

بهبود تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل سه بعدی

احمد گنجعلی^{۱*} و بهروز حسنی^۲

۱. دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود

۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۲/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۱۰/۲۲)

چکیده - اولین روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی مسئله‌های دو بعدی، بر پایه استفاده از خاصیت فوق همگرایی در نقاط گوسی، توسط حسنی و همکاران معرفی شد. در این مقاله به توسعه این روش در تحلیل ایزوژئومتریکی مسئله‌های سه بعدی و بررسی تأثیر استفاده از این نقاط نمونه جهت بهبود حل و برآورد خطای آن پرداخته شده است. به منظور بررسی کارایی این نقاط بهینه تنش در برآورد خطای مسئله‌های سه بعدی به مدل سازی دو مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. نتایج به دست آمده از این پژوهش، کارایی مناسب این نقاط بهینه تنش را در بهبود حل و برآورد خطای تحلیل سه بعدی مسئله‌ها به روش ایزوژئومتریکی نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریکی، مسئله‌های سه بعدی، برآورد خطا، بازیافت تنش.

Stress Improvement and Error Estimation in Isogeometric Analysis of Three Dimensional Problems

A. Ganjali¹ and B. Hassani²

1. Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Shahrood Branch

2. Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract: An isogeometrical approach, based on using the superconvergent property of the Gauss integration points, for error estimation and stress recovery of two-dimensional problems was introduced by Hassani et. al. In this paper, the method is further developed to deal with the isogeometrical analysis of three-dimensional problems. To investigate the performance of the approach in using the optimal stress points, two 3D examples with available analytical solutions are taken into consideration. The obtained results are indicative of the good performance of the method in improvement of stress and error estimation of 3D problems in the isogeometric analysis method.

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ahmad.ganjali@yahoo.com

Keywords: *Isogeometric analysis, 3D problems, error estimation, stress recovery.*

فهرست علائم

ماتریس کرنش واحد در مسائل سه بعدی	B	بردار نقاط کنترلی نریز	P
منحنی مربوط به توابع پایه بی - اسپلاین و یا نریز	$C(\xi)$	بردار محلی نقاط کنترلی نریز	\bar{P}
ماتریس خواص ارتجاعی مصالح در مسائل سه بعدی	D	بردار مؤلفه مجهول نقاط کنترلی نریز تنش α	P_α
نرم خطای انرژی دقیق	$\ e\ $	ماتریس محلی توابع پایه ای نسبی قطعه ای نریز	\bar{R}
نرم خطای انرژی تقریبی	$\ \bar{e}\ $	سطح تعریف شده توسط توابع پایه بی - اسپلاین و یا نریز	$S(\xi, \eta)$
نرم خطای L_2 تقریبی	$\ e_\sigma\ _{L_2}$	حجم تعریف شده توسط توابع پایه نریز	$V(\xi, \eta, \zeta)$
بردار نیروهای خارجی وارد بر کل دامنه	F	بردار تغییر مکان دقیق هر نقطه در داخل زیر دامنه نریز	u
بردار نیروهای خارجی وارد بر المان	F_e	بردار تغییر مکان تقریبی هر نقطه در داخل زیر دامنه نریز	\bar{u}^P
تابع اختلاف تنش بهبود یافته و تنش ایزوژئومتریکی مؤلفه تنش α	$F(P_\alpha)$	بردار گرهی در فضای پارامتری ξ	Ξ
ماتریس ضرایب مربوط به کل دامنه مسئله	K	بردار گرهی در فضای پارامتری η	H
ماتریس ضرایب مربوط به المان	K_e	بردار گرهی در فضای پارامتری ζ	ζ
عملگر دیفرانسیل در مسائل سه بعدی	L	بردار کرنش در مسائل سه بعدی	e
i امین تابع پایه ای بی اسپلاین از درجه صفر	$N_{i,0}(\xi)$	بردار تنش در مسائل سه بعدی	s
i امین تابع پایه ای بی اسپلاین از درجه P	$N_{i,P}(\xi)$	بردار تنش بهبود یافته در مسائل سه بعدی	s^*
توابع پایه ای نسبی قطعه ای نریز	$R_{i,j}(\xi, \eta)$	نقاط کنترلی حجم نریز	$P_{i,j,k}$

۱ - مقدمه

رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به کمک رایانه به وجود نیامد. برای اولین بار، ورود تکنیک های طراحی به کمک رایانه در سال های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان و هولینگ صورت پذیرفت [۱، ۲ و ۳] که در آن به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایه اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نریز (بی - اسپلاین های نسبی غیریکنواخت)^۲ که از توسعه توابع اسپلاین به دست می آیند، توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریکی نام گرفت [۴]. در این روش ضمن استفاده از

تقریباً یک دهه پس از شکل گیری روش اجزای محدود و بین سال های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، به دلیل توسعه رایانه ها، پیشرفت های چشمگیری در علم مدل سازی هندسه به کمک رایانه^۱ شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت ها می تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص خود نماید، اما به دلیل عدم هم زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش های طراحی به کمک

خواص توابع پایه اسپلاین و نرَبز در تعریف منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آنها جهت درونیابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتریکی در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل ملاحظه در اقتناع شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرائب آنها خود تابعی متغیر می‌باشند اشاره کرد [۵]. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریکی به سرعت در زمینه‌های مختلفی همچون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. هم‌چنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [۶].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به‌شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققین در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. در حالت کلی روش‌های برآورد خطا در دو دسته روش‌های بازیافت تنش (گرادیان) و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند [۷]. بازیافت تنش روشی به‌منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل عددی مسائل می‌باشد. با استفاده از بازیافت تنش، یک جواب نزدیک به حل دقیق محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه خواهد داشت. از جمله ابتدایی‌ترین روش‌های بازیافت تنش در اجزای محدود می‌توان به روش تصویر L_2 که توسط اودن و براچلی در سال ۱۹۷۱ [۸] و روش میانگین‌گیری که توسط هیتن و کمپیل در سال ۱۹۷۴ [۹] به‌کار برده شده است اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲ روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا SPR^3 توسط زینکوویچ و زو ابداع شد [۱۰]. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق همگرا است که در آنها تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در سال ۱۹۹۴ تابارا، بلیکر و

بلچکو، طی ارائه مقاله‌ای، بازیابی تنش را با استفاده از درونیابی حداقل مربعات متحرک برای آن دسته از مسائل اجزای محدود که از درجه C^1 بودند، پیشنهاد کردند [۱۱]. در سال ۱۹۹۴ ویبرگ، عبدالوهاب و زیوکاس طی مقاله‌ای سعی نمودند با اضافه کردن شرایطی به روش SPR، روش مذکور را بهبود بخشند [۱۲]. در سال ۱۹۹۷ برومند و زینکوویچ روش قدرتمند دیگری در برآورد خطا ارائه کردند که نسبت به روش‌های قبلی دارای هیچ محدودیتی نبود [۱۳ و ۱۴]. این روش قابل استفاده در اکثر مسائل به‌ویژه مسائل پلاستیک است که این ویژگی یک مزیت مهم به‌شمار می‌آید. بعد از آن نیز تکنیک‌های بسیار دیگری توسط محققین ابداع شد که در هر یک به‌نوعی به بهبود روش‌های قبلی پرداخته می‌شود که به‌عنوان نمونه می‌توان به روش‌های LP [۱۵] و SPR-C [۱۶] و یا روش ارائه شده در مرجع [۱۷] اشاره کرد.

استفاده از روش بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [۵]. اساس روش آنها برگرفته از دقت بیشتر تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط نمونه گوسی برای هر مؤلفه تنش در حالت دو بعدی تنش و کرنش مسطح، یک سطح بهبود یافته تشکیل می‌شود که جهت برآورد خطای ایزوژئومتریکی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵].

با توجه به اینکه تحلیل مسائل سه بعدی، کاربرد ویژه‌ای در طراحی مهندسی و حل مسائل واقعی دارد، ارائه یک راهکار مؤثر جهت برآورد خطا و افزایش قابلیت اعتماد نتایج حاصل از تحلیل سه بعدی مسائل، از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. در تحقیق حاضر به توسعه روش ارائه شده در مسائل دوبعدی، جهت بازیافت تنش و برآورد خطای روش ایزوژئومتریکی در تحلیل مسائل سه بعدی پرداخته شده است. بدین منظور به مدل‌سازی و تحلیل دو مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. تیر طره با مقطع دایره و مربع دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق و دقت بیشتر مؤلفه‌های تنش

در این صورت i امین تابع پایه‌ای بی‌اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی‌اسپلاین از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (4)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای^۱ است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی‌اسپلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به صورت (۲)، با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می‌توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آنها نوشت. به طرز مشابهی سطوح بی‌اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (5)$$

که در آن:

$$\Xi = \left\{ 0, \dots, 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

$$H = \left\{ 0, \dots, 0, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\} \quad (6)$$

به طوری که بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و H دارای $s+1$ گره می‌باشد. هم‌چنین یک منحنی نربز از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

بازیافتی نسبت به حل ایزوژئومتریکی برای دو مثال حل شده در این پژوهش، می‌توان بیان نمود که نقاط نمونه گوسی در بهبود حل و برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل سه بعدی نیز مؤثر بوده و قابل استفاده می‌باشند.

