

# بررسی اثر میرایی ترموالاستیک در مدل غیرخطی تشدیدکننده‌های میکروالکترومکانیکی با روش تربیع دیفرانسیلی

اردشیر کرمی محمدی<sup>۱\*</sup> و نسیم آل‌علی<sup>۲</sup>

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

۲. گروه کشتی سازی، دانشگاه علوم و فنون دریایی خرمشهر

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۷/۰۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۰۴/۳۰)

چکیده - در این مقاله، یک مدل غیرخطی میکروتیر دو سر گیردار تحت اثر بار الکترواستاتیک، اثرات کشش درون صفحه‌ای و میرایی ترموالاستیک در نظر گرفته شده است. فرکانس ارتعاش آزاد با استفاده از گسسته سازی براساس روش تربیع دیفرانسیلی به دست آمده، که به دلیل اتلاف انرژی ناشی از میرایی ترموالاستیک، این فرکانس کمیتهی مختلط است. با تفکیک مقادیر حقیقی و موهومی فرکانس می‌توان ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک را محاسبه کرد. اثرات کشش درون صفحه‌ای و میرایی ترموالاستیک در مقایسه با نتایج مقالات مرجع صحت‌گذاری شدند. تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و متغیرهای هندسی شامل ضخامت، طول و فاصله خازنی بررسی شده و نتایج مدل‌های خطی و غیرخطی در ولتاژهای بالا مقایسه شده‌اند. همچنین نشان داده شده است که در ولتاژهای بالا مدل خطی در محاسبه میرایی ترموالاستیک خطای زیادی دارد و در این ولتاژها باید از مدل غیرخطی استفاده شود.

واژگان کلیدی: ارتعاشات میکروتیر، میرایی ترموالاستیک، ارتعاشات غیرخطی، روش DQ

## On the Effect of Thermoelastic Damping in Nonlinear Micro Electro Mechanical Resonators using Differential Quadrature Method

A. Karami Mohammadi<sup>1\*</sup> and N. AleAli<sup>2</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood

2. Department of Mining Engineering, Koramshahr University of Marine Science and Technology

**Abstract:** In this paper, a nonlinear model of clamped-clamped microbeam actuated by electrostatic load with stretching and thermoelastic effects is presented. Free vibration frequency is calculated by discretization based on DQ method. Frequency is a complex value due to the thermoelastic effect that dissipates the energy. By separating the real and imaginary parts of frequency, quality factor of thermoelastic damping is calculated. Both stretching and thermoelastic effects are validated against the results of the reference papers. The variations of thermoelastic damping versus elasticity modulus, coefficient of thermal expansion

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: akaramim@yahoo.com

and geometrical parameters such as thickness, gap distance, and length are investigated and these results are compared in the linear and nonlinear models for high values of voltage. Also, this paper shows that since for high values of electrostatic voltage the linear model reveals a large error for calculating the thermoelastic damping, the nonlinear model should be used for this purpose.

**Keywords:** Microbeam vibration, nonlinear vibration, thermoelastic damping, differential quadrature method.

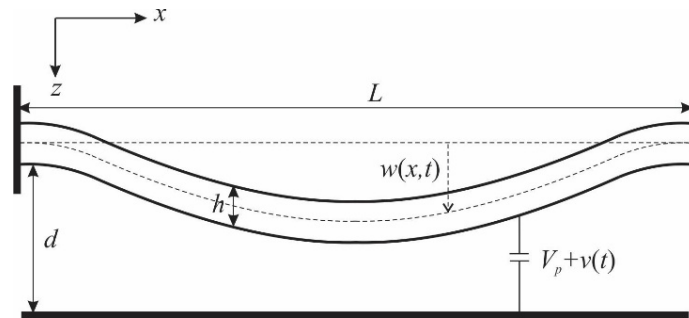
## فهرست علائم

عرض میکروتیر	$b$	دمای صفحه حلقوی	$T$
ثابت گرمایی ویژه در حجم ثابت	$c_v$	دمای تنش-آزاد در حالت تعادل	$T_0$
فاصله خازنی	$d$	ولتاژ استاتیکی بار الکتریکی	$V_p$
ضخامت میکروتیر	$h$	علائم یونانی	
عدد موهومی	$i$	ضریب انبساط گرمایی	$\alpha_T$
شعاع ژیراسیون	$r$	مدول گرمایی	$\beta$
زمان	$t$	ثابت دی الکتریک بین دو صفحه خازن	$\epsilon$
ولتاژ دینامیکی	$v(t)$	اختلاف دمای صفحه با دمای تعادل	$\theta$
خیز میکروتیر	$w$	ضریب هدایت گرمایی	$\kappa$
محور عمودی	$z$	ضریب پواسن	$\nu$
ضرایب DQ	$A_{ij}$	چگالی	$\rho$
مدول الاستیسیته	$E$	قسمت حقیقی فرکانس	$\omega_n$
گشتاور گرمایی	$M^T$	قسمت حقیقی فرکانس خطی	$\omega_{0n}$
ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک	$Q^{-1}$	شکل مود مختلط دمای صفحه	$\Theta_{mn}$
شکل مود مختلط ارتعاشی تیر	$R_n$		

