

تحلیل حدی پی‌های نواری با استفاده از روش تعادلی بدون شبکه

امیر غلام پور و سید محمد بینش*

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۳/۰۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۰۹/۰۱)

چکیده -

واژگان کلیدی :

Limit analysis of strip footing using mesh-free equilibrium method

A.Gholampour and S.M.Binesh

Department of Civil and Environmental Engineering, Shiraz University of Technology

Abstract: *In this paper, a novel numerical approach is proposed for determination of a lower bound solution for the bearing capacity of strip footings. In this method, the geometry of problem is constructed by nodes and, there is no need for mesh in the traditional sense. The gradient of stress is smoothed piecemeal by the aid of the stabilized nodal integration technique and, the equilibrium and boundary conditions are fully satisfied at the entire domain consequently. The stress field is discretized by a mesh-free technique called Shepard's method. Due to the individual properties of Shepard's shape functions, the non-yielding condition is just controlled at the nodes. Putting the objective function and the related constraints together forms a mathematical optimization problem which is solved by a linear programming technique. At the end, the accuracy and efficiency of the proposed*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: smbinesh@yahoo.com

method is investigated by solving some examples for the cohesive soils with uniform and depth dependent shear strength, and the cohesive-frictional soil.

Keywords: limit analysis, mesh-free method, strip footing, bearing capacity

مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته در دامنه تکیه	K	سطح سلول ورونویی	A_L
گاهی نقطه		سطح سلول ورونویی مرزی	A_{LB}
تعداد ضلع‌های چند ضلعی تسلیم	P	نیروی حجمی	b_i
بار حدی	Q	بردار نیروهای حجمی	B_i
فشار سربار	q	نیروی حجمی واحد گره i در جهت ۱	b_{1i}
فاصله بین نقطه x و نقطه z	r_j	نیروی حجمی واحد گره i در جهت ۲	b_{2i}
طول ناحیه اعمال بارگذاری	S	عرض پی	B
مقاومت برشی زهکشی نشده	S_u	چسبندگی	C
بردار مقادیر گره‌ای مربوط به گره‌های مجاور	U_s	چسبندگی موثر	c'
نقطه x		مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته در دامنه‌ی تکیه گاهی نقطه (x_G, y_G)	K_G
نقطه ابتدایی ضلع مرزی Γ_k^D	x_q^D	مجموعه‌ای از نقاط واقع شده در دامنه‌ی تکیه گاهی یک گره مرزی	K_B
نقطه انتهایی ضلع مرزی Γ_k^D	x_q^{D+1}	طول Γ	L_D
عمق اندازه گرفته شده از سطح زمین	Z	تعداد کل گره‌های سازنده‌ی هندسه‌ی مسئله	M
علائم یونانی		تعداد کل ضلع‌های سلول ورونویی مربوط به گره q	N_s
توان مثبت موثر بر شکل تابع درونیابی	α	تعداد نقاط گاوس واقع شده در طول ناحیه S	N_G
تنش نرمال اعمال شده بر ناحیه بارگذاری در مرز	σ_{nf}	بردار واحد نرمال در جهت z	n_j
بردار تنش‌های گره‌ای	σ_i	طول مولفه‌های بردار نرمال وارد بر ضلع Γ_k^D در جهت ۱	n_1^D
تنش نرمال در نقطه i	$\sigma_n(x_i)$	طول مولفه‌های بردار نرمال وارد بر ضلع Γ_k^D در جهت ۲	n_2^D
تنش هموار شده	$\tilde{\sigma}_{ij}$	مقاومت برشی زهکشی نشده در سطح خاک	C_{u0}
مولفه‌های تانسور تنش	σ_{ij}	تابع بدون بعد بر حسب $\rho B / C_{u0}$	F
تنش‌های برشی	τ	ضخامت عمود بر صفحه	h
توابع شکل شپارد برای N گره محلی	Φ	تنش‌های نرمال	σ_n
زاویه اصطکاک خاک	ϕ		
مرز سلول ورونویی	Γ_L		
مرز سلول ورونویی مرزی	Γ_B		
تغییرات C نسبت به عمق	ρ		
وزن نقطه گاوس i	ω		

Ψ	تابع هموار کننده	Ω_L	دامنه سلول ورونوی
ϕ'	زاویه اصطکاک موثر		

۱- مقدمه

پیش‌بینی دقیق ظرفیت باربری پی‌های سطحی همواره به عنوان یکی از مباحث بنیادی در مهندسی ژئوتکنیک مطرح بوده و تحقیقات زیادی را به خود معطوف داشته است [۱-۸]. در این راستا، روش عددی تحلیل حدی که بار گسیختگی را به صورت مستقیم محاسبه می‌کند به عنوان یک گزینه‌ی مناسب مطرح است. این روش مبتنی بر نظریه خمیری^۵ کلاسیک حد پایین و حد بالاست که اولین بار توسط دراکر و همکاران [۹] ارائه شده است. روش تحلیل حدی عددی اولین بار توسط لیزمر [۱۰] در مسائل مکانیک خاک مورد استفاده قرار گرفت، به نحوی که جواب دقیق حد پایین با استفاده از ترکیب روش اجزای محدود و نظریه تحلیل حدی محاسبه شد. اگر چه روش لیزمر یک پیشرفت قابل توجه در زمینه استفاده از تحلیل حدی عددی در مسائل مکانیک خاک است. اما این روش مشکلاتی نیز به همراه دارد که از جمله آنها می‌توان به ساخت ماتریس قید با شرایط نامطلوب^۶، عدم توانایی ساخت میدان تنش کامل برای محیط نیمه بی‌نهایت و محدودیت‌های مربوط به ساخت شبکه اشاره کرد. پس از لیزمر، بوترو و همکاران [۱۱] با ارائه یک فرمول بندی جدید برای روش اجزای محدود از طریق نظریه تحلیل حدی به حل مسائل بار حدی در مکانیک خاک پرداختند. توسعه‌ی الگوریتم مجموعه فعال^۷ توسط اسلوان [۱۲] امکان ایجاد یک مدل‌سازی کارآمد را برای مسائل دوبعدی بزرگ مهیا ساخت. با استفاده از مزیت‌های تکنیک ارائه شده، اسلوان [۱۳] با به خدمت‌گیری فرمول بندی بوترو و همکاران [۱۱]، به تحلیل مسائل صفحه‌ای در مکانیک خاک پرداخت. تحقیقات متعدد دیگری نیز در دهه‌های گذشته با هدف بررسی کاربرد تحلیل حدی عددی در مسائل پایداری مربوط به مهندسی ژئوتکنیک

صورت گرفته است [۱۴-۱۸]. این در حالی است که تحقیقات اخیر، بیشتر در زمینه ارتقای الگوریتم بهینه‌سازی و کاهش مراحل محاسباتی در تحلیل حدی بوده است [۱۹ و ۲۰]. تا به امروز، روش‌های مبتنی بر شبکه بندی مانند روش اجزای محدود و روش اجزای مرزی به همراه مسئله بهینه‌سازی برای محاسبه‌ی جواب حد پایین و حد بالای مسائل مختلف مکانیک خاک استفاده شده است. این در حالی است که این روش‌ها از مشکلات متعددی که عمده‌ی آنها مربوط به تعریف شبکه بندی برای محیط‌اند، رنج می‌برند. استفاده از روش‌های بدون شبکه به عنوان ابزار مجزا کننده محیط یک راه حل کلیدی برای رهایی از این مشکلات محسوب می‌شوند. با وجود استفاده از روش‌های بدون شبکه در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی [۲۱-۲۴]، تعداد اندکی از تحقیقات، به استفاده از این روش‌ها در تحلیل حدی عددی معطوف شده است [۲۵-۲۹]. بر اساس اطلاعات نویسندگان مقاله هیچگونه مطالعه‌ای در زمینه به‌کارگیری روش‌های بدون شبکه در تحلیل حدی عددی مسائل پایداری در مکانیک خاک صورت نگرفته و نیز در هیچ یک از تحقیقاتی که از روش‌های بدون شبکه در تحلیل حدی استفاده شده است، جواب دقیق حد بالا یا حد پایین ارائه نشده است. این امر سبب شد که در این مقاله، نویسندگان به بررسی استفاده از روش‌های بدون شبکه برای محاسبه جواب دقیق حد پایین تحلیل حدی در یکی از مسائل پایداری مکانیک خاک (یعنی ظرفیت باربری) پردازند. این تکنیک برای تحلیل پایداری سایر سازه‌های خاکی نظیر دیوارهای حایل، شیب‌ها، خاک‌های مسلح و ... نیز قابل استفاده است. در روش ارائه شده در این مقاله، تابع شکل شپارد [۳۰] به همراه یک روش هموارسازی که برگرفته از مفهوم

