

اثر سازه زیرزمینی بر حداکثر شتاب سطح زمین در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک

محمدحسن بازیار^۱، مسعود رابطی مقدم^{۱*}، دانگ-سو کیم^۲ و یون ووک چو^۲

۱. دانشکده مهندسی عمران دانشگاه علم و صنعت ایران

۲. دانشگاه کایست، کره جنوبی

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۹/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۰۹/۰۱)

چکیده – در مقاله حاضر بعد از صحت سنجی یک مدل عددی با نتایج آزمایشات سانتریفیوژ انجام گرفته بر روی یک تونل مترو، اثر سازه زیرزمینی بر حداکثر شتاب سطح زمین در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد در محدوده فرکانس طبیعی سیستم، مدل غیرخطی، کوچک نمایی PGA در اثر حضور سازه نسبت به میدان آزاد را نشان می‌دهد؛ در حالی که در مدل خطی عکس این روند مشاهده می‌شود. در محدوده فرکانس‌های خارج از فرکانس‌های طبیعی سیستم، ضرب بزرگ‌نمایی در مدل خطی و غیرخطی نزدیک به یکدیگر بوده و هر دو مدل در فرکانس‌های پایین، بزرگ‌نمایی و در فرکانس‌های بالا، کوچک‌نمایی PGA نسبت به میدان آزاد را نشان می‌دهند.

واژگان کلیدی: سازه زیرزمینی، میدان آزاد، حداکثر شتاب سطح زمین (PGA)، رفتار خطی و غیرخطی خاک، مطالعه پارامتری، نرم افزار 2D .FLAC

Effect of Underground Structure on PGA at Ground Surface Considering Linear and Nonlinear Behavior for the Soil

M. Hassan Baziar¹, M. Rabeti Moghadam^{1*}, D. S. Kim² and Y. W. Choo²

1. School of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology

2. Department of Civil and Environmental Engineering, Korean Advanced Institute of Science & Technology, Daejeon

Abstract: In this paper, a numerical model was first verified against dynamic centrifuge tests results performed on an underground subway tunnel and then, the effect of underground structure on peak ground acceleration (PGA) at the ground surface investigated considering linear and nonlinear behavior for the soil. The results show that in the range of natural frequency of the system, nonlinear model shows deamplification of PGA with respect to the freefield. Whereas, linear model shows opposite trend. Out of the range of natural frequency of the system, linear and nonlinear models predict same results and

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: rabeti@iust.ac.ir

for both model, underground tunnel resulted in amplification of low frequencies and deamplification of high frequencies with respect to the freefield.

Keywords: Underground structure, freefield, Peak Ground Acceleration (PGA), linear and nonlinear behavior of soil, parametric study, FLAC 2D software.

فهرست علائم

معرف آزمایش با سازه زیرزمینی	SF	معرف آزمایش میدان آزاد	FF
سرعت موج برشی محیط (m/s)	V _S	شتاب گرانش (9.8m/s ²)	g
طول المان در مدل عددی (m)	Δl	مدول برشی (Pa)	G
فرکانس ماکریم (Hz)	f _{max}	مدول برشی حداکثر (Pa)	G _{max}
علائم یونانی		مدول بالک (Pa)	K
کرنش برشی	γ	سختی برشی (Pa/m)	K _s
کرنش برشی مرجع	γ _{ref}	سختی نرمال (Pa/m)	K _n
طول موج (m)	λ	حداکثر شتاب زمین	PGA

است. این مسئله در شرایط استاتیکی در قالب بررسی نشستهای سطح زمین ناشی از حفر فضاهای زیرزمینی مورد مطالعه و بررسی نسبتاً وسیعی قرار گرفته است [۶]. با وجود اثبات اثر حضور این قبیل سازه‌ها بر پاسخ لرزه‌ای سطح زمین، اثر اندرکنشی این قبیل سازه‌ها بر محیط مجاور و سازه‌های اطراف در حالت لرزه‌ای کمتر مورد توجه محققین و آئین نامه‌ها واقع شده است [۷]. غالباً مطالعات صورت گرفته در این زمینه به صورت حل‌های تحلیلی یا مدل‌های عددی با فرضیات ساده شده‌ای مانند حل در محیط‌های الاستیک بوده است.