در بخش دوم به چگونگی تولید هندسه سه بعدی با استفاده از تکنیک نربز در تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته شده است. بخش سوم فرمول‌بندی تحلیل سه بعدی مسائل با استفاده از روش ایزوژئومتریکی را بیان می‌کند. در بخش چهارم نحوه تشکیل تنش بهبود یافته در تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل سه بعدی بیان می‌شود و در بخش پنجم به تعریف نرم خطا و شاخص تأثیر پرداخته شده است. بخش ششم و هفتم نتایج به دست آمده از مدل‌سازی و تحلیل دو مثال نمونه در روش ایزوژئومتریکی و برآورد خطای آنرا بیان می‌کند و در نهایت در بخش هشتم به بیان نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲- معرفی تکنیک نربز در تولید هندسه

نربزها از بی‌اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی‌اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)^۲ تعریف می‌شوند. نواحی مذکور، دامنه مدل‌سازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی^۵ در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود [۱۸]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

$$\xi_{i+1} \geq \xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n+p+1$$

که در آن x_i امین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی‌اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره‌ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره‌ای به نام بردارهای گره‌ای نامتناوب^۶ (یا باز)^۷ استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

و در نهایت مشابه منحنی‌ها و سطوح، برای احجام نریز نیز می‌توان نوشت [۱۸]:

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}} \times \frac{(\eta) N_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{(\xi) N_{j,q}(\eta) (\eta) N_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}} P_{i,j,k} \quad (11)$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k} P_{i,j,k} \quad 0 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$$

در این رابطه بردار گرهی ξ و η مطابق (۶) و ζ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = \left\{ 0, \dots, 0, \zeta_{r+1}, \dots, \zeta_{z-r-1}, 1, \dots, 1 \right\}_{r+1} \quad (12)$$

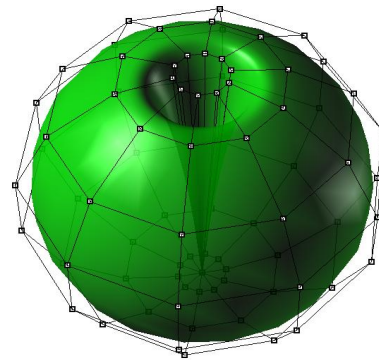
که دارای $z+1$ گره می‌باشد. نقاط کنترلی که به تعداد $(n+1) \times (m+1) \times (l+1)$ می‌باشند. $w_{i,j,k}$ وزن‌های متناظر با نقاط کنترلی $P_{i,j,k}$ و $N_{i,p}(\xi)$ ، $N_{j,q}(\eta)$ و $N_{k,r}(\zeta)$ به ترتیب توابع پایه بی-اسپلاین از درجه p ، q و r می‌باشند.

به طور مثال در شکل ۱ شبکه نقاط کنترلی و حجم تولید شده از آن با استفاده از تکنیک نریز نشان داده شده است.

۳- فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریکی در مسائل سه بعدی

کلی‌ترین مسائل در تحلیل سازه‌ها، مسائل سه بعدی هستند که در صنعت نیز کاربرد فراوان دارند. در این مسائل هزینه ساخت شبکه اجزای محدود نسبت به مسائل دو بعدی، به دلیل پیچیده بودن هندسه آن بسیار بیشتر است. بنابراین به نظر می‌رسد حل این مسائل به کمک روش ایزوژئومتریکی از اهمیت بیشتری برخوردار باشد.

در مکانیک محیط‌های پیوسته، سازه‌های سه بعدی در هر نقطه، دارای سه درجه آزادی تغییر مکانی است. در این مسائل شش مؤلفه کرنش وجود دارد. ماتریس کرنش را در مسائل سه بعدی می‌توان به صورت زیر نوشت:



شکل ۱- شبکه نقاط کنترلی و حجم نریز مربوط به آن

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (v)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره‌ای به صورت (۲) تعریف شده‌اند.

یک سطح نریز که در جهت X از درجه p ، و در جهت η از درجه q باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

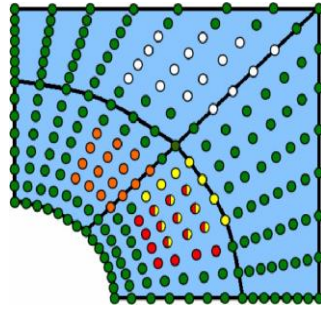
$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (8)$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ هم‌چنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای به صورت (۶) تعریف شده‌اند. اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را در (۸) به صورت زیر تعریف کنیم:

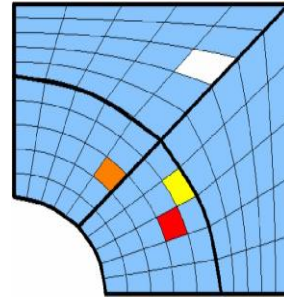
$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (9)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (10)$$



شکل ۲-ب) شبکه نقاط کنترلی



شکل ۲-الف) شبکه المان‌ها

شکل ۲- نقاط کنترلی مورد تأثیر هر المان از دامنه دو بعدی مدل‌سازی شده با چهار وصله و توابع شکل نربز درجه سه

می‌باشند [۱۰]، می‌توان برای کاهش هزینه محاسبات، معادله (۱۶) را به صورتی که در ادامه بیان خواهد شد، تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم ξ ، η و ζ به ترتیب در دهانه‌های گره‌ای i ام، j ام و k ام قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ ، $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1})$ و $\zeta \in [\zeta_k, \zeta_{k+1})$)، در جهت بردار گره‌ای H ، q و جهت بردار گره‌ای Ξ ، p در جهت بردار گره‌ای r باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)(r+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت هر المان نربز تنها بر تعداد مشخصی از نقاط کنترلی پیرامون خود تأثیرگذار است. به‌طور مثال در شکل ۲ شبکه المان‌ها و نقاط کنترلی دامنه مدل‌سازی شده با چهار وصله توسط توابع پایه نربز درجه سه برای یک مسئله دوبعدی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر المان نربز در بازه تأثیر خود دارای $16 = (3+1)(3+1)$ نقطه کنترلی است.

با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع نربز می‌توان (۱۶) را به صورت (۱۷) بیان نمود. که در آن ماتریس محلی توابع پایه‌ای نسبی نربز و بردار محلی مختصات نقاط کنترلی به صورت (۱۸) و (۱۹) بیان می‌شوند:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j,k} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{i,j,k}(x, y, z) \\ \mathbf{v}^{i,j,k}(x, y, z) \\ \mathbf{w}^{i,j,k}(x, y, z) \end{Bmatrix} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \\ \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y \\ \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (13)$$

که در این رابطه:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix} \quad (14)$$

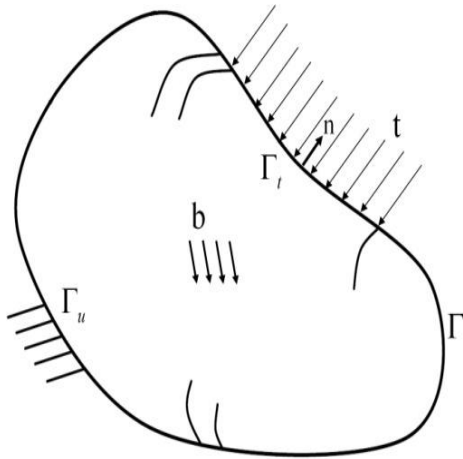
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (15)$$

بنابراین در مسائل سه بعدی سه مؤلفه تغییر مکانی u ، v و w باید تقریب زده شوند. در روش ایزوژئومتری یک این کار با استفاده از توابع پایه نربز به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}}^P(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^m R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{P}_{i,j,k}^P \quad (16)$$

که در این رابطه $R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta)$ مطابق (۱۱) توابع پایه نربز می‌باشد و $\mathbf{P}_{i,j,k}^P$ متغیرهای کنترلی مربوط به زیردامنه p در مسئله هستند.

با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع نربز که بیان می‌کند برای هر ξ ، η و ζ فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر



شکل ۳- شرایط مرزی یک مسئله الاستیسیته

تعیین تغییر مکان در جهت x, y, z بردار \bar{P} می‌باشد. محدودیتی که بردار مؤلفه‌های چهارم مختصات نقاط کنترلی نریز را برای هر مؤلفه تغییر مکان مشخص می‌کند، ارضای معادله دیفرانسیل تعادل در دامنه تحلیل ایزوژئومتریکی است.

معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی نیرو و جابه‌جایی حاکم بر یک مسئله الاستیسیته را می‌توان به صورت (۲۰) تعریف نمود:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \mathbf{s} + \mathbf{b} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{s}_{ij} \mathbf{n}_j &= \mathbf{t}_i & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u}_i &= \hat{\mathbf{u}}_i & \text{on } \Gamma_u \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن عملگر مشتق است و به صورت (۱۴) تعریف می‌شود. \mathbf{u} و \mathbf{b} به ترتیب بردارهای جابه‌جایی و نیروهای حجمی، \mathbf{s} مشابه رابطه (۲۸)، بردار ستونی مؤلفه‌های تنش و \mathbf{s}_{ij} ماتریس مربعی تنش می‌باشند. \mathbf{t}_i نیروهای سطحی از پیش تعیین شده بر روی مرز طبیعی Γ_t و $\hat{\mathbf{u}}_i$ جابه‌جایی از پیش تعیین شده بر روی مرز ضروری Γ_u و \mathbf{n}_j بردار یکه عمود بر هر نقطه از مرز طبیعی و به سمت خارج سطح می‌باشد (شکل ۳ را ببینید).

