

تحلیل تراوش محصور با استفاده از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده

محمد حسین بازیار\* و عادل گرایلی\*\*

گروه مهندسی عمران، دانشگاه یاسوج

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۲/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۶/۳۰)

چکیده -

واژگان کلیدی:

## Scaled Boundary Finite-Element Solution to Confined Seepage Problems

Mohammad Hossein Baziyar and Adel Graili

Department of Civil Engineering, Yasouj University

**Abstract:** *In this study, a new computational scheme called the scaled boundary finite-element method (SBFEM) is employed to analyze confined seepage flow. This technique combines the advantages of both finite-element and boundary element methods, i. e., only the boundary is discretized, no fundamental solution is required, unbounded domains and singularity points are modeled rigorously, and finally anisotropic materials and non-homogenous materials satisfying similarity can be modeled without additional computational efforts. In this paper, after presenting formulation of the method for solving confined seepage problems, selected problems using this method are analyzed and the results are compared with the results of other numerical methods. High accuracy and efficiency of this method is demonstrated.*

**Keywords:** *Seepage, Laplace's equation, Scaled boundary finite-element method, Scaling center, Side face.*

\*\* - دانشجوی کارشناسی ارشد

\* - استادیار

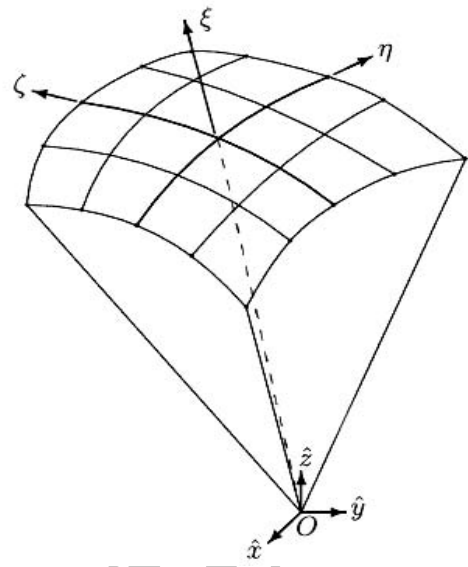
گره‌ای و توابع شکل، یک روش ساده و منحصر به فرد را برای تولید خطوط جریان ارائه دادند. با استفاده از این روش، از مقدار محاسبات لازم در روش اجزای محدود برای تعیین مقادیر پتانسیل گره‌ای کاسته می‌شود. چن و همکارانش [۴] در سال ۱۹۹۴ یک فرمولبندی از نوع انتگرال دوگانه را برای مسائل تراوش ارائه دادند. آنها در این مقاله از روش اجزای مرزی استفاده کرده و مسائل مختلفی از جریان تراوش در زیر سپریها را بررسی کردند و نهایتاً بهترین مکان قرارگیری سپری را نشان دادند. در این مقاله نتایج روش اجزای مرزی با نتایج روشهای تحلیلی مقایسه شد و دقت این نتایج نشان داده شد. همچنین با مقایسه نتایج این روش و روش اجزای محدود مشخص شد که در مسائل دارای نقاط تکینگی روش اجزای مرزی نسبت به روش اجزای محدود برتری دارد.

لی و ماو [۵]، در سال ۲۰۰۴ از روش تفاضل محدود مبتنی بر مختصات مرزی انطباقی، برای بررسی تراوش در پی‌ها و همچنین تحلیل تراوش با سطح آزاد در یک سد، در حالت ماندگار استفاده کردند. در این تحقیق با استفاده از قانون زنجیره‌ای مشتقات جزئی، معادله حاکم و شرایط مرزی تراوش از سیستم مختصات دکارتی به سیستم مختصاتی با مرزهای منحنی‌وار انطباقی، منتقل شدند. در این تحقیق نشان داده شد که با این روش، شبیه‌سازی محدوده‌های فیزیکی با مرزهای دارای هندسه پیچیده با دقت زیادی انجام می‌شود. موکاپادیای [۶]، در سال ۲۰۰۸ در تحقیقی با عنوان تحلیل تراوش در پی با استفاده از روش اجزای محدود و شبکه جریان، از ترکیب روشهای شبکه جریان و اجزای محدود برای بررسی تراوش استفاده کرد. در این مطالعه ابتدا با استفاده از روش اجزای محدود، مقادیر پتانسیل گره‌ای در اجزای‌های ۴ ضلعی و ۴ گره‌ای به دست آمد و سپس شبکه جریان براساس پتانسیلهای گره‌ای به دست آمده از روش اجزای محدود ترسیم شد.

با توسعه روشهای عددی و پیشرفتهای اخیر در علوم رایانه‌ای، نرم افزارهای تجاری زیادی با استفاده از روشهای تفاضل محدود و مخصوصاً اجزای محدود برای حل مسائل

محاسبه میزان جریان آب در خاک و نیروهای وابسته به این جریان، گزینه‌ای بسیار مهم در طراحی سازه‌های مختلف مانند سدهای خاکی، سدهای بتنی، پی‌ها و دیوارهای حائل بوده و بنابراین توجه بسیاری از محققان را به خود جلب نموده است. برای تحلیل مسائل تراوش از روشهای مختلفی نظیر روشهای تحلیلی، روشهای ترسیمی، مدل‌سازی الکتریکی و روشهای عددی استفاده شده است. روشهای تحلیلی عموماً برای مسائل دارای هندسه ساده و مصالح همگن و همسان قابل استفاده است. با توجه به محدودیتهای روشهای تحلیلی و با توجه به توسعه روشهای عددی، مهندسان ژئوتکنیک بسیاری از مسائل مربوط به تراوش را با استفاده از روشهای عددی حل می‌کنند. به عنوان پرکاربردترین روشهای محاسباتی در مکانیک محیطهای پیوسته می‌توان به روش اجزای محدود<sup>۱</sup>، روش اجزای مرزی<sup>۲</sup> و روش تفاضل محدود<sup>۳</sup> اشاره کرد. مرور کامل ادبیات تحقیق برای روشهای عددی ذکر شده با توجه به توسعه کامل بعضی از آنها خارج از حوصله این مقاله است. در اینجا فقط چند نمونه‌ای از تحقیقات انجام گرفته در خصوص استفاده از روشهای فوق برای مسائل تراوش ارائه می‌شود.

در سال ۱۹۷۹ بریبا و چانگ [۱]، از روش اجزای مرزی برای بررسی مسائل تراوش در پی سدها استفاده کردند. در این مقاله نشان داده شد که نتایج به دست آمده از روش اجزای مرزی در مقایسه با نتایج روش اجزای محدود دارای دقت بیشتری بوده و همچنین هزینه محاسباتی این روش بسیار کمتر از روش اجزای محدود است. تریسی و راداکریشنان [۲]، در سال ۱۹۸۹ یک روش تحلیلی برای تولید خطوط جریان با استفاده از روش اجزای محدود ارائه دادند. این تکنیک شامل یک رویکرد جدید و دقیق برای تعیین شرایط مرزی در محاسبات مربوط به توابع جریان است. در روش ارائه شده توسط این محققان یک تکنیک اصلاحی برای بررسی جریان گذرنده از لایه‌های با مصالح متفاوت نیز نشان داده شده است. در سال ۱۹۹۲ فن و تامپکینز [۳]، بر اساس مقادیر پتانسیل



شکل ۱- سیستم مختصاتی اجزای محدود با مرز مقیاس شده در حالت سه بعدی

ژئوتکنیکی از جمله تراوش تهیه و در صنعت و محیطهای دانشگاهی موجود است. در روشهای تفاضل محدود و اجزای محدود برای تحلیل نیاز به مش بندی کل دامنه است و در مسائل شامل گوشه های تیز<sup>۴</sup> دارای دقت پایینی اند و مجبور به استفاده از مشهای خیلی ریز هستیم. روش اجزای مرزی نیاز به حل بنیادی دارد که برای مسائل ناهمسان و ناهمگن این حلها خیلی پیچیده و در خیلی مواقع ناممکن اند. با توجه به ضعفهایی که در روشهای عددی مذکور وجود دارد، در این تحقیق از روشی جدید به نام روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده<sup>۵</sup> برای بررسی جریان تراوش در خاک استفاده می شود.

ساختار مقاله بدین صورت خلاصه می شود. در بخش (۲) تاریخچه روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده بیان می شود. در بخش (۳) فرمول بندی روش برای مسائل تراوش ارائه می شود. در بخش (۴) روند حل روش تشریح می شود. در قسمت (۵) مثالهای عددی بیان می شود و نهایتاً در بخش (۶) نتایج خلاصه می شود.

## ۲- روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده

روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، یک روش نیمه

تحلیلی و نسبتاً جدید است که برای حل معادلات با مشتقات جزئی کاربرد دارد. این روش توسط ولف و سانگ در سال ۱۹۹۶ ابداع شد [۷]. در این روش که مزایای دو روش اجزای محدود و اجزای مرزی را با هم ترکیب می کند، گسسته سازی فقط روی مرزها صورت می گیرد و بنا براین همانند روش اجزای مرزی ابعاد مسئله به اندازه یک بعد کاهش یافته و همانند روش اجزای محدود به هیچ گونه حل بنیادی نیاز نیست. مسائل با دامنه نامحدود و دارای نقاط تکنیکی به صورت دقیق مدل می شوند. مصالح ناهمسان و همچنین ناهمگن که شرط تشابه را ارضا کنند قابل مدلسازی اند. در این روش شرایط مرزی بازتابی در بی نهایت به طور دقیق ارضا می شود.

در روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، فقط مرز مسئله مش بندی می شود به طوری که کل دامنه مسئله بر روی مرز مقیاس شده و مرز نماینده کل مسئله است. در این روش ابتدا نقطه ای انتخاب می شود که تمامی مرزهای حوزه از این نقطه قابل رویت باشد. این نقطه مرکز قیاس<sup>۶</sup> نامیده شده و به عنوان مبدأ مختصات در نظر گرفته می شود. در این روش در مسائل سه بعدی دستگاه مختصات از مختصات دکارتی به سیستم مختصاتی شامل جهت شعاعی  $\xi$  و جهات محیطی  $\eta$  و  $\zeta$  تبدیل می شود، شکل (۱). مرز مسئله همانند مراحل گسسته سازی دامنه مسئله در روش اجزای محدود مش بندی می شود، به این صورت که در مسائل دو بعدی مسئله فقط در جهت مرزی  $\eta$  مش بندی و در مسائل سه بعدی مسئله فقط در جهات مرزی  $\eta$  و  $\xi$  مش بندی می شود. با توجه با این موارد، ابعاد مسئله در این روش همانند روش اجزای مرزی به اندازه یک واحد کاهش می یابد و بنابراین هزینه محاسباتی نسبت به روشهای تفاضل محدود و اجزای محدود کاهش یافته و سرعت محاسبات افزایش می یابد. در این روش همانند روش اجزای محدود، مقادیر متغیر مسئله در مرزها، با استفاده از توابع شکل درونیابی می شوند. بنابراین این روش منجر به حل تقریبی در جهت محیطی و حل دقیق در جهت شعاعی خواهد شد.