سبب می شود شرایط مرزی به راحتی به مسئله اعمال شوند و ویژگی دوم آن است که مقادیر درونیابی شده توسط روش شپارد همیشه بین مقادیر گره‌ای حداقل و حداکثر استفاده شده برای درونیابی، قرار می گیرند. ویژگی دوم که از اهمیت بیشتری نیز برخوردار است، در جهت اعمال شرط تسلیم در بحث حد پایین تحلیل حدی که مربوط به عدم تجاوز تنش از معیار تسلیم در تمامی نقاط دامنه‌ی مسئله می شود، بسیار مفید است. در ادامه‌ی این بخش توضیحات مختصری در رابطه با تشکیل تابع شکل شپارد داده شده است و کاربرد آن در بخش‌های بعدی ارائه خواهد شد.

با فرض قرارگیری N گره در دامنه تکیه گاهی نقطه x و فرض مشخص بودن مقادیر تابع پیوسته u در گره‌ها (یعنی $u_1 = u(x_1)$ ، $u_2 = u(x_2)$ و ...) تابع پیوسته درونیابی شده توسط روش شپارد به صورت زیر بیان می شود [۳۰]:

(۱)

$$u(x) = \frac{u_1 \times (r_2^\alpha \times r_3^\alpha \times \dots \times r_N^\alpha) + u_2 \times (r_1^\alpha \times r_3^\alpha \times r_4^\alpha \times \dots \times r_N^\alpha)}{(r_2^\alpha \times r_3^\alpha \times \dots \times r_N^\alpha) + (r_1^\alpha \times r_3^\alpha \times r_4^\alpha \times \dots \times r_N^\alpha)} + \dots + \frac{u_N \times (r_1^\alpha \times r_2^\alpha \times \dots \times r_{N-2}^\alpha \times r_{N-1}^\alpha)}{r_1^\alpha \times r_2^\alpha \times \dots \times r_{N-2}^\alpha \times r_{N-1}^\alpha}$$

یا به شکل مختصر:

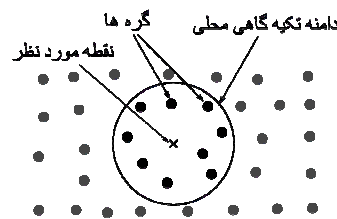
$$u(x) = \frac{\sum_{i=1}^N u_i \left(\prod_{j \neq i} r_j^\alpha \right)}{\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} r_j^\alpha} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

در معادله (۲)، r_j فاصله بین نقطه x و نقطه j است که در فضای دو بعدی به صورت زیر نوشته می شود:

$$r_j = \left[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

و α توان مثبتی است که بر شکل تابع درونیابی شده تاثیر گذار است. گوردن و ویکسوم [۳۱] مقدار $\alpha > 1$ را برای هموار بودن تابع درونیابی پیشنهاد می کنند. معادله (۲) می تواند به شکل ماتریسی زیر بازنویسی شود:

$$u(x) = \Phi \cdot U_S \quad (4)$$



شکل ۱- دامنه‌ی تکیه گاهی یک نقطه مشخص

انتگرال گیری گره‌ای است، به منظور ساخت یک میدان تنش مجاز استاتیکی^۸ استفاده شده است. میدان ساخته شده، از طریق اعمال شرایط عدم تجاوز تنش از سطح تسلیم در تمامی نقاط دامنه، به لحاظ خمیری نیز مجاز^۹ می شود. در انتهای مقاله نیز با حل چندین مثال صحت و دقت روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- روش بدون شبکه شپارد

همان طور که اشاره شد، در این مقاله یکی از انواع روش‌های بدون شبکه برای تحلیل مسئله‌ی ظرفیت باربری خاک به خدمت گرفته شده است. در روش‌های بدون شبکه برخلاف روش‌های مرسوم نیازی به ساخت شبکه نبوده و هندسه‌ی مسئله با تعریف گره‌هایی در دامنه آن تشکیل می شود، ارتباط بین گره‌ها نیز از طریق ایجاد دامنه تکیه گاهی محلی^{۱۰} در اطراف هر گره تامین می شود. مجموعه محدودی از گره‌ها در مجاورت یک نقطه، دامنه تکیه گاهی محلی آن نقطه نامیده می شود، شکل (۱). در روش‌های بدون شبکه تکنیک‌های مختلفی می توانند برای درونیابی^{۱۱} (یا تقریب^{۱۲}) یک متغیر میدانی به وسیله مقادیر گره‌ای در دامنه تکیه گاهی محلی استفاده شوند. در این جا از روش شپارد به منظور درونیابی تنش به عنوان متغیر میدانی^{۱۳} استفاده شده است. روش شپارد دارای دو ویژگی منحصر به فرد است [۳۱] که از دلایل اصلی انتخاب آن به عنوان روش درونیابی در این مقاله است. ویژگی اول اینکه توابع شکل ساخته شده به وسیله روش شپارد دارای خاصیت تابع دلتای کرانیکر^{۱۴} هستند که

۳-۱ ارضای معادلات تعادل

شکل کلی معادلات تعادل در شرایط کرنش صفحه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (8)$$

که در آن σ_{ij} و b_i به ترتیب مولفه‌های تانسور تنش و نیروی حجمی هستند. معادله (۸) باید در تمامی نقاط دامنه مسئله ارضا شود. باید توجه داشت که تنها تعداد محدودی از گره‌ها برای شبیه‌سازی هندسه‌ی دامنه استفاده شده‌اند و ارضای معادله (۸) در این نقاط مشخص، ارضای تعادل در همه‌ی نقاط دامنه را تضمین نمی‌کند. از این رو، یک سلول ورونویی^{۱۵} اطراف هر گره ساخته می‌شود، شکل (۲) و مشتق تنش در سراسر سلول به صورت زیر هموار می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = \iint_{\Omega_L} \Psi \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \quad (9)$$

به طوری که $\bar{\sigma}_{ij}$ ، Ψ و Ω_L به ترتیب تنش هموار شده، تابع هموار کننده و دامنه‌ی سلول‌اند. مطابق مطالعات چن و همکاران [۳۲] تابع هموار کننده می‌تواند به صورت زیر انتخاب شود:

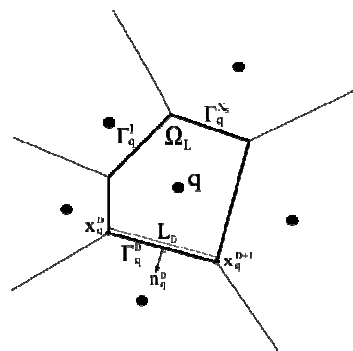
$$\Psi = \begin{cases} \frac{1}{A_L} & x \in A_L \\ 0 & x \notin A_L \end{cases} \quad (10)$$

که در آن A_L سطح سلول ورونویی است. با استفاده از تئوری دیورژانس^{۱۶} معادله (۹) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (11)$$

در معادله (۱۱)، Γ_L مرز سلول ورونویی و n_j بردار واحد نرمال در جهت j است. با جاگذاری معادله (۱۱) در معادله (۸) معادله تعادل برای مشتق هموار شده تنش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \sigma_{ij} n_j d\Gamma + b_i = 0 \quad (12)$$



شکل ۲- سلول ورونویی اطراف گره q

که

$$U_s = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \quad (5)$$

بردار مقادیر گره‌ای مربوط به گره‌های مجاور نقطه x و

$$\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)] \quad (6)$$

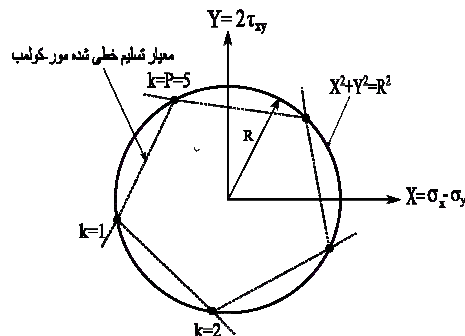
توابع شکل شپارد برای N گره محلی است که $\Phi_i(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Phi_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} r_j^\alpha}{\sum_{k=1}^N \prod_{j \neq k} r_j^\alpha} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

۳- ملزومات حد پایین تحلیل حدی

نظریه حد پایین تحلیل حدی بیان می‌کند که بار گسیختگی به دست آمده از هر میدان تنش استاتیکی و خمیری مجاز، یک برآورد کمتر از بار گسیختگی واقعی ارائه می‌دهد [۹]. میدان تنشی استاتیکی مجاز محسوب می‌شود که تعادل و شرایط مرزی را به طور کامل ارضا کند و این میدان به لحاظ خمیری مجاز است اگر وضعیت تنش در هیچ نقطه‌ای از آن از معیار تسلیم تجاوز نکند [۱۱]. بنابراین در این بخش ابتدا روش‌های استفاده شده برای ارضای تعادل و شرایط مرزی توضیح داده خواهد شد و سپس معیار تسلیم انتخابی شرح داده می‌شود.