## ۱- مقدمه

ترکیب روش المان محدود و روش حل مقادیر ویژه تأثیر تغییرات هندسی بر روی انرژی هدر رفته توسط میرایی ترموالاستیک را در تشدید کننده‌هایی به شکل تیر، حلقه، دیسک دایره‌ای و بیضوی در اندازه‌های مختلف بررسی کرد. به دلیل وجود مشکلات در حل مسأله مقدار ویژه برآمده از کوپل ترموالاستیکی، یک روش عددی قابل اطمینان برای ارزیابی میرایی ترموالاستیک در میکرو تشدید کننده توسط آردیتو و همکاران [۱۱] ارائه شد؛ این ارزیابی به صورت تئوری و تجربی انجام شد. سرا و بونالدی [۱۲] و چویی [۱۳] فرمولبندی المان محدود خود را براساس شکل ضعیف مسأله مقدار مرزی در شرایط کاملاً گیردار در پیش بینی میرایی

میرایی ترموالاستیک، مکانیزم اتلاف انرژی درون سازه‌ای در ادوات MEMS است که نمی‌توان آن را با طراحی مناسب و روش‌های ساخت از بین برد [۱]. این نوع میرایی برای اولین بار توسط زنر [۲ و ۳] مورد مطالعه قرار گرفت. البلاس [۴] پی برد که میرایی ترموالاستیک در سازه‌های بزرگ اثر ناچیزی دارد. لیفشیتز و روکاس [۵] و متکالف [۶] اهمیت این نوع میرایی را در سیستم‌های الکترومکانیکی میکرو و نانو نشان دادند. پرابهاکار [۷] تحلیل جامعی بر روی تیر اویلر برنولی با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک انجام داد و معادله هدایت حرارتی را در دو بعد (طول و ضخامت) در نظر گرفت. یای [۸-۱۰] با



شکل ۱- مدل تشدید کننده: تیر اویلر- برنولی با در نظر گرفتن کشش درون صفحه‌ای

شدند. تغییرات میرایی ترموالاستیک برحسب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و متغیرهای هندسی شامل ضخامت، طول و فاصله خازنی بررسی شده است و نتایج مدل‌های خطی و غیرخطی در ولتاژهای بالا مقایسه شده‌اند. همچنین نشان داده شده است که در ولتاژهای بالا مدل خطی در محاسبه میرایی ترموالاستیک خطای زیادی دارد و در این ولتاژها باید از مدل غیرخطی استفاده شود.

## ۲- معادلات حاکم

همان‌گونه که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، تشدیدکننده به صورت یک میکروتیر دو سر گیردار مدل شده که یک نیروی الکترواستاتیکی سبب خمش آن شده است. این نیرو ناشی از ولتاژ یکسویه  $V_p$  است و در عرض تیر یکنواخت فرض شده است. خیز میکروتیر با  $w(x,t)$  نشان داده شده و از حل معادله (۱) به دست می‌آید. در این معادله اثر میرایی ترموالاستیک، به مدل غیرخطی اویلر- برنولی [۲۷]، با در نظر گرفتن اثر کشش درون صفحه‌ای، اضافه شده است:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M^T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left\{ P(t) - \frac{1}{L} \int_0^L \left[ N^T - \frac{\partial M^T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \right\} + \frac{1}{2} \epsilon b \frac{(V_p)^2}{(d-w)^2} \quad (1)$$

که در آن  $t$ ,  $E$ ,  $L$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $\epsilon$  و  $\rho$  به ترتیب زمان، مدول یانگ، نیروی محوری اعمال شده، طول، عرض، فاصله بین تیر

ترموالاستیک تشدید کننده ارائه دادند. نایفه و یونس [۱۴] مدلی برای محاسبه ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروصفحه با شکل و شرایط مرزی دلخواه ارائه دادند و یک عبارت تحلیلی جهت حل معادله هدایت گرمایی به دست آوردند.

روش تربیع دیفرانسیلی یا روش DQ می‌تواند به عنوان روش جایگزین برای روش‌های المان محدود و گالریکین مورد استفاده قرار گیرد. اخیراً از روش DQ در آنالیز برخی سازه‌ها استفاده شده است [۱۵-۲۱]. فنگ و برت [۱۵] ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای اویلر برنولی ایزوتروپیک را با استفاده از روش DQ بررسی کردند. لیو و همکاران [۱۹-۲۱] به کمک روش DQ تحلیل‌های متعددی بر روی سازه‌های دو و سه بعدی انجام دادند. لی و چنگ [۲۲] تأثیر تغییر شکل‌های بزرگ را بر فرکانس‌های طبیعی پایه صفحه ایزوتروپیک مستطیلی با استفاده از روش DQ مطالعه کردند. ملک‌زاده مقالات متعددی راجع به ارتعاش آزاد غیرخطی صفحه و تیر تحت اثر بار ارائه داده و با به‌کارگیری روش DQ به حل آنها پرداخته است [۲۳-۲۶].

