

تحلیل ارتعاشی تیر دوران‌کننده ترک‌دار با سطح مقطع متغیر با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل

سعید طالبی و علیرضا آریایی*

دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۹/۱۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۵/۰۷)

چکیده -

واژگان کلیدی:

Vibration Analysis of a Cracked Rotating Tapered Cantilever Beam Using Differential Transform Method

S. Talebi and A. Ariaei

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan

Abstract: This paper studies the vibration characteristics of a cracked rotating tapered cantilever Euler–Bernoulli beam with linearly varying transverse cross-section using Differential Transform Method (DTM). The effects of the crack location, crack size, rotating speed and hub radius in calculating the natural frequencies and mode shapes of cracked tapered beam by using this method are investigated. Numerical results for a beam with and without crack with variable cross-section are obtained and compared with other methods. It is seen that the accuracy of the differential transform method for the vibration analysis of the beams with variable cross-section is higher than other methods, especially for the case of high rotational speed.

Keywords: Euler-Bernoulli Beam, Differential transform method, Rotating beam, Crack, Natural frequency.

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ariaei @eng.ui.ac.ir

A	مساحت، (مترمربع)	L_C	فاصله ترک تا انتهای ثابت، (متر)
a_c	عمق ترک، (متر)	α	نسبت ارتفاع تیر در ابتدا و انتهای تیر
b	عرض تیر، (متر)	β	ضریبی برای تعیین موقعیت ترک
c	نسبت باریک‌شوندگی	ρ	چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)
E	مدول یانگ، (پاسکال)	γ	سرعت زاویه‌ای بی‌بعد
h	ارتفاع متغیر تیر، (متر)	ω_c	فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار
I	گشتاور دوم سطح، m^4	ω_o	فرکانس طبیعی تیر بدون ترک
L	طول تیر، (متر)		

۱- مقدمه

طراحی و تحلیل سازه‌های مهندسی مانند تیغه‌های روتور هلیکوپتر، تیغه‌های توربین بادی و تیغه‌های ملخک هواپیما توجه زیادی را به رفتار ارتعاشی تیرهای دورانی به خود جلب کرده است که به طور چشم‌گیری با حذف پدیده نامناسب تشدید و هم‌چنین رویکرد کنترل ارتعاشی مناسب، بهبود می‌یابد [۱-۳]. در مقایسه با تحقیقات گسترده‌ای که روی تحلیل ارتعاشی تیرهای دورانی بدون ترک انجام شده است، توجه کمتری به مشخصه‌های ارتعاشی تیرهای ترک‌دار بوده است. این در حالی است که سازه‌های دورانی به دلیل خستگی مداوم یا تغییر شکل‌های ساختاری، به‌راحتی در معرض نقایصی هم‌چون ترک هستند. مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل تیرهای دورانی ترک‌دار بسیار مهم بوده و اخیراً محبوبیت زیادی پیدا کرده‌اند [۴]. این تیرها معمولاً به تیرهای یک بعدی اوپلر-برنولی یا تیموشنکو که در معرض نیروی خمشی گریز از مرکز هستند، ساده می‌شوند. معادلات دیفرانسیل حاکم برای تیرهای با سطح مقطع متغیر، ضرایب متغیری برای تغییرات نیروی گریز از مرکز و هندسه در امتداد طول تیر را در بر می‌گیرد. روش‌های تقریبی متفاوتی برای تحلیل ارتعاشی مسئله‌ی تیر دوران‌کننده مطرح شده است. هودگس و روتکوسکی [۵] روش اجزای محدود مرتبه متغیر را برای به‌دست آوردن خواص ارتعاش آزاد تیر دورانی

معرفی کردند. ناگولسواران [۶] ارتعاش جانبی یک تیر یکنواخت اوپلر-برنولی را بر مبنای حل عمومی معادله شکل مود و با استفاده از برهم‌نهی چهار تابع مستقل خطی بررسی کرد. راثو و گوپتا [۷] روش اجزای محدود را برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مودهای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به‌کار بردند. گوندا [۸] یک جزء مرتبه بالاتر را که تابع شکل آن با توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی به‌دست آمده است، پیشنهاد می‌دهد که برای تحلیل دینامیکی تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر مناسب است. سپس، گوندا و گانکولی [۹] فرض کردند که جابه‌جایی عرضی به عنوان یک تابع مرتبه چهار تغییر می‌کند و شکل جدیدی از تابع به‌دست می‌آید که قسمت استاتیکی معادله دیفرانسیل حاکم را ارضا می‌کند. بعداً گوندا [۱۰ و ۱۱] یک روش جدید اجزای محدود را برای تحلیل ارتعاش آزاد میله‌های دوران‌کننده با سرعت بالا ارائه داد که شکل توابع آن ترکیب خطی حل معادله دیفرانسیل استاتیکی حاکم بر یک فنر سخت و یک چندجمله‌ای درجه سه است. بازون [۱۲] مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر تیموشنکو با سطح مقطع متغیر را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کرد. همچنین بازون [۱۳] روابط بین فرکانس‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای را برحسب ضرایب سات‌ول مورد بحث قرار داد. بازون [۱۴] ارتعاش یک میله دورانی با سطح مقطع متغیر را با روش

اجزای محدود بررسی کرد که در آن ماتریس‌های جرم، الاستیک و سختی گریز از مرکز به طور روشنی برحسب نرخ باریک‌شوندگی بیان می‌شود. یو [۱۵] به طور همزمان مشخصه‌های دینامیکی تیغه‌های چرخشی پیش چرخیده با جرم متمرکز را مورد بررسی قرار داد. عطارنژاد و شهبا [۱۶] از توابع جابه‌جایی اصلی به‌دست آمده از حل معادله‌ی دیفرانسیل استاتیکی حرکت صفحه‌ای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر اویلر- برنولی برای تعیین فرمول‌های اجزای محدود استفاده کردند. وینود [۱۷] یک طیف تقریبی را با استفاده از روش اجزای محدود برای دو تابع درونیاب دیفرانسیلی به منظور تحلیل ارتعاش آزاد و انتشار امواج تیرهای با سطح مقطع متغیر و یکنواخت معرفی کرد. بانرجی [۱۸] از روش سختی دینامیکی برای مطالعه‌ی ارتعاش آزاد تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر استفاده کرد که در آن ارتفاع یا پهنای تیر به طور خطی در امتداد طول آن تغییر می‌کند. وانگ و ورلی [۱۹] روش سختی دینامیکی را بر مبنای روش فروبنیوس برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به کار بردند. کاملاً مشهود است که ترک روی یک تیر، انعطاف موضعی را افزایش و بنابراین خواص دینامیکی تیر مانند فرکانس‌ها و شکل مودها را تغییر می‌دهد. در نتیجه امکان تخمین موقعیت و اندازه ترک برای تیر ترک‌دار وجود دارد. تاثیر ترک به طور گسترده در مقالات بررسی شده است و رویکردهای گوناگونی برای مدل کردن ترک توسعه یافته است. چانگ و چن [۲۰] روش اجزای محدود را برای تحلیل یک تیغه‌ی دورانی ضخیم ترک دار به کار بردند و سپس یک رویکرد موج‌های کوچک فضایی را برای نمایش ترک در این تیغه مطرح کردند. کیم [۲۱] از روش اجزای محدود برای بحث روی تیر کامپوزیتی دورانی با یک ترک عرضی استفاده کرد. کوانگ و هوانگ [۲۲] و هوانگ [۲۳] به ترتیب مکان‌یابی ارتعاشی و پایداری تیغه‌های دورانی با سطح مقطع متغیر و یکنواخت را با بررسی تاثیر مکان ترک با استفاده از روش گالرکین مورد بررسی قرار

دادند. مسعود و آل سعید [۲۴] یک مدل ریاضی را از معادلات لاگرانژ به کمک روش مودهای فرضی استخراج کردند و برای توصیف ارتعاش جانبی تیر تیموشنکوی ترک‌دار دورانی به کار بردند.