در مراحل آغازین پیدایش این روش، از آن برای محاسبه

$$v_x = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -k_x \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \quad (3-الف)$$

$$v_y = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -k_y \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \quad (3-ب)$$

و بنابراین

$$v = -\nabla \varphi(x, y) \quad (4)$$

در مرزهای حوزه باید یکی از مقادیر هد یا سرعت جریان معلوم باشد. اگر کل مرزها را با  $\Gamma$ ، مرزهای با هد معلوم را با  $\Gamma_\varphi$  و مرزهای با سرعت معلوم را با  $\Gamma_v$  نشان دهیم آنگاه شرایط مرزی به شکل زیر تعریف خواهد شد:

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{روی مرز } \Gamma_\varphi \quad (5-الف)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\bar{v} \quad \text{روی مرز } \Gamma_v \quad (5-ب)$$

### ۳-۲- فرمولبندی روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده

در روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده نقطه ای به نام مرکز قیاس انتخاب می شود که از آن نقطه کل مرز قابل رویت است. در مسائلی که نتوان چنین نقطه ای را پیدا کرد، دامنه مسئله به چند زیر دامنه تقسیم می شود و برای هر زیر دامنه مرکز قیاسی انتخاب می شود. دامنه مسئله در این روش توسط مرکز قیاس (نقطه O در شکلهای ۲-الف) و (۲-ب)، بر روی مرز مقیاس می شود و تنها مرزهایی از مسئله که امتدادشان از مرکز قیاس نمی گذرد مش بندی می شوند، به عبارت دیگر وجوه کناری<sup>۷</sup> دامنه مش بندی نمی شوند، شکل (۲-ب). در شکل (۲-ج)، جزء سه گره ای برای حل مسائل دو بعدی و در شکل (۲-د) جزء هشت گره ای برای حل مسائل سه بعدی نشان داده شده است. با این مقیاس دامنه، هندسه مسئله از سیستم مختصات دکارتی به یک سیستم مختصاتی جدید تحت عنوان سیستم مختصات اجزای محدود با مرز مقیاس شده، انتقال می یابد. سیستم مختصاتی اجزای محدود با مرز مقیاس شده، در حالت دو بعدی شامل جهت محیطی  $\eta$  و جهت شعاعی  $\xi$  است، شکل (۲-الف). مقدار  $\eta$  بین ۱ و -۱ است. در مسائل با دامنه محدود مقدار  $\xi$  در مرکز قیاس برابر صفر و

سختی دینامیکی حوزه نامحدود استفاده می شود، بعدها این روش توسعه بیشتری یافت و برای تحلیل مصالح تراکم ناپذیر و حوزه های محدود و مسائل شامل بارهای حجمی [۸] به کار گرفته شد. روش اولیه ای که برای استخراج معادلات این روش به کار گرفته شده بود روشی مکانیکی و پیچیده بود. این پیچیدگی موجب شد که بعدها معادلات این روش با روشهای باقیمانده وزن دار گالرکین [۹ و ۱۰] و روش کار مجازی به دست آید [۱۱ و ۱۲]. در مرجع [۸]، فرمولبندی روش برای حل معادله دو بعدی و اسکالر انتشار موج ارائه شده است. در یک مجموعه مقالات، بازیار و سانگ [۱۳-۱۶] روشهای حل اولیه این روش را برای مدل سازی محیطهای نامحدود که در تحلیل دینامیکی مسائل اندرکنش خاک و سازه مورد نیاز است توسعه دادند. در سال ۲۰۰۳ مسائل مربوط به جریان آب حول موانع دارای شکلهای متفاوت تحلیل شد [۱۷]. در بخش بعد فرمولبندی روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده برای حل مسائل تراوش ارائه می شود.

### ۳-۲- تحلیل تراوش با روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده

در این بخش ابتدا معادلات حاکمه تراوش و سپس فرمولبندی روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده برای مسائل دو بعدی ارائه می شود.

#### ۳-۱- معادله حاکم مسئله تراوش

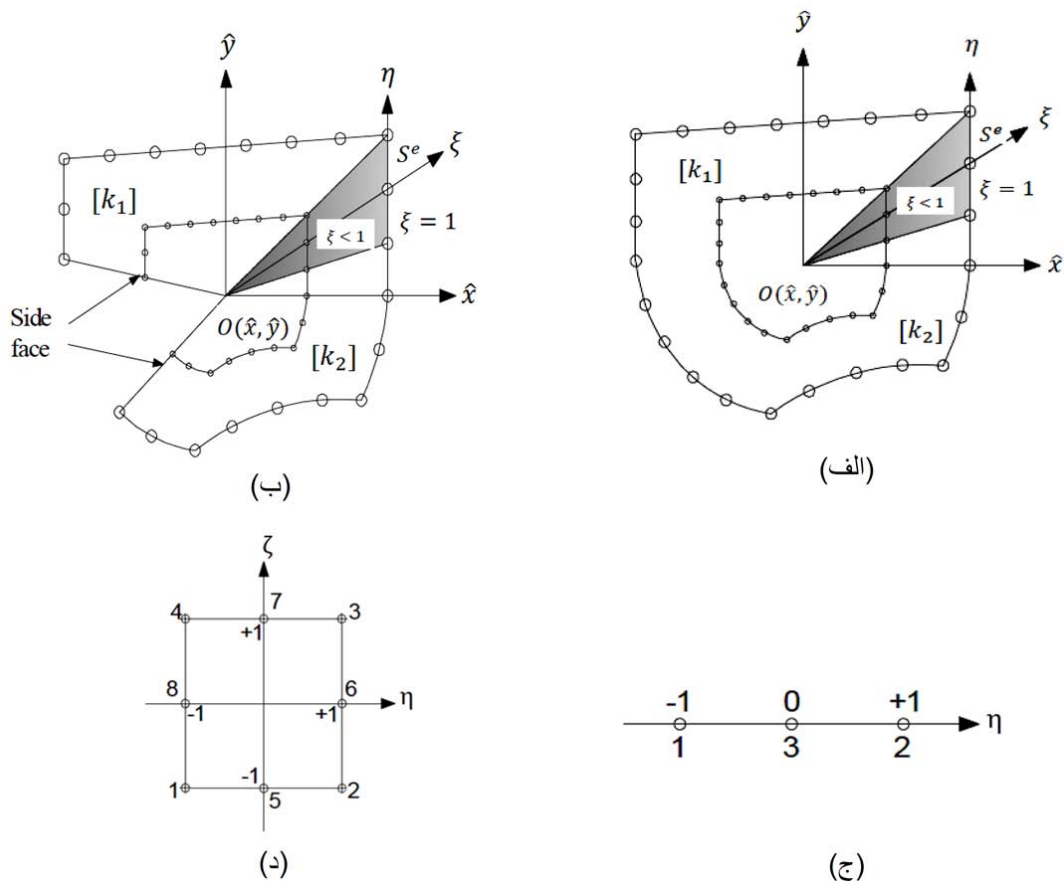
برای تحلیل تراوش، تابع پتانسیل  $\varphi(x, y)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varphi(x, y) = kh(x, y) \quad (1)$$

جایی که  $k$  ضریب نفوذپذیری و  $h$  هد است. با استفاده از عملگر برداری  $\nabla$ ، معادله لاپلاس براساس تابع پتانسیل بیان می شود:

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = 0 \quad (2)$$

با توجه به رابطه بین هد و سرعت، سرعت جریان در دو جهت  $x$  و  $y$  به دست می آید:



شکل ۲ - مدلسازی هندسه یک دامنه محدود در روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده: الف) بدون وجوه کناری، ب) با وجوه کناری، ج) اجزای سه گره‌ای روی مرز برای مسائل دو بعدی، د) اجزای ۸ گره‌ای صفحه‌ای مورد استفاده در مسائل سه بعدی

$$\hat{x} = \hat{x}_0 + \xi x(\eta) = \hat{x}_0 + \xi [N(\eta)] \{x\} \quad (7\text{-الف})$$

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + \xi y(\eta) = \hat{y}_0 + \xi [N(\eta)] \{y\} \quad (7\text{-ب})$$

با اعمال تبدیلات فوق، هندسه مسئله از سیستم مختصات دکارتی به سیستم مختصات اجزای محدود با مرز مقیاس شده انتقال می‌یابد.

در راستای خطوط شعاعی گذرنده از مرکز قیاس (O) و

یک گره روی مرز، تابع پتانسیل گره‌ای  $\{\varphi_h(\xi)\}$  معرفی

می‌شود. در جهت محیطی از اجزای ایزوپارامتریک پتانسیل

استفاده می‌شود. هد پتانسیل در یک نقطه  $(\xi, \eta)$  مطابق زیر از

تابع پتانسیل  $\{\varphi_h(\xi)\}$  درونیابی می‌شود، شکل (۳).

$$\{\varphi_h(\xi, \eta)\} = [N(\eta)] \{\varphi_h(\xi)\} \quad (8)$$

با استفاده از ماتریس ژاکوبین می‌توانیم مشتقات مربوط به

سیستم مختصاتی اجزای محدود با مرز مقیاس شده را به سیستم

در مرز برابر یک است شکل (۲-الف)، و در مسائل با دامنه نامحدود مقدار  $\xi$  در روی مرز برابر یک و در بینهایت برابر بینهایت است.