در این مقاله، یک مدل غیرخطی میکروتیر دو سر گیردار تحت بار الکترواستاتیکی، کشش درون صفحه‌ای و میرایی ترموالاستیک در نظر گرفته شده است. فرکانس ارتعاش آزاد با استفاده از گسسته سازی براساس روش DQ به دست آمده است. به دلیل وجود اثر میرایی ترموالاستیک که اتلاف انرژی را سبب می‌شود فرکانس کمیته مختلط به دست می‌آید. با تفکیک مقادیر حقیقی و موهومی فرکانس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک محاسبه می‌شود. اثرات کشش درون صفحه‌ای و میرایی ترموالاستیک در مقایسه با مقالات مرجع صحنه گذاری

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \left\{ \hat{P}(t) - \int_0^1 \left[ \hat{N}^T - \alpha_2 \frac{\partial \hat{M}^T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} - \alpha_3 \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} \right\} + \alpha_4 \frac{(V_p)^2}{(1 - \hat{w})^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \hat{z}^2} = \alpha_5 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \hat{t}} - \hat{z} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \right) \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{12\alpha_T \bar{\theta} L^2}{hd}, \quad \alpha_2 = \frac{12\alpha_T \bar{\theta} d}{h} \quad (9)$$

$$\alpha_3 = \frac{6d^2}{h^2}, \quad \alpha_4 = \frac{6\epsilon L^4}{Eh^3 d^3}, \quad \alpha_5 = \frac{\rho c_v h^2}{\bar{k}}$$

$$\hat{M}^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{z} \hat{\theta} d\hat{z}, \quad \hat{N}^T = E\alpha_T \bar{\theta} h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{\theta} d\hat{z} \quad (10)$$

$$\hat{P}(t) = \frac{L^2}{EI} P(t)$$

همچنین برای شرایط مرزی تیر داریم:

$$w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(0,t)} = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(L,t)} = 0 \quad (11)$$

که با استفاده از روابط (۶) به صورت بدون بعد در می‌آیند:

$$\hat{w}(0,\hat{t}) = \hat{w}(1,\hat{t}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right|_{(0,\hat{t})} = \left. \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right|_{(1,\hat{t})} = 0 \quad (12)$$

### ۳- حل به روش DQ

ابتدا حل معادلات (۷) و (۸) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = R_n(\hat{x}) e^{i\Omega_n \hat{t}}, \quad \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = \Theta_n(\hat{x}, \hat{z}) e^{i\Omega_n \hat{t}} \quad (13)$$

که در آن  $i$  عدد موهومی  $\sqrt{-1}$ ،  $\Omega_n$  فرکانس و  $R_n(\hat{x})$  و  $\Theta_n(\hat{x}, \hat{z})$  به ترتیب شکل مدهای  $n$  ام مختلط ارتعاشی تیر و دما هستند.  $\Omega_n$  کمیتی مختلط است که قسمت حقیقی آن به اثر کوپلینگ ترموالاستیک و قسمت موهومی آن به میرایی ارتعاشات مرتبط می‌شود. با جایگذاری (۱۳) در معادلات (۸)،

و صفحه زیرین، ثابت دی‌الکتریک و چگالی هستند. لازم به ذکر است که سطح مقطع تیر مستطیل شکل است؛ بنابراین  $A=bh$  و  $I=bh^3/12$  است که در آن  $h$  ضخامت تیر است.

گشتاور گرمایی،  $M^T$ ، و نیروی محوری گرمایی،  $N^T$ ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M^T = E\alpha_T b \int z \theta dz \quad (2)$$

$$N^T = E\alpha_T b \int \theta dz \quad (3)$$

که در آن  $\alpha_T$  ضریب انبساط حرارتی،  $\theta = T - T_0$  و  $T_0$

دمای حالت تعادل و بدون تنش است. معادله هدایت گرمایی که شامل جمله کوپل کننده ترموالاستیک است، عبارت است از:

$$\kappa \nabla^2 \theta + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) \quad (4)$$

که در آن  $c_v$  و  $\kappa$  به ترتیب ثابت گرمایی ویژه حجم

ثابت و ضریب هدایت گرمایی بوده و  $\beta = E\alpha_T / (1 - 2\nu)$

مدول گرمایی است. در این مدل از فرض لیفشیتز و روکاس

استفاده شده است که طبق آن گرادیان گرمایی در راستای طولی

نسبت به گرادیان گرمایی در راستای ضخامت نادیده گرفته

می‌شود [۵]، بنابراین جمله  $\kappa \nabla^2 \theta$  در معادله (۴) حذف شده و

معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) \quad (5)$$

هرچند خصوصیات الاستیک و گرمایی سیلیکون بستگی به

دما دارد اما با توجه به این نکته که تغییرات دمای کل تیر هنگام

ارتعاش بسیار کم است (کمتر از یک درجه کلونین) [۱۴]، فرض

می‌شود که ارتعاشات در دمای ثابتی انجام می‌شود و این دما

معمولاً  $T_0$  در نظر گرفته می‌شود.