امروزه تیرهای دورانی نایکنواخت به دلیل عملکرد ویژه آنها و رسیدن به توزیع مقاومت و جرم بهتر، کاربردهای فراوانی پیدا کرده‌اند [۲۵]. از این رو تحلیل ارتعاشی این تیرها اهمیت فراوانی دارد. روش انتقال دیفرانسیل یکی از روش‌های عددی پرکاربرد برای حل معادلات دیفرانسیل این‌گونه تیرهاست. این روش بر مبنای بسط سری تیلور است که اولین بار توسط زهو [۲۶] معرفی شده است. اگر چه این روش براساس بسط سری تیلور است، اما هنوز به طور کلی در مراتب بالاتر تفاوت‌هایی با آن دارد و برای هر نوع سطح مقطع و تغییر شکلی قابل استفاده است. از محاسن روش انتقال دیفرانسیل دقت بالا و حجم محاسبات پایین آن در تحلیل مسایل ارتعاشی است. اوزدمیر و کایا [۲۷] از روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای نایکنواخت استفاده کردند. ایشان با مقایسه نتایج این روش با روش اجزای محدود دقت بالای آن را در تعیین فرکانس‌های طبیعی نشان دادند. می [۲۸] روش انتقال دیفرانسیل را برای تحلیل تیرهای چرخشی به کار برد. او زمان حل مورد نیاز در این روش را به‌دست آورد و نشان داد در صورت کاربرد این روش به زمان کمی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی نیاز است. سادونگ و همکارانش [۲۹] کاربرد روش انتقال دیفرانسیل را در تیرهای با قیدهای الاستیک میانی بررسی کردند و نشان دادند در این روش می‌توان با حجم محاسبات کم به نتایجی با دقت قابل قبول رسید. در این مقاله با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر باریک‌شونده اویلر- برنولی ترک‌دار تعیین و اثرات نرخ باریک‌شوندگی، سرعت دورانی و شعاع توبی روی فرکانس‌های طبیعی بررسی می‌شود. قابل ذکر است که در این مقاله ارتعاشات عرضی تیر دورانی مورد نظر است و از ارتعاشات درون‌صفحه عمود بر

زیر محاسبه می شوند:

$$T_1(X_1) = \int_{X_1}^{L_1} \rho A \Omega^2 (R+x) dx + \quad (1)$$

$$\int_0^{L_2} \rho A \Omega^2 (R+L_1+x) dx$$

$$T_2(X_2) = \int_{X_2}^{L_2} \rho A \Omega^2 (R+L_1+x) dx \quad (2)$$

در موقعیت ترک رابطه (۳) برقرار است:

$$T_1(x) = T_2(x) \quad (3)$$

همچنین می توان نوشت:

$$A(x) = A_g \left(1 - \frac{cx}{L}\right)^n \quad (4)$$

$$I_{ZZ} = I_{Zg} \left(1 - \frac{cx}{L}\right)^{n+2} \quad (5)$$

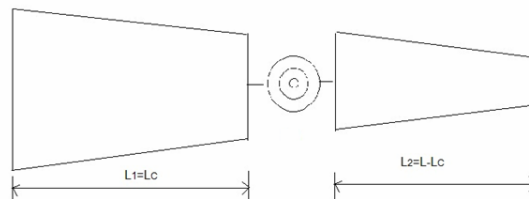
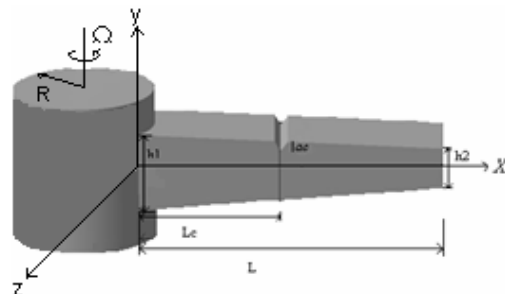
$$I_{YY} = I_{Yg} \left(1 - \frac{cx}{L}\right)^{n+2} \quad (6)$$

که در آن A و I_{YY} و I_{ZZ} به ترتیب سطح مقطع عرضی و گشتاور دوم سطح حول محورهای Y و Z هستند. زیرنویس g متناظر با انتهای چپ تیر است که در شکل (۱) نشان داده شده است. نرخ باریک شونده با ثابت c نشان داده می شود که باید از یک کوچکتر باشد، زیرا در غیر این صورت ارتفاع تیر قبل از رسیدن به انتهای آن به صفر می رسد. مقادیر ۱ و ۲ $n=1$ بیشترین حالت کاربردی را در بر می گیرد ($n=1$) تغییرات خطی سطح و $n=2$ تغییرات مرتبه ۲ سطح را در امتداد طول می دهد. مقاطع عرضی زیادی را می توان با مقادیر $n=1$ و $n=2$ معرفی کرد. مدول یانگ (E) و چگالی ماده (ρ) ثابت فرض می شوند. بر طبق نظریه اویلر-برنولی معادله دیفرانسیل حاکم برای حرکت دورانی تیر به صورت زیر داده می شود:

$$\rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) - \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) = P_w, \quad i=1, 2$$

که در معادله بالا w_i جابه جایی عرضی و P_w نیروی اعمالی بر



شکل ۱- تیر دورانی ترک دار با سطح مقطع متغیر

محور دوران و پیچشی تیر صرف نظر می شود.

۲- فرمول بندی

یک تیر اویلر-برنولی در حال دوران و دارای ترک با سطح مقطع متغیر در نظر گرفته می شود. همان طور که شکل (۱) نشان می دهد، این تیر به یک تویی با شعاع R متصل است که با سرعت زاویه ای Ω حول محور ثابت می چرخد. ارتفاع تیر به طور خطی در طول آن تغییر می کند. در تحقیق حاضر تیر دورانی ترک دار با سطح مقطع متغیر به سه جزء در مقطع عرضی ترک تفکیک می شود، شکل (۱) را ببینید. در این مقاله از نظریه تیر اویلر-برنولی استفاده شده است و از آنجایی که در این نظریه از تغییر شکل برشی صرف نظر می شود ترک تنها با یک فنر پیچشی مدل می شود [۲۰]. این در حالی است که در صورت استفاده از نظریه تیر تیموشنکو باید به جای ترک از دو فنر، یکی خطی و دیگری پیچشی استفاده کرد [۲۴]. وجود ترک تغییری در توزیع جرم در امتداد تیر به وجود نمی آورد. نیروهای گریز از مرکزی که در هر مقطع (در هر دو طرف راست و چپ) از اجزای آن اعمال می شوند از روابط

$$f_D(a_1) = 0.5335 - 0.929a_1 + 3.500a_1^2 - 3.181a_1^3 + 5.793a_1^4 \quad (16)$$

و برای ترک یک طرف باز می توان نوشت [۳۰]

$$\theta = 6\pi a_1^2 f_J(a_1) \left(\frac{H}{L}\right) \quad (17)$$

که در آن

$$f_J(a_1) = 0.6384 - 1.035a_1 + 3.720a_1^2 - 5.1773a_1^3 + 7.553a_1^4 - 7.332a_1^5 + 2.4909a_1^6 \quad (18)$$

۳- بی بعدسازی پارامترها

پارامترهای بی بعد شده برای موقعیت جزء، شعاع توپی و

سرعت زاویه ای عبارت اند از [۳۱]:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI_g} \quad (19)$$

با قرار دادن معادلات (۴) و (۱۹) در معادلات (۱) و (۲)،

نیروهای کششی گریز از مرکز به صورت زیر به دست می آیند:

$$T_1 = T_2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^2}{c^2(n+1)(n+2)} \quad (20)$$

$$\left[\begin{array}{l} (1-c\xi^2)^{n+1} (1+2c\delta+cn\delta+c\xi+nc\xi) \\ -(1-c)^{n+1} (1+2c\delta+cn\delta+c+nc) \end{array} \right]$$