تبدیل مختصات نقاط مرزی از سیستم مختصات دکارتی به

سیستم مختصات اجزای محدود با مرز مقیاس شده، با استفاده

از توابع شکل و مختصات نقاط گره‌ای، به شکل زیر صورت

می‌گیرد:

$$x(\eta) = [N(\eta)] \{x\} \quad (6\text{-الف})$$

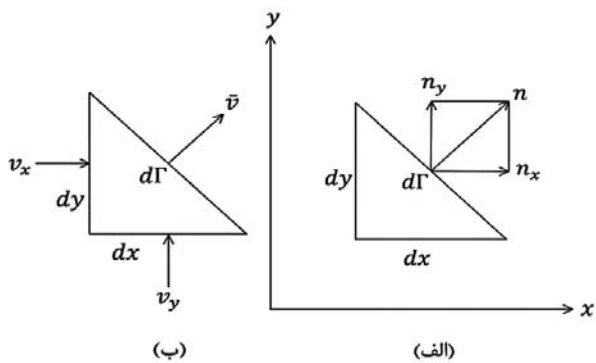
$$y(\eta) = [N(\eta)] \{y\} \quad (6\text{-ب})$$

حال باید نقاط داخل حوزه را با توجه به مرکز قیاس به مرزهای

مسئله انتقال دهیم. این کار با توجه به مرکز قیاس و جهت

شعاعی  $\xi$  برای نقطه‌ای با مختصات  $(\hat{x}, \hat{y})$  در داخل حوزه

مطابق زیر انجام می‌شود:



شکل ۴- الف) تجزیه بردار یکه روی مرز ب) مولفه‌های سرعت روی مرز

$$[B^1(\eta)] = [b^1(\eta)][N(\eta)] \quad (13\text{-الف})$$

$$[B^2(\eta)] = [b^2(\eta)][N(\eta)]_{,\eta} \quad (13\text{-ب})$$

برای تقریب اجزای محدود از روش باقیمانده وزن دار<sup>۱</sup> استفاده می‌کنیم:

$$R(x, y) = \nabla^2 \varphi(x, y) \quad (14)$$

بنابراین

$$\iint_{\Omega} w(x, y) R(x, y) d\Omega \quad (15)$$

با استفاده از قضیه گرین<sup>۲</sup>، معادله (۱۵) به شکل ضعیف شده زیر بیان می‌شود:

$$-\iint_{\Omega} \nabla^T w \nabla \varphi d\Omega + \int_{\Gamma} w (v_x n_x + v_y n_y) d\Gamma = 0 \quad (16)$$

با توجه به شکل (۴)، بردار سرعت در جهت عمود بر مرز به صورت زیر بیان می‌شود:

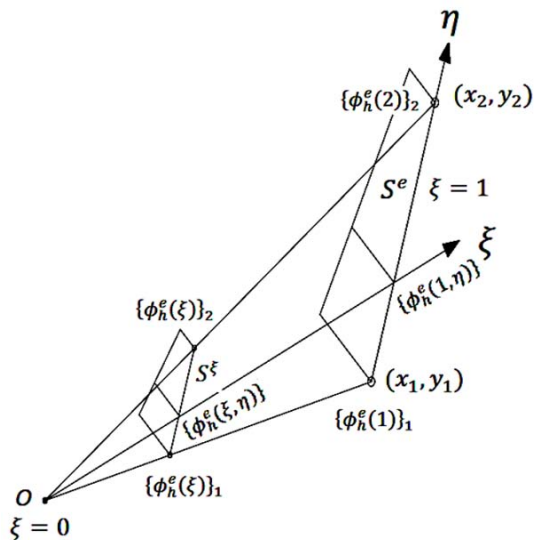
$$\bar{v} = v_x n_x + v_y n_y \quad (17)$$

در نهایت معادله به دست آمده از روش باقیمانده وزن دار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\iint_{\Omega} \nabla^T w \nabla \varphi d\Omega - \int_{\Gamma} w \bar{v} d\Gamma = 0 \quad (18)$$

با استفاده از روش گالرکین<sup>۱</sup> تابع وزن نیز همانند تابع پتانسیل، با استفاده از تابع شکل  $[N(\eta)]$ ، در نواحی مرزی تقریب زده می‌شود:

$$\{w(\xi, \eta)\} = [N(\eta)] \{w(\xi)\} = \{w(\xi)\}^T [N(\eta)]^T \quad (19)$$



شکل ۳- درونیابی هد داخل حوزه با استفاده از توابع هد گره‌ای

مختصاتی دکارتی ارتباط دهیم:

$$\nabla = [b^1(\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} + [b^2(\eta)] \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (9)$$

جایی که ضرایب معادله (۹) به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$[b^1(\eta)] = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} y(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (10\text{-الف})$$

$$[b^2(\eta)] = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{Bmatrix} \quad (10\text{-ب})$$

که ماتریس ژاکوبین و دترمینان آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[J] = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (11\text{-الف})$$

$$|J| = x(\eta)y(\eta)_{,\eta} - y(\eta)x(\eta)_{,\eta} \quad (11\text{-ب})$$

همان‌طور که دیده می‌شود  $[b^1(\eta)]$  و  $[b^2(\eta)]$  فقط به  $\eta$  بستگی دارند، یعنی توابعی وابسته به مرز دامنه مسئله‌اند. با جایگذاری معادلات (۸) و (۹) در معادله (۴)، سرعت تقریبی جریان در سیستم مختصات اجزای محدود با مرز مقیاس شده مطابق زیر بیان می‌شود:

$$\{v_h(\xi, \eta)\} = -[B^1(\eta)] \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi} - \frac{1}{\xi} [B^2(\eta)] \{\varphi_h(\xi)\} \quad (12)$$

که در معادله فوق

بردار  $[k]$  در معادلات (۲۳-الف) تاج به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$k = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (24)$$

$[E^0]$  یک ماتریس همیشه مثبت<sup>۱۱</sup> است. در صورت اعمال شرایط مرزی به گونه‌ای که هیچ حرکت صلبی وجود نداشته باشد، ماتریس  $[E^2]$  نیز یک ماتریس همیشه مثبت خواهد بود.

اگر بخواهیم پاسخی داشته باشیم که معادله (۲۲) را برای همه مقادیر  $\{w(\xi)\}$  ارضا کند، آنگاه باید شرایط زیر ارضا شوند:

$$\int_{\eta} [N(\eta)]^T (-\bar{v}(\xi_0, \eta)) \xi_0 d\eta \quad (25)$$

$$= [E^0] \xi_0 \{\varphi_h(\xi_0)\}_{,\xi} + [E^1]^T \{\varphi_h(\xi_0)\}$$

$$\int_{\eta} [N(\eta)]^T (-\bar{v}(\xi_1, \eta)) \xi_1 d\eta \quad (26)$$

$$= -[E^0] \xi_1 \{\varphi_h(\xi_1)\}_{,\xi} - [E^1]^T \{\varphi_h(\xi_1)\}$$

$$[E^0] \xi^2 \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi\xi} + \left( [E^0] + [E^1]^T - [E^1] \right) \xi \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi} \quad (27)$$

معادله (۲۷)، که یک معادله دیفرانسل معمولی، درجه دوم و ناهمگن است، معادله اجزای محدود با مرز مقیاس شده نامیده می‌شود. با توجه به روند استخراج معادله درمی‌یابیم که مشابه روند اجزای محدود، معادله لاپلاس در جهت محیطی ضعیف شده است، اما در جهت شعاعی همچنان به شکل قوی باقی می‌ماند.

معادله (۲۵) معمولاً شرایط مرزی داخلی را برای مسائل با حوزه نامحدود ارضا می‌کند، از آنجایی که مرز داخلی در یک حوزه محدود یک مرکز قیاس است، معادله (۲۵) برای این مسائل حذف می‌شود. در واقع پاسخ به دست آمده در مرکز قیاس، باید کران‌دار باشد که این امر در جواب نهایی به صورت خودکار برقرار می‌شود. معادله (۲۶) شرایط مرزی خارجی را نشان می‌دهد.

از آنجایی که وجوه کناری مش بندی نمی‌شوند، تغییرات سرعت نرمال به صورت تحلیلی خواهد بود. اگر مرز هندسه به صورت بسته باشد وجوه کناری بر یکدیگر منطبق می‌شوند و جریان وارده به وجوه کناری برابر و مخالف یکدیگرند که منجر به صفر شدن جمله سمت راست معادله (۲۷) می‌شود. در

که منظور از  $\{w(\xi)\}$  تابع وزنی در سیستم مختصات اجزای محدود با مرز مقیاس شده است. با جاگذاری معادلات (۸) و (۱۹) در معادله (۱۸)، معادله باقیمانده وزن‌دار گالرکین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\iint_{\Omega} [\nabla [N(\eta)] \{w(\xi)\}]^T [\nabla [N(\eta)] \{\varphi_h(\xi)\}] d\Omega \quad (20)$$

$$- \int_{\Gamma} \{w(\xi)\}^T [N(\eta)]^T \bar{v} d\Gamma = 0$$

با جاگذاری ضرایب معادلات (۱۳)، در معادله فوق خواهیم داشت:

$$\iint_{\Omega} \left[ [B^1(\eta)] \{w(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(\eta)] \{w(\xi)\} \right]^T \left[ [B^1(\eta)] \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(\eta)] \{\varphi_h(\xi)\} \right] d\Omega \quad (21)$$

$$- \int_{\Gamma} \{w(\xi)\}^T [N(\eta)]^T \bar{v} d\Gamma = 0$$

با توجه به شکل (۲-الف) و انتگرال‌گیری نسبت به  $\xi$  از انتگرالهای داخل حوزه که شامل  $\{w(\xi)\}_{,\xi}$  هستند، و با استفاده از قضیه گرین، خواهیم داشت:

$$\{w(\xi_1)\}^T \left[ [E^0] \xi_1 \{\varphi_h(\xi_1)\}_{,\xi} + [E^1]^T \{\varphi_h(\xi_1)\} + \int_{\eta} [N(\eta)]^T (-\bar{v}(\xi_1, \eta)) \xi_1 d\eta \right] - \{w(\xi_0)\}^T \left[ [E^0] \xi_0 \{\varphi_h(\xi_0)\}_{,\xi} + [E^1]^T \{\varphi_h(\xi_0)\} + \int_{\eta} [N(\eta)]^T (-\bar{v}(\xi_0, \eta)) \xi_0 d\eta \right] - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left\{ \{w(\xi)\}^T [E^0] \xi \{\varphi_h(\xi_0)\}_{,\xi\xi} + \left( [E^0] + [E^1]^T - [E^1] \right) \{\varphi_h(\xi_0)\}_{,\xi} - [E^2] \frac{1}{\xi} \{\varphi_h(\xi)\} - \{F_s(\xi)\} \right\} d\xi = 0 \quad (22)$$