اینکه توابع شکل مورد استفاده دارای خاصیت تابع دلتای کرانیکر هستند، مقادیر تنش به راحتی به گره‌های مرزی اعمال شده و در نتیجه شرایط مرزی به طور کامل ارضا می‌شوند.



شکل ۳- معیار مور- کولمب خطی شده

۳-۳- شرط تسلیم

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در میدان‌های تنش که به لحاظ خمیری مجازند، وضعیت تنش در هیچ نقطه‌ای از دامنه مسئله از معیار تسلیم تجاوز نمی‌کند. از طرفی، در روش شپارد مقادیر درون‌یابی شده (یعنی تنش‌ها) همیشه بین ماکزیمم و مینیمم مقادیر گره‌ای باقی می‌مانند. در نتیجه کافی است که شرط تسلیم تنها در گره‌ها کنترل شود و این بحث، دقیق بودن جواب حد پایین توسط روش ارائه شده را تضمین می‌کند. از طرف دیگر، تعریف تابع تسلیم، با تکنیک مورد استفاده در روند بهینه‌سازی رابطه‌ی مستقیم دارد. در این مقاله، به علت سادگی روش و سهولت ایجاد همگرایی، از روش بهینه‌سازی خطی استفاده شده است. برای اطمینان از اینکه فرمول بندی عددی حد پایین، یک مسئله بهینه‌سازی خطی را ایجاد کند، لازم است که معیار تسلیم با یک تابع خطی از تنش‌های گره‌ای تقریب زده شود.

با در نظر گرفتن معیار گسیختگی مور-کولمب^{۱۷} تابع تسلیم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (2\sigma_{12})^2 - (2C \cos \phi - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \phi)^2 \quad (15)$$

به طوری که، C و ϕ به ترتیب چسبندگی و زاویه اصطکاک خاک‌اند. شرط لازم برای مجاز بودن میدان تنش به لحاظ خمیری آن است که:

$$F \leq 0 \quad (16)$$

معادله (۱۶) باید در تمامی نقاط دامنه‌ی مسئله ارضا شود. در واقع این معادله، مکان هندسی نقاط قرار گرفته بر روی محیط و داخل یک دایره در صفحه $X-Y$ است که $X = \sigma_{11} - \sigma_{22}$ و $Y = 2\sigma_{12}$. این دایره توسط یک چند ضلعی با تعداد P ضلع تقریب زده می‌شود، شکل (۳). چند ضلعی ساخته شده

با ارضای معادله (۱۲) در گره‌های از پیش تعریف شده، شرط تعادل به طور کامل در کل دامنه ارضا خواهد شد.

۳-۲- ارضای شرایط مرزی

در حد پایین تحلیل حدی، شرایط مرزی به صورت تنش‌های مرزی از قبل مشخص شده است، بنابراین با استفاده از روشی مشابه تکنیک بحث شده در بخش (۳-۱) می‌توان به ارضای شرایط مرزی پرداخت. فرض کنید شرایط مرزی در طول لبه قرار گرفته در جهت z به صورت زیر باشد:

$$\tau = \text{ثابت} \quad \text{یا} \quad \sigma_n = \text{ثابت} \quad (13)$$

که τ و σ_n به ترتیب تنش‌های نرمال و برشی در طول لبه مرزی‌اند. در این حالت مشتق تنش در جهت z در هر سلول ورونوی مرزی برابر صفر قرار داده می‌شود و بر اساس معادله (۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial x_j} = \frac{1}{A_{LB} \Gamma_B} \int \sigma_n n_j d\Gamma = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j} = \frac{1}{A_{LB} \Gamma_B} \int \tau n_j d\Gamma = 0$$

که A_{LB} و Γ_B مربوط به سلول ورونوی گره مرزی‌اند. معادله (۱۴) بیان می‌کند که مقدار تنش در جهت z در سلول ورونوی مرزی ثابت است. بنابراین مقادیر تنش اعمال شده به گره مرزی به بخشی از لبه که مربوط به سلول ورونوی گره مرزی مورد نظر است، نسبت داده می‌شود. با ثابت بودن تنش در راستای z در سلول‌های ورونوی مرزی، و با توجه به

تنش گره‌ای از طریق جاگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{z \in K} \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \Phi_z(x) n_j \sigma_{ij}(x_z) d\Gamma + b_i = 0 \quad (20)$$

با ارضای معادله (۲۰) در تمامی سلول‌های ورونویی، به شکل ماتریسی زیر دست می‌یابیم:

$$A_{eq} \sigma = B_{eq} \quad (21)$$

که

$$A_{eq} = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_M]^T \quad (22)$$

$$B_{eq} = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_M]^T \quad (23)$$

$$\sigma = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_M]^T \quad (24)$$

در معادلات بالا، M تعداد کل گره‌های سازنده هندسه‌ی مسئله می‌باشد. در شرایط کرنش صفحه‌ای بردار تنش‌های گره‌ای (σ_i) و نیروهای حجمی (B_i) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\sigma_i = [\sigma_{11}(x_i) \quad \sigma_{22}(x_i) \quad \sigma_{12}(x_i)]^T \quad (25)$$

$$B_i = [b_{1i} \quad b_{2i}]^T \quad (26)$$

که b_{1i} و b_{2i} به ترتیب نیروی حجمی وارد بر گره i در جهت ۱ و ۲ هستند. ساخت ماتریس‌های A_1 تا A_M به تعداد گره‌های قرار گرفته در دامنه‌ی تکیه گاهی گره‌های ۱ تا M بستگی دارند. با فرض اینکه گره‌های s و t در دامنه تکیه گاهی گره i قرار گرفته‌اند، ماتریس A_i به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_i = [0 \dots \bar{A}_r^e \dots \bar{A}_s^e \dots \bar{A}_t^e \dots 0] \quad (27)$$

که

$$\bar{A}_m^e = \begin{bmatrix} A_{m1}^e & 0 & A_{m2}^e \\ 0 & A_{m2}^e & A_{m1}^e \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$A_{m1}^e = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma} \Phi_m(x) n_1 d\Gamma \quad (29)$$

$$A_{m2}^e = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma} \Phi_m(x) n_2 d\Gamma$$

به عنوان تابع تسلیم (یعنی F) مورد استفاده قرار می‌گیرد و معادله (۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_K \sigma_{11} + B_K \sigma_{22} + C_K \sigma_{12} \leq D \quad (17)$$

$$K = 1, 2, \dots, P$$

که

$$A_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{P}\right) + \sin\phi \cos\left(\frac{\pi}{P}\right)$$

$$B_k = \sin\phi \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{P}\right) \quad (18)$$

$$C_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi k}{P}\right)$$

$$D = 2C \cos\phi \cos\left(\frac{\pi}{P}\right)$$

معادله (۱۷) شکل خطی شده معیار مور-کولمب است و می‌تواند در الگوریتم برنامه ریزی خطی مورد استفاده قرار گیرد.