با جایگذاری عبارت نیروی کششی گریز از مرکز از معادله

(۲۰) در معادله (۸) و انتخاب $n=1$ داریم:

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1-c\xi)^2 \frac{d^2 w_i}{d\xi^2} \right] - w_i \lambda^2 (1-c\xi) - \frac{1}{6c^2} \frac{d}{d\xi} \times \quad (21)$$

$$\left\{ \left[(1-c\xi)^2 (1+3c\delta+2c\xi) - (1-c)^2 (1+3c\delta+2c) \right] \frac{dw_i}{d\xi} \right\} = 0, \quad i=1,2$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد شده معادله (۱۹)، شرایط

مرزی (۹) و (۱۰) به صورت زیر در می آیند:

$$w_1 = \frac{dw_1}{d\xi} = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d^2 w_2}{d\xi^2} = \frac{d^3 w_2}{d\xi^3} = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 1 \quad (23)$$

هم چنین با جایگذاری معادله (۱۹) در شرایط پیوستگی (۱۱)

واحد طول است. با در نظر گرفتن ارتعاش آزاد تیر، نیروی اعمالی بر واحد طول آن صفر در نظر گرفته می شود و معادله (۷) به صورت زیر بیان می شود.

$$\rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) - \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) = 0, \quad i=1,2$$

تیر شکل (۱) دارای چهار شرط مرزی در ابتدا و انتهای آن به صورت زیر است:

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at} \quad x = L \quad (10)$$

شرایط پیوستگی در محل ترک عبارت اند از:

$$w_1(L_C^-, t) = w_2(L_C^+, t) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(L_C^-, t) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L_C^+, t) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(L_C^-, t) = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(L_C^+, t) \quad (13)$$

که L_C^- و L_C^+ به ترتیب مکان هایی بلافاصله در بعد و قبل از موقعیت ترک L_C را نشان می دهند. علاوه بر این، یک ناپیوستگی در شیب تیر در محل ترک ایجاد می شود که می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}(L_C^+, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x}(L_C^-, t) = \theta L \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L_C^+, t) \quad (14)$$

که در آن θ ضریب خمشی بی بعد ترک و تابع اندازه آن است که برای ترک دو طرف باز به صورت زیر تعریف می شود [۳۰]:

$$\theta = 6\pi a_1^2 f_D(a_1) \left(\frac{h}{L}\right) \quad (15)$$

در معادله فوق، $a_1 = a/h$ عمق بی بعد شده ترک است که در آن a عمق ترک و h ضخامت تیر در محل ترک است. همچنین

تابع f_D با معادله زیر داده می شود:

جدول ۱- قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل

تابع انتقال	تابع اصلی
$F[k] = G[k] \pm H[k]$	$f(x) = g(x) \pm h(x)$
$F[k] = \mu G[k]$	$f(x) = \mu g(x)$
$F[k] = \sum_{k=0}^{\infty} G[k-l]H[l]$	$f(x) = g(x)h(x)$
$F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$	$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$
$F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \neq n \\ 0 & \text{if } k = n \end{cases}$	$f(x) = x^n$

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (29)$$

که در آن تابع $f(x)$ تابع اصلی و $F[k]$ تابع انتقال است. تابع انتقال معکوس به صورت زیر بیان می شود:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k F[k] \quad (30)$$

با در نظر گرفتن معادله (۲۹) می توان نشان داد که مفهوم انتقال دیفرانسیل از بسط سری تیلور استخراج می شود. در کاربردهای واقعی، تابع $f(x)$ در معادله (۳۰) با تعداد جملات محدود بیان و این معادله پس از جایگزینی معادله (۲۹) در آن به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (31)$$

در معادله فوق m به همگرایی فرکانس های طبیعی بستگی دارد. قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی که در این مقاله از آنها استفاده می شود به ترتیب در جداول (۱) و (۲) معرفی شده اند.

حال با به کارگیری روش انتقال دیفرانسیل و اعمال روابط بیان شده در جدول (۱) در معادله (۲۱)، این معادله به ازای $x_0=0$ به شکل زیر در می آید:

تا (۱۴) در محل ترک، معادلات زیر به دست می آیند

$$w_1 = w_2 \quad \text{at } \xi = \xi_c \quad (24)$$

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} \quad \text{at } \xi = \xi_c \quad (25)$$

$$\frac{d^3 w_1}{d\xi^3} = \frac{d^3 w_2}{d\xi^3} \quad \text{at } \xi = \xi_c \quad (26)$$

$$\frac{dw_2}{d\xi} - \frac{dw_1}{d\xi} = \theta \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} \quad \text{at } \xi = \xi_c \quad (27)$$

که در معادلات فوق ξ_c معرف مکان ترک است و با معادله زیر بیان می شود:

$$\xi_c = \frac{L_c}{L} \quad (28)$$

۴- روش انتقال دیفرانسیل

در این بخش از روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین پاسخ یک تیر اویلر-برنولی دارای ترک استفاده می شود. یک تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید که در ناحیه D تعریف شده است و نقطه $x=x_0$ می تواند معرف هر نقطه در D باشد. هدف تعریف تابع $f(x)$ با سری های توانی با مرکزیت نقطه x_0 است. انتقال دیفرانسیل تابع $f(x)$ عبارت است از:

جدول ۲- قوانین انتقال دیفرانسیل در شرایط مرزی

X=0		X=1	
شرط مرزی اصلی	شرط مرزی انتقال	شرط مرزی اصلی	شرط مرزی انتقال
$f(0) = 0$	$F(0) = 0$	$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) = 0$
$\frac{df}{dx}(0) = 0$	$F(1) = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k) = 0$
$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 0$	$F(2) = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F(k) = 0$
$\frac{d^3f}{dx^3}(0) = 0$	$F(3) = 0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k) = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_1)^{k-1} k (W_2[k] - W_1[k]) \quad (38)$$

$$= \theta \sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1) W_2[k]$$

که در آن $W_i[k]$ تبدیل یافته $(\xi_1)^i, w_i$ ، $i=1,2$ است. از طرفی فرض می‌شود:

$$W_1[2] = C_{21} \quad (39)$$

$$W_1[3] = C_{31} \quad (40)$$

$$W_2[0] = C_{02} \quad (41)$$

$$W_2[1] = C_{12} \quad (42)$$

$$W_2[2] = C_{22} \quad (43)$$

$$W_2[3] = C_{32} \quad (44)$$

با جایگذاری معادلات فوق در شرایط مرزی (۳۳-۳۸) برای مقادیر مختلف k ، شش معادله برحسب مقادیر مجهول $C_{32}, C_{22}, C_{21}, C_{02}, C_{31}$ و C_{21} به دست می‌آید که با استفاده از این معادلات یک ماتریس 6×6 از ضرایب مجهولات نتیجه می‌شود. حال برای داشتن جواب غیر بدیهی صفر باید دترمینان این ماتریس ضرایب برابر صفر باشد که در این صورت یک معادله بر حسب c, γ, δ و فرکانس‌های طبیعی

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) W_i[k+4] - \frac{\gamma^2}{6}(3+6\delta)(k+1)(k+2) W_i[k+2] - \gamma^2 \delta (k+1)^2 W_i[k+1] +$$

$$\left[-\omega^2 + \gamma^2 k + \frac{\gamma^2}{2} k(k-1) \right] W_i[k] = 0, \quad i=1,2 \quad (32)$$

همچنین با اعمال روابط بیان شده در جداول (۱) و (۲) در معادلات (۲۲) تا (۲۷) و در نظر گرفتن $x_0=0$ می‌توان نوشت:

$$W_1[0] = W_1[1] = 0 \quad (33)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) W_2[k] = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-2) W_2[k] = 0 \quad (34)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1)^k W_1[k] = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1)^k W_2[k] \quad (35)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1) W_1[k] = \sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1) W_2[k] \quad (36)$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (\xi_1)^{k-3} k(k-1)(k-2) W_1[k] = \sum_{k=3}^{\infty} (\xi_1)^{k-3} k(k-1)(k-2) W_2[k] \quad (37)$$