با جایگذاری (۱۷) در (۲۰) و با استفاده از روش تغییر مکان مجازی و یا روش مینیم کردن تابع پتانسیل صورت ضعیف معادله (۲۰) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\mathbf{D} \bar{\mathbf{P}}) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (21)$$

که در آن $\bar{\mathbf{R}}$ و $\bar{\mathbf{P}}$ مطابق با (۱۸) و (۱۹)، \mathbf{D} ماتریس خواص

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{e=i-p}^i \sum_{f=j-q}^j \sum_{g=k-r}^k R_{e,f,g}(\xi, \eta, \zeta) P_{u_{e,f,g}} \\ &\sum_{e=i-p}^i \sum_{f=j-q}^j \sum_{g=k-r}^k R_{e,f,g}(\xi, \eta, \zeta) P_{v_{e,f,g}} \\ &\sum_{e=i-p}^i \sum_{f=j-q}^j \sum_{g=k-r}^k R_{e,f,g}(\xi, \eta, \zeta) P_{w_{e,f,g}} \end{aligned} \right\} = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{P} \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ R_{i-p,j-q,k}(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q,k}(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q,k}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ R_{i-p,j,k}(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j,k}(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j,k}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_{u \ i-p,j-q,k-r} \\ P_{v \ i-p,j-q,k-r} \\ P_{w \ i-p,j-q,k-r} \\ \mathbf{M} \\ P_{u \ i-p,j-q,k} \\ P_{v \ i-p,j-q,k} \\ P_{w \ i-p,j-q,k} \\ \mathbf{M} \\ P_{u \ i-p,j,k} \\ P_{v \ i-p,j,k} \\ P_{w \ i-p,j,k} \\ \mathbf{M} \\ P_{u \ i,j,k} \\ P_{v \ i,j,k} \\ P_{w \ i,j,k} \end{bmatrix} \quad (19)$$

با توجه به (۱۷) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای

مؤلفه‌های اول، دوم و سوم مختصات این نقاط هندسه مسئله را در حالت سه بعدی برآورد کنند. در این صورت مؤلفه چهارم مختصات نقاط کنترلی برای هر مؤلفه تغییر مکان طوری محاسبه می‌شود که در هر نقطه از فضای سه بعدی مسئله مقدار آن تقریب زده شود. بنابراین در یک مسئله سه بعدی هندسه مسئله به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} X(x, y, z) \\ Y(x, y, z) \\ Z(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^1 R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) P_{x,i,j,k} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^1 R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) P_{y,i,j,k} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^1 R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) P_{z,i,j,k} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

در روابط فوق توابع پایه نریز $R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta)$ برحسب مختصات ξ, η, ζ و ζ نوشته شده‌اند که همانند روش اجزای محدود لزوم نیاز به نگاشت در محاسبات را ایجاب خواهد کرد. جهت اطلاع از نحوه انجام این نگاشت و آشنایی با فضاهای مختلف محاسباتی در روش ایزوژئومتری می‌توان به [۶] مراجعه کرد.

۴- نحوه محاسبه تنش بهبود یافته

در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مؤلفه تنش در هر ناحیه به صورت یک حجم نریز با مؤلفه چهارم مجهول نقاط کنترلی در نظر گرفته می‌شود. این حجم از سه مؤلفه اول نقاط کنترلی که هندسه مسئله را تولید می‌کنند، به دست می‌آید. در این صورت مؤلفه چهارم نقاط کنترلی طوری محاسبه می‌شود که با استفاده از توابع شکل نریز، مقدار هر مؤلفه تنش به صورت بهبود یافته تقریب زده شود. اساس محاسبه مختصات مؤلفه چهارم نقاط کنترلی برای هر مؤلفه تنش و در نتیجه به دست آوردن تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت تقاطعی است که در آنها تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود که اولین بار توسط

مصالح و \mathbf{B} ماتریس مشتقات توابع شکل نریز به صورت (۲۲) و (۲۳) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & (1-2\nu)/2 & 0 \\ & & & & & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{L} \end{matrix} \quad (23)$$

همچنین می‌توان (۲۱) را به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \quad (24)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس ضرایب، $\bar{\mathbf{P}}$ مجهولات مسئله و \mathbf{F} نیروهای خارجی وارد بر دامنه می‌باشند. حال با گسسته سازی دامنه، \mathbf{K} و \mathbf{F} به ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با (۲۵) ساخته می‌شوند:

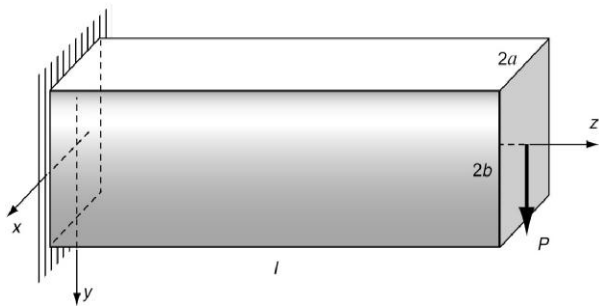
$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T (\mathbf{D}\mathbf{B}) d\Omega \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

و در نهایت با حل (۲۴) و مشخص شدن بردار $\bar{\mathbf{P}}$ می‌توان مؤلفه‌های کرنش و تنش را به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{P}} \quad , \quad \mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (26)$$

مشابه روش اجزای محدود در روش ایزوژئومتری نیز از توابع پایه یکسان جهت تقریب تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. در این روش مختصات نقاط کنترلی طوری انتخاب می‌شوند که



شکل ۴- تیر طره با مقطع مستطیلی [۲۰]

$$F(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_{i=1}^K (\mathbf{R}_i^T \mathbf{P}_\alpha - \mathcal{Q}_\alpha)^2 \quad \alpha = xx, yy, zz, xy, yz, zx \quad (31)$$

که در آن \mathcal{Q}_α مؤلفه تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه است. در نهایت با مشتق‌گیری از تابع $F(\mathbf{P}_\alpha)$ نسبت به مؤلفه‌های مجهول بردار \mathbf{P}_α و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات چهارم نقاط کنترلی تنش بهبود یافته هر یک از مؤلفه‌ها مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial F(\mathbf{P}_\alpha)}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha \Rightarrow \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_\alpha \quad (32)$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T, \quad \mathbf{B}_\alpha = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathcal{Q}_\alpha \quad \alpha = xx, yy, zz, xy, yz, zx \quad (33)$$

با داشتن مختصات چهارم نقاط کنترلی هر مؤلفه تنش، مقدار مربوط به آن نیز در هر نقطه از دامنه سه بعدی مسئله به دست می‌آید. همان‌گونه که در ادامه خواهیم دید، این میدان مؤلفه تنش نسبت به تنش به دست آمده از روش ایزوژئومتریکی دقیق‌تر می‌باشد و از این رو می‌تواند به عنوان یک تخمین‌کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریکی به کار رود. روش کار این تخمین‌کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین تنش بهبود یافته و تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی برای نقاط مختلف هر المان، می‌توان به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

در ادامه جهت بررسی کارایی تخمین‌کننده خطا، به

بارلو مطرح شده است [۱۹]. در تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل سه بعدی نیز با توجه به اینکه حجم نریز در نهایت تشکیل یک چند جمله‌ای می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که نقاط گوسی در این روش نیز دارای خاصیتی مشابه نقاط نمونه گوسی در اجزای محدود است. مختصات مؤلفه چهارم نقاط کنترلی تنش بهبود یافته، با مینیمم کردن فاصله بین مقدار این تنش فرضی بهبود یافته و مقدار تنش به دست آمده از حل ایزوژئومتریکی در نقاط گوس المان‌های هر ناحیه، با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می‌شود.

در مسائل سه بعدی، می‌توان تنش بهبود یافته هر یک از مؤلفه‌های تنش را با توجه به توابع شکل نریز به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} s_x^* \\ s_y^* \\ s_z^* \\ t_{xy}^* \\ t_{yz}^* \\ t_{zx}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{xx} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{yy} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{zz} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{yz} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

که در آن \mathbf{R} و \mathbf{P}_α مطابق (۲۹) و (۳۰) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{1,1,1}, \mathbf{R}_{1,1,2}, \dots, \mathbf{R}_{1,1,n}, \mathbf{R}_{1,2,1}, \mathbf{R}_{1,2,2}, \dots, \mathbf{R}_{1,2,n}, \dots, \mathbf{R}_{n,m,1}]^T \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_\alpha = [P_{1,1,1}, P_{1,1,2}, \dots, P_{1,1,n}, P_{1,2,1}, P_{1,2,2}, \dots, P_{1,2,n}, \dots, P_{n,m,1}]^T \quad (30)$$

$$\alpha = xx, yy, zz, xy, yz, zx$$

در رابطه (۳۰)، سه مؤلفه اول بردار نقاط کنترلی هر مؤلفه تنش، هندسه مسئله سه بعدی را تقریب می‌زند که معلوم بوده و مؤلفه چهارم که مجهول است، مقدار تنش بهبود یافته را در هر نقطه درونیابی می‌کند. برای تعیین این مقادیر مجهول، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P}_\alpha)$ را برای هر مؤلفه تنش به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

دقیق را به دست آورد معیار دیگری به نام شاخص تأثیر، θ تعریف می‌شود. شاخص تأثیر مطابق رابطه (۳۷)، نسبت معیار خطای انرژی تقریبی کل دامنه مسئله به معیار خطای انرژی دقیق است، که بیانگر نزدیک شدن حل بهبود یافته به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا می‌باشد.

$$\theta = \frac{\|e\|}{\|\bar{e}\|} \quad (37)$$

هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به عدد یک نزدیک باشد.

