباری جریان این سیال در مجاری خمیده بررسی شده است.

## ۲- معادلات حاکم

(7-7)

(۳-۲)

معادلات حاکم بر جریان و انتقال گرمای سیال ویـسکوالاستیک در مجاری خمیـده شـامل معادلـه پیوسـتگی، معـادلات انـدازه حرکت و معادله انتقال گرماست:

 $\nabla . \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \tag{1-7}$ 

 $\rho \tilde{V}.\nabla \tilde{V} = -\nabla \tilde{P} + \nabla.\tilde{\tau}$ 

 $\rho C_{\rm p} \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{T} = k \nabla^2 \tilde{T} + \tilde{\Phi}$ 

در این تحقیق، میدان جریان به صورت توسعه یافته در نظر گرفته شده است. در جریان توسعه یافته در کانالهای خمیده، مشتقات کلیه پارامترهای جریان به جز فشار استاتیکی نسبت به زاویه انحنای مسیر ( $\theta$ ) برابر صفر است. بنابراین با توجه به شکل (1)، معادله زیر برای فشار استاتیکی برقرار است [4]:  $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = cons tan t < 0$  (۳) همچنین گرادیان فشار جریان توسعه یافته در کانالهای خمیده بر اساس گرادیان فشار در جهت گام مجرا تعریف می شود [4]:

 $\frac{1}{\tilde{R}}\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\theta} = -G \tag{(f)}$ 

در معادله (۴)، G مقدار ثابتی است که مبین قدر مطلق افت فشار محوری جریان است. در اینجا برای بی بعد سازی معادلات حاکم، از ماکزیمم سرعت جریان توسعه یافته سیال نیوتنی در کانال مستقیم مدوری که دارای گرادیان فشار، ویسکوزیته و قطر هیدرولیکی یکسانی نسبت به جریان تحت بررسی است، به عنوان سرعت مرجع استفاده شده است [۴]:

$$W_0 = \frac{G\tilde{a}^2}{16\eta} \tag{(a)}$$

همچنین در جریان توسعه یافته سیال نیوتنی در یک لوله مستقیم گرادیان فشار بی بعد محوری برابر ۱۶ – است. در بی بعد سازی معادلات حاکم، سرعت مرجع بر اساس فرض برابر بودن گرادیان فشار جریان در جهت گام کانال خمیده با گرادیان فشار یک جریان نیوتنی در لوله مستقیم (مقدار ۱۶ –) تعریف شده است. بنابراین از کمیتهای بی بعد ارائه شده در بخش فهرست علائم و معادله (۴)، معادله زیر برای گرادیان فشار بی بعد جریان توسعه یافته در کانال خمیده بهدست می آید [۴]:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} = -16\mathbf{R} = -\frac{8}{\delta} \tag{9}$$

در نهایت برای جریان دائمی توسعه یافته هر سیال تراکم ناپذیر در کانال خمیده، صورت بی بعد معادلات پیوستگی و مومنتم در دستگاه مختصات استوانهای به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_{r}\right) + \frac{\partial v_{z}}{\partial z} = 0 \tag{1-V}$$

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال) www.SID.ir

همچنین شرط مرزی عدم لغزش بر روی دیواره ها و شرط تقارن بر روی مرز تقارن برای مولفه های سرعت برقرار است. در این تحقیق به دلیل استفاده از شبکه جا به جا شده نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار استاتیکی نیست.

از آنجا که در این تحقیق انتقال گرمای توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک در دو حالت شار ثابت و دما ثابت بررسی شده، لذا برای هر یک از این دو حالت گرمایی، بی بعد سازی مناسب و البته متفاوتی ارائه شده که در ادامه به آن پرداخته می شود. در حالت توسعه یافته گرمایی معادله زیر برای توزیع دما در کانال خمیده برقرار است [۲۴و۲۴]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\tilde{T}_{s} - \tilde{T}}{\tilde{T}_{s} - \tilde{T}_{m}} \right) = 0 \tag{A}$$

همچنین دمای بی بعد در حالت شار ثابت ( T<sub>H</sub> ) به شـکل زیـر تعریف شده است [۲۶]:

$$T_{\rm H} = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_{\rm m}}{q''\tilde{a} / k} \tag{9}$$

شایان ذکر است که چنانچه طرفین معادله فوق در سرعت محوری ضرب و حاصل آن در سطح مقطع کانال انتگرال گیری شود، معادله زیر برای متوسط دمای بی بعد در حالت شار ثابت حاصل می شود:

$$\int_{A} v_{\theta} T_{H} dA = 0$$
 (1 • )

می توان نشان داد کـه در حالـت شـار ثابـت معادلـه زیـر بـرای گرادیان فشار محوری برقرار است [۲۶]:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} = \frac{d\tilde{T}_{s}}{d\theta} = \frac{d\tilde{T}_{m}}{d\theta} = \frac{4q''\tilde{R}}{\rho U\tilde{a}c_{p}} = cte \qquad (11)$$

بنابراین با اعمال معادله (۱۱) در معادله (۲–۳) و با توجه به پارامترهای بی بعد ارائه شده در فهرست علائم، معادله بی بعد انتقال گرمایی توسعه یافته در حالت شار ثابت بهدست می آید:  $\sigma_{\rm H} = 2 = v_{\rm H}$ 