جدول ۳- سه فرکانس طبیعی اول تیر دورانی بدون ترک با سطح مقطع متغیر برای سرعت‌های دورانی بی بعد مختلف γ

γ	انتقال دیفرانسیل	اجزای محدود مرسوم NE=5 (DOF=12)[A]	گوندا و گانگولی [9]	وانگ و ورلی [19]
مود اول				
۱	۳/۹۸۶۵	۳/۹۸۶۷	۳/۹۸۶۶	۳/۹۸۶۶
۲	۴/۴۳۶۵	۴/۴۳۶۸	۴/۴۳۶۸	۴/۴۳۶۸
۳	۵/۰۹۲۱	۵/۰۹۲۷	۵/۰۹۲۷	۵/۰۹۲۷
۴	۵/۸۷۸۲	۵/۸۷۸۸	۵/۸۷۸۸	۵/۸۷۸۸
۵	۶/۷۴۳۱	۶/۷۴۳۴	۶/۷۴۳۴	۶/۷۴۳۴
۶	۷/۶۵۵۵	۷/۶۵۵۲	۷/۶۵۵۱	۷/۶۵۵۱
۷	۸/۵۹۵۷	۸/۵۹۵۷	۸/۵۹۵۶	۸/۵۹۵۶
۸	۹/۵۵۴۰	۹/۵۵۴۲	۹/۵۵۴۰	۹/۵۵۴۰
۹	۱۰/۵۲۳۸	۱۰/۵۲۴۴	۱۰/۵۲۳۹	۱۰/۵۲۳۹
۱۰	۱۱/۵۰۰۹	۱۱/۵۰۲۳	۱۱/۵۰۱۵	۱۱/۵۰۱۵
۱۱	۱۲/۴۸۲۸	۱۲/۴۸۵۷	۱۲/۴۸۴۵	۱۲/۴۸۴۵
۱۲	۱۳/۴۶۷۸	۱۳/۴۷۲۹	۱۳/۴۷۱۱	۱۳/۴۷۱۱
مود دوم				
۱	۱۸/۴۷۴۰	۱۸/۴۸۲۰	۱۸/۴۷۴۰	۱۸/۴۷۴۰
۲	۱۸/۹۳۶۲	۱۸/۹۴۴۲	۱۸/۹۳۶۶	۱۸/۹۳۶۶
۳	۱۹/۶۸۲۳	۱۹/۶۹۰۷	۱۹/۶۸۳۹	۱۹/۶۸۳۹
۴	۲۰/۶۸۳۲	۲۰/۶۹۱۲	۲۰/۶۸۵۲	۲۰/۶۸۵۲
۵	۲۱/۹۰۳۵	۲۱/۹۱۰۵	۲۱/۹۰۵۳	۲۱/۹۰۵۳
۶	۲۳/۳۰۰۹	۲۳/۳۱۳۸	۲۳/۳۰۹۳	۲۳/۳۰۹۳
۷	۲۴/۸۶۵۳	۲۴/۸۶۸۶	۲۴/۸۶۴۷	۲۴/۸۶۴۷
۸	۲۶/۵۴۴۱	۲۶/۵۴۷۲	۲۶/۵۴۳۷	۲۶/۵۴۳۷
۹	۲۸/۳۱۶۹	۲۸/۳۲۶۱	۲۸/۳۲۲۷	۲۸/۳۲۲۷
۱۰	۳۰/۱۵۶۵	۳۰/۱۸۶۴	۳۰/۱۸۲۷	۳۰/۱۸۲۷
۱۱	۳۲/۰۳۳۵	۳۲/۱۱۲۷	۳۲/۱۰۸۵	۳۲/۱۰۸۵
۱۲	۳۳/۹۱۷۶	۳۴/۰۹۲۹	۳۴/۰۸۷۷	۳۴/۰۸۷۷
مود سوم				
۱	۴۷/۴۱۷۷	۴۷/۵۵۴۸	۴۷/۴۱۷۳	۴۷/۴۱۷۳
۲	۴۷/۸۷۳۱	۴۸/۰۰۶۸	۴۷/۸۷۱۷	۴۷/۸۷۱۶

ادامه جدول ۳

۴۸/۶۱۹۰	۴۸/۶۱۹۱	۴۸/۷۵۰۴	۴۸/۶۲۳۰	۳
۴۹/۶۴۵۶	۴۹/۶۴۵۶	۴۹/۷۷۲۲	۴۹/۶۴۶۱	۴
۵۰/۹۳۳۸	۵۰/۹۳۳۸	۵۱/۰۵۴۸	۵۰/۹۳۱۴	۵
۵۲/۴۶۳۳	۵۲/۴۶۳۳	۵۲/۵۷۸۲	۵۲/۴۶۰۴	۶
۵۴/۲۱۲۴	۵۴/۲۱۲۴	۵۴/۳۲۱۳	۵۴/۲۱۲۹	۷
۵۶/۱۵۹۵	۵۶/۱۵۹۵	۵۶/۲۶۲۶	۵۶/۱۶۵۲	۸
۵۸/۲۸۳۳	۵۸/۲۸۳۳	۵۸/۳۸۱۳	۵۸/۲۹۱۰	۹
۶۰/۵۶۳۹	۶۰/۵۶۳۹	۶۰/۶۵۷۶	۶۰/۵۵۵۲	۱۰
۶۲/۹۸۲۹	۶۲/۹۸۲۹	۶۳/۰۷۳۳	۶۲/۹۱۱۲	۱۱
۶۵/۵۲۳۷	۶۵/۵۲۳۷	۶۵/۶۱۲۱	۶۵/۲۹۹۹	۱۲

مقطع بزرگتر، ثابت (گیردار) است. جرم و سختی فنر در امتداد طول تیر به ترتیب $A_g \rho m(x) = (1 - 0.5 x/L)$ و $EI(x) = EI_g (1 - 0.5 x/L)^2$ در نظر گرفته می‌شود. جدول (۳) سه فرکانس طبیعی اول میله با سطح مقطع متغیر برای سرعت‌های دورانی بی بعد مختلف γ با نتایج به‌دست آمده در مراجع [۹ و ۱۹] مقایسه شده است. برای تعیین فرکانس‌های طبیعی در مرجع [۹] از تابع مبنای سختی برای حل با روش اجزای محدود و در مرجع [۱۹] از روش سختی دینامیکی بر مبنای حل سری توانی فروبنیوس استفاده شده است. مقایسه نتایج، تطابق خوب جواب‌های حاصل از سه روش را نشان می‌دهد. همچنین در این جدول روش انتقال دیفرانسیل با روش اجزای محدود مرسوم (CFEM) مقایسه شده است که در این روش برای تحلیل تیر دورانی از چندجمله‌ای درجه ۳ به عنوان توابع میان‌یاب استفاده می‌کند، که نتایج نشان‌دهنده دقت همگرایی بیشتری در روش انتقال دیفرانسیل نسبت به CFEM است (در این روش ۵ جزء با ۱۲ درجه آزادی حل شده است). اینک برای بررسی بیشتر دقت روش انتقال دیفرانسیل، مثال دیگری مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن یک تیر دورانی یکنواخت و یک تیر دورانی با سطح مقطع متغیر در سرعت‌های بالا مطالعه می‌شود. جرم و سختی انتقالی بر واحد طول تیر برابر با

بی‌بعد به دست می‌آید؛ حال می‌توان برای مقادیر مختلف c ، γ و δ ، فرکانس‌های بی‌بعد را محاسبه کرد.