که ضرایب این معادله به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$[E^0] = \int_{\eta} [B^1(\eta)]^T [k] [B^1(\eta)] |J| d\eta \quad (23-الف)$$

$$[E^1] = \int_{\eta} [B^2(\eta)]^T [k] [B^1(\eta)] |J| d\eta \quad (23-ب)$$

$$[E^2] = \int_{\eta} [B^2(\eta)]^T [k] [B^2(\eta)] |J| d\eta \quad (23-ج)$$

$$\{F_s(\xi)\} = [N(\eta_0)]^T (-\bar{v}(\xi, \eta_0)) |J(\eta_0)| + [N(\eta_0)]^T (-\bar{v}(\xi, \eta_1)) |J(\eta_1)| \quad (23-د)$$

با جاگذاری معادلات (۳۰) و (۳۱) در معادله دیفرانسیل درجه دوم (۲۸)، معادله دیفرانسیل درجه اولی مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\xi \{X(\xi)\}_{,\xi} = -[Z] \{X(\xi)\} \quad (32)$$

در معادله فوق ماتریس ضرایب [Z] به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[Z] = \begin{bmatrix} [E^0]^{-1} [E^1]^T & -[E^0]^{-1} \\ -[E^2] + [E^1][E^0]^{-1}[E^1]^T & -[E^1][E^0]^{-1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

ماتریس [Z] یک ماتریس همیلتونی<sup>۱۱</sup> است که در حل معادلات جبری ریکاتی وجود دارد [۱۸].

$$\{X(\xi)\} = \xi^{-\lambda_i} \{\varphi_i\} \quad (34)$$

حال اگر پاسخ  $\{X(\xi)\}$  را به صورت زیر تعریف کنیم: آنگاه جاگذاری معادله (۳۴) در معادله (۳۲) منجر به مسئله مقدار ویژه زیر خواهد شد:

$$[Z] \{\varphi_i\} = \lambda_i \{\varphi_i\} \quad (35)$$

که  $\lambda_i$  مقادیر ویژه و  $\{\varphi_i\}$  بردارهای ویژه ماتریس [Z] هستند. اگر  $\lambda_i$  یک مقدار ویژه ماتریس همیلتونی [Z] باشد،  $-\lambda_i$  نیز یک مقدار ویژه ماتریس [Z] خواهد بود [۱۸].

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به صورت زیر مرتب می‌شوند:

$$[Z][\Phi] = [\Phi][\lambda] \quad (36)$$

$$= \begin{bmatrix} [\Phi_{h1}] & [\Phi_{h2}] \\ [\Phi_{q1}] & [\Phi_{q2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\lambda_n] \\ [\lambda_p] \end{bmatrix}$$

که  $[\bullet]$  نشان‌دهنده ماتریس قطری است. بخش حقیقی همه جمله‌های  $[\lambda_n]$  منفی بوده و برای  $[\lambda_p]$  مثبت‌اند. با استفاده از تابع تبدیل یافته  $\{w(\xi)\}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\{X(\xi)\} = [\Phi] \{w(\xi)\} \quad (37)$$

معادله (۳۲) به شکل زیر تجزیه می‌شود:

$$\xi w_i(\xi)_{,\xi} = -\lambda_i w_i(\xi) \quad (38)$$

که جواب عمومی آن برابر است با

$$w_i(\xi) = c_i \xi^{-\lambda_i} \quad (39)$$

صورتی که وجوه کناری نیز نفوذ ناپذیر باشند جمله فوق صفر خواهد شد. معادله اجزای محدود با مرز مقیاس شده در حالت همگن، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[E^0] \xi^2 \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi\xi} + \left( [E^0] + [E^1]^T - [E^1] \right) \xi \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi} - [E^2] \{\varphi_h(\xi)\} = 0 \quad (28)$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل درجه دوم است که باید برای تابع متغیر  $\{\varphi_h(\xi)\}$  حل شود. در قسمت بعد مراحل حل این معادله بیان می‌شود.

#### ۴- روند حل

معادله اجزای محدود با مرز مقیاس شده در پتانسیل، معادله (۲۸)، با استفاده از یک روند تحلیلی حل می‌شود. مقادیر پتانسیل در مرز، همانند روند حل دامنه‌های محدود توسط روش اجزای محدود به دست می‌آید ولی مقادیر پتانسیل در درون دامنه، با استفاده از تعداد محدودی از توابع توانی در جهت شعاعی محاسبه می‌شود. حل معادله اجزای محدود با مرز مقیاس شده در پتانسیل، با استفاده از مودهای پتانسیل همانند زیر تعریف می‌شود:

$$\{\varphi_h(\xi)\} = c_1 \xi^{-\lambda_1} \{\varphi_1\} + c_2 \xi^{-\lambda_2} \{\varphi_2\} + \dots \quad (29)$$

در معادله (۲۹)،  $\{\varphi_i\}$  یک بردار از هد پتانسیل در نقاط مرزی بوده و نشان‌دهنده یک مود پتانسیل است. این مودها به مودهای همگن معروف بوده و متناظر با حالت همگن معادله اجزای محدود با مرز مقیاس شده هستند. ثابتهای انتگرال  $c_i$ ، سهم هر مود پتانسیل را از پاسخ کلی نشان داده و وابسته به شرایط مرزی‌اند، درحالی که توانهای  $\lambda_i$ ، فاکتورهای بی‌اند که هر مود پتانسیل را در جهت شعاعی مقیاس می‌کنند. نرخ جریان گره‌ای برای مسائل تراوش همانند معادلات (۲۵) و (۲۶) از معادله زیر تعریف می‌شود:

$$\{q(\xi)\} = [E^0] \xi \{\varphi_h(\xi)\}_{,\xi} + [E^1]^T \{\varphi_h(\xi)\} \quad (30)$$

برای ساده‌سازی معادله (۲۸)، معادله زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\{X(\xi)\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi_h(\xi)\} \\ \{q(\xi)\} \end{Bmatrix} \quad (31)$$



با استفاده از معادلات (۳۶)، (۳۷) و (۳۹)، پاسخ معادله (۳۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{x(\xi)\} = \begin{bmatrix} [\Phi_{h1}] & [\Phi_{h2}] \\ [\Phi_{q1}] & [\Phi_{q2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{-[\lambda_n]} \\ \xi^{-[\lambda_p]} \end{bmatrix} \{c_1, c_2\} \quad (40)$$

پاسخ عمومی برای هد پتانسیل و نرخ جریان با توجه به معادلات (۳۱) و (۴۰) به دست می‌آید:

$$\{\varphi_h(\xi)\} = [\Phi_{h1}] \xi^{-[\lambda_n]} \{c_1\} + [\Phi_{h2}] \xi^{-[\lambda_p]} \{c_2\} \quad (41-الف)$$

$$\{q(\xi)\} = [\Phi_{q1}] \xi^{-[\lambda_n]} \{c_1\} + [\Phi_{q2}] \xi^{-[\lambda_p]} \{c_2\} \quad (41-ب)$$

ثابت‌های انتگرال با توجه به شرایط مرزی به دست می‌آیند. برای مسائل دارای دامنه محدود، مقدار  $\{\varphi_h(\xi)\}$  در  $\xi = 0$  باید متناهی باشد، با توجه به این موضوع، مقدار  $\{c_2\}$  برابر صفر خواهد بود. بنابراین

$$\{\varphi_h(\xi)\} = [\Phi_{h1}] \xi^{-[\lambda_n]} \{c_1\} \quad (42-الف)$$

$$\{q(\xi)\} = [\Phi_{q1}] \xi^{-[\lambda_n]} \{c_1\} \quad (42-ب)$$

که مقدار  $\{c_1\}$ ، با توجه به مقدار هد روی مرزها به دست می‌آید. رابطه بین هد و نرخ جریان در مرزها به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\{q(\xi=1)\} = [K] \{\varphi_h(\xi=1)\} \quad (43)$$

با توجه به معادله فوق مقدار ماتریس سختی  $[K]$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K] = [\Phi_{q1}] [\Phi_{h1}]^{-1} \quad (44)$$

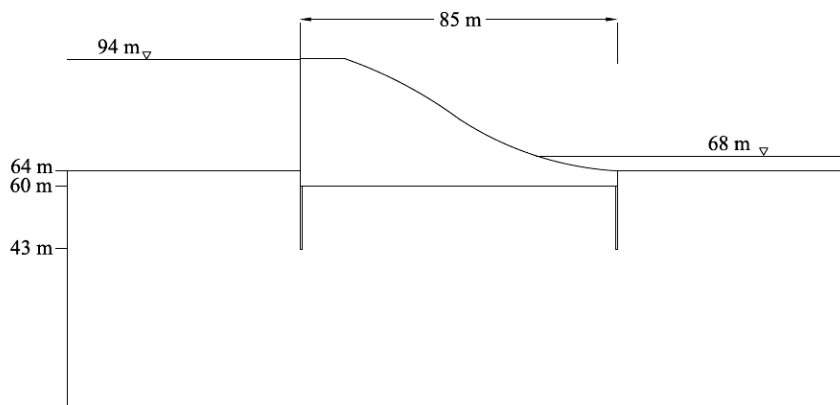
در روند کلی یک مسئله تراوش دارای دامنه محدود، با داشتن مقدار  $[K]$  در مرز، با روند معمول اجزای محدودی، مقادیر هد و نرخ جریان در نقاط مرزی از معادله (۴۳) به دست می‌آید. با مشخص شدن مقادیر این پارامترها در نقاط مرزی و رجوع به معادله (۴۲) مقدار ضرایب ثابت  $\{c_1\}$  به دست می‌آید. نهایتاً با داشتن مقدار  $\{c_1\}$  و استفاده از معادله (۴۲)، مقادیر هد و نرخ

جریان در نقاط داخل حوزه (دارای  $\xi$  های مختلف بین ۰ و ۱) به دست می‌آید. برای حل مثالهای عددی در این تحقیق معادلات فوق در یک برنامه رایانه‌ای به زبان متلب<sup>۱۳</sup> نوشته شد.