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}} \frac{\mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{Re}_{\mathbf{b}} \mathbf{Pr} \delta} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{r}} =$$

$$\frac{1}{\mathbf{Re} \mathbf{Pr}} \left( \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{T}_{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial^{2} \mathbf{T}_{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{z}^{2}} \right) + \mathbf{Br} \Phi$$

$$(17)$$

دما ثابت است. بنابراین با اعمال معادله (۱۷–۱) در معادله (۱۷–۲) و اعمال حاصل آن در معادله (۲–۳) و همچنین با توجه به پارامترهای بی بعد از بخش فهرست علائم، معادله زیر برای معادله بی بعد انتقال گرمای توسعه یافته در حالت دما ثابت بهدست می آید:

$$\mathbf{v}_{r} \frac{\partial \mathbf{T}_{T}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}_{z} \frac{\partial \mathbf{T}_{T}}{\partial z} - \left(\frac{2\mathbf{N}\mathbf{u}_{T,m}}{\mathbf{R}\mathbf{e}_{b} \mathbf{P} \mathbf{r} \delta}\right) \frac{\mathbf{v}_{\theta}}{\mathbf{r}} \mathbf{T}_{T} = \frac{1}{\mathbf{R}\mathbf{e} \mathbf{P}\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{T}_{T}}{\partial \mathbf{r}}\right) + \frac{\partial^{2} \mathbf{T}_{T}}{\partial z^{2}}\right) + \mathbf{B} \mathbf{r} \Phi$$
(1A)

همچنین با توجه به معادله (۱۵)، شرط مرزی دیریکله همگن ( $T_{T,s} = 0$ ) برای دمای بی بعد بر روی دیواره های کانال برقرار است. شایان ذکر است که معادله انتقال گرمایی بی بعد در حالت دما ثابت، معادله (۱۸)، یک معادله مقدار ویژه بوده که به موضوع حل این معادله در بخش مربوط به روش عددی، بخش (۴)، پرداخته می شود. همچنین جمله  $\Phi$  در معادلات بخش (۲) و (۱۸) مبین کار میدان تنش است که در دستگاه مختصات استوانهای از معادله زیر قابل محاسبه است:

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \tau_{\mathbf{rr}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial \mathbf{v}_{z}}{\partial z} \tau_{zz} + \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{v}_{\theta}}{\mathbf{r}}\right) \tau_{r\theta} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{z}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{v}_{r}}{\partial z}\right) \tau_{rz} + \frac{\partial \mathbf{v}_{\theta}}{\partial z} \tau_{\theta z}$$
(14)

در این تحقیق از مدل کریمینال – اریکسون – فیلبی به عنوان معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. این معادله متشکله، برای مدلسازی جریانهای برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک بسیار مناسب بوده و استفاده از آن برای محاسبات صنعتی متداول است [۲۷]. صحت پاسخهای این مدل برای بسیاری از مواد ویسکوالاستیک صنعتی در اعداد دبروا کوچک و در محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ (ناحیه ویسکومتریک دیاگرام پیپکین<sup>۲۶</sup>) به اثبات رسیده است [۲۷].

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta} \tilde{\gamma}_{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_1 \tilde{\gamma}_{(2)} + \tilde{\Psi}_2 \Big[ \tilde{\gamma}_{(1)} . \tilde{\gamma}_{(1)} \Big]$$
 (7 • )

متوسط جریان است. همچنین شرط مرزی شار ثابت بر روی دیوارههای کانال برقرار است. این شـرط بـرای دمـای بـی بعـد تعریف شده در معادله (۹) به شکل زیر است:

$$\frac{\partial T_{\rm H}}{\partial n} = -1 \tag{17}$$

شایان ذکر است که حل یک معادل ه مشتقات جزیری تنها با استفاده از شرط مرزی نیومن بر روی تمامی مرزها میسر نبوده و به تعیین عرض از مبدا منجر نمی شود. لذا چنانچه معادل ه (۱۲) در شرایط نادائمی حل شود، پاسخ دائم آن وابسته به شرایط اولیه است. بنابراین پس از حل معادل ه فوق در شرایط نادائمی و یافتن پاسخ حالت دائمی لازم است که عرض از مبدا میدان دما از معادل ه (۱۰) تعیین شود. همچنین با توجه به معادله (۹)، می توان نشان داد که معادله (۲۱–۱) بین دمای بی بعد در سطح کانال ( $T_{H,S}$ ) و عدد ناسلت موضعی برقرار بوده و عدد ناسلت متوسط نیز از معادله (۲–۲) تعیین می شود:

$$Nu_{\rm H} = \frac{1}{T_{\rm H,S}} \tag{1-14}$$

$$Nu_{H,m} = \frac{1}{p'} \int_{p'} Nu_H dp' \qquad (\Upsilon - \Upsilon \Upsilon)$$

در این تحقیق، دمای بی بعد برای حالت دما ثابت به شکل زیـر تعریف می شود [۲۶]:

$$T_{T} = \frac{\tilde{T}_{s} - \tilde{T}}{\tilde{T}_{s} - \tilde{T}_{m}}$$
(10)

با ضرب کردن سرعت محوری در طرفین معادله فوق و انتگرال گیری در سطح مقطع جریان، معادله زیر حاصل می شود:  $\frac{W_o}{UA}\int_{V_0} v_0 T_T dA = 1$  (16)

همچنین می توان نشان داد که در شرایط حرارتی توسعه یافته معادلات زیر برای حالت دما ثابت برقرار است:

$$\frac{d\tilde{T}_{m}}{d\theta} = \frac{2k(\tilde{T}_{s} - \tilde{T}_{m})Nu_{T,m}}{\rho Uc_{p}\tilde{a}\delta}$$
(1-1V)

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} = T_{\rm T} \frac{d \tilde{T}_{\rm m}}{d \theta} \tag{(Y-1V)}$$

در معادله فوق، Nu<sub>T,m</sub> معرف عدد ناسلت متوسط در حالت

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال)

www.SID.ir



در معادله فوق،  $\tilde{\eta}$  ویسکوزیته،  $\tilde{\Psi}_1$  و  $\tilde{\Psi}_2$  ضریب اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم است. شایان ذکر است که در مواد ویسکوالاستیک، اختلاف تنش نرمال دوم مقداری منفی و کمتر از ۲۰٪ اختلاف تنش نرمال اول بوده و در عمده مایعات پلیمری مقدار آن حدود ۱۰٪ اختلاف اختلاف تنش نرمال اول است. همچنین در معادله (۲۰)، (1)  $\tilde{\gamma}$  و (2)  $\tilde{\gamma}$  معرف مشتقات همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه اول و دوم بوده <sup>۲۷</sup> و برای جریان دائمی به شکل زیر تعریف میشوند [۲۸]:

$$\tilde{\gamma}_{(1)} = \nabla \tilde{\mathbf{V}} + \nabla \tilde{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}}$$
(1-7)