۵- نتایج عددی

در این قسمت ارتعاش تیر با ترک‌هایی در موقعیت‌های مختلف در نظر گرفته و دقت و همگرایی فرمول‌بندی حاضر بررسی می‌شود. نتایج حاصل از رویکرد مطرح شده در این مقاله با مقادیر موجود در مقالات دیگر که با استفاده از روش‌های دیگر به دست آمده‌اند، مقایسه می‌شود. در ابتدا تیر دورانی بدون ترک با سطح مقطع متغیر و سپس تیر ترک دار بدون سرعت دورانی با سطح مقطع متغیر بررسی می‌شود. دلیل انتخاب این دو مسئله آن است که در کارهای گذشته این دو نوع تیر مطالعه شده‌اند و می‌توان نتایج کار حاضر را با آن‌ها مقایسه و اعتبار فرمول‌بندی حاضر را بررسی کرد. در انتها یک تیر دورانی دارای ترک با سطح مقطع متغیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۵-۱- تیرهای دورانی بدون ترک

ابتدا یک تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر با نسبت باریک شوندگی $c=0.5$ بررسی می‌شود که از سمت با سطح

جدول ۴- چهار فرکانس طبیعی بی بعد تیر بدون ترک با سرعت دورانی بالا

$\gamma = 200$		$\gamma = 100$		شماره مود
انتقال دیفرانسیل	گوند [۱۱]	انتقال دیفرانسیل	گوند [۱۱]	
گوند و گانگولی [۱۰]				
۲۰۱/۰۵۴۷	۲۰۱/۰۸۴۱	۱۰۱/۸۲۳۳	۱۰۱/۸۱۰۱	مود اول
۴۹۲/۶۸۴۳	۴۹۲/۶۸۵۲	۲۱۸/۴۶۵۵	۲۱۸/۴۲۴۰	مود دوم
۷۸۳/۷۸۷۹	۷۸۳/۷۶۸۰	۳۴۰/۷۶۵۴	۳۴۰/۳۷۵۱	مود سوم
N/A	۱۰۸۶/۲۲۴۳	۴۷۱/۶۶۳۰	۴۷۱/۵۹۵۴	مود چهارم

(دلیل استفاده از پارامتر α ، مقایسه با مقالات دیگر است). اعداد داخل پرانتز در این جدول معرف نسبت فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار به تیر بدون ترک هستند. همان‌طور که در جدول (۵) نشان داده می‌شود برای یک موقعیت ثابت، با افزایش عمق ترک، نسبت فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار به تیر بدون ترک کاهش می‌یابد؛ به عنوان مثال با فرض یک ترک در میانه تیر ($\alpha=0/6$ و $\beta=0/8$) با افزایش عمق ترک از $0/281$ ضخامت تیر به $0/5$ آن، فرکانس اول تیر ترک‌دار از 98% فرکانس اول تیر بدون ترک به 93% آن کاهش یافته است. همچنین در این جدول مشاهده می‌شود که میزان کاهش فرکانس با نزدیک شدن ترک به انتهای گیردار تیر بیشتر است.

۳-۵- تیر دورانی ترک‌دار

در این بخش روش حاضر برای تحلیل مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر دورانی دارای ترک با سطح مقطع متغیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقادیر نسبت باریک‌شوندگی، شعاع توپی و سرعت دورانی بی‌بعد تیر به ترتیب $\alpha=0/5$ ، $R/L=0$ و $\gamma=1$ می‌باشند. فرض می‌شود که نسبت عمق ترک به ضخامت تیر برابر $a/h=0/3$ و $L_c/L=0/45$ واقع شده است. در بررسی زیر از چهار جمله برای بسط تابع شکل جزء تیر دورانی با سطح مقطع متغیر استفاده شده است. نسبت چهار فرکانس اول تیر دورانی ترک‌دار به فرکانس‌های

$EI(x) = EI_g(1-0/95 x/L)$ و $A_g \rho m(x) = (1-0/8 x/L)$ فرض می‌شود. در جدول (۴) چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد به دست آمده از روش حاضر به ترتیب با مقادیر به دست آمده در مرجع [۱۰] برای تیر دورانی یکنواخت و مرجع [۱۱] برای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش حاضر نتایج خوبی برای سرعت‌های دورانی بالا ارائه می‌دهد.

۲-۵- تیرهای غیر دورانی ترک‌دار

اینک فرض می‌شود تیر از سمت مقطع بزرگتر خود گیردار است. پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر عبارت‌اند از طول تیر $L=240$ mm، ضخامت تیر در انتهای گیردار $h_1=20$ mm، عمق تیر $b=12$ mm، مدول یانگ $E=210$ GPa و چگالی $\rho=7860$ kg/m³. تحلیل ارتعاشی این تیر قبلاً توسط چودهاری و مایتی [۳۲] انجام شده است. ایشان سه فرکانس طبیعی اول را برای موقعیت‌ها و اندازه‌های مختلف ترک با استفاده از روش اجزای محدود دو بعدی مطالعه کرده‌اند. سه فرکانس طبیعی اول با استفاده از این روش با چهار عبارت بسط و در جدول (۵) نشان داده شده است. نتایج اجزای محدود دو بعدی (2d-FEM) در جدول (۵)، نتایج ارائه شده توسط چودهاری و مایتی است. $\beta=1-(1-\alpha)L_c/L$. موقعیت ترک را نشان می‌دهد که در آن $\alpha=1-c$ است