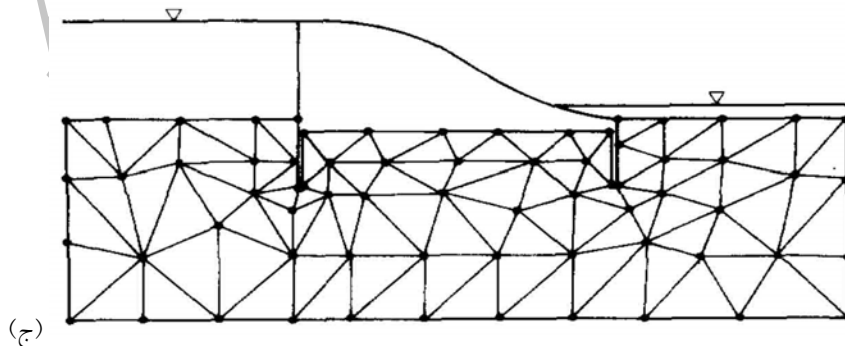
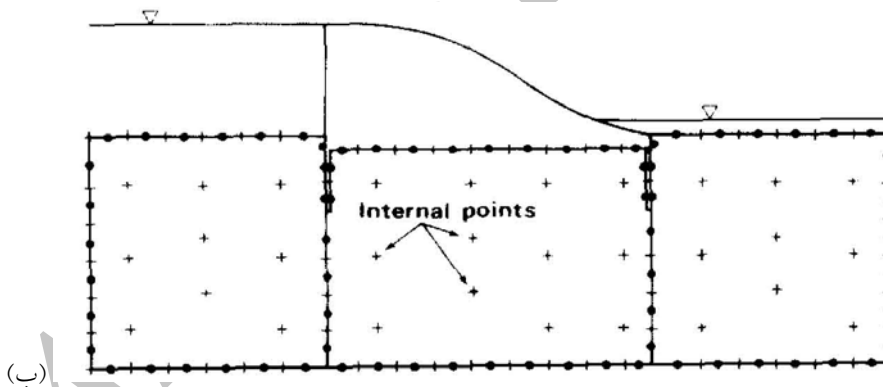
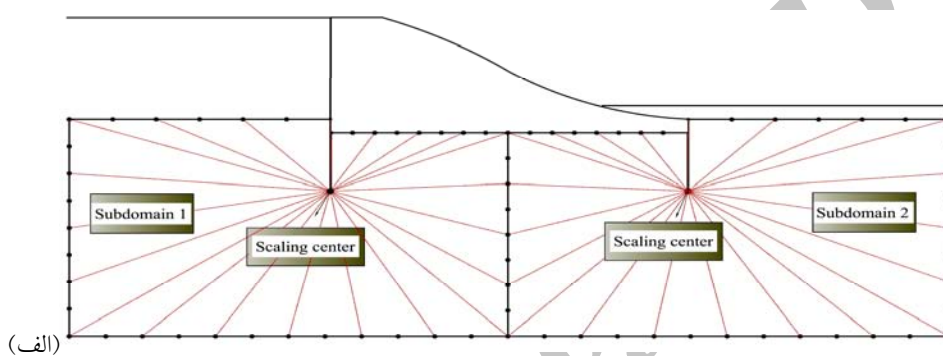
## ۵- مثالهای عددی

برای نشان دادن دقت بالا و هزینه محاسباتی کم روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در حل مسائل تراوش، در این بخش سه مثال عددی شامل تراوش در پی یک سد بتنی شامل مصالح همگن و همسان در پی و دو ردیف سپری در پنجه و پاشنه، تراوش در زیر یک سپری قرارگرفته روی خاک همگن و ناهمسان و در نهایت تراوش در پی یک سد بتنی شامل مصالح ناهمگن و ناهمسان در پی و یک ردیف سپری در پاشنه، با روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده تحلیل می‌شوند و نتایج حاصله با نتایج دیگر روشهای عددی مقایسه می‌شوند. به منظور نشان دادن دقت روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در حل مثالهای دوم و سوم، از نرم افزار اجزای محدود ژئواستودیو<sup>۱۴</sup> استفاده شده است.

**مثال ۱:** در این مثال جریان تراوش در پی یک سد بتنی که شامل دو ردیف سپری در پنجه و پاشنه است، بررسی می‌شود، شکل (۵). مصالح زیر این سد همگن و همسان بوده و ضریب هدایت هیدرولیکی این مصالح  $5 \times 10^{-4}$  متر بر ثانیه است. در مرجع [۱]، این مسئله با استفاده از روشهای اجزای مرزی و اجزای محدود در مرجع [۱۹] به صورت تحلیلی بررسی شده است. در به‌کاربردن روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، همان‌طور که در شکل (۶-الف) مشاهده می‌شود دامنه محاسباتی مسئله به دو زیر دامنه کوچکتر تقسیم می‌شود و برای هر یک از این زیر دامنه‌ها یک مرکز قیاس به گونه‌ای انتخاب می‌شود که از این نقطه مرز کل آن زیر دامنه قابل رویت باشد. در مش بندی مرزهای این زیر دامنه‌ها ۳۸ جزء سه گره‌ای با ۷۷ درجه آزادی مورد استفاده قرار گرفته است. مشهای استفاده شده در روشهای اجزای مرزی و اجزای محدود نیز در شکل‌های (۶-ب) و (۶-ج) نشان داده شده‌اند که به ترتیب از ۷۲ و ۹۵ اجزای تشکیل شده‌اند.

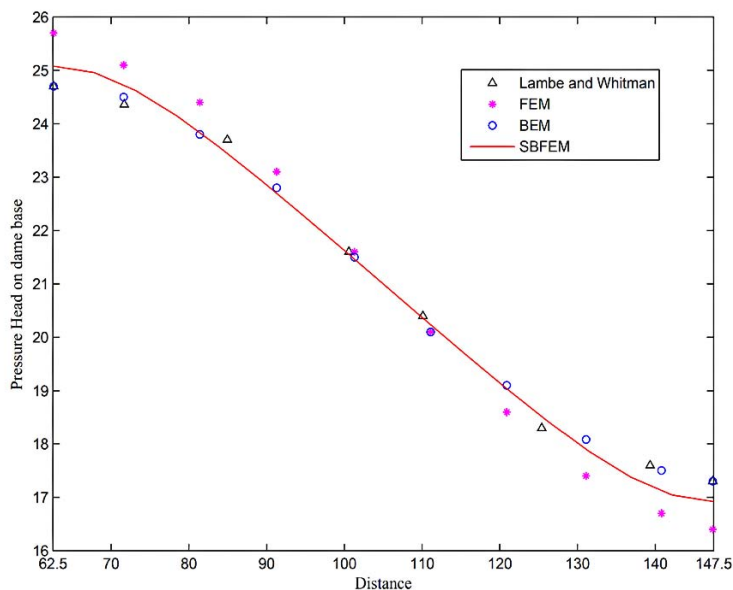


شکل ۵- جریان آب در زیر یک سد بتنی همراه با دو ردیف سپری در پنجه و پاشنه

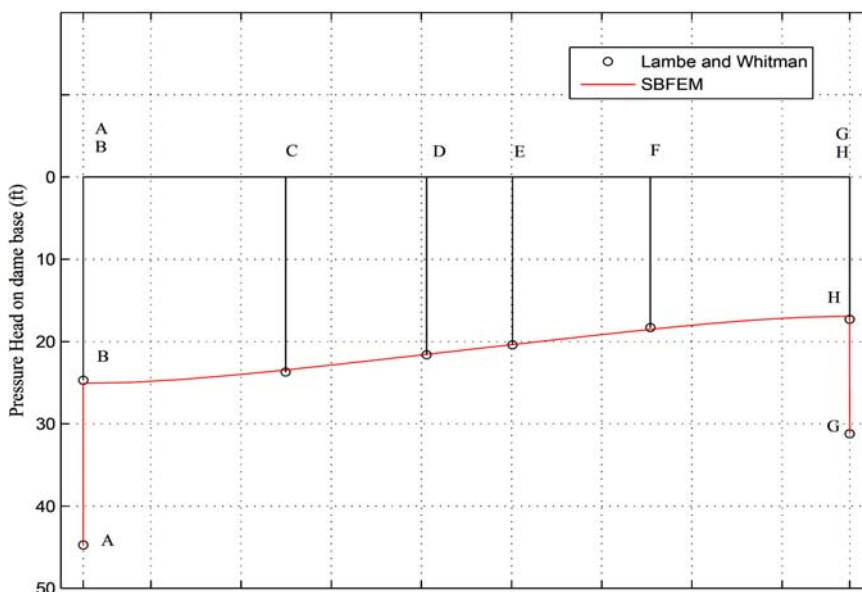


شکل ۶- مدل‌سازی جریان آب در زیر یک سد بتنی همراه با دو ردیف سپری در پنجه و پاشنه:

الف) SBFEM با ۳۸ جزء، ب) BEM با ۷۲ جزء، ج) FEM با ۹۵ جزء



شکل ۷- مقایسه مقادیر هد فشار در زیر سد

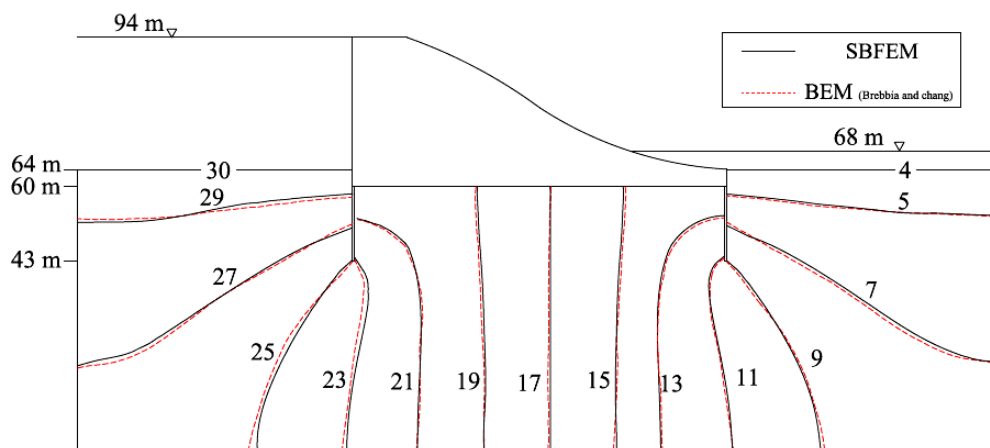


شکل ۸- مقایسه مقادیر هد فشار در زیر سد و نوک سپری

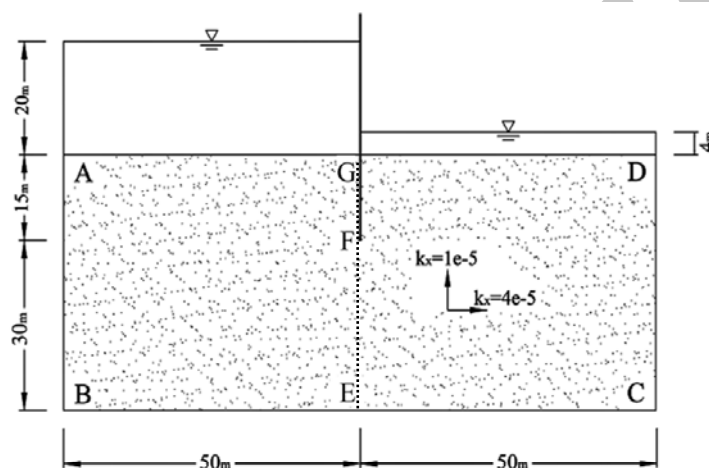
نتایج روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در نوک سپری مشخص می‌شود. نهایتاً در شکل (۹) خطوط هم پتانسیل حاصل از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و روش اجزای مرزی با هم مقایسه شده و مشاهده می‌شود که نتایج دو روش تطابق خوبی دارند.