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{\gamma}_{(1)} - \left\{ \left( \nabla \tilde{\mathbf{V}} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{\gamma}_{(1)} + \tilde{\gamma}_{(1)} \cdot \left( \nabla \tilde{\mathbf{V}} \right) \right\}$$
(Y-Y)

در معادله فوق <sup>1</sup> ⊽⊽ ترانهاده تانسور گرادیان سرعت است. بـا توجه به بی بعد سازی ارائـه شـده در بخـش فهرسـت علائـم، صورت بی بعد معادله متشکله کریمینال- اریکسون- فیلبـی بـه شکل زیر میباشد:

$$\tau = \gamma_{(1)} - \frac{1}{2} \Psi_1 \gamma_{(2)} + \Psi_2 \Big[ \gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)} \Big]$$
(77)

همچنین خاطر نشان می شود که در صورتی که در معادله (۲۲) مقدار  $\Psi_1$  صفر باشد، معادله متشکله مدل راینر ریولین <sup>۲۸</sup> و چنانچه هر دو مقدار  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  صفر باشند، معادله متشکله سیال نیوتنی بهدست می آید [۲۸]. شایان ذکر است که مولفه های میدان

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال) www.SID.ir

تنش سیال کریمینال-اریکسون – فیلبی، معادلـه (۲۲)، بـه همـراه مشتقات همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه اول و دوم، معادلات (۲۱)، در تحقیق نوروزی و همکاران [۲۵] گزارش شده است.

### ۴- روش عددی

به دلیل غیر خطی بودن معادلات حاکم، تحلیل عددی مسائل جریانهای دائمی بهصورت شبه گذرا صورت می گیرد و پس از انتخاب یک شرط اولیه مناسب، معادلات حاکم در حالت نادائم حل می شوند تا جوابها به سمت جوابهای، جریان دائمی همگرا شوند [۲۹]. برای تعیین مولفه های سرعت و دما می توان آنها را در هر گام زمانی تحلیل از صورت نادائم معادلات مومنتم و انتقال گرما به دست آورد، اما متاسفانه جمله فشار فاقد مشتق زمانی است. در این تحقیق برای محاسبه فسار استاتیکی در هر گام زمانی تحلیل از روش تراکم پذیری مصنوعی استفاده شده است [۳۰]:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + a^2 \nabla . \vec{\mathbf{V}} = 0 \tag{(YT)}$$

در معادله (۲۳)، a سرعت صوت مجازی بوده و مقداری ثابت است. با توجه به این معادله می توان دریافت که در حالت دائم، مشتق زمانی فشار صفر بوده و معادله پیوستگی ارضا مـیشـود. مطابق شکل (۲)، در این تحقیق از شبکه جابه جا شده استفاده شده است. با توجه به این شکل به دلیل وجود تقارن، تنها بایستی معادلات حاکم در نیمی از مقطع کانال حال شوند. در اینجا شبکه اولیه با خطوط پر و شبکه ثانویه با خط چین نـشان داده شدهاند. شبکه ثانویه نیز با جابه جا کردن شبکه اولیه در راستای قطر سلولها و به اندازه نصف قطر آنها ایجاد شده است [۲۹]. همچنین در این تحقیق از تقریب تفاضل محدود پیشروی مرتبه اول برای مشتق زمان و تقریب تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی استفاده شده است. نحوه اختصاص گرههای محاسباتی به پارامترهای میدان جریان نیز بر اساس روش علامتگذاری و سلول صورت گرفته است. مطابق این روش، مولفه سرعت محوری، فـشار اسـتاتیکی، دمـا و مولفه های تانسور تنش بر روی شبکه اولیه و مولفه های

_	N <sub>r</sub> ×N <sub>z</sub>				
Re	۲۰×۱۰	40×70	۶۰×۳۰	۸۰×۴۰	۱۰۰×۵۰
١٠٠	7/1/٣٣	ï.•/40	<u>/</u> • / ۲۳	/ •/17	′ <u>/</u> ∘/∘V
1000	<u>/</u> ٣/9V	<u>/</u> 1/04	<u>/</u> .•/¥A	<u>/</u> •/Y٣	/.•/١١

جدول ۱- متوسط قدر مطلق خطای شبکههای مختلف نسبت به شبکه ۶۰×۱۲۰

(۱۶) و حل دستگاه معادلات حاصله، توزیع دمای حالت دما ثابت بهدست می آید.

۵– نتایج و بحث

برای اثبات مستقل بودن حل عددی از شبکه، از تعداد سلول مربعی شکل ۶۰×۱۲۰ به عنوان یک حالت مرجع استفاده شده است. برای این تعداد سلول، حل عددی در ناحیه جریان آرام بسیار دقیق بوده و پاسخهای مربوط به تعداد سلولهای کمتر با پاسخ این حالت مقایسه شده است. در جدول (۱) مقادیر مربوط به متوسط خطای توزیع سرعت محوری شبکههای مختلف نسبت به شبکه ۶۰×۲۰ آمده است. این خطاها در مختلف نسبت به شبکه ۶۰×۲۰ آمده است. این خطاها در رئولوژیکی 1=1 و ۵۰۰ نسبت انحنای ۱/۰ و نیز خواص رئولوژیکی 1=1 و 5-=1 1/2 محاسبه شدهاند. با توجه به اطلاعات جدول (۱) می توان دریافت که به ازای تعداد سلولهای بیشتر از ۳۰×۶۰ میزان متوسط خطا کمتر از ۵/۰٪ بوده و بنابراین می توان ادعا نمود که در این تعداد سلول، حل عددی مستقل از شبکه است. با توجه به اطلاعات جدول (۱) و برای اجتناب از هرگونه وابستگی تحلیل به شبکه، از شبکه ۴۰×۸۰