محققین مختلفی [۸-۱۴] با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی متعدد به بررسی اثر حضور حفرات زیرزمینی بر پاسخ لرزه‌ای سطح زمین ناشی از امواج مهاجم حجمی (برشی، فشاری) و سطحی (رایلی) پرداخته‌اند که همگی این روش‌ها اثر وجود این قبیل فضاهای بر پاسخ لرزه‌ای سطح زمین را نشان داده‌اند. لیکن همگی این تحلیل‌ها با فرض رفتار الاستیک محیط (غالباً محیط سنگی) صورت گرفته است. از آنجا که فرض

از دیاد جمعیت کلان شهرها منجر به کاهش فضاهای موجود در سطح شهرها گشته و گسترش بیش از پیش فضاهای زیرزمینی نظری تونل‌های مترو، تونل‌های تأسیساتی، انبارهای زیرزمینی، تونل‌های انتقال آب و فاضلاب شهری را به دنبال داشته است. امروزه این قبیل فضاهای از زیرساخت‌های اساسی شهرنشینی مدرن محسوب می‌شوند. عملکرد این گونه سازه‌ها در زمان بهره‌برداری و در موقع بحران مورد توجه مهندسین و محققین بسیاری بوده است. هر چند در اذهان طراحان و مهندسین این قبیل سازه‌ها از لحاظ عملکرد لرزه‌ای در دسته سازه‌های کم خطر در برابر زلزله تلقی می‌شدند، اما خسارات وارد به این قبیل سازه‌ها در حین زلزله‌ها (مانند خرابی ایستگاه مترو دایکی ۱ ژاپن در زلزله کوبه [۱]) باعث شده تا این مسئله به صورت تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد [۲-۴]. از سوی دیگر، تأثیر ساخت و وجود این قبیل فضاهای و سازه‌ها بر محیط پیرامون و عملکرد سازه‌های اطراف و بالعکس [۵]، موضوعی است که مورد توجه بسیاری از محققین بوده

رفتار خطی و غیرخطی خاک و انعطاف پذیری پوشش سازه زیرزمینی تاکنون جمع‌بندی مشخصی در این زمینه در ادبیات فنی وجود ندارد. از طرفی، تاکنون تمام مطالعات تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام شده در این زمینه کاملاً به صورت مستقل به بررسی این موضوع پرداخته‌اند؛ که هر کدام محدودیت و نواقص مربوط به خود را دارند. بررسی این مسئله با در نظر گرفتن تمام ابعاد آن نیازمند مطالعات عددی و آزمایشگاهی وسیعی است که نتایج آنها مؤید یکدیگر بوده تا توان تأثیر عوامل مختلف مؤثر بر مسئله را مورد بررسی قرار داد.

از آنجا که اکثر مطالعات صورت گرفته در این زمینه با فرض الاستیک بودن محیط انجام شده است؛ لذا در مقاله حاضر تأثیر رفتار غیرخطی خاک بر اثر سازه زیرزمینی بر شتاب ثبت شده در سطح زمین مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، ابتدا یک مدل عددی به کمک نرم افزار 2D FLAC با نتایج آزمایشات سانتریفیوژ صورت گرفته در دانشگاه کایست^۲ کره‌جنوبی که به‌منظور مطالعه لرزه‌ای رفتار تونل زیرزمینی مترو صورت گرفته است صحت سنجی شده است. سپس تأثیر حضور سازه زیرزمینی بر PGA سطح زمین در دو حالت فرض رفتار خطی و غیرخطی خاک در یک مطالعه پارامتری مورد بررسی و تحلیل واقع شده است.