جدول ۵- سه فرکانس طبیعی اول تیر بدون دوران و دارای ترک

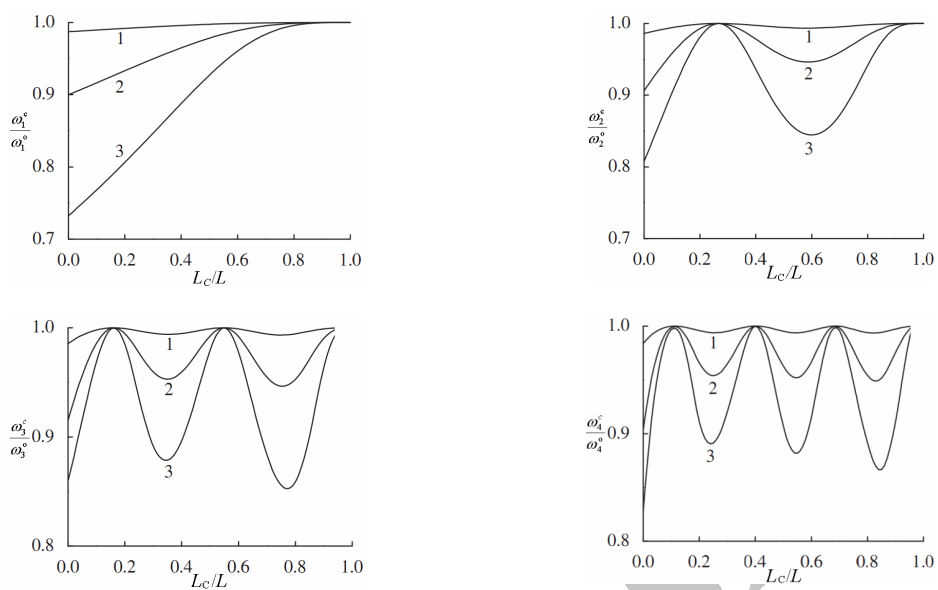
فرکانس‌های طبیعی (هرتز)			روش	ترک	
مود سوم	مود دوم	مود اول		a_c/h	β
					$\alpha=0/2$
۳۰۴۶/۵	۱۲۹۹/۶۴	۳۵۴/۱۱	انتقال دیفرانسیل		صفر
۲۹۲۵/۳	۱۲۷۱/۵۰	۳۵۱/۶۲	اجزای محدود دوبعدی		
۳۰۴۳/۹(۱/۰۰)	۱۲۵۳/۴۱(۰/۹۶)	۳۵۰/۶۳(۰/۹۹)	انتقال دیفرانسیل	۰/۲۸۸	۰/۵
۲۹۲۳/۰(۱/۰۰)	۱۲۳۰/۰(۰/۹۷)	۳۴۸/۳۶(۰/۹۹)	اجزای محدود دوبعدی		
۳۰۳۸/۵۶(۱/۰۰)	۱۱۵۶/۳۷(۰/۸۹)	۳۴۱/۸۵(۰/۹۷)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۲۹۱۶/۸(۱/۰۰)	۱۱۳۲/۱(۰/۸۹)	۳۳۸/۹۳(۰/۹۶)	اجزای محدود دوبعدی		
۲۹۸۶/۰۷(۰/۹۸)	۱۲۶۹/۶۳(۰/۹۸)	۳۴۶/۶۳(۰/۹۸)	انتقال دیفرانسیل	۰/۲۹۲	۰/۶
۲۸۶۲/۷(۰/۹۸)	۱۲۴۲/۱(۰/۹۸)	۳۴۴/۳۸(۰/۹۸)	اجزای محدود دوبعدی		
۲۸۷۸/۵۳(۰/۹۴)	۱۲۰۹/۰۳(۰/۹۳)	۳۲۹/۰۶(۰/۹۳)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۲۷۵۳/۸(۰/۹۴)	۱۱۸۱/۶(۰/۹۳)	۳۲۶/۲۳(۰/۹۳)	اجزای محدود دوبعدی		
۲۸۷۰/۶(۰/۹۴)	۱۱۸۱/۱۶(۰/۹۱)	۳۰۸/۲۱(۰/۸۷)	انتقال دیفرانسیل	۰/۳۹۹	۰/۹۵
۲۷۵۱/۷(۰/۹۴)	۱۱۵۶/۱(۰/۹۱)	۳۰۷/۳۴(۰/۸۷)	اجزای محدود دوبعدی		
۲۸۱۴/۸۳(۰/۹۲)	۱۱۳۴/۷۸(۰/۸۷)	۲۸۳/۵۷(۰/۸۰)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۲۶۹۰/۹(۰/۹۲)	۱۱۰۶/۸(۰/۸۷)	۲۸۰/۱۷(۰/۸۰)	اجزای محدود دوبعدی		
					$\alpha=0/4$
۳۶۳۰/۲۰	۱۴۴۲/۰۰	۳۲۴/۳۴	انتقال دیفرانسیل		صفر
۳۴۸۶/۹۰	۱۴۱۵/۳۶	۳۲۲/۸۳	اجزای محدود دوبعدی		
۳۵۳۴/۸۸(۰/۹۷)	۱۳۷۵/۲(۰/۹۵)	۳۲۲/۰۲(۰/۹۹)	انتقال دیفرانسیل	۰/۳۰۶	۰/۶
۳۳۷۳/۲(۰/۹۷)	۱۳۴۹/۳(۰/۹۵)	۳۲۰/۶۳(۰/۹۹)	اجزای محدود دوبعدی		
۳۳۹۷/۲۴(۰/۹۳۵)	۱۲۵۷/۳۲(۰/۸۷)	۳۱۷/۰۱(۰/۹۸)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۳۲۲۴/۲(۰/۹۳)	۱۲۲۹/۱(۰/۸۷)	۳۱۵/۳۵(۰/۹۸)	اجزای محدود دوبعدی		
۳۵۸۸/۱۸(۰/۹۹)	۱۳۸۴/۴۹(۰/۹۶)	۳۱۶/۹۹(۰/۹۸)	انتقال دیفرانسیل	۰/۳۰۴	۰/۷
۳۴۲۴/۲(۰/۹۸)	۱۳۵۷/۱(۰/۹۶)	۳۱۵/۹۳(۰/۹۸)	اجزای محدود دوبعدی		
۳۵۲۲/۷۹(۰/۹۷)	۱۲۸۸/۳۶(۰/۸۹)	۳۰۱/۸۵(۰/۹۳)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۳۳۵۸/۲(۰/۹۶)	۱۲۵۹/۰(۰/۸۹)	۳۰۰/۱۴(۰/۹۳)	اجزای محدود دوبعدی		
۳۴۷۷/۰۸(۰/۹۶)	۱۴۳۶/۸۲(۱/۰۰)	۳۱۰/۰۱(۰/۹۶)	انتقال دیفرانسیل	۰/۳	۰/۸
۳۳۱۸/۴(۰/۹۵)	۱۴۰۴/۳(۰/۹۹)	۳۰۹/۱۷(۰/۹۶)	اجزای محدود دوبعدی		
۳۲۳۹/۸(۰/۸۹)	۱۴۲۷/۴۹(۰/۹۹)	۲۸۲/۵۲(۰/۸۷)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۳۰۷۰/۲(۰/۸۸)	۱۳۹۴/۰(۰/۹۸)	۲۸۰/۶۸(۰/۸۷)	اجزای محدود دوبعدی		$\alpha=0/6$

ادامه جدول ۵

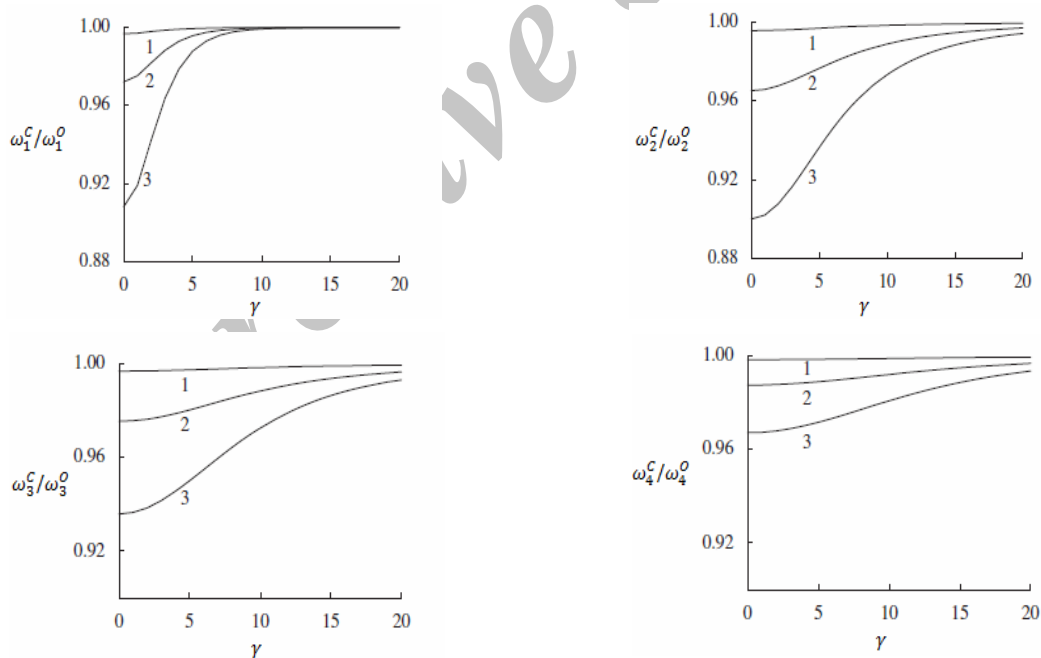
۴۱۵۲/۰۴	۱۵۷۶/۰۱	۳۰۸/۰۷	انتقال دیفرانسیل	صفر
۳۹۳۵/۱۷	۱۵۳۸/۱۳	۳۰۶/۸۵	اجزای محدود دوبعدی	
۴۰۹۷/۸۷(۰/۹۹)	۱۵۷۱/۸۳(۱/۰۰)	۳۰۸/۰۴(۱/۰۰)	انتقال دیفرانسیل	۰/۲۵۹
۳۸۸۹/۰(۰/۹۹)	۱۵۳۴/۳(۱/۰۰)	۳۰۶/۸۱(۱/۰۰)	اجزای محدود دوبعدی	
۳۸۹۷/۲۲(۰/۹۴)	۱۵۵۶/۳۷(۰/۹۹)	۳۰۷/۸۹(۱/۰۰)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵
۳۶۸۸/۹(۰/۹۴)	۱۵۱۸/۵(۰/۹۹)	۳۰۶/۶۵(۱/۰۰)	اجزای محدود دوبعدی	
۴۰۶۹/۰۴(۰/۹۸)	۱۵۰۳/۳۳(۰/۹۵)	۳۰۵/۸۷(۰/۹۹)	انتقال دیفرانسیل	۰/۲۷۵
۳۸۳۵/۶(۰/۹۷)	۱۴۶۷/۵(۰/۹۵)	۳۰۴/۶۲(۰/۹۹)	اجزای محدود دوبعدی	
۳۹۱۰/۶۸(۰/۹۴)	۱۳۳۶/۵(۰/۸۵)	۲۹۹/۳۹(۰/۹۷)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵
۳۶۶۸/۵(۰/۹۳)	۱۳۰۰/۵(۰/۸۵)	۲۹۷/۹۵(۰/۹۷)	اجزای محدود دوبعدی	
۴۱۳۶/۲۱(۱/۰۰)	۱۵۰۴/۶۵(۰/۹۵۵)	۳۰۲/۴۸(۰/۹۸)	انتقال دیفرانسیل	۰/۲۸۱
۳۹۰۳/۵(۰/۹۹)	۱۴۷۰/۳(۰/۹۶)	۳۰۱/۶۳(۰/۹۸)	اجزای محدود دوبعدی	
۴۱۰۵/۱۷(۰/۹۹)	۱۳۶۰/۳۳(۰/۸۶)	۲۸۷/۸۲(۰/۹۳)	انتقال دیفرانسیل	۰/۵
۳۸۷۱/۰(۰/۹۸)	۱۳۲۴/۸(۰/۸۶)	۲۸۶/۴۵(۰/۹۳)	اجزای محدود دوبعدی	