۴- فرمول‌بندی مجزا شده برای نظریه حد پایین

در بحث تحلیل حدی عددی، میدان تنش باید به مقادیر تنش گره‌ای مجزا سازی شود. در اینجا روش بدون شبکه شپارد برای مجزا سازی مسئله مورد استفاده قرار گرفته است. بر اساس معادله (۴) مقادیر تنش در هر نقطه‌ای مانند x می‌تواند توسط معادله زیر به مقادیر تنش گره‌ای نسبت داده شود:

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{z \in K} \Phi_z(x) \sigma_{ij}(x_z) \quad (19)$$

در معادله (۱۹)، $\sigma_{ij}(x)$ مقدار تنش در مختصات فضایی x ، $\Phi_z(x)$ تابع شکل تعریف شده با معادله (۷) و $\sigma_{ij}(x_z)$ مقدار تنش گره‌ای در مختصات فضایی x_z هستند. K نیز مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته در دامنه تکیه گاهی نقطه x است. فرمول بندی مجزا شده برای حد پایین تحلیل حدی با ترکیب میدان تنش مجزا شده با شرایط مورد نیاز برای ایجاد میدان تنش مجاز استاتیکی و خمیری، حاصل می‌شود.

۴-۱- مجزا سازی شکل معادلات تعادل

برای به دست آوردن شکل مجزا شده‌ی معادلات تعادل در سراسر دامنه، روابطی بین مشتق هموار شده‌ی تنش و مقادیر

$$A_{b2}\sigma = B_{b2} \quad (33)$$

که در معادله فوق A_{b2} ماتریس ضرایب و B_{b2} بردار مرتبط با مقادیر مشخص تنش‌ها در طول مرز است. شکل مجزا شده‌ی معادلات مربوط به ارضای شرایط مرزی با ترکیب معادله‌های (۳۲) و (۳۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_{b0}\sigma = B_{b0} \quad (34)$$

که

$$A_{b0} = A_{b1} + A_{b2}, \quad B_{b0} = B_{b2} \quad (35)$$

۴-۳- شکل مجزا شده‌ی معادلات برای ارضای شرط

تسلیم

معیار خطی شده مور-کولمب به منظور ایجاد شکل مجزا شده‌ی معادلات برای شرط تسلیم به کار می‌رود. با توجه به معادله (۱۷)، قیود لازم برای اعمال شرط عدم تسلیم به تمامی گره‌ها به شکل ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$A_{yi}\sigma \leq B_{yi} \quad (36)$$

که

$$A_{yi} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_M^y \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$B_{yi} = [\tilde{B}_1^y \quad \tilde{B}_2^y \quad \dots \quad \tilde{B}_M^y]^T$$

$$\tilde{A}_k^y = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ M & M & M \\ A_P & B_P & C_P \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$(\tilde{B}_k^y)^T = [D \quad D \quad \dots \quad D]_{1 \times P}$$

پارامترهای موجود در معادله (۳۸) در بخش (۳-۳) توضیح داده شده‌اند.

۵- تابع هدف

مسائل مختلف با توجه به فیزیک مسئله، توابع هدف مختلفی دارند. در مسائل ظرفیت باربری پی، یک بار گذاری

به منظور محاسبه A_{m1}^e و A_{m2}^e از هر تکنیک انتگرال گیری عددی می‌توان استفاده کرد. در اینجا با استفاده از قانون دو نقطه دوزنقه ای^{۱۸} برای هر قطعه در شکل (۲)، A_{m1}^e و A_{m2}^e به صورت زیر محاسبه شده است:

$$A_{m1}^e = \frac{1}{A_L} \sum_{D=1}^{N_s} \left[\Phi_m(x_q^D) n_1^D \frac{L_D}{2} + \Phi_m(x_q^{D+1}) n_1^D \frac{L_D}{2} \right] \quad (30)$$

$$A_{m2}^e = \frac{1}{A_L} \sum_{D=1}^{N_s} \left[\Phi_m(x_q^D) n_2^D \frac{L_D}{2} + \Phi_m(x_q^{D+1}) n_2^D \frac{L_D}{2} \right]$$

که در این معادلات، N_s تعداد کل ضلع‌های سلول وروئویی مربوط به گره q ، x_q^D و x_q^{D+1} دو نقطه انتهایی ضلع مرزی Γ_k^D و L_D طول Γ_k^D هستند. n_1^D و n_2^D نیز به ترتیب طول مولفه‌های بردار نرمال وارد بر ضلع Γ_k^D در جهت ۱ و ۲ هستند.

۴-۲- فرمول بندی مجزا شده برای شرایط مرزی

همان‌طور که در بخش (۲-۳) اشاره شد، معادلات (۱۳) و (۱۴) باید در تمامی نقاط مرزی ارضا شوند. با جاگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۴) خواهیم داشت:

$$\sum_{z \in K_B} \frac{1}{A_{LB}} \int_{\Gamma_B} \Phi_z(x) n_j \sigma_n(x_z) d\Gamma = 0 \quad (31)$$

$$\sum_{z \in K_B} \frac{1}{A_{LB}} \int_{\Gamma_B} \Phi_z(x) n_j \tau(x_z) d\Gamma = 0$$

که K_B ، مجموعه‌ای از نقاط واقع در دامنه‌ی تکیه گاهی یک گره مرزی بوده و A_{LB} ناحیه مربوط به سلول وروئویی مرزی است. Γ_B نیز در سلول وروئویی مرزی محاسبه می‌شود. معادله (۳۱) برای تمامی گره‌های مرزی نوشته شده و سیستم معادلات به دست آمده در شکل ماتریسی به صورت زیر است:

$$A_{b1}\sigma = 0 \quad (32)$$

که A_{b1} ماتریس ضرایبی است که از اعمال معادله (۳۱) به سلول‌های وروئویی مرزی مسئله به دست می‌آید. با توجه به ارضای معادله (۳۱) در سلول‌های مرزی، کافی است که معادله (۱۳) تنها در گره‌های مرزی اعمال شود و لذا در شکل ماتریسی داریم:

است که با معادله (۲۴) تعریف می‌شود.

۶- مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

استفاده از تابع هدف با در نظر گرفتن قيود لازم، مسئله‌ی محاسبه‌ی میدان تنش مجاز استاتیکی و خمیری را به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی خطی، به صورت زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & -C^T \sigma \\ \text{Subjected to:} \quad & A_{\text{tot}} \sigma = B_{\text{tot}} \\ & A_{yi} \sigma \leq B_{yi} \end{aligned} \quad (43)$$

که

$$A_{\text{tot}} = A_{\text{eq}} + A_{\text{bo}} \quad , \quad B_{\text{tot}} = B_{\text{eq}} + B_{\text{bo}} \quad (44)$$

همه پارامترها، در بخش‌های قبل شرح داده شده‌اند.

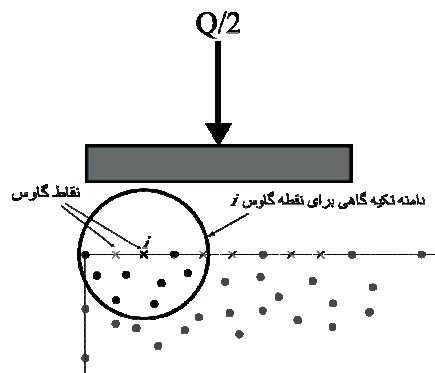
بهینه‌سازی خطی مورد نیاز با استفاده از دستور LINPROG که یک برنامه‌کتابخانه‌ای موجود در MATLAB است، انجام شده است.

۷- نتایج عددی

در این بخش به منظور ارزیابی روش ارائه شده در این مقاله، تعدادی از مسائل ظرفیت باربری که دارای جواب دقیق‌اند مورد بررسی قرار گرفته است. روش مطرح شده در این مقاله برای خاک‌های کاملاً چسبنده، خاک‌هایی با چسبندگی متغیر با عمق و خاک‌های چسبنده-اصطکاکی مورد بررسی قرار گرفته است. در تمامی مثال‌های حل شده از یک چند ضلعی با ۲۱ ضلع برای تقریب خطی معیار مور-کولمب استفاده شده است. همچنین دامنه تکیه گاهی در اطراف هر گره به صورت هوشمند انتخاب می‌شود. به این ترتیب که شعاع دایره دامنه تکیه گاهی به نحوی تنظیم می‌شود که تعداد گره‌های کافی و مناسب در داخل هر دامنه تکیه گاهی برای ساخت توابع شکل قرار گیرد.