معادله حرکت (۱) و معادله هدایت (۵)، معادلات اصلی

حاکم بر ارتعاشات جانبی تیر تحت اثر میرایی ترموالاستیک

هستند. حال با استفاده از متغیرهای بدون بعد زیر:

$$\hat{w} = \frac{w}{d}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\bar{t}}, \quad \hat{z} = \frac{z}{h}, \quad \hat{\theta} = \frac{\theta}{\bar{\theta}} \quad (6)$$

که در آن  $\bar{\theta} = \frac{\beta T_0 d h^3}{\kappa \bar{t} L^2}$  و  $\bar{t} = \sqrt{\frac{\rho b h L^4}{EI}}$

روابط (۶) در معادلات (۱) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \left\{ \hat{P}(t) - \int_0^1 \hat{N}^T - \alpha_2 \frac{\partial \hat{M}^T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} - \alpha_3 \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right\} dx + \alpha_4 (V_p + v(t))^2 (1 + 2\hat{w} + 3\hat{w}^2 + 4\hat{w}^3) \quad (23)$$

در این رابطه  $v(t)$  ولتاژ دینامیکی است. حال معادله فوق با استفاده از روش DQ [۲۶] گسسته سازی می شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{w}_i + \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} \hat{w}_j + \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2} \right)_i = \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \hat{w}_j \right) \left\{ \left[ \hat{P}_i - \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_6 (\hat{N}^T)_i \right] - \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2} \right)_i \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \hat{w}_j - \alpha_3 \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \hat{w}_j \right)^2 \right] \right\} + \alpha_4 V_p^2 (1 + 2\hat{w}_i + 3\hat{w}_i^2 + 4\hat{w}_i^3) \quad (24)$$

که در آن

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} & i \neq j \\ -\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} & i = j \end{cases} \quad (25)$$

$$M(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (26)$$

$$A_{ij}^{(r)} = \begin{cases} \Gamma \left[ \frac{A_{ij}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)}}{(x_i - x_j)} \right] & i \neq j \\ -\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} & i = j \end{cases} \quad (27)$$

در محاسبه فرکانس ها و میرایی غیرخطی روشی به کار می رود که در مراجع [۲۶ و ۲۸] استفاده شده است. در این روش با در نظر گرفتن معادلات (۱۹) و (۲۰) معادله غیرخطی به دست آمده به گونه ای از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال می یابد که به شکل کلی زیر تبدیل شود:

$$(\mathbf{K}_L - \mathbf{K}_{NL}(W))\mathbf{R} - \Omega_1^2 \mathbf{M}\mathbf{R} = 0 \quad (28)$$

(۱۰) و (۱۲) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 \Theta_n(\hat{x}, \hat{z})}{\partial \hat{z}^2} = i\Omega_n \alpha_5 \Theta_n(\hat{x}, \hat{z}) - i\Omega_n \hat{z} \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \quad (14)$$

$$\hat{M}_n^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{z} \Theta_n(\hat{x}, \hat{z}) d\hat{z}, \quad \hat{N}_n^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Theta_n(\hat{x}, \hat{z}) d\hat{z} \quad (15)$$

$$R_n(0) = R_n(1) = 0, \quad \left. \frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = \left. \frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (16)$$

در حل معادله (۱۴) به شرایط مرزی نیاز است. فرض می شود انتقال حرارت از سطوح بالا و پایین تیر صورت نگیرد، بنابراین این سطوح هر دو آدیاباتیک بوده [۵، ۱۴ و ۲۹] و شرایط مرزی به صورت  $\partial \Theta_n / \partial \hat{z} = 0$  در  $\hat{z} = \pm 1/2$  در نظر گرفته می شود.

به این ترتیب حل معادله (۱۴) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Theta_n(\hat{x}, \hat{z}) = \frac{1}{\alpha_5} \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \left( \hat{z} - \frac{\sin \sin(N_n \hat{z})}{N_n \cos(N_n/2)} \right) \quad (17)$$

که در آن

$$N_n = (1-i) \sqrt{\frac{\Omega_n \alpha_5}{2}} \quad (18)$$

با جایگزینی (۱۷) در (۱۵) نتیجه می شود:

$$\hat{M}_n^T = C_n^T \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \quad (19)$$

$$\hat{N}_n^T = \frac{E\alpha_T b \bar{\theta} h}{\alpha_5} \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \left[ \frac{\hat{z}^2}{2} + \frac{\cos \cos(N_n \hat{z})}{N_n^2 \cos(N_n/2)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (20)$$

و در آن

$$C_n^T = \frac{1}{12\alpha_5} [1 + f(\Omega_n)] \quad (21)$$

$$f(\Omega_n) = \frac{24}{N_n^3} \left( \frac{N_n}{2} - \tan \left( \frac{N_n}{2} \right) \right) \quad (22)$$

با جایگزینی بسط تیلور نیروی الکتریکی حول صفر در معادله (۷) خواهیم داشت:

جدول ۱- مقایسه نتایج مقادیر  $(\omega/\omega_0)^2$  در مقاله سارما [۲۸]، با روش DQ، برای مدل غیرخطی

R/r	روش FEM [۲۸]	روش DQ (N = 24)
۰/۶	۱/۰۲۱۶	۱/۰۲۰۴
۱	۱/۰۵۹۸	۱/۰۵۶۶
۲	۱/۲۳۸۲	۱/۲۲۴۶