مثال ۲: در شکل (۱۰) جریان آب در زیر یک ردیف سپری

در شکل (۷) مقادیر هد فشار زیر سد به دست آمده از چهار روش با هم مقایسه شده و دیده می‌شود نتایج حاصل از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده دقت بیشتری نسبت به روش اجزای محدود دارد. در شکل (۸) مقادیر هد فشار به دست آمده در مرجع [۱۹] و روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و با هم مقایسه شده است که با توجه به این شکل، دقت



شکل ۹- مقایسه خطوط هم پتانسیل حاصل از SBFEM و BEM

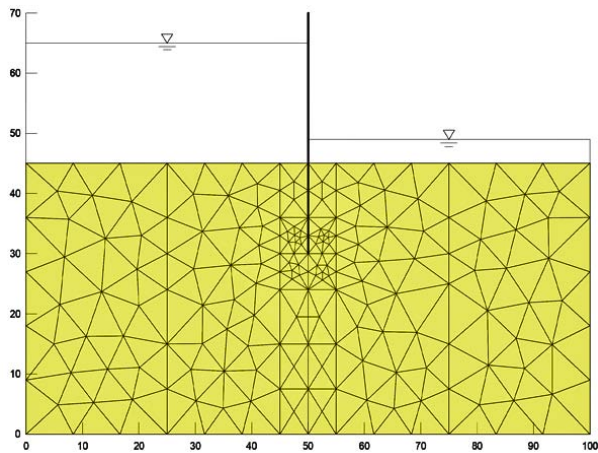


شکل ۱۰- جریان آب در زیر یک ردیف سپری

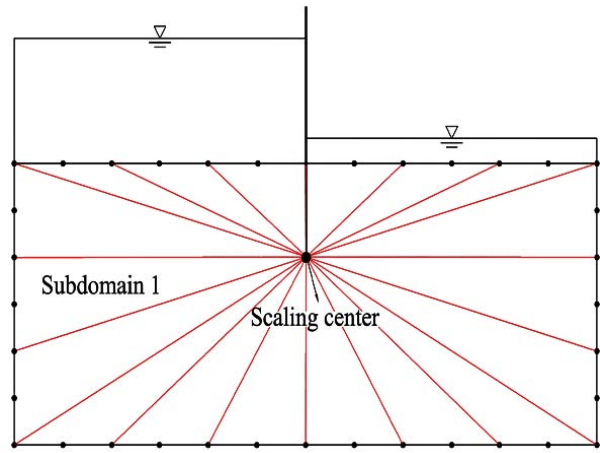
مشهای استفاده شده در نرم افزار اجزای محدود ژئواستودینو نشان داده شده است. آنها به ترتیب از ۳۵۶ و ۹۹۳ و ۴۹۶۸ جزء ۳ گره‌ای تشکیل شده‌اند که به ترتیب شامل ۲۰۲ و ۵۳۶ و ۲۵۷۷ درجه آزادی‌اند.

در شکل (۱۲-الف) مقدار سرعت جریان به دست آمده از روشهای اجزای محدود با مرز مقیاس شده و اجزای محدود، در امتداد مرزهای بیرونی (ABCD) با هم مقایسه شده است. با توجه به این گراف دیده می‌شود که نتایج حاصل از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و روش اجزای محدود با مش ریز در امتداد این مرزها، همخوانی خوبی دارند. البته باید توجه داشت که تعداد درجات آزادی در نظر گرفته شده در

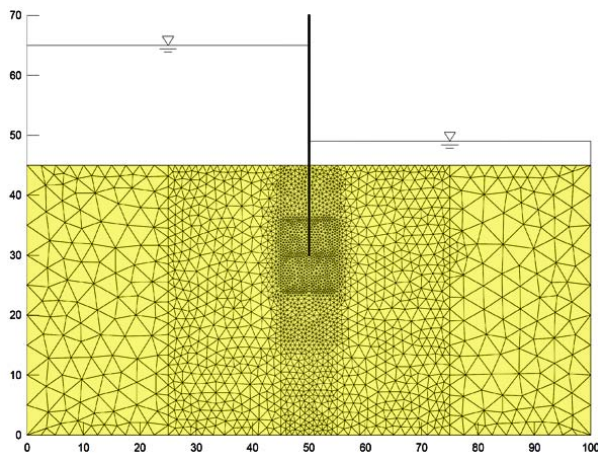
نشان داده شده است. ارتفاع آب در بالادست و پایین دست سپری به ترتیب ۲۰ متر و ۴ متر است. خاک زیر سپری همگن و ناهمسان در نظر گرفته شده است. ضریب هدایت هیدرولیکی این خاک در جهتهای x و y به ترتیب  $4 \times 10^{-5}$  و  $1 \times 10^{-5}$  متر بر ثانیه فرض می‌شود. در به کارگیری روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، همان‌طور که در شکل (۱۱-الف) مشاهده می‌شود کل دامنه محاسباتی با انتخاب یک مرکز قیاس، به گونه‌ای که از این نقطه همه مرزهای دامنه قابل رویت باشد، بر روی مرزها مقیاس می‌شود. برای مش بندی مرزهای دامنه از ۱۸ جزء سه گره‌ای با ۳۷ درجه آزادی استفاده شده است شکل (۱۱-الف). در شکلهای (۱۱-ب) و (۱۱-ج) و (۱۱-د)،



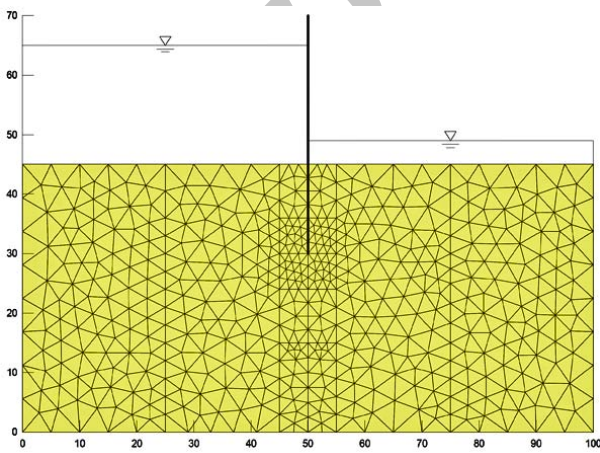
(ب)



(الف)

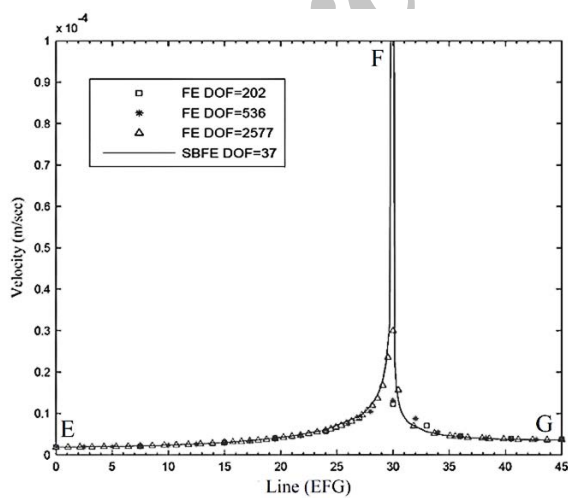


(د)

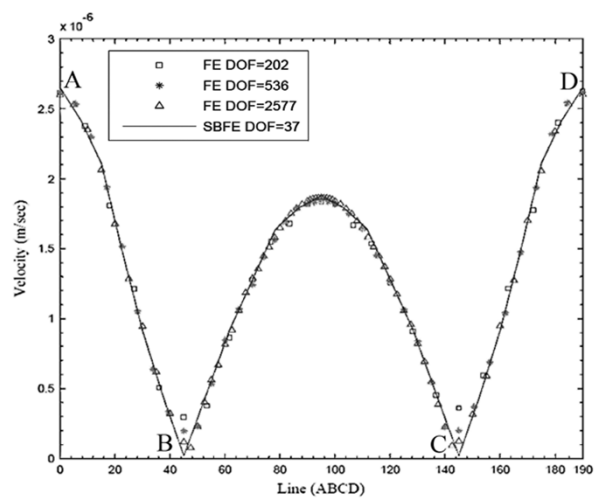


(ج)

شکل ۱۱- مدل سازی جریان آب در زیر یک ردیف سپری با روشهای اجزای محدود با مرز مقیاس شده و اجزای محدود: الف) SBFEM با ۳۷ درجه آزادی، ب) FEM با ۲۰۲ درجه آزادی، ج) FEM با ۵۳۶ درجه آزادی، د) FEM با ۲۵۷۷ درجه آزادی

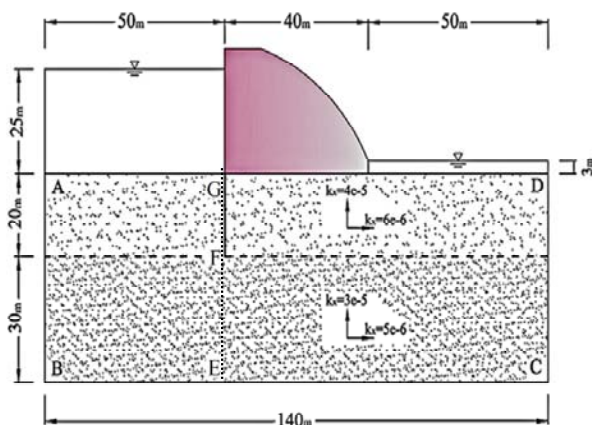


(ب)



(الف)