۷-۱- بارگذاری زهکشی نشده توسط پی نواری

پرنلد [33] برای این مسئله جواب دقیق را به شکل



شکل ۴- دامنه‌ی تکیه گاهی یک نقطه‌ی گوس زیر ناحیه بارگذاری

پیوسته نرمال در قسمتی از مرز زیر پی، در نظر گرفته می‌شود، شکل (۴). تابع هدف در چنین مسائلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = h \int_S \sigma_{nf} dS \quad (39)$$

که Q بار حدی، h ضخامت عمود بر صفحه، σ_{nf} تنش نرمال اعمال شده بر ناحیه بارگذاری در مرز و S طول ناحیه اعمال بارگذاری است. با استفاده از روش گوس^۹، معادله (۳۹) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$Q = h \sum_{i=1}^{N_G} \omega_i \sigma_{nf}(x_G, y_G) \quad (40)$$

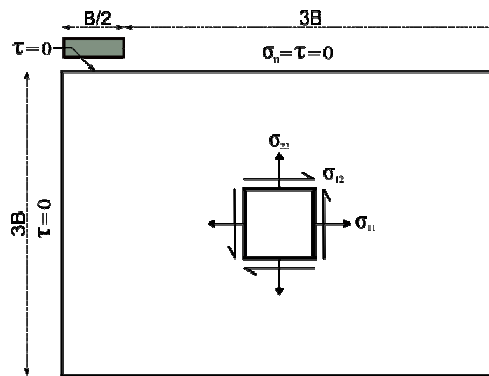
که N_G تعداد نقاط گوس واقع شده در طول ناحیه S ، ω_i وزن نقطه گوس i و (x_G, y_G) مختصات نقطه گوس در فضای (x, y) است. برای محاسبه مقدار σ_{nf} در معادله (۴۰) یک دامنه تکیه گاهی در اطراف هر نقطه گوس فرض می‌شود، شکل (۴). با توجه به معادله (۴) تنش نرمال در هر نقطه گوس به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\sigma_{nf}(x_G, y_G) = \sum_{i \in K_G} \Phi_i \sigma_n(x_i) \quad (41)$$

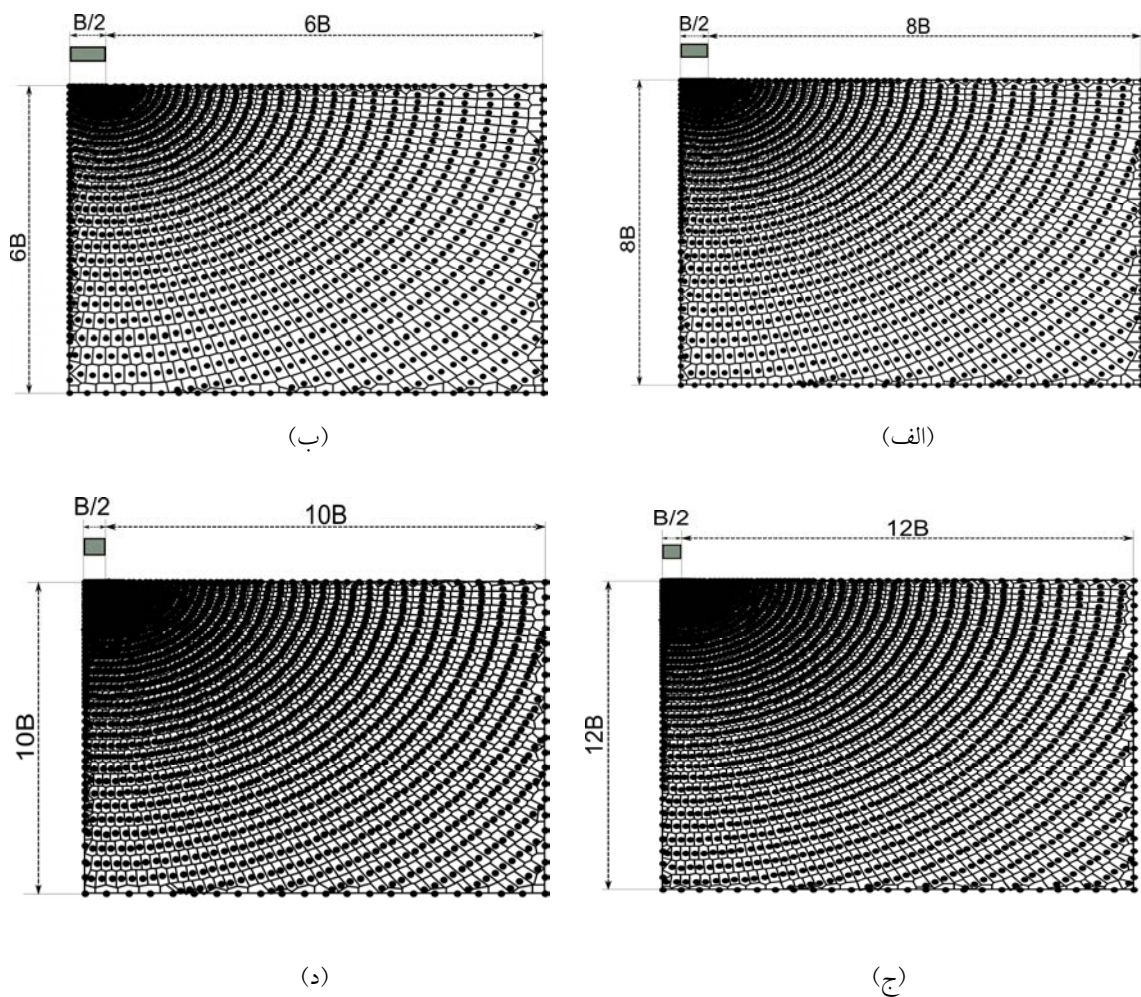
که K_G مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته در دامنه تکیه گاهی نقطه (x_G, y_G) و $\sigma_n(x_i)$ تنش نرمال در نقطه i است. با جاگذاری معادله (۴۱) در معادله (۴۰) خواهیم داشت:

$$Q = C^T \sigma \quad (42)$$

که C بردار ضرایب می‌باشد و σ بردار تنش‌های گره‌ای



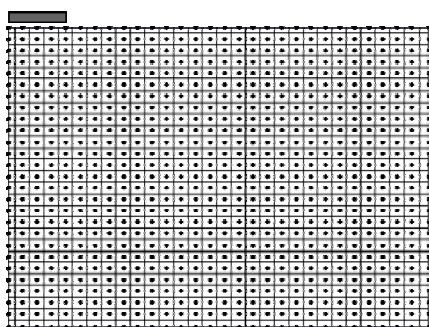
شکل ۵-هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی



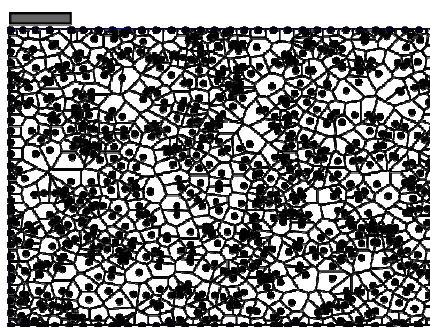
شکل ۶- مدل‌های بدون شبکه با (الف) ۱۹۶، (ب) ۳۷۹ و (ج) ۷۲۶ گره به همراه نمودار ورونویی آنها

جدول ۱- نتایج تحلیل همگرایی برای مدل‌های بدون شبکه در خاک چسبنده با مقاومت برشی ثابت نسبت به عمق

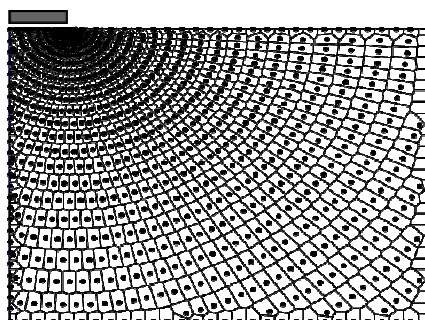
تراکم کم (الف)	تراکم متوسط (ب)	تراکم زیاد (ج)	آرایش یکنواخت
۱۹۶	۳۷۹	۷۲۶	تعداد گره‌ها
۰/۵	۰/۳۵	۰/۲۵	فاصله گره‌ها (متر)
۳/۱۴۰۰	۴/۳۵۱۱	۴/۶۷۸۴	جواب محاسبه شده حد پایین



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۷- مدل‌های بدون شبکه برای آرایش (الف) یکنواخت، (ب) تصادفی و (ج) پره

بررسی قرار گرفته است. فاصله بین گره‌ها نیز به ترتیب ۰/۵، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ متر است. مطابق جدول (۱) تمامی نتایج به دست آمده کمتر از جواب دقیق‌اند و با کاهش فاصله بین گره‌ها (یعنی افزایش تعداد گره‌ها) دقت جواب‌ها افزایش پیدا می‌کند.