#### ۴- اعتبارسنجی

اعتبارسنجی در مورد نتایج اثر کشش درون صفحه‌ای و اثر میرایی ترموالاستیک صورت گرفته است. در اعتبارسنجی نتایج مربوط به کشش درون صفحه‌ای، اثرات میرایی ترموالاستیک و الکتریکی نادیده گرفته شده‌اند، نسبت  $(\omega/\omega_0)^2$  محاسبه و با نتایج موجود در مرجع [۲۸] مقایسه شده است. این مقایسه در جدول ۱ ارائه شده است. در این جدول  $\omega$  قسمت حقیقی فرکانس به دست آمده از مدل غیرخطی،  $\omega_0$  قسمت حقیقی فرکانس به دست آمده از مدل خطی و R دامنه شکل مود در وسط تیر و r نیز شعاع ژیراسیون است.

با توجه به میکروتیر با مشخصات داده شده در جدول ۲، نتایج میرایی ترموالاستیک به دست آمده از روش DQ با نتایج مدل لیفشیتز [۵] در شکل (۲) مقایسه شده است. این شکل نشان می‌دهد که میرایی در مدل خطی با روش DQ به درستی محاسبه شده است.

#### ۵- نتایج

تمام نتایج موجود در این قسمت براساس میکروتیر با مشخصات جدول ۲، که به عنوان مشخصات پایه انتخاب شده، به دست آمده است.

شکل (۳) تغییرات میرایی ترموالاستیک را برحسب ولتاژ، در دو مدل خطی و غیرخطی، برای میکروتیر جدول (۲) نشان می‌دهد. همان گونه که مشاهده می‌شود تغییرات غیرخطی در ولتاژهای بالا به وضوح نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که در ولتاژهای بالا مدل خطی خطای زیادی داشته و مقدار صحیح میرایی را به دست نمی‌دهد.

در این رابطه M ماتریس همانی و

$$(K_L)_{ij} = A_{ij}^{(4)} + \alpha_1 C_i^T A_{ij}^{(4)} - 2\alpha_4 V_p^2 \delta_{ij} \quad (29)$$

$$(K_{NL})_{ij} = \left( \hat{P} + 1 \sum_{j=1}^N \left[ \alpha_3 \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} W_j \right)^2 + \alpha_2 \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(3)} W_j \right) \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} W_j \right) \right] \right) \delta_{ij} A_{ij}^{(2)} + \alpha_4 V_p^2 (3W_i + 4W_i^2) \quad (30)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (31)$$

هستند. در به دست آوردن  $\Omega_i$  باید از روش تکرار مستقیم استفاده کرد، بنابراین برای تکرار k ام،  $W^k = R^{k-1}$  در نظر گرفته می‌شود و تکرار تا جایی انجام می‌شود که رابطه زیر برآورده شود:

$$|\Omega_i^k - \Omega_i^{k-1}| < 0.0001 \quad (32)$$

در اعمال شرط مرزی دو سر گیردار، معادلات (۱۶) به شکل زیر گسسته سازی می‌شود:

$$R_1 = R_N = 0 \\ \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} R_j = \sum_{j=1}^N A_{Nj}^{(1)} R_j = 0 \quad (33)$$

پس از به دست آوردن فرکانس‌های غیرخطی و تفکیک قسمت‌های حقیقی و موهومی ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{\text{Im}(\Omega_n)}{\text{Re}(\Omega_n)} \right| \quad (34)$$

لازم به ذکر است که مدل خطی از حذف جملات غیرخطی در معادله (۲۸) به دست می‌آید، به عبارتی:

$$-\Omega_n^2 R_i + \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} R_j + \alpha_1 C_i^T \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} R_j = \alpha_4 V_p^2 R_i \quad (35)$$

جدول ۲- خصوصیات میکروتیر سیلیکونی [۲۹]

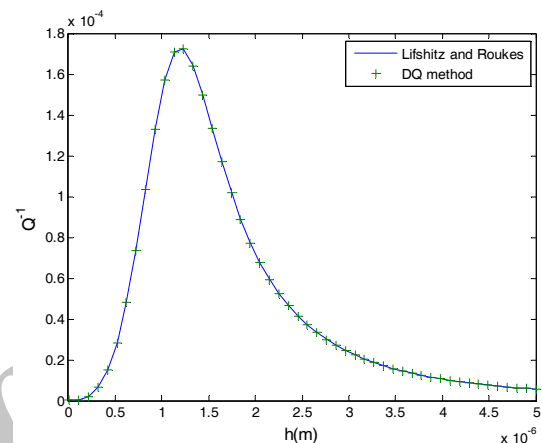
$T_0$ (K)	$E$ (GPa)	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\nu$	$\kappa$ (Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
۲۹۳	۱۶۵/۹	۲۳۳۰	۰/۲۲	۱۵۶
$d$ (μm)	$L$ (μm)	$\alpha_T$ (10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup> )	$\hat{p}$	$c_v$ (J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
۲	۷۰۰	۲/۵۹	۰	۷۱۳
$\varepsilon$ (C <sup>2</sup> m <sup>-2</sup> N <sup>-1</sup> )			$h$ (μm)	$b$ (μm)
$۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}$			۵	۵

میکروتیر بررسی و مقایسه شوند.