۲- آزمایشات سانتریفیوژ

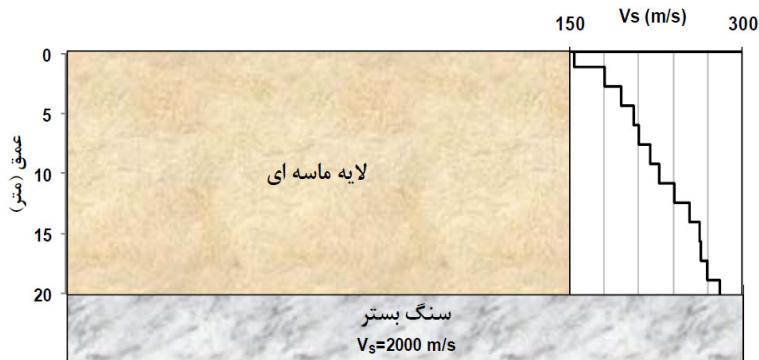
مجموعه‌های از آزمایشات سانتریفیوژ دینامیکی در دانشگاه کایست کره‌جنوبی به‌منظور مطالعه رفتار لرزه‌ای تونل جعبه‌ای شکل مترو در شتاب سانتریفیوژی g ۴۰ انجام شده است. از تحریک ورودی با مقادیر حداقل شتاب (PGA) های مختلف در آزمایش‌ها استفاده شده است. شکل (۱) شرایط ژئوتکنیکی در محل مسئله مورد مطالعه مدل شده در آزمایشات سانتریفیوژ را نشان می‌دهد که متشکل از یک لایه ۲۰ متری ماسه خشک است که روی سنگ بستر با سرعت موج برشی ۲۰۰۰ متر بر ثانیه واقع شده است. خاک مورد استفاده در آزمایش، خاک

رفتار الاستیک در مورد خاک غیرواقعی است؛ لذا نتایج حاصله توسط این روش‌ها در حالتی که رفتار خاک در محدوده غیرخطی باشد معتبر نخواهد بود.

در جامع‌ترین مطالعه عددی صورت گرفته در این زمینه، یوتامیترا و همکاران [۷] به‌منظور بررسی اثر سازه‌های زیرزمینی بر حرکت لرزه‌ای سطح زمین، مجموعه‌ای از تحلیل‌های عددی دینامیکی کرنش سطح را انجام دادند که در آن یک تونل دایره‌ای در یک محیط نیم فضای ویسکوالاستیک تحت اثر موج هارمونیک Sv در نظر گرفته شده است. روش عددی این تحقیق براساس روش تفاضل محدود (با استفاده از نرم افزار FLAC) با هدف بررسی اثرات فرکانس تحریک، قطر تونل، عمق ساخت تونل و انعطاف پذیری نسبی پوشش تونل در مقایسه با خاک‌های اطراف تونل بر پاسخ لرزه‌ای سطح زمین بوده است. هرچند آنها در این مطالعه به بررسی پارامترهای مختلف مؤثر بر مسئله پرداختند؛ اما اعتبار نتایج حاصله در این مطالعه محدود به محیطی با رفتار ویسکوالاستیک خواهد بود.

مطالعات آزمایشگاهی انجام شده در این زمینه بسیار اندک و محدود به یک مطالعه صورت گرفته توسط ابوهاجر و همکاران [۱۵] است. آنها با مدل سازی سانتریفیوژی آبروهای مربعی به بررسی اثر عواملی نظیر ضخامت آبرو، تراکم خاک، دامنه شتاب ورودی و اثر حضور روسازه بر شتاب ثبت شده در اطراف آبروهای پرداختند. نتایج مطالعات آنها نشان داد که وجود سازه مدفعون مقادیر شتاب‌های حداقل سطح زمین را کاهش می‌دهد. دلیل این امر عدم تعیت حرکت سازه با حرکت خاک اطراف آن ذکر شده که باعث کاهش پاسخ زمین در بالای سازه زیرزمینی نسبت به منطقه میدان آزاد می‌شود. همچنین مشاهده گردید که با افزایش مقدار شتاب حداقل موج ورودی در پایین مدل، اثر کاهنده‌گی وجود حفره بر امواج نمایان‌تر می‌گردد.

به دلیل وجود متغیرهای متعدد مؤثر بر مسئله از قبیل عمق، هندسه و ابعاد سازه زیرزمینی، مشخصات تحریک ورودی،



شکل ۱- شرایط ژئوتکنیکی در محل مسئله مورد مطالعه مدل شده در آزمایشات سانتریفیوژ

از طریق یک میز لرزه در حین چرخش سانتریفیوژ به مدل اعمال می‌شود. جزییات کامل این آزمایش توسط چو و همکاران [۱۶] گزارش شده است.