در این پژوهش به چهار طریق صحت و دقت پاسخهای عددی مربوط به میدان جریان ارزیابی شده است:

- با فرض یک نسبت انحنای بسیار کوچک، نتایج حاصل از حل عددی به نتایج مربوط به جریان و انتقال گرما در کانال مستقیم همگرا می شود. در جریان توسعه یافته سیال نیو تنی در یک کانال مستقیم و در عدد رینولدز ۲۵، متوسط خطای پروفیل سرعت محوری حاصل از حل عددی نسبت به

سرعتهای عرضی نیز در موقعیتهای خاصی از محل تقاطع شبکه اوليه و ثانويـه محاسـبه مـيشـوند [٢٩]. پـس از تعيـين ميـدان سرعت، مي توان اقدام به حل معادله انتقال گرما كرد. حل معادله انتقال گرما در حالت شار ثابت مشابه حل میدان سرعت است. در اینجا پس از در نظر گرفتن شرط اولیه مناسب، معادلـه (۱۲) در حالت نادائم حل شده و توزیع دمای حالت دائمی ( T'<sub>H</sub>) بهدست می آید. همان گونه که در بخش (۲) بیان شد، به دلیل عدم وجود شرط مرزی دیریکله در این مسئله، پاسخ حالت پایدار بهدست آمده وابسته به شرط اولیه بوده و برای یافتن عرض از مبدا میدان دما (مقدار ثابت مربوط به توزیع دما ( ۸)) لازم است که مقدار آن از معادله (۱۰) استخراج شود. به عبارت دیگـر T<sub>H</sub> بـهصـورت T<sub>H</sub> = T'<sub>H</sub> +λ در معادلـه (۱۰) قـرار می گیرد تا مقدار صحیح  $\lambda$  و در نتیجه  $T_H$  حاصل شود. شایان ذکر است که در نهایت پاسخ بهدست آمده برای توزیع دما ( T<sub>H</sub> ) مستقل از شرط اولیه بوده و بر اساس آن می توان عدد ناسلت موضعی و متوسط را برای حالت شار ثابت از معادلات (۱۴) بهدست آورد. در مورد حالت دما ثابت، معادله انتقال گرما، معادله (۱۸)، و شرط مرزی آن هر دو همگن بوده و در صورتی دارای پاسخ غیر صفر است که یک معادلـه مقـدار ویـژه باشـد. برای این منظور معادله (۱۸) بر روی شبکه جابهجا شده گسسته سازی شده و ماتریس ضرایب مربوطه تشکیل میشود. پاسخ دستگاه معادلات تشکیل شده در صورتی غیر صفر است که دترمینان ضرایب آن صفر باشد. به این ترتیب با صفر قرار دادن ماتریس ضرایب حاصله می توان عدد ناسلت متوسط جریان را استخراج کرد. همچنین این دستگاه معادلـه دارای مرتبـه پـوچی یک بوده و با جایگزین کردن معادله تکراری با معادله ناهمگن

97

پاسخ تحلیلی [۳۱] حدود ۰/۲۷٪ است.

- یکی دیگر از روشهای ارزیابی صحت نتایج مقایسه نتایج تحلیلی حاصل از حل تحلیلی برای جریان خزشی با نتایج عددی است. در اینجا، جریان خزشی سیال کریمینال–اریکسون–فیلبی در یک عدد رینولدز بسیار کوچک، نسبت انحنای  $0.1 = \delta$  و در خواص رئولوژیکی کوچک، نسبت انحنای  $1.0 = \delta$  و در خواص رئولوژیکی متوسط خطای حاصله از روش عددی در شبکه ۴۰×۸۰ نسبت به معادله تحلیلی ارائه شده توسط نوروزی و همکاران [۲۵] ۴۹/۰٪ است.
- در جریان اینرسی توسعه یافته سیال کریمینال اریکسون فیلبی در یک کانال ماستقیم با خواص رئولوژیکی  $\Psi_1 = 0.5$  و در عاد رینولدز ۳۰، متوسط خطای پروفیل سارعت محوری حاصل از حال عددی نسبت به نتایج تاونسند<sup>۲۹</sup> و همکاران [۳۲] در ۶۰ گره محاسباتی حدود ۱/۱۵٪ است.
- یکی دیگر از روشهای ارزیابی صحت نتایج، مقایسه نتایج عددی تحقیق حاضر با نتایج آزمایشگاهی بارا<sup>۳</sup> [۳۳] برای جریان اینرسی سیال نیوتنی در کانال خمیده است. وی آزمایشات خود را در نسبت انحنای ۳۵۰/۰ و در اعداد دین مختلف روی یک کانال خمیده ۲۷۰ درجه انجام داد. مطابق آزمایشات بارا، در 215= Dnb (عدد دین بر مبنای متوسط سرعت جریان اصلی) و در موقعیت ۱۰۰ درجهای نسبت به ورودی، جریان به حالت توسعه یافته در میآید. انحراف دادههای آزمایشگاهی مربوط به ۳۵ نقطه از پروفیل سرعت محوری بر روی خط تقارن مقطع کانال نسبت به نتایج

همچنین برای ارزیابی نتایج حاصل از حل عددی مربوط به معادله انتقال گرما، مقادیر ناسلت بهدست آمده با نتایج شاه و لندن<sup>۳۱</sup> [۳۴] برای انتقال گرمای اجباری سیال نیوتنی در کانال مستقیم دارای مقطع مربعی مقایسه شده است. آنها در محاسبه عدد ناسلت، از انتگرالگیری عددی استفاده کرده و فرض کردند