۶- تیر طره مکعب مستطیلی

در این قسمت به بیان نتایج گرفته شده از مدل‌سازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک در حالت سه بعدی توسط تحلیل ایزوژنومتریکی و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۴ را ببینید). پارامترهای به کار برده شده در مدل‌سازی و آنالیز این تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$a = 1, b = 1, L = 10, P = 300, E = 1500, \nu = 0.25$$

تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن برای تنش‌های غیر صفر، و با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در شکل ۴، به صورت روابط (۳۸) تا (۴۰) ارائه شده است [۲۰]:

$$\tau_{xz} = \frac{2\nu a^2 P}{(1+\nu)\pi^2 I_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}}{n^2 \cosh \frac{n\pi b}{a}} \quad (38)$$

$$\tau_{yz} = \frac{P}{2I_x} (b^2 - y^2) + \frac{\nu P}{6(1+\nu)I_x} \times \left[3x^2 - a^2 - \frac{12a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a}}{n^2 \cosh \frac{n\pi b}{a}} \right] \quad (39)$$

$$\sigma_z = \frac{P}{2I_x} y(1-z) \quad (40)$$

که در آن I_x ممان اینرسی مقطع حول محور x است.

مقایسه شاخص تأثیر و نرم خطای L_2 تقریبی و دقیق و مقایسه مؤلفه‌های تنش ایزوژنومتریکی و تنش بهبود یافته (بازیافتی) با حل دقیق، برای دو مسئله سه بعدی الاستیسیته که دارای حل تحلیلی می‌باشند، پرداخته شده است.

۵- معیارهای بیان خطا

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می‌شود [۷]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (s - \bar{s})^T \mathbf{D}^{-1} (s - \bar{s}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

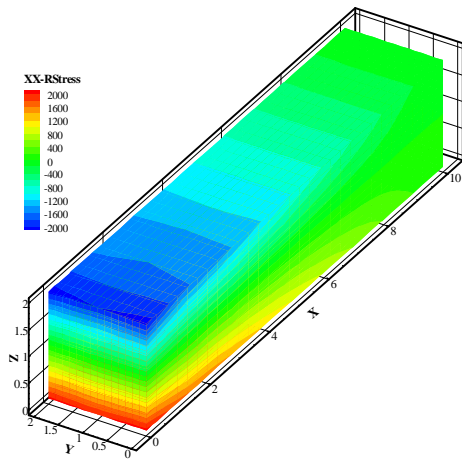
در این رابطه s مقدار دقیق بردار تنش، \bar{s} تنش به دست آمده از حل تقریبی، \mathbf{D} ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی‌باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (s^* - \bar{s})^T \mathbf{D}^{-1} (s^* - \bar{s}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

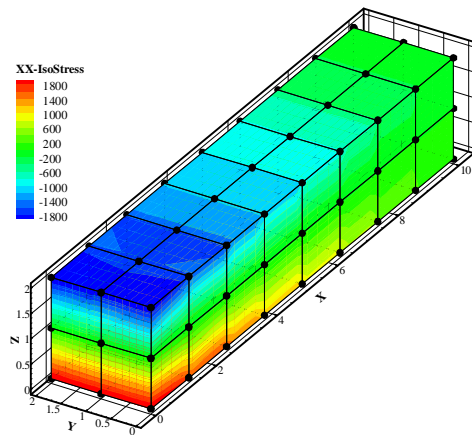
که در اینجا s^* تنش بازیافتی و \bar{s} تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژنومتریکی می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد. هم‌چنین در صورتی که نیاز به تمرکز بر روی یک کمیت خاص باشد از نرم خطای L_2 استفاده می‌شود. نرم L_2 برای خطای تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

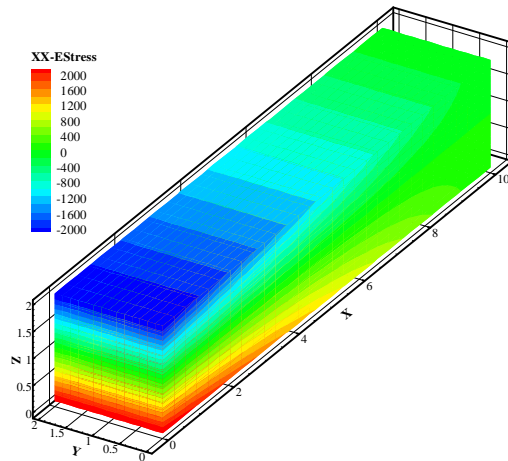
هم‌چنین برای بعضی مسائل خاص که می‌توان معیار خطای



ب) توزیع تنش حاصل از حل بهبود یافته



الف) شبکه نقاط کنترلی و توزیع تنش حاصل از حل ایزوژئومتریکی



ج) توزیع تنش حاصل از حل دقیق

شکل ۵- توزیع تنش σ_x تیر طره مکعب مستطیلی

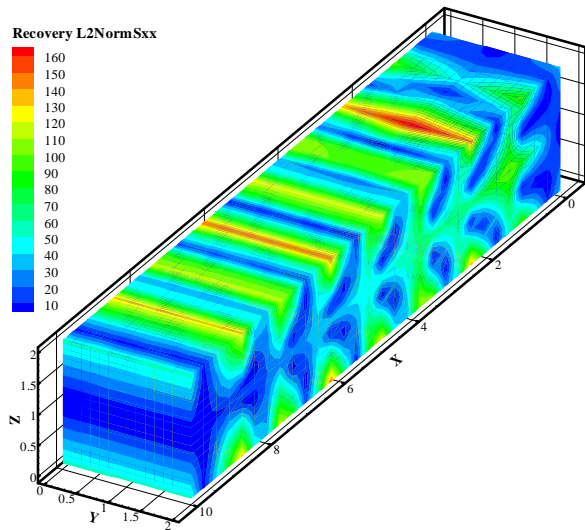
که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به حل ایزوژئومتریکی، تشابه بیشتری با حل دقیق دارد. شاخص تأثیر نرم خطای انرژی برای این مثال $\theta = 0.81$ محاسبه شده است. در شکل‌های ۶، ۷ و ۸ به ترتیب نحوه توزیع نرم خطای L_2 دقیق و تقریبی برای تنش‌های σ_x ، τ_{xy} و τ_{zx} نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تشابه نرم خطای تقریبی و دقیق در این مثال، نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای مسائل سه بعدی با استفاده از روش ایزوژئومتریکی می‌باشد. لازم به ذکر است که این تشابه، در نحوه تغییرات کانتور نرم خطا می‌باشد (اگر چه محدوده آنها متفاوت است)؛

برای مدل‌سازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریکی از یک ناحیه و ۸۱ نقطه کنترلی استفاده شده است. هم‌چنین در هر سه جهت ξ ، η و ζ از توابع شکل نریز درجه یک استفاده شده است و از بیست و هفت نقطه گوسی جهت انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ξ ، η و ζ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

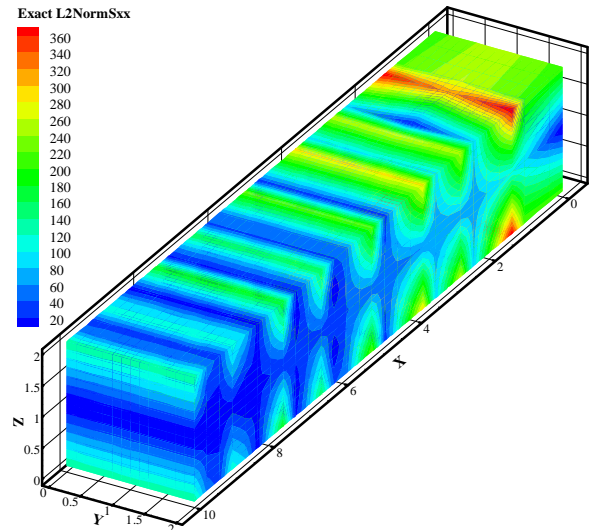
$$\xi = \{0, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}, \quad \zeta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$$

در شکل ۵، نحوه آرایش نقاط کنترلی تیر طره مکعب مستطیلی و کانتور تنش حاصل از حل ایزوژئومتریکی، حل بهبود یافته و حل دقیق برای مؤلفه تنش σ_x نشان داده شده است. همان‌طور