۲- مشخصات دستگاه سانتریفیوژ کایست

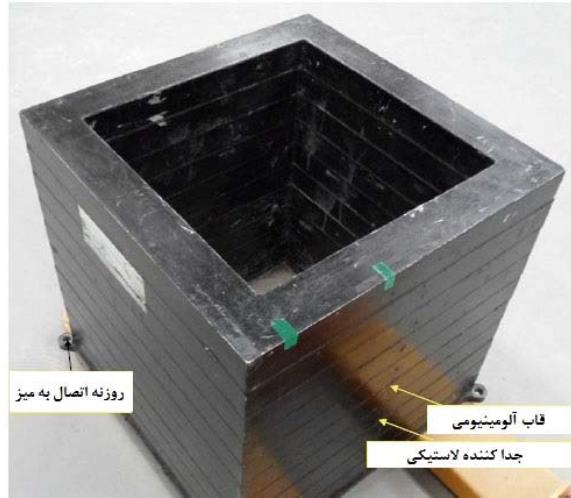
سانتریفیوژ کایست با بازوی ۵ متر دارای ظرفیت ۲۴۰ g-ton است که شتاب حداقل آن در حالت استاتیکی برابر $g/5$ است. این سانتریفیوژ مجهز به یک میز لرزه است که در حین چرخش عمل می‌کند. این میز توانایی ایجاد شتاب $g/5$ در مقیاس پروتوتاپ^۳ را دارد. همچنین فرکانس اعمالی از طرف میز در محدوده ۴۰ الی ۳۰۰ هرتز در مقیاس مدل است. مشخصات کامل این دستگاه سانتریفیوژ توسط کیم و همکاران [۱۷] ارائه شده است. همچنین به منظور شبیه سازی مرز نیمه بی‌نهایت در اطراف محفظه مدل از یک جعبه ESB (تیر برشی معادل) استفاده شده است. عملکرد لرزهای جعبه ESB مذکور توسط لی و همکاران [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. شکل (۲-الف) تصویری از دستگاه سانتریفیوژ کایست و شکل (۲-ب) جعبه ESB به کار رفته در آزمایش‌ها را نشان می‌دهد.

۲-۲- فهرست آزمایش‌های سانتریفیوژ انجام شده
فهرست آزمایش‌های سانتریفیوژ انجام شده به همراه مشخصات آنها در جدول (۱) ارائه شده است.

آزمایش FF^۵ آزمایش میدان آزاد (بدون وجود تونل) و آزمایش SF^۶ آزمایش با تونل است. هندسه مدل شماره



(الف)



(ب)

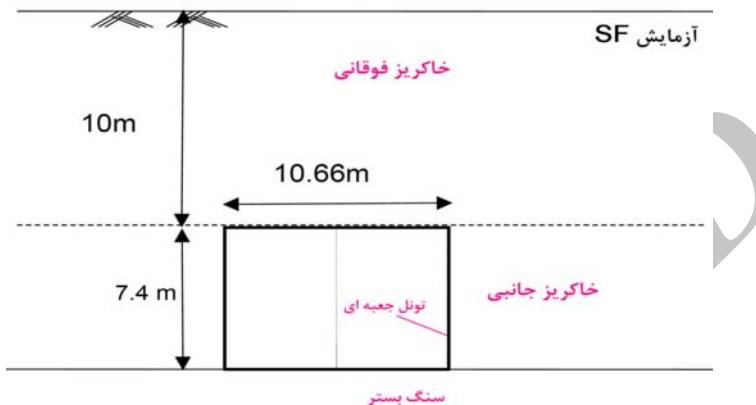
شکل ۲- (الف) دستگاه سانتریفیوژ ژئوتکنیکی کایست؛

ب) جعبه ESB

ماسه‌ای خشک سیلیکاته است که پروفیل سرعت موج برشی آن در عمق در شکل (۱) نشان داده شده است. بارگذاری دینامیکی