که در حالت شار ثابت، دما بر روی دیوارههای هر مقطع نیز ثابت است (اما دمای دیواره هر مقطع نسبت به مقطع مجاور متفاوت است). این فرض آنها منجر به ایس میشود که عدد ناسلت بهدست آمده، تقریبی از عدد ناسلت واقعی باشد. در تحقیق حاضر، ما نیز تنها برای مقایسه نتایج، دمای سطح لوله را ثابت فرض کردهایم و تحلیل عـددی را در یـک عـدد انحنـای بـسیار کوچک (شعاع انحنای بزرگ) انجام داده ایم تـا نتـایج حاصـل از حل عددی به نتایج مربوط به جریان و انتقال گرما در کانال مستقیم همگرا شود. شایان ذکر است که فرض ثابت بودن دمای سطح لوله در هر مقطع برای حالت شار ثابت، تنها در این بخـش و برای اثبات صحت نتایج عددی صورت گرفته و در سایر نتایج این تحقیق این تقریب اعمال نشده است. از حل عددی تحقیق اخیر، مقدار عدد ناسلت متوسط برای حالت شار ثابت و دما ثابت به ترتیب برابر ۳/۶۱۴۴ و ۲/۹۷۲۶ حاصل شده که با تحقیق شاه و لندن [۳۴] دارای تطبیق است (در تحقیق آنها عدد ناسلت تا دو رقم اعشار گزارش شده است).

در ادامه اثر نیروی گریز از مرکز در این جریان مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور از جریان سیال نیوتنی استفاده شده تا در غیاب اثر اختلاف تنشهای نرمال بتوان اثر نیروی گریز از مرکز را مطالعه کرد. در شکل (۳) این جریانهای ثانویه در 215 = Dn نشان داده شده است. در این شکل توزیع فشار استاتیکی بی بعد نشان داده شده و مطابق شکل گرادیان فشار شعاعی قابل توجهی در مقطع کانال وجود دارد. همچنین نیروی گریز از مرکز سبب تمایل توزیع سرعت محوری به سمت دیواره خارجی مقطع کانال می شود. به طور کلی در جریان سیال نیوتنی در کانالهای خمیده ثانویه به شکل یک جفت گردابه ظاهر می شوند که این جریانهای ثانویه ناشی از اثر نیروی گریز از مرکزند.

با افزایش عدد دین از مقدار ۱۲۵ و ازدیاد نیروی گریز از مرکز، گرادیان فشار شعاعی نیز افزایش یافته و توده جریان هرچه بیشتر به سمت دیواره خارجی متمایل میشود. در این شرایط، نیروهای ویسکوز دیگر قادر به حفظ ساختار جریانهای



شکل ۳ – جریانهای ثانویه، توزیع سرعت محوری، فشار، دما برای جریان سیال نیوتنی در اعداد دین مختلف

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال)





ثانویه به شکل یک جفت گردابه تیلور – گورتلر نیستند و گردابههای جدیدی که محصول بروز ناپایداری اند، به وجود می آیند. این جفت گردابه جدید به گردابههای دین موسوم هستند. در شکل (۳) جریانهای ثانویه در عدد دین ۱۳۷ نیز نشان داده شده است. در این حالت وجود جریانهای ثانویه جدید حاصل از بروز ناپایداری کاملاً مشهود بوده که این امر در تطابق با مشاهدات تجربی بارا [۳۳] است. در این حالت توزیع سرعت محوری و فشار نیز دارای تغییراتی شده و در این حالت جریان در دو نقطه متقارن دارای سرعت بیشینه است. همچنین در این شکل توزیع دمای بی بعد برای حالتهای شار ثابت و دما ثابت آمده است. بایستی توجه داشت که در این مقاله نحوه بی

بعد سازی دما برای این دو حالت گرمایی متفاوت است، معادلات (۹) و (۱۵)، را ببینید. مطابق شکل با افزایش عدد دین و افزایش تعداد گردابهها، توزیع دما برای این دو حالت دستخوش تغییرات شده و میزان اختلاط جریان و در نتیجه دما افزایش پیدا می کند، به نحوی که عدد ناسلت متوسط برای حالت شار ثابت از ۹/۴۸ تا ۱۶/۱۶ و برای حالت دما ثابت از ۷۳۵ تا ۱۳/۹۱ افزایش می یابد.

در ادامه اثر اختلاف تنشهای نرمال بر انتقال گرمایی جریان مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل (۴)، جریانهای ثانویه و توزیع دما برای دو حالت شار ثابت و دما ثابت در مقادیر مختلف  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  برای عدد دین ۱۲۵ (در مرز پایداری جریان نیوتنی) خلاف جهت اختلاف تنش نرمال اول عمل میکند. در حالت  $- \Psi_1 = -\Psi_1 - \Psi_1$ ، گردابه های دین (جریانهای ثانویه فعال در قسمت بالایی مقطع کانال) کوچک شده و با ازدیاد مقدار  $\Psi_2$ منفی تا  $- \Psi_1 - \Psi_1 - \Psi_1$ , جریانهای ثانویه بالای مقطع کانال محو می شوند و جریانهای ثانویه در وضعیتی مشابه جریان نیوتنی به صورت یک جفت گردابه قرار می گیرند. به عبارت دیگر ازدیاد مقدار  $\Psi_2$  منفی منجر به پایدار کردن جریان می شود.