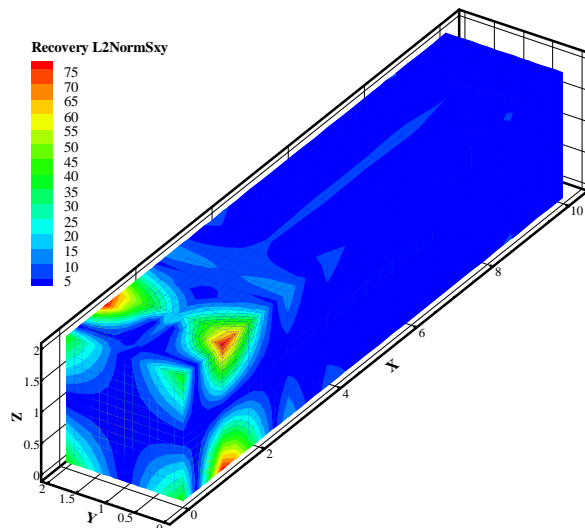


(ب) نرم خطای تقریبی

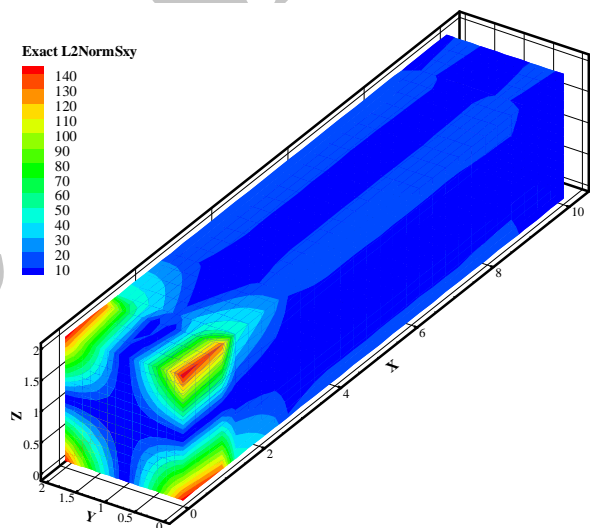


(الف) نرم خطای دقیق

شکل ۶- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش σ_x



(ب) نرم خطای تقریبی

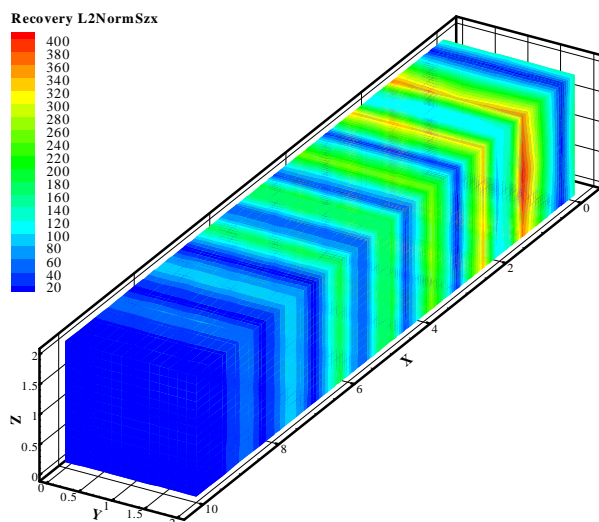


(الف) نرم خطای دقیق

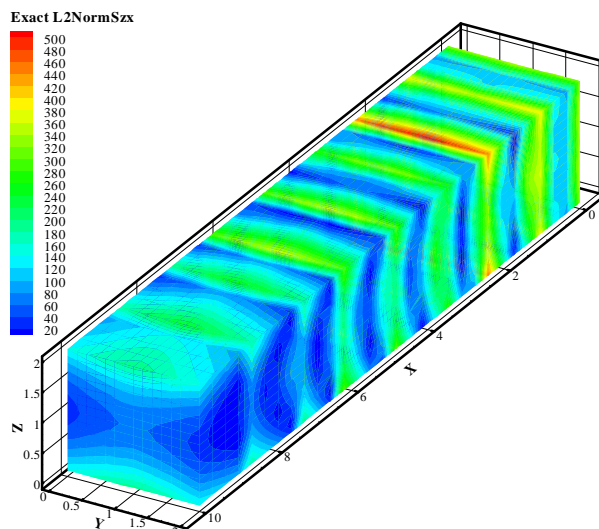
شکل ۷- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{xy}

نقاط دامنه بیشتر است، راهنمایی خواهد کرد. هم چنین جهت مقایسه نحوه تغییرات تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته آن با حل دقیق، در شکل ۹، ۱۰ و ۱۱، به ترسیم مؤلفه‌های مختلف تنش در بعضی از مسیرهای نمونه پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در تمام آنها تنش بهبود یافته نسبت به تنش ایزوژئومتریک دقیق‌تر است.

به طوری که در قسمت‌هایی که نرم خطای دقیق مقدار زیادی را نشان می‌دهد، نرم خطای تقریبی نیز نسبت به سایر نقاط مقدار بیشتری را نشان داده است. این تشابه نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق، نشان می‌دهد که در صورت اتصال الگوریتم تخمین‌کننده خطا به یک زیر برنامه بهبود شبکه، برآورد کننده خطا زیر برنامه بهبود شبکه را به طور صحیح در بهبود محلی شبکه در قسمت‌هایی که خطا نسبت به سایر



ب) نرم خطای تقریبی



الف) نرم خطای دقیق

شکل ۸- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{zx}

یک و در جهت η و ξ از توابع شکل نرَبز درجه دو استفاده شده است و از بیست و هفت نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است. بردارهای گروهی در جهات ξ ، η و ζ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\xi = \{0, 0, 0.166667, 0.333333, 0.5, 0.666667, 0.833333, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.125, 0.25, 0.25, 0.375, 0.5, 0.5, 0.625, 0.75, 0.75, 0.875, 1, 1, 1\}$$

$$\zeta = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

در شکل ۱۳، نحوه آرایش نقاط کنترلی تیر طره استوانه‌ای و کانتور تنش حاصل از حل ایزوژئومتریکی، حل بهبود یافته و حل دقیق برای مؤلفه تنش σ_x نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به حل ایزوژئومتریکی، شباه بیشتری با حل دقیق دارد.

شاخص تأثیر نرم خطای انرژی برای این مثال نیز $\theta = 0.57$ محاسبه شده است. به نظر می‌رسد که علت کاهش شاخص تأثیر و در نتیجه کاهش کارایی برآورد کننده خطا در این مثال نسبت به مثال قبل استفاده از توابع شکل با درجه بالاتر از یک می‌باشد. نتایج عددی نشان می‌دهند که معمولاً در روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش با افزایش درجه توابع

۷- تیر طره استوانه‌ای

مثال دیگری که جهت بررسی کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی در این بخش مورد توجه قرار گرفته است، مدل سازی و تحلیل تیر طره با مقطع دایره می‌باشد (شکل ۱۲ را ببینید). پارامترهای به کار برده شده در مدل سازی و آنالیز این تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$a=4, L=30, P=800, E=1500, \nu=0.25$$

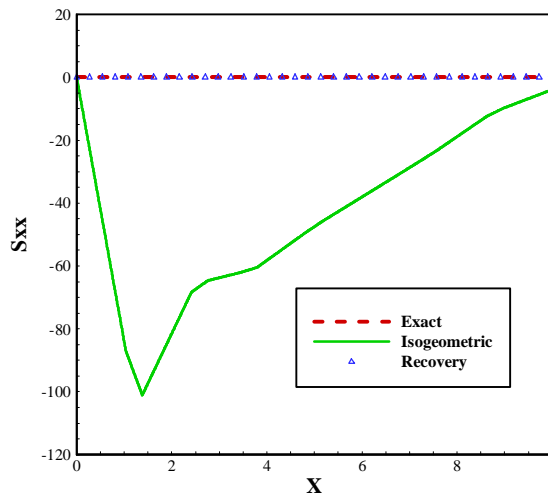
تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن برای تنش‌های غیر صفر و با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در شکل ۱۲، به صورت روابط (۴۱) تا (۴۳) ارائه شده است [۲۰]:

$$\tau_{xz} = -\frac{P}{4I_x} \frac{1+2\nu}{1+\nu} xy \quad (41)$$

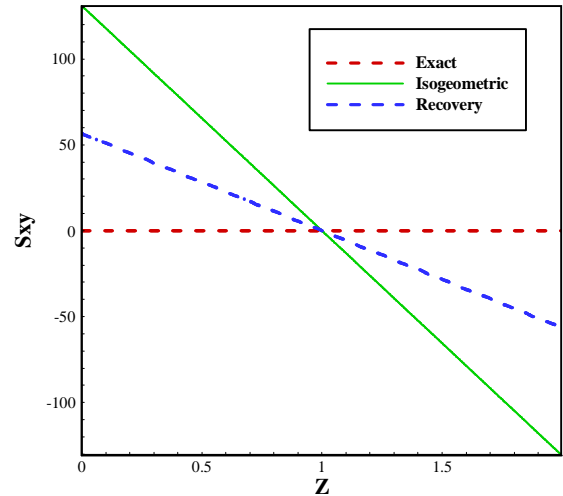
$$\tau_{yz} = \frac{P}{I_x} \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \left[a^2 - y^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} x^2 \right] \quad (42)$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{I_x} y(1-z) \quad (43)$$