جدول ۱- لیست آزمایشات سانتریفیوژ انجام شده

آزمایش	شناسه	هدف آزمایش	ضخامت خاکریز جانبی (متر)	ضخامت خاکریز فوقانی (متر)	تحریک ورودی	شرایط خاک
FF	پاسخ میدان آزاد	یک لایه ماسه به ضخامت $\frac{17}{4}$ متر	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{4}$	زلزله های کوبه و نورتربیج با	
SF	پاسخ تونل جعبه ای شکل	۱۰	$\frac{7}{4}$		PGA های مختلف	



شکل ۳- آزمایش SF در مقیاس پروتوتاپ

جعبه ای شکل مترو سئول کره جنوبی انتخاب شده است. جعبه تونل در مقیاس پروتوتاپ به صورت تونل دو دهانه با مقطعی مستطیلی با عرض $\frac{10}{66}$ و ارتفاع $\frac{7}{4}$ متر بوده که طول آن $\frac{19}{6}$ متر است. مابین دو دهانه ستون هایی به فواصل مختلف از یکدیگر واقع شده است. مقطع این تونل جعبه ای شکل در شکل (۵-الف) نشان داده شده است. تونل پروتوتاپ از جنس بتون بوده که مدول الاستیسیته آن برابر 24 GigaPascal است. این تونل جعبه ای با درنظر گرفتن قوانین مقیاسی در مدل سانتریفیوژی با جعبه ای از جنس آلومینیوم مدل شده است. تصویری از تونل جعبه ای ساخته شده در مقیاس مدل از جنس آلومینیوم در شکل (۵-ب) نمایش داده شده است.

۲- ابزار گذاری مدل ها

از ابزار شتاب سنج مینیاتوری به منظور ثبت شتاب افقی در آزمایشات استفاده شده است. در مدل FF از ۵ شتاب سنج مطابق آنچه در شکل (۶-الف) آمده و در مدل SF از ۱۹

در مقیاس پروتوتاپ در شکل (۳) نشان داده شده است. مدل شامل تونل جعبه ای واقع بر سنگ بستر، خاکریزهای جانبی و فوقانی تونل است. در مقاله حاضر مدل سازی عددی این آزمایشات تشریح شده و نتایج تحلیل های عددی با نتایج آزمایشات سانتریفیوژ معرفی شده صحت سنجی گردیده است.

۳- مشخصات مهندسی ماسه مورد استفاده

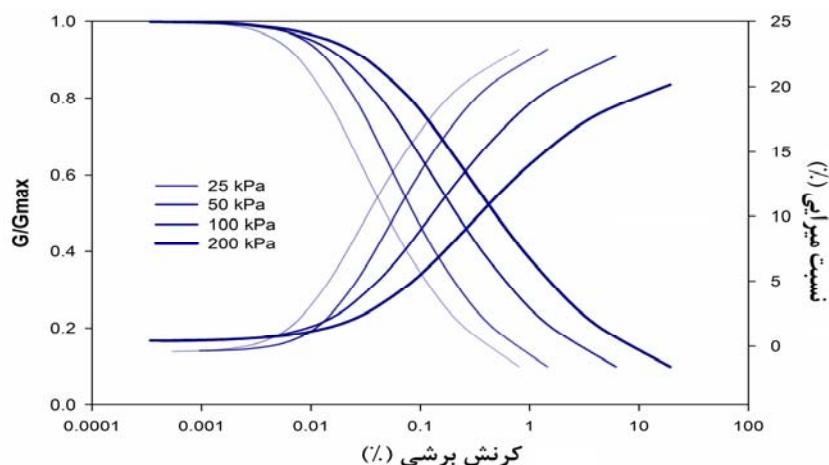
خاک ماسه ای در آزمایشات به صورت خشک مورد استفاده قرار گرفته که مشخصات فیزیکی و مکانیکی آن در جدول ۲ ارائه شده است. مشخصات غیرخطی این ماسه (منحنی تغییرات G/G_{\max} و نسبت میرایی در برابر کرش برشی) که از آزمایشات ستون تشدید در چهار فشار همه جانبی 25 , 50 , 100 و 200 کیلو پاسکال به دست آمده در شکل (۴) نشان داده شده است.