شکل ۱۲- مقایسه مقادیر سرعت جریان الف) در راستای خط ABCD ب) در راستای خط EFG

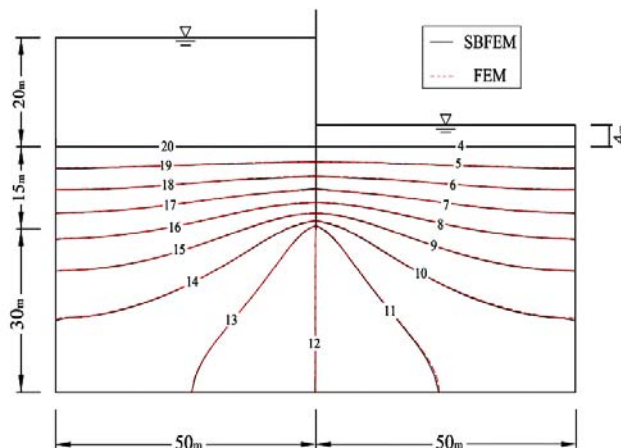


شکل ۱۴- یک سد بتنی به همراه یک ردیف سپری در پاشنه

سد به ترتیب ۲۵ و ۳ متر است. مصالح زیر سد ناهمگن و ناهمسان بوده و ضریب هدایت هیدرولیکی مصالح زیر سد از عمق ۰ تا ۲۰ متری در جهتهای X و Y به ترتیب  $4 \times 10^{-5}$  و  $6 \times 10^{-6}$  متر بر ثانیه و از عمق ۲۰ تا ۵۰ متری در جهتهای X و Y به ترتیب  $3 \times 10^{-5}$  و  $5 \times 10^{-6}$  متر بر ثانیه است.

در مدلسازی مسئله با استفاده از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، با انتخاب مرکز قیاس مناسب برای هر زیر دامنه، دامنه محاسباتی مسئله به دو زیر دامنه کوچکتر تقسیم می‌شود. در این مثال نیز مانند مثالهای (۱) و (۲) از اجزای سه نقطه‌ای برای مش‌بندی مرزهای دامنه استفاده شده است. مش مربوطه با ۳۳ جزء و ۸۶ درجه آزادی در شکل (۱۵-الف) نشان داده شده است. سه مش درشت، متوسط و ریز مورد استفاده در روش اجزای محدود، شکلهای (۱۵-ب)، (۱۵-ج) و (۱۵-د) نیز به ترتیب از ۵۵۰، ۱۶۷۰ و ۵۰۷۴ جزء ۳ گره‌ای تشکیل شده‌اند که به ترتیب منجر به ۳۰۷، ۸۸۸ و ۲۶۲۸ درجه آزادی شده‌اند.

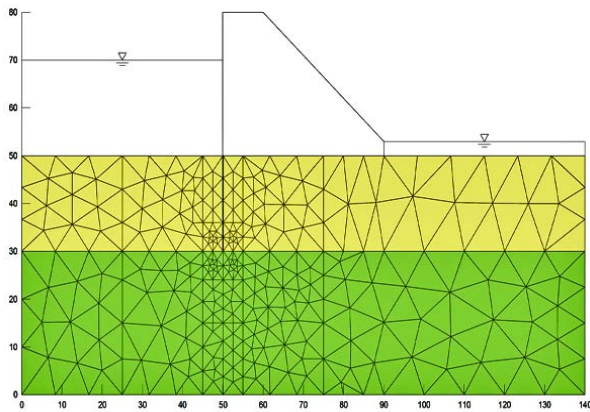
در شکلهای (۱۶-الف) و (۱۶-ب) مقادیر سرعت جریان به دست آمده از دو روش به ترتیب در طول خط ABCD و امتداد سپری (خط EFG) با هم مقایسه شده‌اند. با توجه به گراف (۱۶-الف) مشاهده می‌شود که در امتداد خط ABCD، مانند مثال (۲)، با افزایش تعداد درجات آزادی در روش اجزای محدود نتایج حاصل از این روش به نتایج حاصل از روش اجزای محدود با



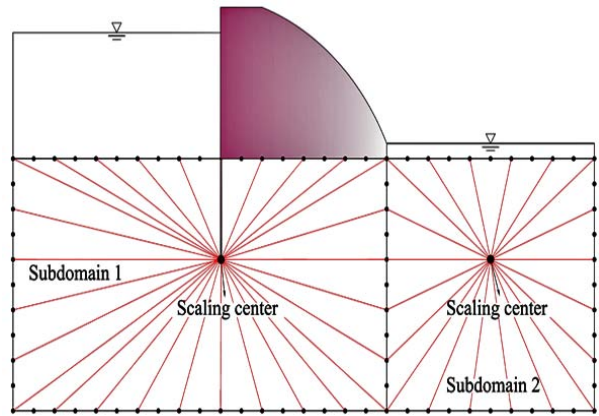
شکل ۱۳- مقایسه خطوط هم پتانسیل حاصل از FEM و SBFEM

روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده بسیار کمتر از روش اجزای محدود است. برای نشان دادن توانایی روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در مدلسازی نقاط تکنیکی، مقادیر سرعت جریان به دست آمده از دو روش در امتداد سپری (سمت چپ سپری در امتداد خط EFG) در شکل (۱۲-ب) با هم مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، در نقاط اطراف نوک سپری نتایج دو روش تفاوت زیادی دارند و با ریز کردن مش اجزای محدود تغییرات کمی در نتایج این روش ایجاد می‌شود، به عبارت دیگر روند همگرایی نتایج روش اجزای محدود در نقاط تکیه بسیار پایین است. اما روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در این نقاط به صورت تحلیلی عمل کرده، و پاسخ دقیق ارائه می‌دهد. در شکل (۱۳) شبکه‌های جریان حاصل از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و روش اجزای محدود با مش ریز، با هم مقایسه شده و مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از دو روش همخوانی بسیار خوبی دارند. مقدار دبی عبوری از زیر سپری برای عرض واحد سپری بر حسب متر مکعب بر ثانیه، با استفاده از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و روش اجزای محدود با مش‌های درشت، متوسط و ریز به ترتیب  $1/519 \times 10^{-5}$ ،  $1/564 \times 10^{-5}$  و  $1/548 \times 10^{-5}$  است.

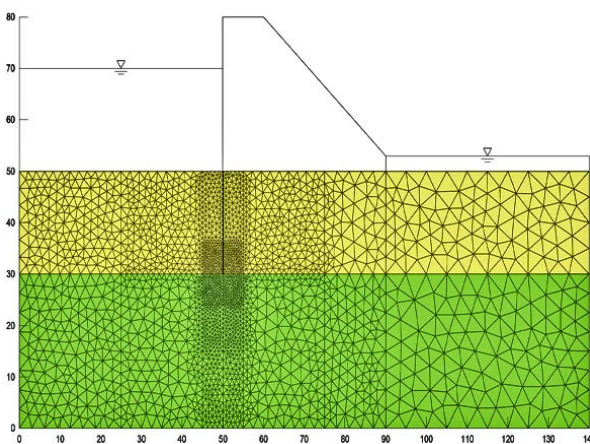
مثال ۳: در شکل (۱۴) یک سد بتنی با یک ردیف سپری در پاشنه نشان داده شده است. ارتفاع آب در بالادست و پایین‌دست



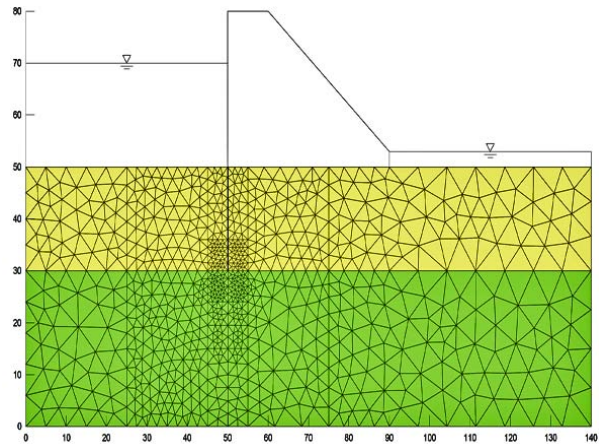
(ب)



(الف)



(د)

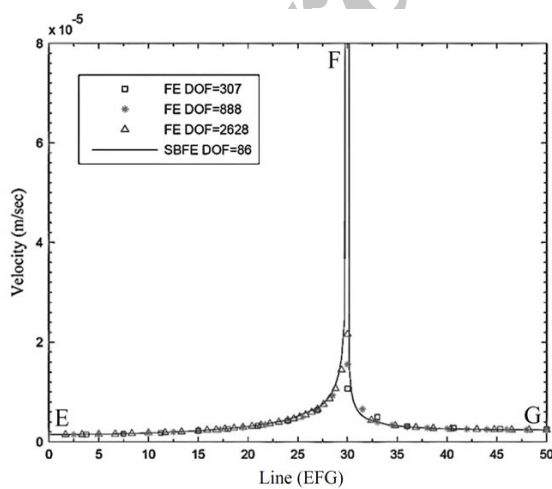


(ج)

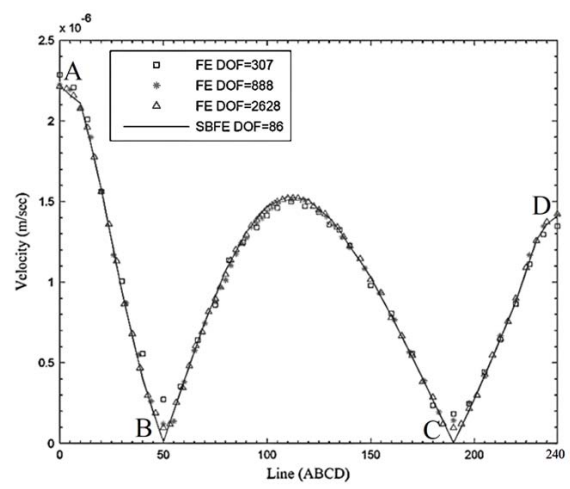
شکل ۱۵- مدل سازی جریان آب در زیر یک سد بتنی با یک ردیف سپری در پاشنه با روشهای اجزای محدود با مرز مقیاس شده