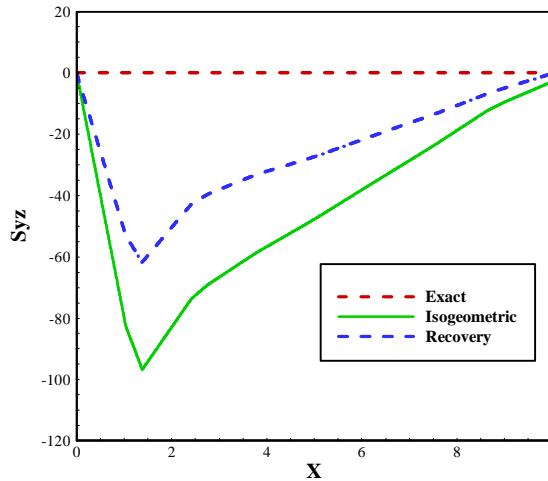
که در آن I_x ممان اینرسی مقطع حول محور x می‌باشد. برای مدل سازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریکی از یک ناحیه و ۳۶۴ نقطه کنترلی استفاده شده است. هم چنین در جهت ξ ، که در راستای طولی تیر می‌باشد از توابع شکل درجه



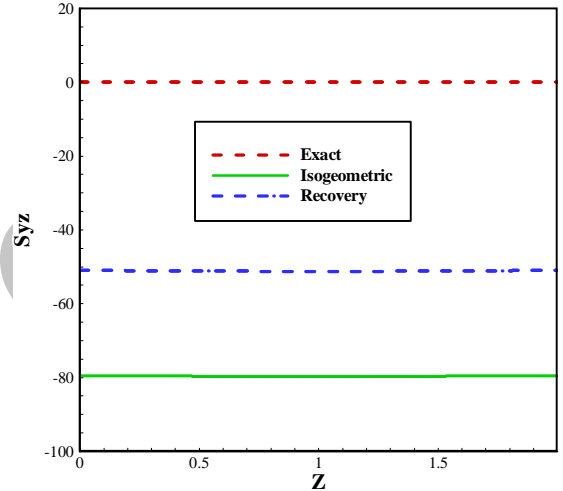
الف) مؤلفه تنش S_x



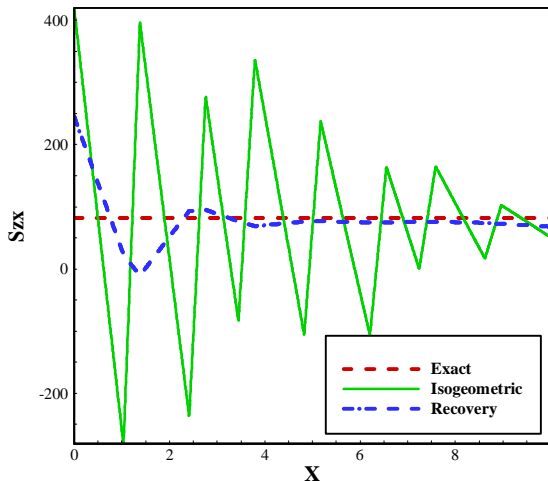
الف) مؤلفه تنش t_{xy}



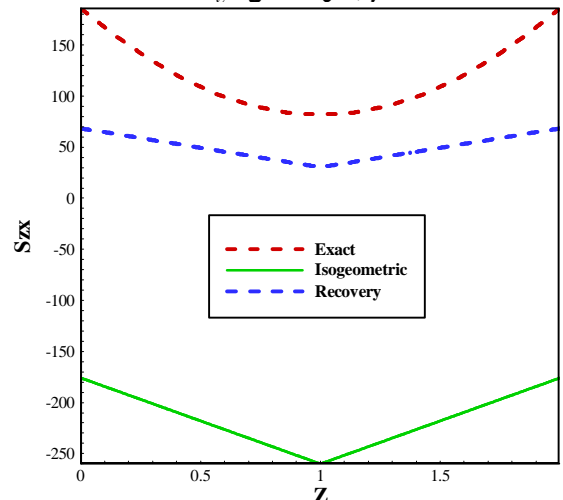
ب) مؤلفه تنش t_{yz}



ب) مؤلفه تنش t_{yz}



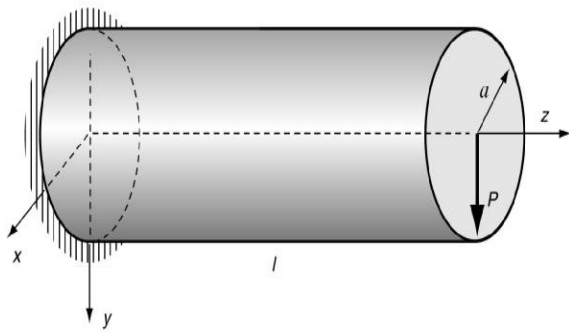
ج) مؤلفه تنش t_{zx}



ج) مؤلفه تنش t_{zx}

شکل ۱۰- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره مکعبی در مسیر $(z=1, y=0)$

شکل ۹- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره مکعبی در مسیر $(x=1, y=0)$

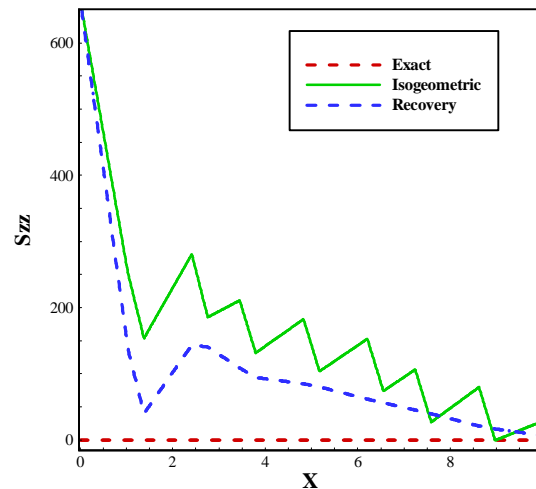


شکل ۱۲- تیر طره با مقطع دایره [۲۰]

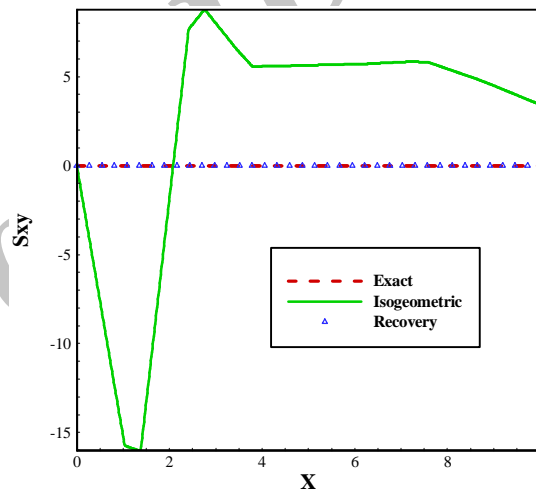
شکل از یک، کارایی برآورد کننده خطا پایین می‌آید [۲۱]. در شکل‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶ به ترتیب نحوه توزیع نرم خطای L_2 دقیق و تقریبی برای تنش‌های σ_x ، τ_{xy} و τ_{zx} تیر طره استوانه‌ای نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تشابه نرم خطای تقریبی و دقیق در این مثال نیز وجود دارد و نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای نتایج تحلیل سه بعدی مسائل با استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌باشد. هم‌چنین در شکل‌های ۱۷، ۱۸ و ۱۹ به ترسیم مؤلفه‌های مختلف تنش در بعضی از مسیرهای نمونه پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز در تمام شکل‌ها، نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به تنش ایزوژئومتریک به تنش دقیق نزدیک‌تر است.