به کارگیری تکنیک بدون شبکه شپارد ما را قادر می‌سازد که آرایش نقاط درون دامنه‌ی مسئله را به راحتی تغییر دهیم و این خاصیت می‌تواند برای انجام تحلیل انطباقی^۲ بسیار مفید باشد. در روش تحلیل حدی با استفاده از اجزای محدود،

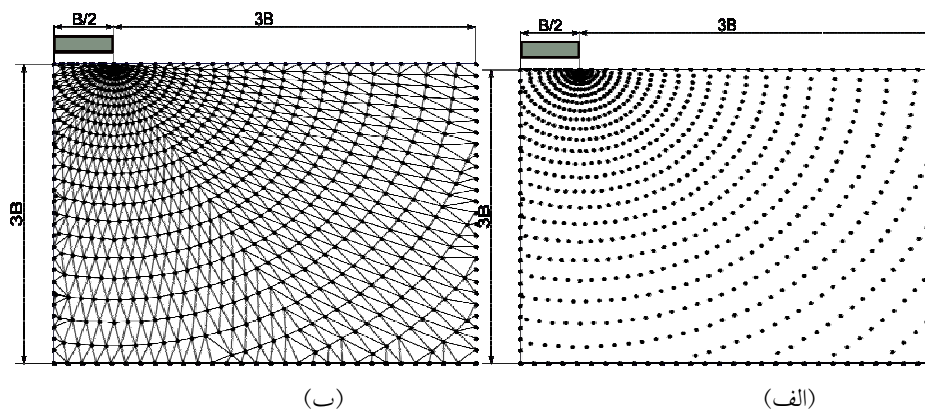
$q_f = N_c S_{II}$ ارائه کرده است. در این معادله S_{II} مقاومت برشی زهکشی نشده و $N_c = 2 + \pi$. با فرض $S_{II} = 1$ مقدار دقیق بار گسیختگی برابر ۵/۱۴ خواهد بود. شکل (۵) هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی موجود را نشان می‌دهد که به دلیل تقارن تنها نصف هندسه مدل سازی شده است.

ابتدا لازم است که همگرایی روش ارائه شده بررسی شود. به عبارت دیگر، باید نشان داده شود که با افزایش چگالی نقاط دقت نتایج بهتر می‌شود. در این راستا، سه مدل بدون شبکه مطابق شکل (۶) با تعداد ۱۹۶، ۳۷۹ و ۷۲۶ گره مورد

جدول ۲- نتایج تحلیل برای آرایش مختلف گره های مدل های بدون شبکه در خاک چسبنده با مقاومت

برشی ثابت نسبت به عمق

پره	تصادفی	یکنواخت	آرایش
۸۲۰	۸۲۰	۸۱۹	تعداد گره ها
۵/۰۶۰۷	۴/۱۳۷۰	۴/۷۴۴۵	بار گسیختگی محاسبه شده



شکل ۸- (الف) مدل بدون شبکه (ب)، مدل اجزای محدود

با دقت بالا در آرایش به شکل پره در شکل (۷-ج) را می توان به تراکم گره ها در ناحیه تمرکز تنش و سازگاری وضعیت آرایشی گره ها با چرخش جهت تنش های اصلی در اطراف نقطه منفرد نسبت داد.

در قسمت پایانی این مثال، لازم است مقایسه ای بین روش پیشنهادی در مقاله حاضر و روش تحلیل حدی بر پایه اجزای محدود صورت گیرد. برای این منظور یک مدل بدون شبکه با آرایش شعاعی گره ها شکل (۸-الف) و متناظر با آن یک مدل اجزای محدود شکل (۸-ب) در نظر گرفته شده اند. شایان ذکر است که در مدل اجزای محدود، رئوس اجزا همان موقعیت گره ها در روش بدون شبکه را دارا هستند. مقایسه بین دو روش در جدول (۳) ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود با وجود دقت یکسان برای جواب های به دست آمده توسط دو روش، تعداد قیودی که توسط روش تحلیل حدی بر پایه اجزای محدود به مسئله ی

نشان داده شد که آرایش اجزا در دقت جواب بسیار تاثیر گذار است [۳۴ و ۳۵]. در این جا برای بررسی تاثیر آرایش گره ها در دقت جواب ها، سه مدل با تعداد تقریباً مساوی گره ها بررسی شده است شکل (۷). در این مدل ها آرایش یکنواخت، تصادفی و پره برای گره ها در نظر گرفته شده و نتایج تحلیل در جدول (۲) آورده شده است. با توجه به جدول (۲)، نتایج به دست آمده همگی کمتر از مقدار واقعی بار گسیختگی هستند، اما دقت نتایج برای آرایش های مختلف متفاوت است. آرایش تصادفی برای گره ها سبب کاهش دقت در نتایج شده، این در حالی است که آرایش پره به طور قابل توجهی دقت نتایج را افزایش داده است (یعنی حدود ۱/۵٪ کمتر از جواب دقیق). چندین آرایش پره آزمایشی با در نظر گرفتن موقعیت های مختلف برای مرکز پره بررسی شده است و بهترین نتایج برای آرایشی به دست آمده است که مرکز پره در نقطه منفرد قرار گرفته است، شکل (۷-ج). علت یافتن جواب

جدول ۳- مقایسه روش‌های بدون شبکه حدی و اجزای محدود حدی

روش بدون شبکه حدی	روش اجزای محدود حدی	
۸۲۰	۴۵۵۷	تعداد گره‌ها
۰	۱۵۱۹	تعداد اجزا
۱۶۴۰	۳۰۳۸	قید های مربوط به تعادل
۱۸۴	۱۷۶	قید های شرایط مرزی
۰	۸۸۸۰	قید های نا پیوستگی
۱۷۲۲۰	۹۵۶۹۷	قید های شرط تسلیم
۱۹۰۴۶	۱۰۷۷۹۱	مجموع کل قیدها
۵/۰۶۰۷	۵/۰۵۹۰	بهترین جواب حد پایین

بوکر [۳۶] به صورت زیر ارائه شده است:

$$q_f = F[(2 + \pi)C_{u0} + \rho B / 4] \quad (45)$$

در این معادله، C_{u0} مقاومت برشی زهکشی نشده در سطح خاک، ρ تغییرات C نسبت به عمق (یعنی $\rho = dC_u / dz$)، Z ، عمق اندازه گرفته شده از سطح زمین و B عرض پی است. فاکتور F یک تابع بدون بعد بر حسب $\rho B / C_{u0}$ است و برای پی‌های صاف و زیر دارای مقدار متفاوتی است. در این‌جا با انتخاب $\rho B / C_{u0} = 3$ و $C_{u0} = 1$ ، مقدار F برای یک پی صاف برابر $1/22$ در نظر گرفته شده است [۱۳]. با توجه به مقادیر پارامترها و جاگذاری آن‌ها در معادله (۴۵)، مقدار دقیق ظرفیت باربری پی نواری برابر $7/18$ به دست می‌آید.