۴- مشخصات تونل زیرزمینی

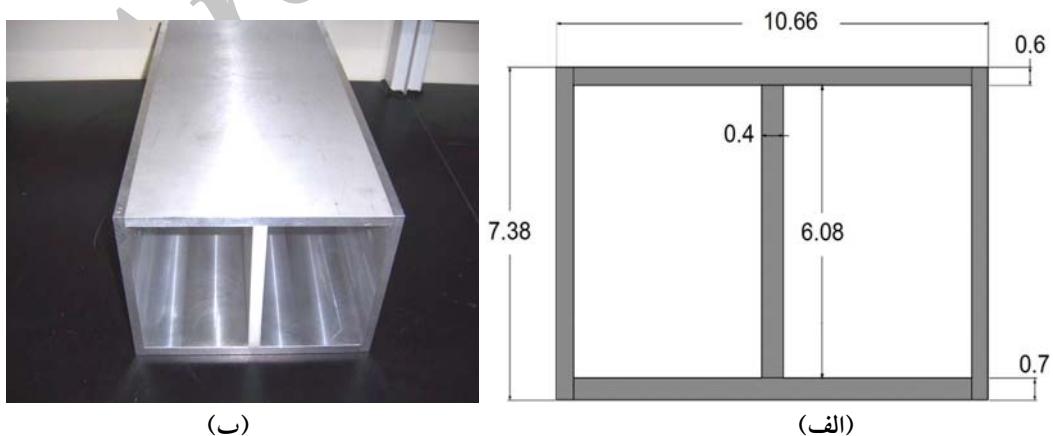
سازه زیرزمینی مدل شده در آزمایشات از میان تونل های

جدول ۲- مشخصات فیزیکی و مکانیکی ماسه مورد استفاده در آزمایش‌های سانتریپیوژ

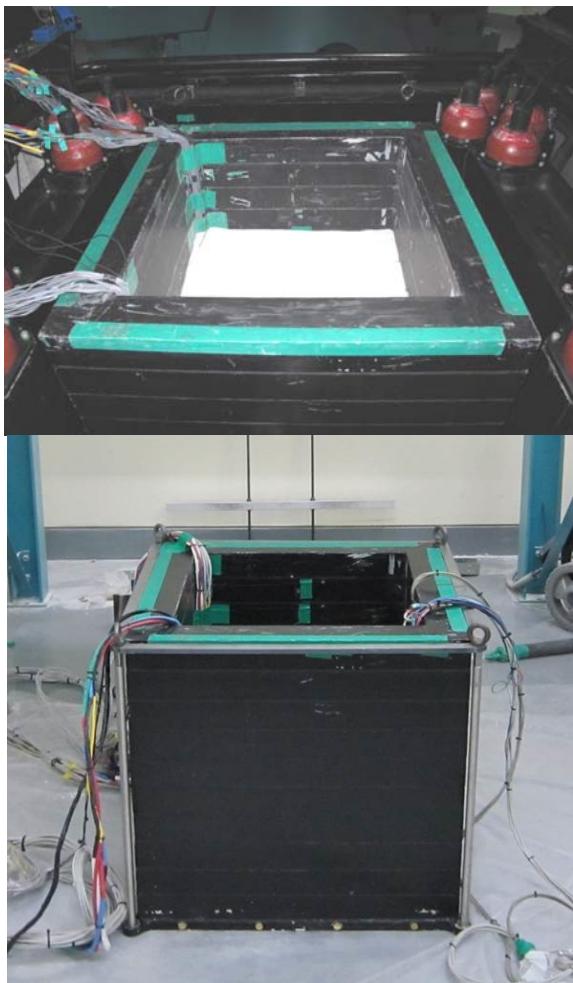
پارامتر	واحد	مقدار
نام ماسه بر حسب طبقه بندي یونیفاید	-	SP
چگالی خشک حداکثر	Ton/m ³	1.645
چگالی خشک حداقل	Ton/m ³	1.244
چگالی ویژه	-	2.65
نشانه خمیری	-	NP
زاویه اصطکاک داخلی	درجه	45
چسبندگی	kPa	°
وزن مخصوص	Ton/m ³	1.57
تراکم	%	84
نسبت پواسون	-	0.3