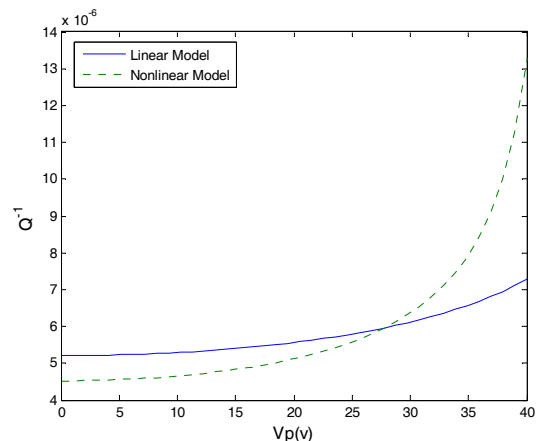
شکل (۴) تغییرات میرایی ترموالاستیک را در ضخامت‌های کم و به ازای  $V_p = 40v$  نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در ضخامت‌های کم میرایی به شدت افزایش پیدا می‌کند که این پدیده به علت بالا بودن ولتاژ است که مدل خطی قادر به نشان دادن آن نیست. چنانچه مقدار ولتاژ کم شود مدل خطی و غیر خطی رفتار یکسانی را نشان خواهند داد. بنابراین افزایش ولتاژ که اثر غیرخطی کشیدگی درون میکروتیر را ایجاد می‌کند می‌تواند برای ضخامت تشدیدکننده محدودیت ایجاد کند. شکل (۵) تغییرات میرایی ترموالاستیک را در ضخامت‌های بالاتر نشان می‌دهد و همان‌گونه که مشاهده می‌شود رفتار مدل خطی و غیرخطی در این حالت یکسان است و ضخامت موسوم به ضخامت بحرانی که در آن مقدار میرایی به حداکثر خود می‌رسد، در هر دو مدل دیده می‌شود؛ با این تفاوت که مقدار میرایی ماکزیمم در مدل غیر خطی کمتر است.

شکل (۶) تغییرات میرایی ترموالاستیک برحسب طول تیر و به ازای  $V_p = 40v$  و  $h = 5\mu m$  را نشان می‌دهد.

همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود طول تیر یک مقدار بحرانی دارد که به ازای آن میرایی ماکزیمم است. این میرایی ماکزیمم در مدل غیرخطی مقدار کمتری دارد. در انتهای نمودار مربوط به مدل غیرخطی، میرایی به‌طور ناگهانی افزایش پیدا می‌کند که در مدل خطی چنین اتفاقی نمی‌افتد. این پدیده در واقع محدودیت

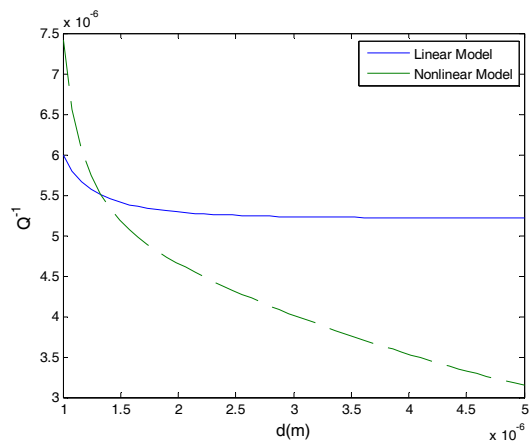


شکل ۲- مقایسه روش DQ و مدل لیفشیتز در محاسبه میرایی ترموالاستیک

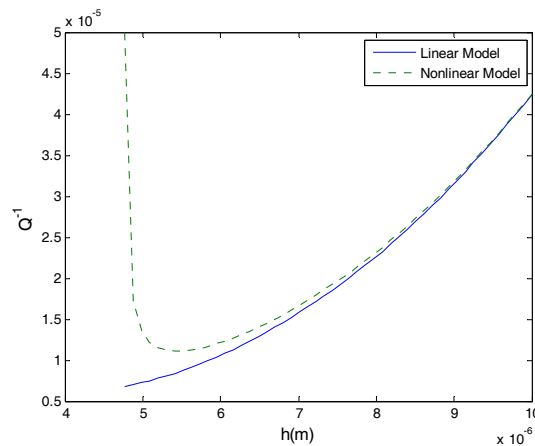


شکل ۳- تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ولتاژ در دو مدل خطی و غیرخطی در  $h = 5\mu m$