مطابق شکل (۴)، در هر دو حالت دما ثابت و شار ثابت، توزیع دما بهشدت تحت تاثیر شدت جریانهای ثانویه و تعداد گردابه ها قرار دارد. در ادامه اثر خواص الاستیک بر انتقال گرمای جریان بررسی می شود. استفاده از عـدد الاسـتیک بـرای مطالعه اثرات الاستيك جريان اينرسي سيالات ويسكوالاستيك بسیار متداول است. برای سیال کریمینال-اریکسون-فیلبی عـدد الاستيك بهصورت نسبت ثابت بي بعد اثر اختلاف تنش نرمال اول به عدد رینولدز تعریف می شود (به بخش فهرست علائم رجوع شود). عدد الاستيك بهصورت نسبت اثرات الاستيك بـر اینرسی تعریف میشود و برای یک هندسه مشخص تنها تابعی از خواص سیال است. بنابراین این عـدد، معیار مناسبی بـرای مطالعه اثر اختلاف تنش نرمال اول است. شایان ذکر است که در این تحقیق از پارامتر S<sub>max</sub> به عنوان نسبت ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه به متوسط سرعت جریان اصلی استفاده شده است. در شکل (۵) اثر اختلاف تنش نرمال اول در غالب عدد الاستیک بر شدت جریانهای ثانویه و عدد ناسلت متوسط در حالتهای شار ثابت و دما ثابت نشان داده شده است. در اینجا نسبت انحنای کانال برابر ۱۵/۰ فـرض شـده و از اثـر اخـتلاف تنش نرمال دوم صرفنظر شده است. همان گونه که انتظار مرود، در تمامي حالات با افزايش عدد رينولدز شدت جریانهای ثانویه و انتقال گرمای جریان افزایش می یابد. مطابق شکل، با افزایش اختلاف تنش نرمال اول (عدد الاستیک) بر شدت جریانهای ثانویه و عدد ناسلت متوسط افزوده می شود به نحوى كـه در عـدد رينولـدز ٢٠٠ و عـدد الاسـتيك ١٥٠٠٥، ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه ۴۸٪ و عدد ناسلت متوسط در



 $\Psi_r = 0.0$  و  $\delta = 0.00$  عدد ناسلت متوسط در  $\delta = 0.00$ 

نشان داده شده است. مطابق شکل (۳)، در جریان نیوتنی و در  $Dn_b = 125$  می شده است. مطابق شکل یک جفت گردابه ظاهر می شوند اما با توجه به شکل می توان دریافت که در غیاب اثر 2 $\Psi$ ، ایجاد اختلاف تنش نرمال اول (دو حالت اثر 2 $\Psi$ ، ایجاد اختلاف تنش نرمال اول (دو حالت شکل جریانهای ثانویه از یک جفت گردابه به دو جفت گردابه منجر می شود. همچنین ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی در

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال)

www.SID.ir

نخستین تحقیقی به شمار میآید که در آن اثر اختلاف تنـشهای نرمال بر انتقال گرما جریان سـیال ویـسکوالاستیک در مجـاری خمیده (اعم از مدور و نامدور) بررسی شده است.

در شکل (۶) اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه و عدد ناسلت متوسط در نسبت انحنای ۱۵/۰ نشان داده شده است. در اینجا عدد الاستیک برای جریان سیال کریمینال-اریکسون-فیلبی، برابر ۱۵۰ ۰/۰ فرض شده است. مطابق شکل در حالت  $\Psi_1 = 0.0$ ، شدت جریانهای ثانویه از حالت مربوط به جریان سیال نیوتنی بیشتر است. در حالت شدت  $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$  تا عدد رینولدز حدود ۱۲۰، شدت جریانهای ثانویه از سیال نیوتنی اندکی بیشتر بوده اما در مقادیر بزرگتر عدد رینولدز، شدت جریانهای ثانویه از سیال نیوتنی کمتـر می شود. به عبارت دیگر افزوده شدن بر اختلاف تنش نرمال دوم منفی اثری بر عکس اختلاف تنش نرمال اول داشته و سبب تضعیف جریانهای ثانویه می شود. این اثر به خـصوص در اعـداد رینولدز بزرگ مـشهودتر اسـت کـه ایـن موضـوع در مـشاهدات آزمایشگاهی نیز به اثبات رسیده است [۱۵–۱۷]. همچنین در پی کاهش شدت جریانهای ثانویه، میزان انتقال گرمای جریان و در نتیجه عدد ناسلت متوسط نیز کاهش می یابد، به نحوی که در اعداد رینولدز بیشتر از ۱۲۰، عدد ناسلت حتی از حالت سیال نيوتني نيز كمتر مي شود. بايستي توجه داشت كه اثـر قابـل توجـه اختلاف تنشهای نرمال در مقادیر بزرگ عدد رینولدز، مربوط به وابستگی مرتبه دوم بخش الاستیک میدان تـنش بـه نـرخ بـرش است. برای مطالعه مکانیزم اثر اختلاف تنشهای نرمال بر میدان جریان ویسکوالاستیک در مجاری خمیده به تحقیق نوروزی و همكاران [۲۵] مراجعه شود.

در ادامه اثر کار میدان تنش بر انتقال گرمای جریان مورد بررسی قرار میگیرد. با توجه به معادله انتقال گرما، معادله (۲-۳)، جمله Φ معرف کار میدان تنش است. برای جریان سیال نیوتنی و سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان، مقدار Φ همواره مثبت بوده که این امر ناشی از اثر بازگشت ناپذیری تنشهای ویسکوز است [۳۵]. به همین دلیل این عبارت برای



 $En = \circ / \circ \circ \delta = \circ / \circ \delta$ 

حالتهای شار ثابت و دما ثابت به ترتیب ۱۴٪ و ۱۲٪ از جریان سیال نیوتنی بیشتر است. در ادامه اثر اختلاف تـنش نرمـال دوم بـر جریـان و انتقـال حرارت سیال ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرار می گیرد. شایان ذکر است که مطابق اطلاع نویسندگان تحقیق حاضـر



 $\delta = 0/10$  و Re = 100 ، En = 0/00 در CEF در Re = 0.000 و Re = 1000 در Re = 0.0000

جریان نیوتنی به جمله تلفات ویسکوز در معادله انتقال گرما معروف است. مقدار Φ برای جریان سیالات ویسکوالاستیک به طور موضعی میتواند دارای مقداری منفی باشد! این امر هرچند برای سیال نیوتنی ناممکن به نظر میرسد (به دلیل نقض قانون دوم ترمودینامیک) اما برای سیالات ویسکوالاستیک پدیدهای ممکن به شمار میآید که نشانگر ذخیره شدن بخشی از انرژی به صورت انرژی الاستیک است [۳۵].