۸- نتیجه‌گیری

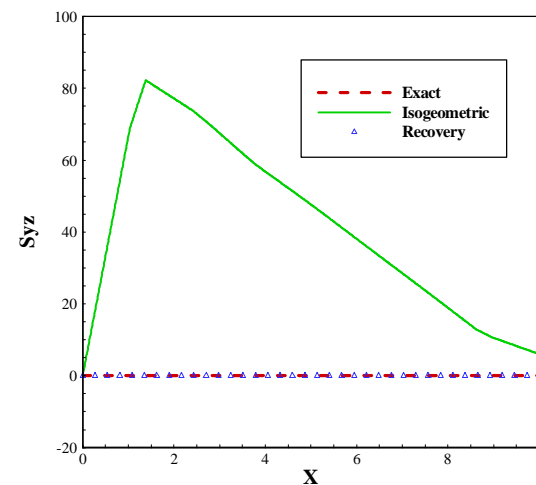
در این مقاله به توسعه روش ارائه شده در مرجع [۵] جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی و تأثیر نقاط نمونه انتگرال‌گیری در تشکیل مؤلفه تنش بهبود یافته پرداخته شد. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در مسائل حل شده در این پژوهش و هم‌چنین نزدیکی توزیع مؤلفه تنش بهبود یافته σ_x به حل دقیق، نسبت به مؤلفه تنش ایزوژئومتریک در این مسائل، و مقدار قابل قبولی که برای شاخص تأثیر به دست آمده، می‌توان بیان نمود که نقاط



الف) مؤلفه تنش S_{zz}

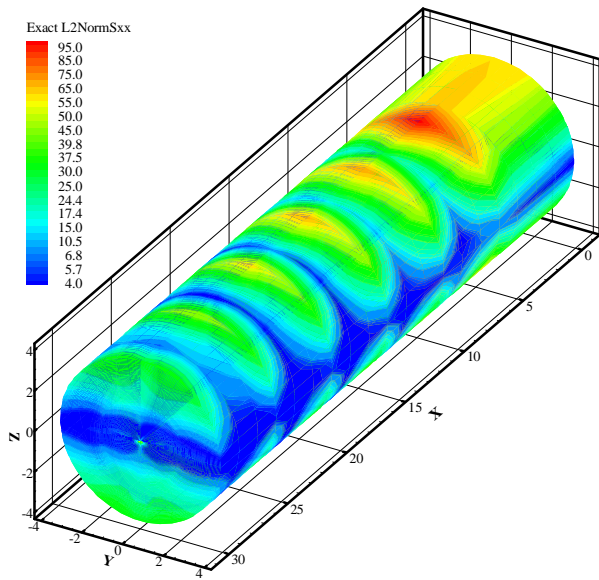


ب) مؤلفه تنش t_{xy}

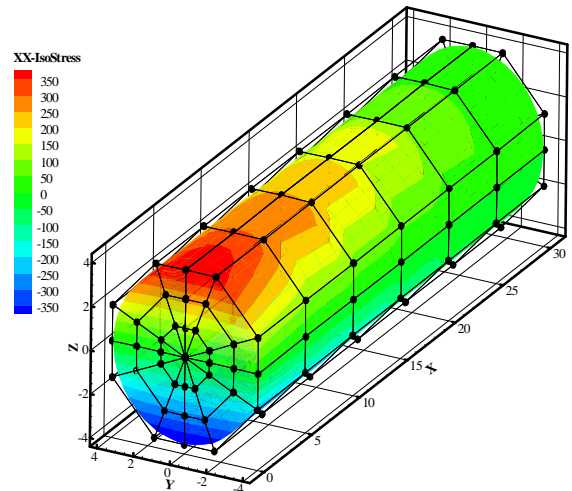


ج) مؤلفه تنش t_{yz}

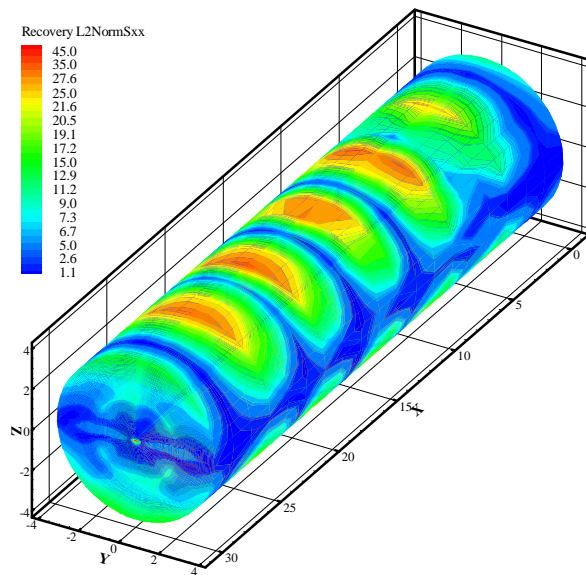
شکل ۱۱- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره مکعبی در مسیر $(z=0, y=1)$