شکل ۴- تغییرات منحنی G/G_{\max} و نسبت میرایی در برابر کرنش برشی ماسه مورد آزمایش



شکل ۵- (الف) مقطع تونل شبیه سازی شده در آزمایش‌ها در مقیاس پروتوتاپ (ابعاد بر حسب متر) ب) تصویری از تونل در مقیاس مدل ساخته شده از جنس آلومینیوم

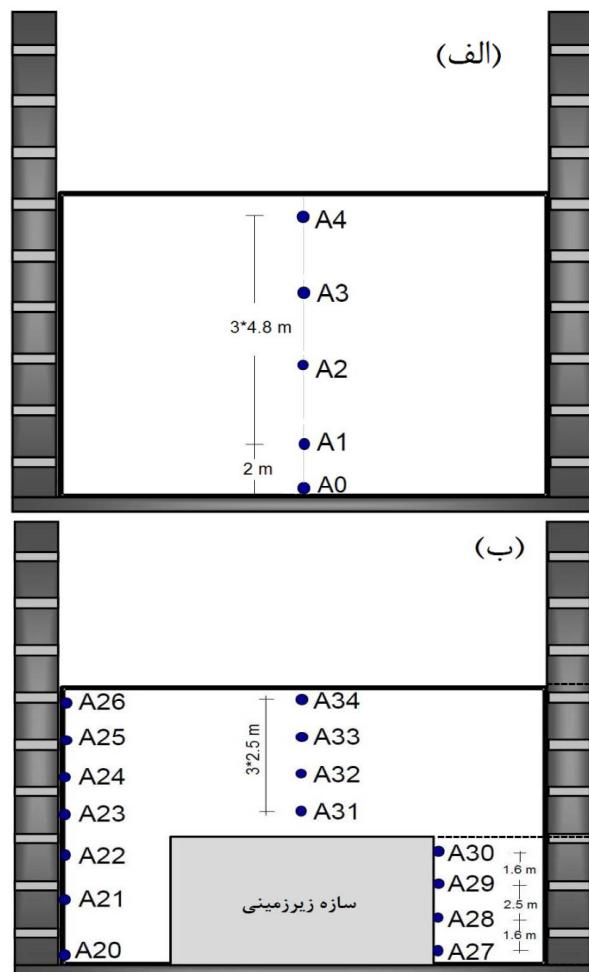


شکل ۷- تصاویری از ابزارگذاری مدل‌های سانتریفیوژی قبل از اعمال تحریک ورودی

شکل (۸) تاریخچه زمانی و طیف فوریه این دو زلزله را نشان می‌دهد.

۳- مدل‌سازی عددی آزمایش‌ها

مدل‌سازی عددی آزمایش‌های سانتریفیوژ انجام شده با نرم افزار دوبعدی اختلاف محدود 2D FLAC انجام گرفته است. این نرم افزار توانایی انجام تحلیل دینامیکی غیرخطی با درنظر گرفتن اندرکنش خاک‌سازه را دارد. آزمایش‌ها در مقیاس پروتوتاپ در نرم افزار مدل‌سازی گردیده است که جزئیات مدل‌سازی‌ها در ادامه آمده است.