در شکل (۷) کانتورهای توزیع کار میدان تنش ( $\Phi$ ) در خواص رئولوژیک مختلف جریان در کانال خمیده نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می رود، برای جریان سیال نیوتنی، پارامتر  $\Phi$  در کل مقطع جریان دارای مقدار مثبتی بوده و حداقل مقدار  $\Phi$  مربوط به ناحیه نزدیک هسته جریان و برابر <sup>۵-</sup> ۱۰<sup>-۸</sup> است. با ایجاد اختلاف تنشهای نرمال، مقدار  $\Phi$  در برخی نواحی دارای مقدار منفی می شود. در شکل (۷)، این نواحی دارای مقدار منفی مشخص شده است. مطابق شکل،

برای سیال CEF و در حالتی که مقدار اختلاف تنش نرمال دوم صفر است ( $\Phi_1 = 0$ )، اثر اختلاف تنش نرمال اول منجر به ایجاد ناحیه وسیعی از مقادیر  $\Phi$  منفی می شود که این نواحی مبین ذخیره بخشی از انرژی گرمایی به صورت انرژی الاستیکاند، اما با ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی از وسعت این نواحی کاسته می شود، به نحوی که با ازدیاد مقدار اختلاف تنش نرمال دوم سیال CEF از صفر به ۲۰-٪، حداقل مقدار  $\Phi$ از ۲۳/۴۲ به مبارت دیگر ازدیاد اثر اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم بر مقدار  $\Phi$  عکس یکدیگر است که این امر مربوط به اثر معکوس این دو پارامتر بر میدان جریان (سرعت جریانهای ثانویه) است.

در شکل (۸) اثر عـدد بـرینکمن بـر عـدد ناسـلت متوسـط جریان سیال CEF در حالات شار ثابت و دما ثابـت نـشان داده شـده اسـت. در اینجـا  $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$ , En = 0.0150 و  $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$  در نظر گرفته شده است. عدد برینکمن معرف نسبت



شکل ۸ – اثر عدد برینکمن بر عدد ناسلت متوسط در ۱۵۰ /۰۰ En ، ۱۰۰ – + ( ۲ و ۱۵ /۰۰ = ۵ شکل ۸ – اثر عدد برینکمن بر

انرژی تلف/ذخیره شده در اثر میدان تنش به انرژی گرمایی منتقل شده از مرزهاست. مطابق شکل (۸)، ازدیاد عدد برینکمن سبب کاهش میزان عدد ناسلت متوسط برای هر دو حالت شار ثابت و دما ثابت میشود. به طور کلی ازدیاد عدد برینکمن سبب ازدیاد تلفات انرژی مکانیکی و در نتیجه بالا رفتن دمای سیال میشود که این امر کاهش میزان ضریب جابهجایی و در نتیجه کاهش عدد ناسلت متوسط را در پی دارد.

# ۶- نتیجه گیری

در این پژوهش اثرات متضاد اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم بر جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مربعی به اثبات رسیده و نشان داده شد که:

- در جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانالهای خمیده، با افزایش اختلاف تنش نرمال اول شدت جریانهای ثانویه و نیز عدد ناسلت متوسط افزایش می یابد، در حالی که اثر

### واژه نامه

- 1. Dean
- 2. perturbation method

اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر جریان و انتقال گرما کاملاً

بر عكس است. همچنين براي سيالات ويسكوالاستيك

دارای اختلاف تنش نرمال دوم بزرگ، شدت جریانهای

ثانویه و عدد ناسلت متوسط ممکن است که حتی از جریان

تقویت اختلاف تنش نرمال اول با ازدیاد کار میدان تنش

همراه است (به دلیل افزایش سرعت جریانهای ثانویه). به

طور کلی ازدیاد اختلاف تـنش نرمـال اول منجـر بـه ایجـاد

نواحی دارای کار میدان تنش منفی نیز مےشود کے چنہین

حالتي براي سيالات نيوتني امري ناممكن محسوب مي شود.

همچنین اثر اختلاف تنش نرمال دوم نیز بر کار میدان تـنش

برعکس اثر اختلاف تنش نرمال اول بوده و ازدیاد آن با

کاهش کار میدان تنش همراه است. شایان ذکر است که

افزایش عدد برینکمن این جریان سبب کاهش عدد ناسلت

متوسط برای هر دو حالت شار ثابت و دما ثابت می شود.

- 3. Taylor-Gortler
- 4. Thomas and Walters
- 5. Robertson and Muller
- 6. Sarin
- 7. Oldroyd-B

- 8. Jitchote and Robertson
- 9. Bowen

سيال نيوتني نيز كمتر شود.

- Sharma and Prakash
   Imeto
- 12. White-Metzner
- 13. relaxation time
- 14. singular condition
- 15. Zhang
- 16. Phan-Thien and Zheng
- 17. Fan
- 18. Chen
- 19. Das 20. Helin
- 20. Heini 21. Boutabaa

22. Phan-Thien-Tanner

25. Criminale-Eriksen-

(PTT) 23. Zhang

24. Shen

Filbey (CEF model)

26. Pipkin diagram

27. the first and second order of contravariant convected derivative of the shear rate tensor