و اجزای محدود: الف) SBFEM با ۸۶ درجه آزادی، ب) FEM با ۳۰۷ درجه آزادی،

ج) FEM با ۸۸۸ درجه آزادی، د) FEM با ۲۶۲۸ درجه آزادی

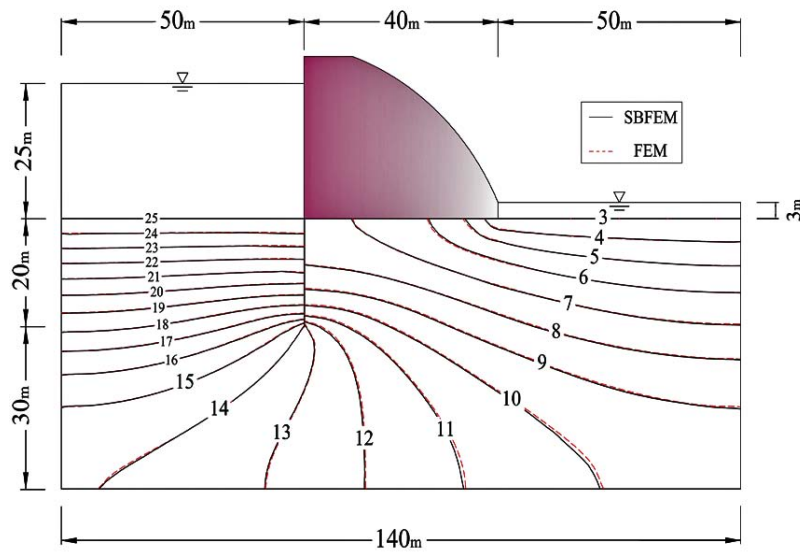


(ب)



(الف)

شکل ۱۶- مقایسه مقادیر سرعت جریان الف) در راستای خط ABCD ب) در راستای خط EFG



شکل ۱۷- مقایسه خطوط هم پتانسیل جریان حاصل از FEM و SBFEM

ریز به ترتیب برابر  $1/151 \times 10^{-4}$ ،  $1/201 \times 10^{-4}$ ،  $1/166 \times 10^{-4}$  و  $1/158 \times 10^{-4}$  است.

#### ۶- نتایج

در این مقاله برای حل مسائل تراوش محصور از یک روش جدید نیمه تحلیلی به نام اجزای محدود با مرز مقیاس شده استفاده شده است. در این روش فقط مرز مسئله مش بندی می شود که منجر به کاهش تعداد درجات آزادی می گردد. مسائل ناهمسان و ناهمگن که شرط تشابه را ارضاء کنند به راحتی قابل مدل سازی با این روش هستند. در این روش هندسه مسئله از دستگاه مختصات دکارتی به دستگاه مختصات با مرز مقیاس شده که دارای یک جهت شعاعی و یک جهت محیطی در راستای مرز مسئله است تبدیل می شود. تقریب اجزای محدود در جهت محیطی منجر به حل تحلیلی مسئله در جهت شعاعی می شود. حل یک مسئله با مقادیر ویژه منجر به محاسبه ماتریس سختی هر دامنه می شود. با اعمال شرایط مرزی، متغیر مسئله بر روی مرز و نهایتاً در داخل دامنه محاسبه می شود. در این تحقیق فرمول بندی روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده برای حل مسائل تراوش ارائه می شود. با توجه به مثالهای فوق و توضیحات ارائه شده می توان به

مرز مقیاس شده نزدیکتر می شود. با مراجعه به شکل (۱۶-ب) باز هم مشاهده می شود که در نواحی اطراف سپری، نتایج حاصل از دو روش تفاوت زیادی دارند و با ریزتر شدن مش تغییر چندانی در نتایج حاصل نمی شود. بنابراین در این مثال نیز دقت زیاد روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در برخورد با گوشه های تیز مشخص می شود. در این مثال به دلیل ناهمگنی دامنه محاسباتی، تاثیر ویژگی منحصر به فرد روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، یعنی عدم مش بندی وجوه کناری بارزتر از مثالهای قبلی است. با توجه به این ویژگی، مرز بین دو ماده ناهمگن به عنوان وجه کناری لحاظ شده و بنابراین پاسخ به دست آمده بر روی این مرز پاسخی دقیق اند (در نرم افزار اجزای محدود ژئواستودیو برای جلوگیری از ناپیوستگی مقادیر هد به دست آمده روی مرزهای بین دو خاک ناهمگن، غالباً خصوصیات مصالح در اطراف این مرز تغییر داده می شود). در شکل (۱۷) خطوط هم پتانسیل حاصل از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و روش اجزای محدود با مش ریز، با هم مقایسه شده و تطابق بسیار خوب نتایج مشاهده می شود. مقدار دبی عبوری از زیر سپری برای عرض واحد سپری بر حسب متر مکعب بر ثانیه، با استفاده از روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده و روش اجزای محدود با مشهای درشت، متوسط و



با توجه به نکته فوق و توجه به این نکته که سپری همانند گوشه تیز رفتار می‌کند، ضعف روش اجزای محدود در اطراف گوشه‌های تیز مشخص شده و دقت روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در مورد این‌گونه مسائل آشکار می‌شود.

روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، در مسائل شامل مصالح ناهمگن روشی بسیار دقیق است. در این روش با انتخاب مرکز قیاس در مرز بین مصالح ناهمگن، این مرز به عنوان وجه کناری لحاظ شده و مش‌بندی نمی‌شود، بنابراین پاسخ به‌دست آمده روی این مرز پاسخی دقیق است. از دیگر ویژگیهای مثبت روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده، امکان تحلیل جداگانه مرزها و حوزه داخلی مسئله است. در مسائلی که فقط نیاز به مقادیر مرزی داشته باشیم تاثیر این ویژگی در کاهش هزینه‌های محاسباتی کاملاً مشهود است.

وضوح مشاهده کرد که تعداد درجات آزادی در نظر گرفته شده در روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده در مقایسه با روش اجزای محدود بسیار کمتر بوده و بنابراین نه تنها آماده‌سازی اطلاعات اولیه برای این روش نیاز به زمان کمتری خواهد داشت بلکه هزینه محاسباتی نیز در روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده کمتر خواهد بود.

عدم نیاز روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده به حل انتگرالهای پیچیده علی‌رغم دقتی که در جهت شعاعی دارد، از جمله ویژگیهایی است که برتری این روش را نسبت به روش اجزای مرزی نشان می‌دهد. در مثالهای فوق دیده می‌شود که در اطراف سپری اختلاف بین مقادیر هد به دست آمده از دو روش، بیشتر از سایر نقاط است و با ریزتر کردن مش‌بندی در روش اجزای محدود نتایج این روش با نرخ بسیار پایین به نتایج روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده نزدیک می‌شوند.

## واژه نامه

1. finite-element method (FEM)
2. boundary element method (BEM)
3. finite-difference method (FDM)
4. reentrant corners
5. scaled boundary finite-element method (SBFEM)
6. scaling center
7. side faces
8. weighted residual method
9. Green's theorem
10. Galerkin
11. positive definite
12. Hamiltonian matrix
13. Matlab
14. Geo-Studio

## مراجع

1. Brebbia, C.A., and Chang, O.V., "Boundary Elements Applied to Seepage Problems in Zoned Anisotropic Soils," *Advances in Engineering software*, Vol. 1, pp. 95-105, 1979.
2. Tracy, F.T., and Radhakrishnan, N., "Automatic Generation of Seepage Flow Nets by Finite-Element Method," *Journal of Computing in civil engineering*, Vol. 3, No 3. pp. 268 – 284, 1989.
3. Fan, Y., and Tompkins, F.D., "Generation of Flow Nets Using F.E.M. Nodal Potentials and Bilinear Shape Functions," *International Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, Vol. 16, pp.425-437, 1992.
4. Chen, J.T., Hong, H.K., and Chyuanb, S.W., "Boundary Element Analysis and Design in Seepage Problems Using Dual Integral Formulation," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 17, pp.1-20, 1993.
5. Jie, Y., Jie, G., Mao, Z., and Li, G., "Seepage Analysis Based on Boundary-Fitted Coordinate Transformation Method," *Computers and Geotechnics*, Vol. 31, Issue 4, pp. 279-283, 2004.
6. Mukhopadhyay, S., "Seepage Analysis Through Foundation Using F.E.M. and Flownet," *International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics, (IACMAG)*, 2008.
7. Wolf, J.P., Song, Ch., *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*, John Wiley and Sons, (Chichester), 1996.
8. Song, Ch., and Wolf, J.P., "Body Loads in Scaled Boundary Finite-Element Method," *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 180, pp. 117-135, 1999.
9. Song, Ch., and Wolf, J.P., "The Scaled Boundary

- Finite-Element Method: Alias Consistent Infinitesimal Finite Element Cell Method for Elastodynamics,” *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 147, pp. 329–355, 1997.
10. Wolf, J.P., and Song, Ch., “The Scaled Boundary Finite-Element Method: a Fundamental-Solution-Less Boundary Element Method,” *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 190, pp. 5551–5568, 2001.
  11. Deeks, A.J., and Wolf, J.P., “A Virtual Work Derivation of the Scaled Boundary Finite-Element Method for Elastostatics,” *Computational Mechanics*, Vol. 28, pp. 489–504, 2002.
  12. Deeks, A.J., and Wolf, J.P., “Stress Recovery and Error Estimation for the Scaled Boundary Finite-Element Method,” *Computational Mechanics*, Vol. 54, pp. 557–583, 2002.
  13. Bazyar, M.H., and Song, Ch., “Time-Harmonic Response of Non-Homogeneous Elastic Unbounded Domains Using the Scaled Boundary-Finite-Element Method.” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 35, pp. 357-383, 2006.
  14. Bazyar, M.H., and Song, Ch., “A Continued-Fraction-Based High-Order Transmitting Boundary for Wave Propagation in Unbounded Domains of Arbitrary Geometry.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 209-237, 2008.
  15. Song, Ch., and Bazyar, M.H., “A Boundary Condition in Pade’ Series for Frequency-Domain Solution of Wave Propagation in Unbounded Domains,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, pp. 2330-2358, 2007
  16. Song, Ch., and Bazyar, M.H., “Development of a Fundamental Solution-Less Boundary Element Method for Exterior Wave Problems.” *Communications in Numerical Methods for Engineering*, Vol. 24, pp. 257-279, 2008.
  17. Deeks, A.J., and Cheng, L., “Potential Flow Around Obstacles using the Scaled Boundary Finite-Element Method,” *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, Vol. 28, pp. 721–741, 2003.
  18. Laub, A.J., “A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24, pp. 913–921, 1979.
  19. Lambe W. B., and Whitman, R. V., “*Soil Mechanics*,” Wiley, New York, 1969.

Archive of SID