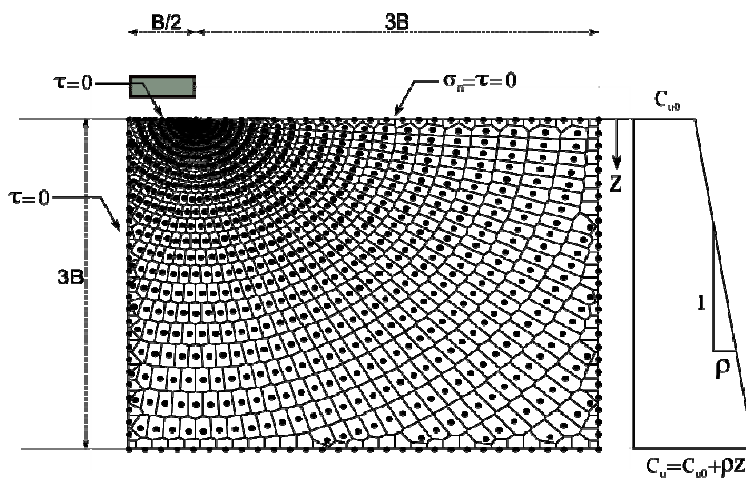
برای تحلیل این مسئله از طریق روش تحلیل حدی بدون شبکه شپارد، باید تغییرات اندکی در فرمول بندی اعمال کرد که شامل جاگذاری رابطه تغییرات خطی چسبندگی (یعنی $C_u = C_{u0} + \rho z$) به جای مقدار C در فرمول (۱۸) در بخش شرط تسلیم است. در شکل (۹) دامنه قرار گیری گره‌ها برای حل این مسئله ارائه شده است. با توجه به نتایج به دست آمده از مثال قبل، در این مثال از آرایش پره‌ای گره‌ها برای ساخت مدل‌های بدون شبکه شپارد استفاده شده است و شرایط مرزی مشابهی اعمال می‌شود. با انتخاب $B = 2$ برای پی نواری،

بهینه‌یابی تحمیل می‌شود بسیار بیشتر از تعداد قیود در روش بدون شبکه حدی است. علت این امر آن است که در فرمول‌بندی خاص روش اجزای محدود برای تحلیل حدی، هر گره مختص یک جزء است و بنابراین چندین گره می‌توانند در موقعیت یکسانی قرار گیرند، همچنین برای تامین پیوستگی در مرز بین اجزا باید قیود خاصی ارضا شوند. حال آنکه در روش بدون شبکه، هر گره تنها یک‌بار در نظر گرفته می‌شود و نیز به دلیل عدم وجود اجزا، هیچ‌گونه گسستگی نیز در محیط وجود ندارد. با توجه به اینکه تعداد قیود بیشتر هزینه‌ی محاسباتی برای حل مسئله بهینه‌یابی را افزایش می‌دهند، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که روش پیشنهادی در این مقاله نسبت به روش اجزای محدود حدی، هزینه‌ی محاسباتی کمتری دارد. علاوه بر این، همان‌طور که در بالا اشاره شد، برای انجام تحلیل‌های انطباقی نیز، روش پیشنهادی بسیار کارآمدتر است.

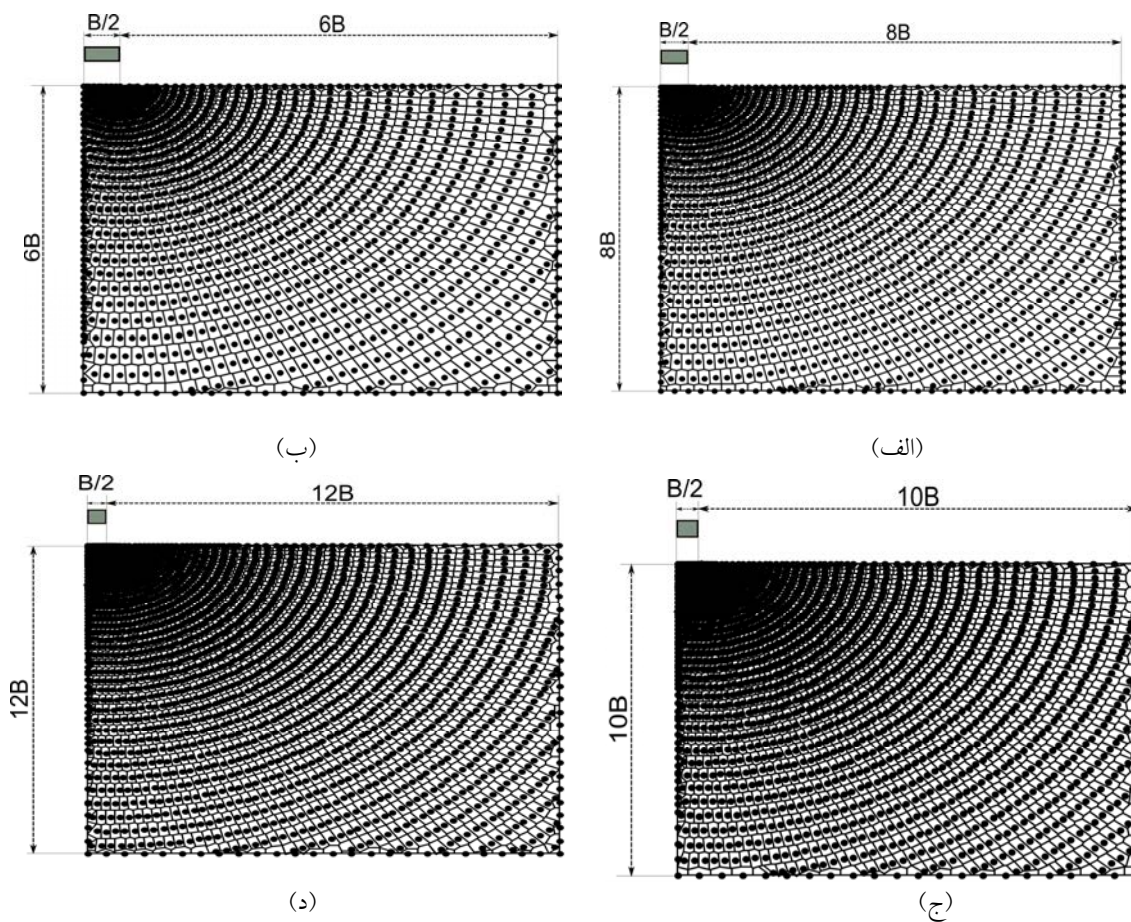
۷-۲- پی نواری صاف روی خاک کاملاً چسبنده با

تغییرات خطی چسبندگی نسبت به عمق

جواب دقیق ظرفیت باربری برای یک پی نواری صلب، واقع بر روی خاک کاملاً چسبنده ($\phi = 0$) زمانی که مقاومت به طور خطی نسبت به عمق تغییر می‌کند، توسط دیویس و



شکل ۹- دامنه‌ی انتخابی برای پی قرار گرفته روی خاک کاملاً چسبنده با ۸۱۱ گره



شکل ۱۰- مدل بدون شبکه برای الف ($\phi' = 10^\circ$ ، ب) $\phi' = 20^\circ$ ، ج) $\phi' = 30^\circ$ ، د) $\phi' = 40^\circ$

جدول ۴- نتایج تحلیل برای مقادیر مختلف زاویه اصطکاک

زاویه اصطکاک	$\phi = 10^\circ$	$\phi = 20^\circ$	$\phi = 30^\circ$	$\phi = 40^\circ$
تعداد گره‌ها	۱۳۴۰	۱۶۶۸	۱۹۴۳	۲۲۴۲
جواب دقیق	۸/۳۴	۱۴/۸۳	۳۰/۱۳	۷۵/۳۱
جواب محاسبه شده حد پایین	۸/۱۲۵۵	۱۴/۴۷۸۳	۲۹/۵۴۸۱	۷۳/۹۶۹۶

گسترش پیدا نکند. همان‌طور که در جدول (۴) آورده شده، روش ارائه شده مقادیر حد پایین را برای پی نواری قرار گرفته بر روی خاک با مقادیر مختلف زاویه اصطکاک داخلی به طور مناسب پیش بینی می‌کند. این نتایج صحت و کارآمدی روش حاضر را برای محاسبه حد پایین تحلیل حدی ظرفیت باربری پی نواری واقع بر خاک چسبنده-اصطکاک، تصدیق می‌کند.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله روش حد پایین بدون شبکه شپارد برای تعیین ظرفیت باربری پی های نواری ارائه شده است. روش پیشنهادی به دلیل ارضای تعادل، شرایط مرزی و شرط عدم تسلیم در تمامی نقاط دامنه‌ی مسئله، یک روش حد پایین کامل است. در روش پیشنهادی، از روش بدون شبکه با توابع شکل شپارد بهره گرفته شده است که امکان مدل‌سازی هندسه‌ی مسئله را بدون شبکه بندی مهیا می‌سازد. با توجه به مثال‌های حل شده مشخص شد که روش پیشنهادی از دقت خوبی در تخمین حد پایین ظرفیت باربری پی های نواری برخوردار است.