- 28. Reiner-Rivlin
- 29. Twonsend
- 30. Bara
- 31. Shah and London
- 1. Dean, W. R., "Note on the Motion of a Fluid in a Curved pipe," *Phil. Mag.*, Vol. 4, pp. 208-233, 1927.
- 2. Dean, W. R., "The Streamline Motion of a Fluid in a Curved Pipe," *Phil. Mag.*, Vol. 5, pp. 673-693, 1928.
- Thomas, R. H., and Walters, K., "On the Flow of an Elastico-Viscous Liquid in a Curved Pipe Under a Pressure Gradient," *J. Fluid Mechanic*, Vol. 16, pp. 228-242, 1963.
- Robertson, A. M., and Muller, S. J., "Flow of Oldroyd-B Fluids in Curved Pipes of Circular and Annular Cross-Section," *Int. J. Non-Linenr* Mechanics, Vol. 31, No.1, pp. 1-20, 1996.
- Sarin, V. B., "Flow of an Elastico-Viscous Liquid in a Curved Pipe of Slowly Varying Curvature," *Int J. Biomed Comput*, Vol. 32, pp. 135-149, 1993.
- Sarin, V. B., "The Steady Laminar Flow of an Elastico-Viscous Liquid in a Curved Pipe of Varying Elliptic Cross Section," *Mathl. Comput. Modelling*, Vol. 26, No. 3, pp. 109-121, 1997.
- Jitchote, W. and Robertson, A. M., "Flow of Second Order Fluids in Curved Pipes," J. Non-Newtonian Fluid Mech., Vol. 90, pp. 91-116, 2000.
- Bowen, P. J., Davies, A. R., and Walters, K., "On Viscoelastic Effects in Swirling Flows," J. Non-Newtonian Fluid Mech., Vol. 38, pp. 113-126, 1991.
- Sharma, H. G., and Prakash, A., "Flow of a Second Order Fluid in a Curved Pipe," *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 8, pp. 546-557, 1977.
- Iemoto, Y., Nagata, M., and Yamamoto, F., "Steady Laminar Flow of a Power-Law Fluid in a Curved Pipe of Circular Cross-Section with Varying Curvature," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 161-183, 1985.
- Iemoto, Y., Nagata, M., and Yamamoto, F., "Steady Laminar Flow of Viscoelastic Fluid in a Curved Pipe of Circular Cross-Section with Varying Curvature," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 22, pp. 101-114, 1986.
- 12. Zhang, M. K., Shen, X. R., Ma, J. F., and Zhang, B. Z., "Galerkin Method Study on Flow of Oldroyd-B Fluids in Curved Circular Cross-Section Pipes," *Journal of Zhejiang University Science*, Vol. 7, pp. 263-270, 2007.
- Phan-Thien, N., and Zheng, R., "Viscoelastic Flow in a Curved Duct: a Similarity Solution for the Oldroyd-B Fluid," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 41, pp. 766-781, 1990.

- Fan, Y., Tanner, R. I., and Phan-Thien, N., "Fully Developed Viscous and Viscoelastic Flows in Curved Pipes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 440, pp. 327-357, 2001.
- Tsang, H. Y., and James, D. F., "Reduction of Secondary Motion in Curved Tubes by Polymer Additives," J. Rheol., Vol. 24, pp. 589-601, 1980.
- Yanase, S., Goto, N., and Yamamoto, K., "Dual Solutions of the Flow Through a Curved Tube," Fluid Dyn. Res., Vol. 5, pp. 191-201, 1989.
- Jones, W. M., and Davies, O. H., "The Flow of Dilute Aqueous Solutions of Macromolecules in Various Geometries: III. Curved Pipes and Porous Materials," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 9, pp. 753-770, 1976.
- Chen Y., Chen, H., and Zhang, J., "Viscoelastic Flow in Rotating Curved Pipes," *Phys. Fluids.*, Vol. 18, 1-17, 2006.
- 19. Das, B., "Flow of Bingham Fluid in a Slightly Curved Tube," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 30, pp. 1193-1207, 1992.
- Helin, L., Thais, L., and Mompean, G., "Numerical Simulation of Viscoelastic Dean Vortices in a Curved Duct," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 156, pp. 84-94, 2008.
- 21. Boutabaa, M., Helin, L., and Thais, L., "Numerical Study of Dean Vortices in Developing Newtonian and Viscoelastic Flows Through a Curved Duct of Square Cross-Section," J. Non-Newtonian Fluid Mech., Vol. 337, pp, 84-94, 2009.
- 22. Zhang, M. K., Shen, X. R., Ma, J. F., and Zhang, B. Z., "Flow of Oldroyd-B Fluid in Rotating Curved Square Ducts," *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 19, No. 1, pp. 36-41, 2007.
- 23. Zhang, M. K., Shen, X. R., Ma, J. F., and Zhang, B. Z., "Theoretical Analysis of Convective Heat Transfer of Oldroyd-B Fluids in a Curved Pipe," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, pp. 1-11, 2007.
- 24. Shen, X. R., Zhang, M. K., Ma, J. F., and Zhang, B. Z., "Flow and Heat Transfer of Oldroyd-B Fluids in a Rotating Curved Pipe," *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 20, pp. 39-46, 2008.
- 25. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Shu, C., and Nobari, M.R.H., "Flow of Second Order Fluid in a Curved Duct with Square Cross Section," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 165, pp. 323-339, 2010.
- 26. Kays, W. M. and Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer, Third Edition, McGraw-Hill,

100

New York, 1993.

- Bird, R. B., and Wiest, J. M., "Constitutive Equations for Polymeric Liquids," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 27, pp. 169-193, 1995.
- 28. Bird, R. B., Armstrong, R. C., and Hassager, O., *Dynamics of Polymer Liquids*, Vol. 2, Second Edition, John Wiley & Sons, Canada, 1987.
- 29. Hoffmann, K. A., and Chiang, S. T., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, EES, Texas, 1989.
- 30. Chorin, A. j., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," J. Comput., Vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- 31. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

- 32. Twonsend, P., Walters, K., and Waterhouse, W. M., "Secondary Flows in Pipes of Square Cross-Section and the Measurement of the Second Normal Stress Difference," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 1, pp. 107-123, 1976.
- 33. Bara, B. M., Experimental Investigation of Developing and Fully Developed Flow in a Curved Duct of Square Cross Section, PhD Thesis, University of Alberta, 1991.
- 34. Shah, R. K., and London, A. L., *Advanced in Heat Transfer*, Academic Press, New York, 1978.
- 35. Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 2007

روشهای عددی در مهندسی ، سال ۲۹، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۸۹ (استقلال)