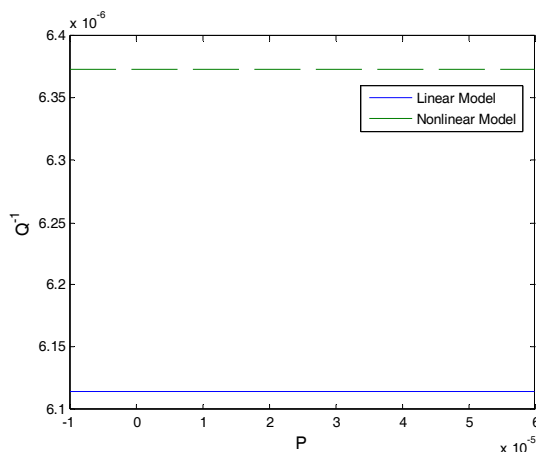
بنابراین سعی شده است تغییرات میرایی در دو مدل خطی و غیرخطی در ولتاژ بالا برحسب پارامترهای



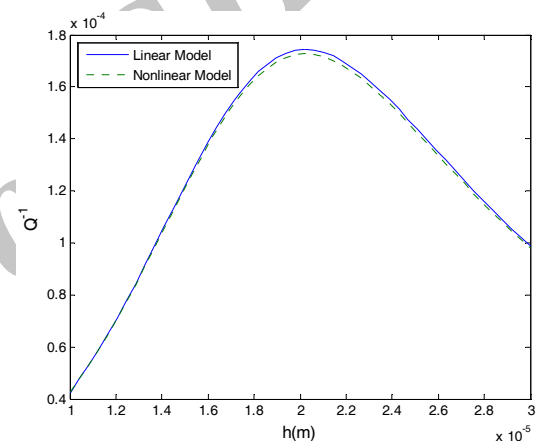
شکل ۷- تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب فاصله خازنی در دو مدل خطی و غیرخطی



شکل ۴- تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت در دو مدل خطی و غیرخطی در ضخامت‌های کم



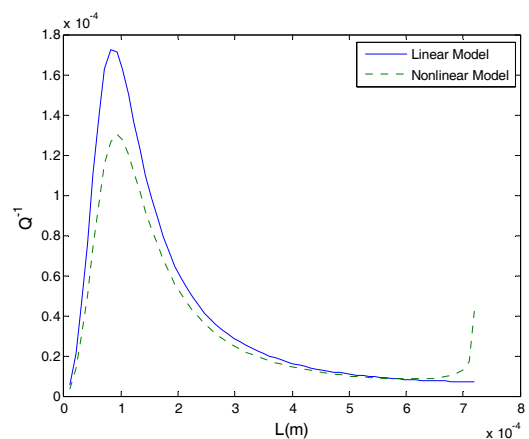
شکل ۸- تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب \$\hat{P}\$ در دو مدل خطی و غیرخطی



شکل ۵- تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت در دو مدل خطی و غیرخطی برای ضخامت‌های زیاد

طول را برای تشدید کننده‌ها در ولتاژهای بالا نشان می‌دهد، بنابراین طول از حد مشخصی نباید افزایش پیدا کند.

در شکل (۷) تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب فاصله خازنی، برای دو مدل خطی و غیرخطی، در حالت  $V_p = 10v$  و  $h = 5\mu m$  نشان داده شده است. همان گونه که در این شکل مشاهده می‌شود رفتار این دو مدل با یکدیگر متفاوت است و مقادیر میرایی کاملاً اختلاف دارند. در مدل خطی میرایی بعد از یک کاهش ناگهانی تقریباً به مقدار مشخصی میل می‌کند. در مدل غیر خطی میرایی یک کاهش سریع و بیش از مدل خطی دارد. دلیل این تفاوت این است که نیروی الکترواستاتیک در



شکل ۶- تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب طول در دو مدل خطی و غیرخطی



## ۶- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، نشان داده شده است که عامل اصلی رفتار غیرخطی در میرایی ترموالاستیک در میکروتیرها بالا بودن ولتاژ اعمالی است. همچنین تأثیر پارامترهای هندسی بر میرایی در حالت ولتاژ زیاد در هر دو مدل خطی و غیرخطی بررسی شد و این نتیجه به دست آمد که در ولتاژهای بالا رفتارهایی وجود دارد که در مدل خطی قابل مشاهده نیست.

مدل غیرخطی بسیار دقیق تر مدل شده است و در آن تغییر شکل های بزرگ نیز لحاظ شده است. بنابراین این تفاوت آشکار بین این دو مدل توجیه پذیر است. همچنین میرایی به طور کلی با افزایش فاصله خازنی تشدید کننده ها کاهش پیدا می کند که این روند در مدل غیرخطی شدیدتر است.

در شکل (۸) تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب  $\hat{P}$  در دو مدل خطی و غیرخطی برای حالت  $V_p = 30v$  و  $h = 5\mu m$  مشاهده می شود. همان گونه که در این شکل نشان داده شده است  $\hat{P}$  تأثیر خاصی بر میرایی ندارد.