تیر ترک دار به فرکانس‌های تیر بدون ترک نزدیک می‌شود. شکل (۴) نیز اثر شعاع توپی روی فرکانس‌های طبیعی تیر نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود که افزایش شعاع توپی R منجر به نزدیک شدن مقادیر فرکانس‌های تیر دارای ترک به تیر بدون ترک می‌شود، به عبارت دیگر با افزایش شعاع توپی اثر ترک کاهش می‌یابد. چهار شکل مود اول این نوع تیر برای حالت $L_c/L = 0/45$ در شکل (۵) نشان داده شده است. با افزایش اندازه ترک شکل مود تیر تغییر می‌کند، به عبارت دیگر یک اغتشاش محلی به تدریج روی شکل مود در محل ترک اتفاق می‌افتد؛ هر چند هنگامی که اندازه ترک خیلی کوچک است، اغتشاش روی شکل مود قابل تشخیص نیست. در شکل‌های (۲) تا (۵)، اعداد ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات $0/3$ و $0/2$ و $0/1$ a_0/h در شکل (۵) صفر بیانگر حالت بدون ترک است.

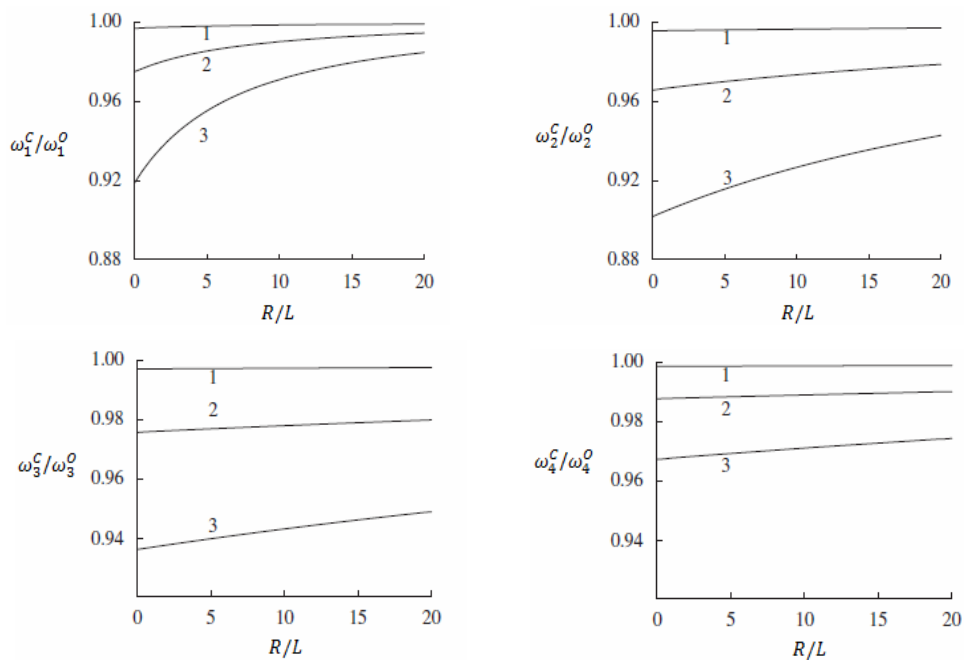
دورانی بدون ترک برای موقعیت‌ها و اندازه‌های مختلف ترک، سرعت‌های دورانی و شعاع‌های توپی گوناگون محاسبه و اثرات آنها روی چهار فرکانس اول در شکل‌های (۲) تا (۴) نشان داده می‌شود. در شکل (۲) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش اندازه ترک، چهار فرکانس اول کاهش می‌یابد به جز زمانی که ترک در گره‌های ارتعاشی مود مورد بررسی قرار دارد. همچنین دیده می‌شود که برای یک تیر دورانی با اندازه ترک ثابت، با تغییر موقعیت ترک از انتهای ثابت به سمت انتهای آزاد، فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد، ولی کاهش یا افزایش فرکانس طبیعی مودهای بالاتر به ترتیب به دور شدن و یا نزدیک شدن به گره‌های ارتعاشی مود مورد نظر بستگی دارد. در شکل (۳) اثر سرعت دورانی بی‌بعد β روی فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر نشان داده شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دورانی از تأثیر ترک در کاهش فرکانس‌های طبیعی کاسته می‌شود؛ به عبارت دیگر با افزایش سرعت دورانی، فرکانس‌های طبیعی



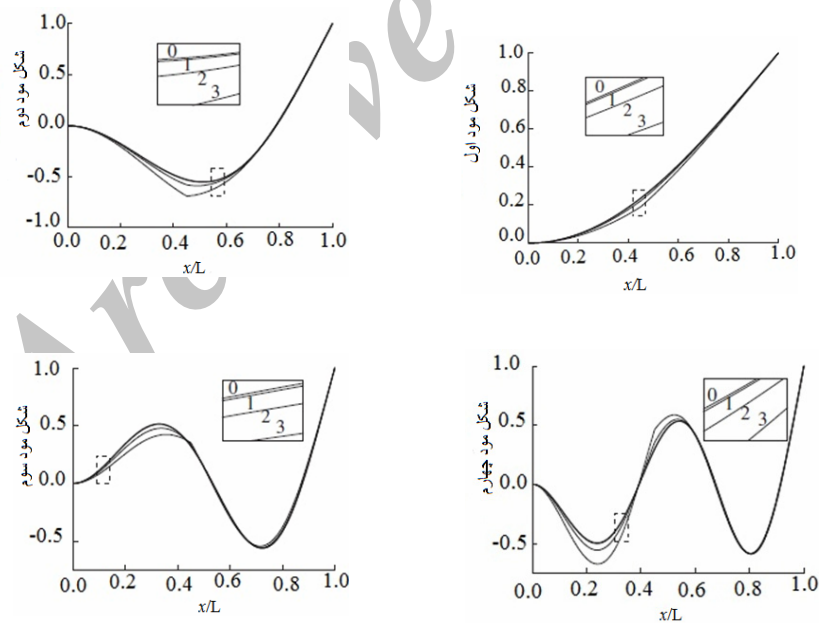
شکل ۲- اثر موقعیت و اندازه ترک روی چهار فرکانس طبیعی اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳)