الف) نرم خطای دقیق

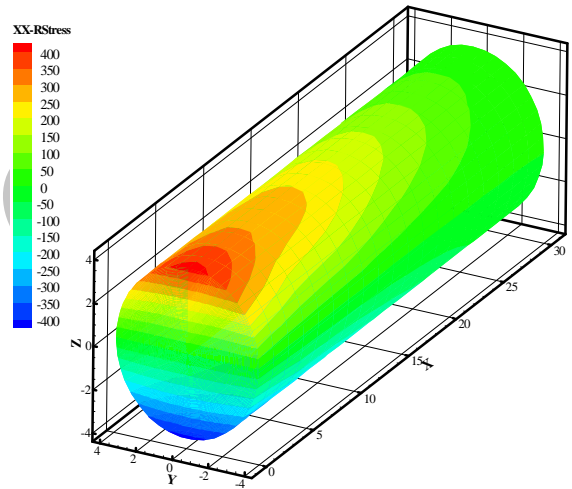


الف) شبکه نقاط کنترلی و توزیع تنش حاصل از حل ایزوژنومتریک

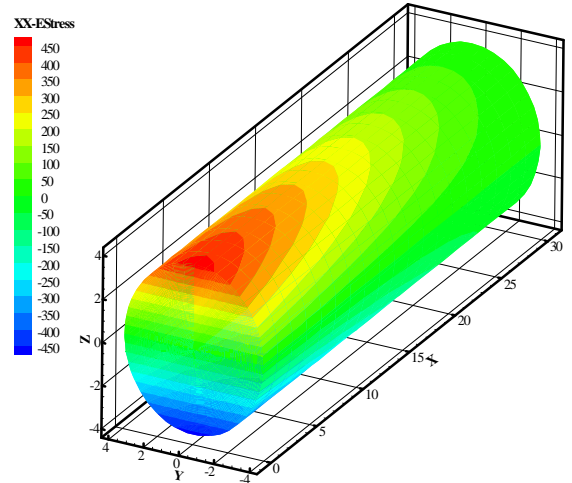


ب) نرم خطای تقریبی

شکل ۱۴- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش S_x

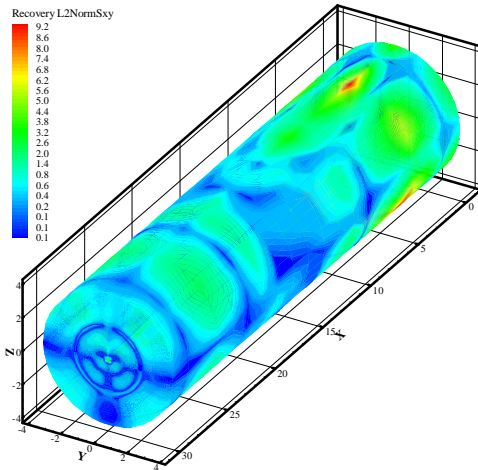


ب) توزیع تنش حاصل از حل بهبود یافته

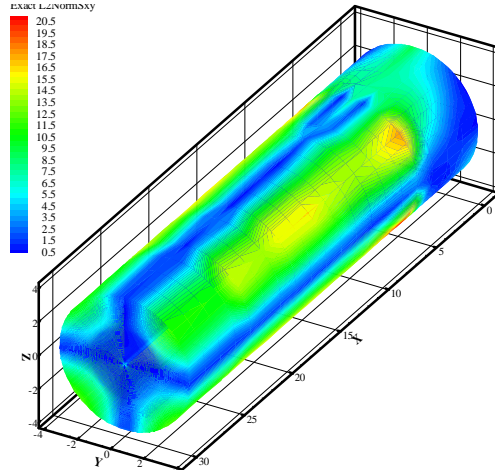


ج) توزیع تنش حاصل از حل دقیق

شکل ۱۳- توزیع تنش S_x تیر طره استوانه‌ای

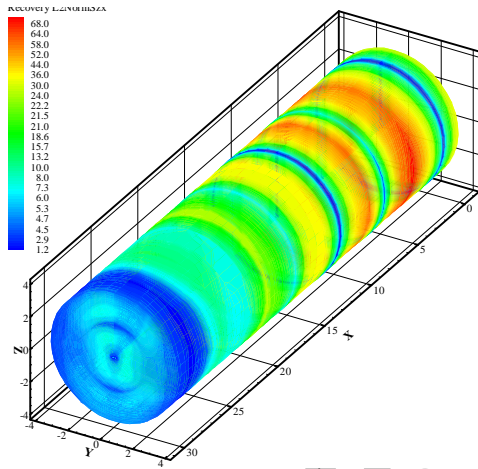


(ب) نرم خطای تقریبی

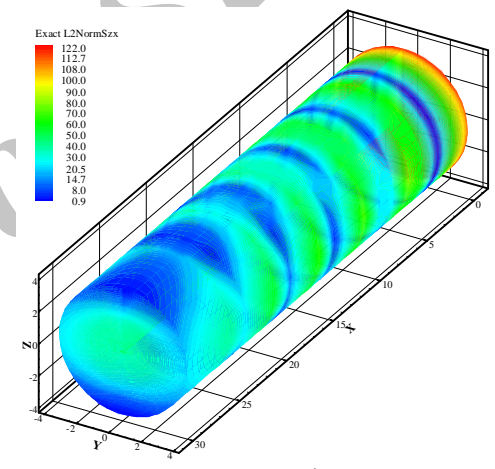


(الف) نرم خطای دقیق

شکل ۱۵- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{xy}

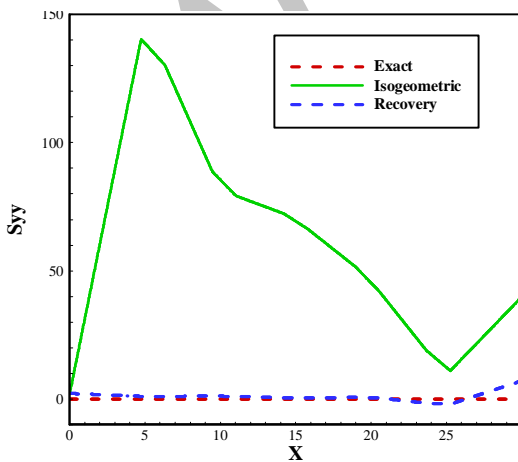


(ب) نرم خطای تقریبی

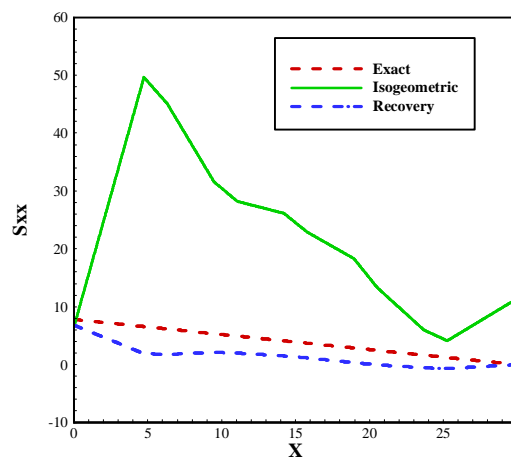


(الف) نرم خطای دقیق

شکل ۱۶- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{zx}

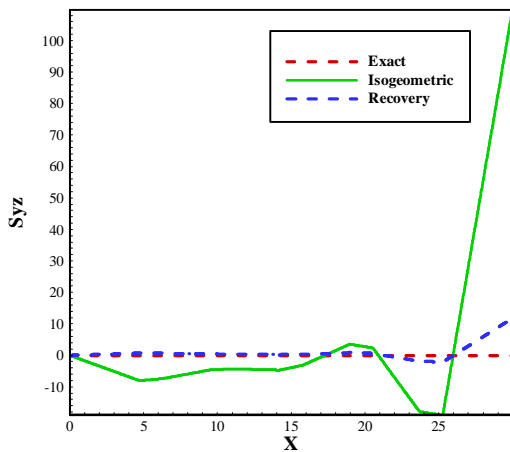


(ب) مؤلفه تنش S_y

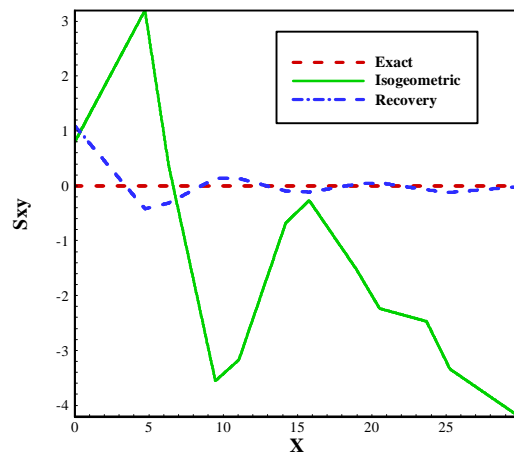


(الف) مؤلفه تنش S_x

شکل ۱۷- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش قائم S_x و S_y حاصل از حل دقیق، ایزومتریک و بهبود یافته تیر طره دایره‌ای در مسیر $(z=0.065, y=0)$

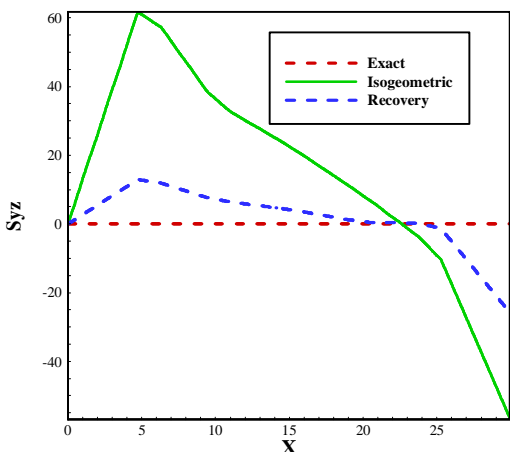


ب) مؤلفه تنش t_{yz}

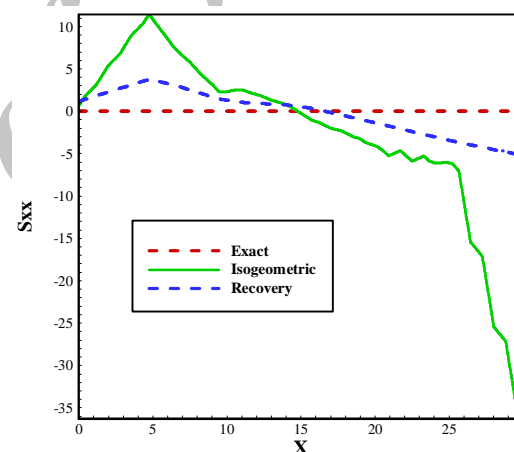


الف) مؤلفه تنش t_{xy}

شکل ۱۸- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش برشی t_{xy} و t_{yz} حاصل از حل دقیق، ایزوژئومتریکی و بهبود یافته تیر طره دایره‌ای در مسیر $(z=0.065, y=0)$



ب) مؤلفه تنش t_{yz}



الف) مؤلفه تنش S_x

شکل ۱۹- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش S_x و t_{yz} حاصل از حل دقیق، ایزوژئومتریکی و بهبود یافته تیر طره دایره‌ای در مسیر $(z=1, y=0.065)$

به‌دست آمده از تحلیل مسائل سه بعدی به‌روش ایزوژئومتریکی نام برد.

نمونه انتگرال‌گیری در تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل سه بعدی نیز از کارایی مناسبی برخوردار است و می‌توان از آنها به‌عنوان راه حلی ساده و مهندسی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش

واژه نامه

- | | | |
|---|----------------------------|-------------------------------|
| 1. computer aided design | 4. patch | 8. piecewise polynomial curve |
| 2. non-uniform rational B-splines (NURBS) | 5. knot Vector | |
| 3. superconvergent patch recovery | 6. nonperiodic knot vector | |
| | 7. open | |

1. Kagan, P., Fischer, A., and Bar-Yoseph, P.Z., "New B-Spline Finite Element Approach for Geometrical Design and Mechanical Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 41, pp. 435-458, 1998.
2. Hollig, K., Reif, U., and Wipper, J., "Weighted Extended B-Spline Approximation of Dirichlet Problems", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 39, 2, pp. 442-462, 2001.
3. Kagan, P., Fischer, A., and Bar-Yoseph, P.Z., "Mechanically Based Models: Adaptive Refinement for B-Spline Finite Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 57, pp. 1145-1175, 2003.
4. Hughes, T. G. R., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 194, pp. 4135-4195, 2005.
5. Hassani, B., Ganjali, A., and Tavakkoli, M., "An Isogeometrical Approach to Error Estimation and Stress Recovery", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol 31, pp. 101-109, 2012.
6. Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Bazilevs, Y., *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.
7. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z., *The Finite Element Method*, 6th ed., Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
8. Oden, T. J., and Brauchli, J., "On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 3, pp. 317-325, 1971.
9. Hinton, E., and Campbell, J., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 8, pp. 461-480, 1974.
10. Zienkiewicz, O. C. and Zhu, Z. "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.
11. Tabbara, M., Blacker, T., and Belytschko, T., "Finite Element Derivative Recovery by Moving Least Square Interpolants", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 117, pp 211-223, 1994.
12. Wiberg, N. E., Abdulwahab, F., and Ziukas, S., "Enhanced Superconvergent Patch Recovery Incorporation Equilibrium and Boundary Conditions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3417-3440, 1994.
13. Boroomand, B., and Zienkiewicz, O. C., "Recovery by Equilibrium in Patches (REP)", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp. 137-164, 1997.
14. Boroomand, B., and Zienkiewicz, O. C., "An Improved REP Recovery and Effectivity Robustness Test", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 3247-3277, 1997.
15. Lee, T., Park, H. C., and Lee, S. W., "A Superconvergent Stress Recovery Technique with Equilibrium Constraint", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1139-1160, 1997.
16. Ródenas, J. J., Tur, M., Fuenmayor, F. J., and Vercher, A., "Improvement of the Superconvergent Patch Recovery Technique by the Use of Constraint Equations: The SPR-C Technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, pp. 705-727, 2007.
17. Payen, D.J., and Bathe, K.J., "The use of Nodal Point Forces to Improve Element Stresses", *Computers and Structures*, Vol. 89, pp. 485-495, 2011.
18. Piegl, L., and Tiller, W., *The NURBS Book*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
19. Barlow, J., "Optimal Stress Locations in Finite Element Models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 10, pp. 243-251, 1976.
20. Sadd, M.H., *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
21. Gratsch, T., and Bathe, K.J., "A Posteriori Error Estimation Techniques in Practical Finite Element Analysis" *Computers and Structures*, Vol. 83, pp. 235-265, 2005.