## مراجع

1. Sudipto, K. D., and Aluru, N. R., "Theory of Thermoelastic Damping in Electrostatically Actuated Microstructures", *Journal of Micromechanics and Microengineering, Physical Review B*, Vol. 74, 144305, 2006.
2. Zener, C., "Internal Friction in Solids I. Theory of Internal Friction in Reeds", *Physical Review*, Vol. 52, pp. 230-235, 1937.
3. Zener, C., "Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction", *Physical Review*, Vol. 53, pp. 90-99, 1938.
4. Alblas, J. B., "A Note on the Theory of Thermoelastic Damping", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 4, Issue 3-4, pp. 333-355, 1981.
5. Lifshitz, R., and Roukes, M. L., "Thermoelastic Damping in Micro- and Nanomechanical Systems", *Physical Review B*, Vol. 61, No. 8, pp. 5600-5609, 1999.
6. Thomas, H., Metcalf Bradford B., Douglas M., and Brian, H., "Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators", *Applied Physics Letters*, Vol. 95, 061903, 2009.
7. Prabhakar, S., and Vengallatore, S., "Theory of Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators with Two-Dimensional Heat Conduction", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 17, No. 2, pp. 494-502, 2008.
8. Yun-Bo, Y., and Matin, M. A., "Eigenvalue Solution of Thermoelastic Damping in Beam Resonators Using a Finite Element Analysis", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 129, pp. 478-483, 2007.
9. Yun-Bo Y., "Geometric Effects on Thermoelastic Damping in MEMS Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, pp. 588-599, 2008.
10. Yun-Bo, Yi., "Finite Element Analysis of Thermoelastic Damping in Contour-Mode Vibrations of Micro- and Nanoscale Ring, Disk, and Elliptical Plate Resonators", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 132, Issue 4, 041015, 2010.
11. Raffaele, A., Claudia, C., Corigliano, A., and Frangi, A., "Solid Damping in Micro Electro Mechanical Systems", *Meccanica*, Vol. 43, pp. 419-428, 2008.
12. Serra, E., and Bonaldi, E., "A Finite Element Formulation for Thermoelastic Damping Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 78, Issue 6, pp. 671-691, 2009.
13. Jinbok, C., Maenghyo, C., and Jaewook, R., "Efficient Prediction of the Quality Factors of Micromechanical Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, Issue 1, pp. 84-95, 2009.
14. Nayfeh, A. H., and Younis, M. I., "Modeling and Simulations of Thermoelastic Damping in Microplates", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 14, pp. 1711-1717, 2004.
15. Feng, Y., and Bert, C. W., "Application of the Quadrature Method to Flexural Vibration Analysis of a Geometrically Nonlinear Beam", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 156, pp. 3-18, 1993.
16. Guo, Q., and Zhong, H., "Nonlinear Vibration Analysis of Beams by a Spline-based Differential Quadrature Method", *Journal of Shock and Vibration*, Vol. 269, pp. 413-420, 2004.
17. Zhong, H., and Guo, Q., "Nonlinear Vibration Analysis of Timoshenko Beams using the Differential Quadrature Method", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 32, pp. 223-234, 2003.
18. Han, K. M., Xiao, J. B., and Du, Z. M., "Differential Quadrature Method for Mindlin Plates on Winkler Foundations", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 38, pp. 405-421, 1996.
19. Liew, K. M., Han, J. B., and Xiao, Z. M.,

- “Differential Quadrature Method for Thick Symmetric Cross-Ply Laminates with First-Order Shear Flexibility”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 2647-2658, 1996.
20. Liew, K. M., and Han, J. B., “A Four-Node Differential Quadrature Method for Straight-Sided Quadrilateral Reissner/Mindlin Plates”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 73-81, 1997.
  21. Han, J. B., and Liew, K. M., “An Eight-Node Curvilinear Differential Quadrature Formulation for Reissner/Mindlin Plates”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 141, pp. 265-280, 1997.
  22. Li, J. J., and Cheng, C. J., “Differential Quadrature Method for Nonlinear Free Vibration of Orthotropic Plate with Finite Deformation and Transverse Shear Effect”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 281, pp. 295-309, 2005.
  23. Malekzadeh, P., “Differential Quadrature Large Amplitude Free Vibration Analysis of Laminated Skew Plates Based on FSDT”, *Composite Structures*, Vol. 83, Issue 2, pp. 189-200, 2008.
  24. Malekzadeh, P., and Karami, G., “Large Amplitude Flexural Vibration Analysis of Tapered Plates with Edges Elastically Restrained Against Rotation Using DQM”, *Engineering Structures*, Vol. 30, Issue 10, pp. 2850-2858, 2008.
  25. Malekzadeh, P., “Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations”, *Composite Structures*, Vol. 89, Issue 3, pp. 367-373, 2009.
  26. Malekzadeh, P., and Vosoughi, A. R., “DQM Large Amplitude Vibration of Composite Beam on Nonlinear Elastic Foundations with Restrained Edges”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, pp. 906-915, 2009.
  27. Nayfeh, A. H., and Frank, P. P., *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, New Jersey, John Wiley & Sons, pp. 382-388, 2004.
  28. Sarma, B. S., and Varadan, T. K., “Lagrange-Type Formulation for Finite Element Analysis of Non-Linear Beam Vibrations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 86, pp. 61-70, 1988.
  29. Sun, Y., and Saka, M., “Thermoelastic Damping in Micro-Scale Circular Plate Resonators”, *Journal of Sound and Vibration*, 329, pp. 328-337, 2010.

Archive of SID