شکل ۳- اثر سرعت زاویه‌ای بی بعد $\gamma = \Omega L^2 \sqrt{\rho A_g / E I_g}$ روی چهار فرکانس طبیعی اول برای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر با موقعیت ترک $L_c/L = 0/45$ (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳)



شکل ۴- اثر نسبت شعاع توپی روی چهار فرکانس طبیعی اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر و موقعیت ترک $L_c/L = 0.45$ (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳)



شکل ۵- چهار شکل مود اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر برای حالت بدون ترک و ترک دار در موقعیت $L_c/L = 0.45$ (۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳)

۶- نتیجه گیری

از طرفی با تغییر موقعیت ترک از انتهای ثابت به سمت انتهای آزاد از مقدار فرکانس طبیعی اول کاسته می شود، ولی کاهش یا افزایش فرکانس طبیعی مودهای بالاتر به ترتیب به دور شدن و یا نزدیک شدن به گره های ارتعاشی مود مورد بررسی بستگی دارد. همچنین دیده شد که در صورت افزایش سرعت دورانی و شعاع توپی تأثیر ترک کاهش می یابد؛ به عبارت دیگر فرکانس های طبیعی تیر ترک دار به فرکانس های تیر بدون ترک نزدیک می شوند. روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشی تیرهای دورانی دارای ترک و با سطح مقطع متغیر از دقت بالایی برخوردار است و می تواند یکی از روش های حل پرکاربرد برای تحلیل این نوع تیرها و یا مسائل مشابه باشد.

در این مقاله روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر مورد استفاده قرار گرفت. در ابتدا معادلات تیر با سطح مقطع متغیر به صورت بی بعد شده به دست آمد و سپس از روش انتقال دیفرانسیل معادله انتقال استخراج شد. در ادامه تیر دورانی بدون ترک مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد روش انتقال دیفرانسیل به خصوص در سرعت های بالا نسبت به روش های دیگر از دقت بالاتری برخوردار است. سپس تیر ترک دار مورد بررسی قرار گرفت و برای مقادیر مختلف موقعیت و اندازه ترک، شعاع توپی و سرعت دورانی تیر، فرکانس های طبیعی آن تعیین شد؛ مشاهده شد که با افزایش اندازه ترک، فرکانس طبیعی کاهش می یابد.

مراجع

1. Wei, K., Meng, G., Zhou, S., and Liu, J., "Vibration Control of Variable speed/Acceleration Rotating Beams using Smart Materials", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 4-5, pp. 1150-1158, 2006.
2. Lin, S. M., "PD Control of a Rotating Smart beam with an Elastic Root", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 312, No. 1-2, pp. 109-124, 2008.
3. Yang, J. B., Jiang, L. J., and Chen, D. C., "Dynamic Modeling and Control of a Rotating Euler-Bernoulli beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 274, No. 3-5, pp. 863-875, 2004.
4. Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, F. M., Shunk D. D., Stinemat, D. W., and Nadler, B. R., "A Review of Structural Health Monitor in Literature", 1996-2001, Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS, 2003.
5. Hodges, D. H., and Rutkowski M. J., "Free Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable Order Finite Element Method", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 19, pp. 1459-1466, 1981.
6. Naguleswaran, S., "Lateral Vibration of a Centrifugally Tensioned Euler-Bernoulli Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, No. 5, pp. 613-624, 1994.
7. Rao, S. S., and Gupta, R. S., "Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 103-124, 2001.
8. Gunda, J. B., Singh, A. P., Chhabra, p. S., and Ganguli, R., "Free Vibration Analysis of Rotating Tapered Blades using Fourier-p Super Element", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, pp. 243-257, 2007.
9. Gunda, J. B., and Ganguli, R., "New Rational Interpolation Functions for finite Element Analysis of Rotating Beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 578-588, 2008.
10. Gunda, J. B., and Ganguli, R., "Stiff-String Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 245021-245025, 2008.
11. Gunda, J. B., and Gupta, R. K., and Ganguli, R., "Hybrid Stiff-String Polynomial Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams", *Computers and Structures*, Vol. 87, No. 3-5, pp. 254-265, 2009.
12. Bazoune, A., Khulief, Y. A., and Stephen, N. G., "Further Results for Modal Characteristics of Rotating Tapered Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No. 3, pp. 157-174, 1999.
13. Bazoune, A., "Relationship Between Softening and Stiffening Effects in Terms of South Well Coefficients", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 287, No. 4-5, pp. 1027-1030, 2005.
14. Bazoune, A., "Effect of Tapering on Natural Frequencies of Rotating Beams", *Shock and Vibration*, Vol. 14, pp. 169-179, 2007.
15. Yoo, H. H., Kwak, J. Y., and Chung, J., "Vibration Analysis of Rotating Pre-Twisted Blades with a Concentrated Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 5, pp. 891-908, 2001.

16. Attarnejad, R., and Shahba, A., "Basic Displacement Functions for Centrifugally Stiffened Tapered Beams", *Communications in Numerical Methods in Engineering* (issue 10).doi:10.1002/cnm.1365, 2010.
17. Vinod, K. G., Gopalakrishnan, S., and Ganguli, R., "Free Vibration and Wave Propagation Analysis of Uniform and Tapered Rotating Beams Using Spectrally Formulated Finite Elements", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 18-19, pp. 5875-5893, 2007.
18. Banerjee, J. R., Su, H., and Jackson, D. R., "Free Vibration of Rotating Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 4-5, pp. 1034-1054, 2006.
19. Wang, G., and Wereley, N. M., "Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 42, No. 1-2, pp. 2429-2437, 2004.
20. Chang, C. C., and Chen, L. W., "Damage Detection of Cracked Thick Rotating Blades by a Spatial Wave Let Based Approach", *Applied Acoustics*, Vol. 65, No. 11, pp. 1095-1111, 2004.
21. Kim, S. S., and Kim, J. H., "Rotating Composite Beam with a Breathing Crack", *Composite Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 83-90, 2003.
22. Kuang, J. H., and Huang, B. W., "The Effect of Blade Cracks on Mode Localization in Rotating Bladed Disks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 1, pp. 85-103, 1999.
23. Huang, B. W., "Effect of Number of Blades and Distribution of Cracks on Vibration Localization in a Cracked Pre-Twisted Blade System", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, No. 1, pp. 1-10, 2006.
24. Masoud, A. A., and Al-Said, S., "A New Algorithm for Crack Localization in a Rotating Timoshenko Beam", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, pp. 1541-1561, 2009.
25. Yoo, H. H., Cho, J. E., and Chung, J., "Modal Analysis and Shape Optimization of Rotating Cantilever Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 1-2, pp. 223-241, 2006.
26. Zhou, J. K., *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits*, Wuhan, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
27. Ozdemir, O. O., and Kaya M. O., "Flap Wise Bending Vibration Analysis of a Rotating Tapered Cantilever Bernoulli-Euler Beam by Differential Transform Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, 2006, pp. 413-420, 2006.
28. Mei, C., "Application of Differential Transformation Technique to Free Vibration Analysis of a Centrifugally Stiffened Beam", *Computers and Structures*, Vol. 86, pp. 1280-1284, 2008.
29. Suddoung, K., and Charoensuk J. and Wattanasakulpong N., "Application of the Differential Transformation Method to Vibration Analysis of Stepped Beams with Elastically Constrained Ends", *Journal of Vibration and Control*, DOI: 10.1177/1077546312456581.
30. Lin, H. P., "Direct and Inverse Methods on Free Vibration Analysis of Simply Supported Beams with a Crack", *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 427-436, 2004.
31. Zhou, D., and Cheung, Y. K., "The Free Vibration of a Type of Tapered Beam", *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 188, No. 1-3, pp. 203-216, 2000.
32. Chaudhari, T. D., and Maiti, S. K., "Modeling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge Crack", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, No. 4, pp. 425-445, 1999.