مقدار حد پایین ظرفیت باربری پی برابر $7/4230$ به دست می‌آید. بنابراین این روش مقدار دقیق ظرفیت باربری پی را با تقریب حدود $2/1$ درصد برآورد می‌کند.

۷-۳- بارگذاری زهکشی شده توسط پی نواری

صاف

بار گسیختگی دقیق برای یک پی نواری صاف که بر روی خاک چسبنده-اصطکاک بدون وزن قرار گرفته است به صورت زیر است [۳۳]:

$$q_f = c'N_c + qN_q \quad (46)$$

$$N_q = \exp(\pi \tan \phi') \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) \quad (47)$$

که q ، ϕ' و c' به ترتیب فشار سربار، زاویه اصطکاک موثر و چسبندگی موثرند. محاسبات با فرض $c'=1$ و $q=0$ (پی قرار گرفته روی سطح) برای مقادیر مختلف ϕ' انجام شده است. همان‌طور که در شکل (۱۰) مشخص است، چهار مدل بدون شبکه برای مقادیر مختلف ϕ' مورد بررسی قرار گرفته است. در این دامنه‌ها، مرز انتخابی به اندازه کافی از پی فاصله دارد تا دامنه مجزا شده همواره به طور کامل شامل ناحیه پلاستیک باشد و این ناحیه به قسمت‌های مرزی دامنه

واژه‌نامه

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1- mesh free method | 4- Shepard's method | 7- active set algorithm |
| 2- limit analysis | 5- plasticity theory | 8- statically admissible |
| 3- stabilized nodal integration | 6- poorly conditioned | 9- plastically admissible |

10-local support domain	14-Kronecker delta function	18-two point trapezoidal rule
11-interpolation	15-Voronoi cell	19-Guass method
12-approximation	16-divergence theorem	20-Adaptivity analysis
13-field variable	17-mohr-coulomb criterion	

مراجع

1. Terzaghi, K., "Theoretical Soil Mechanics," John Wiley & Sons, New York, 1943.
2. Meyerhof, G.G., "The Ultimate Bearing Capacity of Foundations," *Geotechnique*, Vol. 2, pp. 301-32, 1951.
3. Larkin, L.A., "Total Bearing capacity of Very Shallow Footings," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division* (ASCE), Vol. 94, pp. 1347-57, 1968.
4. Hansen, J.B., "A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity," *Bulletin of the Danish Geotechnical Institute*, Vol. 28, pp. 5-11, 1970.
5. Griffiths, D.V., "Computation of Bearing Capacity Factors Using Finite Elements," *Geotechnique*, Vol. 32, pp. 195-202, 1982.
6. Bolton, M.D., "Lau CK, Vertical Bearing Capacity Factors for Circular and Strip Footings on Mohr-Coulomb soil," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 30, pp.1024-33, 1993.
7. Frydman, S., and Burd, H.J., "Numerical Studies of Bearing-Capacity Factor N_Y ," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* (ASCE), Vol. 123, pp.20-29, 1997.
8. Kumar, J., " N_Y for Rough Strip Footing Using the Method of Characterisitics," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 40, pp. 669-74, 2003.
9. Drucker, D.C., Greenberg H.J., and Prager, W., "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media," *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, Vol. 9, pp. 381-89, 1952.
10. Lysmer, J., "Limit Analysis of Plane Problem in Soil Mechanics," *Soil Mechanics and Foundation Division* (ASCE), Vol. 96, pp. 1311-33, 1970.
11. Bottero, A., Negre, R., Pastor, J. and Turgeman, S., "Finite Element Method and Limit Analysis Theory for Soil Mechanics Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, pp. 131-49, 1980.
12. Sloan, S.W., "A Steepest Edge Active Set Algorithm for Solving Sparse Linear Programming Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2671-2685, 1988.
13. Sloan, S.W., "Lower Bound Limit Analysis Using Finite Elements and Linear Programming," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 12, pp. 61-77, 1988.
14. Merifield, R.S., Sloan, W., and Yu, H.S., "Rigorous Plasticity Solutions for the Bearing Capacity of two-Layered Clays," *Geotechnique*, Vol. 49, pp. 471-90, 1999.
15. Kim, J., Salgado, R., and Yu, H.S., "Limit Analysis of Soil Slopes Subjected to Pore-Water Pressures," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol. 125, pp. 48-58, 1999.
16. Yang, H., Shen, Zh., and Wang, J., "3D Lower Bound Bearing Capacity of Smooth Rectangular Surface Footings," *Mechanics Research Communications*, Vol. 30, pp. 481-92, 2003.
17. Hjjaj, H., Lyamin, A.V., and Sloan, S.W., "Numerical Limit Analysis Solutions for the Bearing capacity factor N_Y ," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 1681-1704, 2005.
18. Durand, A.F., Vargas, E.A., and Vaz, L.E., "Applications of Numerical Limit Analysis (NLA) to Stability Problems of Rock and Soil Masses," *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 43, pp. 408-25, 2006.
19. Kumar, J., and Battacharya, P., "On Improving the Solution by Using Lower Bound Finite Elements Limit Analysis and Linear Programming" *Geotechnical and Geological Engineering*, Vol. 29, pp. 619-26, 2011.
20. Kumar, J., and Battacharya, P., "Reducing the Computational Effort for Performing Linear Optimization in the Lower Bound Finite Element Limit Analysis," *International Journal of Geomechanics* (ASCE), Vol. 11, pp. 406-12, 2011.
21. Lucy, L.B., "A Numerical Approach to the Testing of Fission Hypothesis," *The Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-24, 1977.
22. Atluri, S.N., and Zhu, T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MPLG) approach in computational mechanics," *Computational Mechanics*, Vol. 22, pp. 117-27, 1998.
23. Liu, G.R., and Gu, Y.T., "A Point Interpolation Method for Two-Dimensional Solids," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 937-51, 2001.
24. Wiecekowsk, Z., "The Material Point Method in Large Strain Engineering Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.193, pp. 4417-38, 2004.
25. Chen, S., Liu, Y., and Cen, Zh., "Lower Bound Shakedown Analysis by Using the Element Free

- Galerkin Method and Non-linear Programming,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 3911-21, 2008.
26. Chen, S., Liu, Y., and Cen, Zh., “Lower-Bound Limit Analysis by Using the EFG Method and Non-Linear Programming,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 391-415, 2008.
27. Le, C.V., Gilbert, M., and Askes, H., “Limit Analysis of Plates Using the EFG Method and Second-Order Cone Programming,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 78, pp. 1532-55, 2009.
28. Le, C.V., Gilbert, M., and Askes, H., “Limit Analysis of Plates and Slabs Using a Meshless Equilibrium Formulation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 83, pp. 1739-58, 2010.
29. Le, C.V., Askes, H., and Gilbert, M., “Adaptive Element-Free Galerkin Method Applied to the Limit Analysis of Plates,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 2487-96, 2010.
30. Shepard, D., “A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly-Spaced Data,” *Proc. ACM Nat. conf.* pp.517-24, 1968.
31. Gordon, W., and Wixom, J., “Shepard's Method of Metric Interpolation to Bivariate and Multivariate Interpolation,” *Mathematics of computation*, Vol. 32, pp. 253-64, 1978.
32. Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S., and You, Y., “A Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Mesh-free Methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 435-66, 2001.
33. Prandtl, L., “Über Die Harte Plastischer Körper. Nachr. Ges. Wiss. Gott.,” *Math.-Phys. Kl.*, Vol. 12, pp. 74-85, 1920.
34. Sloan, S.W., “Limit Analysis with Adaptive Mesh Refinement,” 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), Venice, Italy, 2008.
35. Lyamin, A.V., Sloan, S.W., Krabbenhoft, K., and Hjiij, M., “Lower Bound Limit Analysis with Adaptive Remeshing,” *Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, pp. 1961-74, 2005.
36. Davis, E. H. , and Booker, J. R., “The Effect of Increasing Strength with Depth on the Bearing Capacity of Clays,” *Geotechnique*, Vol. 23, pp. 551-63, 1973.