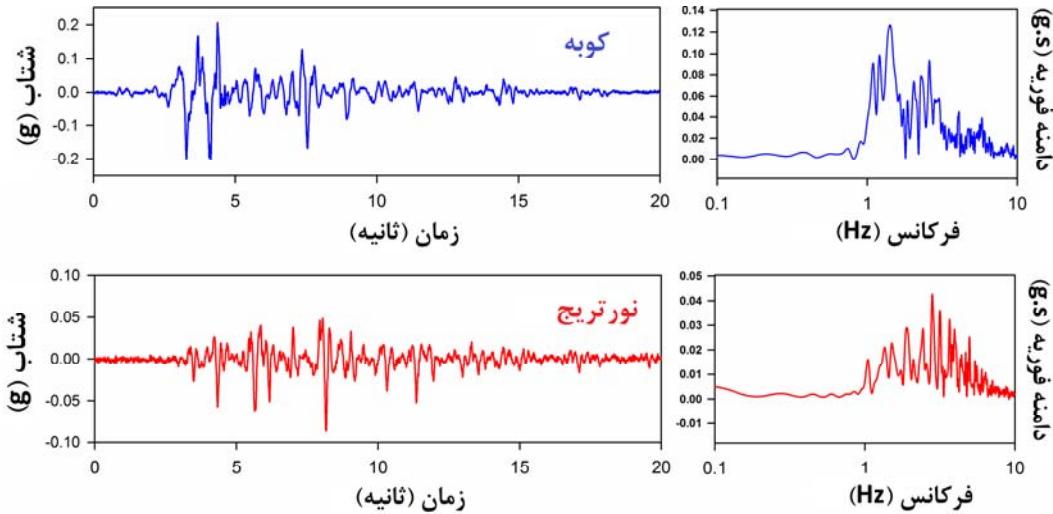
شکل ۶- ابزارگذاری مدل‌های سانتریفیوژی

الف) مدل SF ب) مدل FF

شتاب‌سنج مطابق شکل (۶-ب) جهت ثبت شتاب در داخل خاک، روی سازه و روی جعبه به کار رفته است. شتاب سنج‌های A0 و A20 به عنوان شتاب‌های ورودی به ترتیب در مدل FF و SF در مدل‌سازی‌های عددی استفاده شده است. شکل (۷) تصاویری از مدل سانتریفیوژی ابزارگذاری شده قبل از اعمال تحریک ورودی را نشان می‌دهد.

۶-۲- تحریک‌های ورودی به مدل‌ها

از دو نوع موج ورودی (زلزله کوبه و نورتریج) با PGA‌های مختلف در آزمایشات سانتریفیوژی استفاده شده است.



شکل ۸- تاریخچه زمانی شتابنگاشت های مورد استفاده به همراه طیف فوریه آن ها

موج در محیط به صورت زیر تعیین می شود:

$$\Delta l \leq \frac{V_{S\min}}{10 \times f_{\max}} \quad (3)$$

با توجه به حداقل سرعت موج برشی خاک ماسه ای مورد بررسی برابر با 150 متر بر ثانیه و فرکانس حداقل زلزله برابر 10 هرتز، حداقل ابعاد المان طبق رابطه (۳) به $1/5$ متر محدود می شود. لازم به ذکر است در تحلیل های عددی، فرکانس های بالاتر از 10 هرتز امواج ورودی زلزله فیلتر شده اند. به دلیل محدودیت های هندسی در مدل عددی از جمله ابعاد سازه زیرزمینی و همچنین موقعیت شتاب سنج ها (مضربی از 0.5) و به منظور دقت بیشتر در تحلیل ها، در تحلیل عددی صورت گرفته، از المان های چهارضلعی کرنش مسطح با حداقل ابعاد 0.5 متر استفاده گردید. انتخاب حداقل بعد المان ها برابر با 0.5 متر منجر به 1480 المان چهارضلعی در مدل عددی گردید. المان بندی مدل های FF و SF به ترتیب در شکل های (۹-الف) و (۹-ب) نشان داده شده است.

۲-۳- شرایط مرزی مدل

صحت سنجی نتایج مدل عددی با نتایج آزمایشات سانتریفیوژ مستلزم مدل سازی صحیح شرایط مرزی مدل های سانتریفیوژی توسط مدل عددی است. شرایط مرزی مدل های سانتریفیوژی

۱-۳- المان بندی مدل

در مدل سازی های عددی، ابعاد المان باید به نحوی انتخاب شود تا سه شرط زیر (به ویژه شرط سوم) برآورده شوند:

۱- دقیق تحلیل؛ ابعاد ریزتر المان تا یک میزان به منزله دقت بیشتر تحلیل خواهد بود.

۲- سرعت تحلیل؛ با کاهش ابعاد المان سرعت تحلیل به ویژه در مسائل دینامیکی کاهش خواهد یافت.

۳- انتشار صحیح موج در محیط؛ حداقل اندازه المان در مسائل دینامیکی انتشار موج به گونه ای باشد که انتشار موج در محیط به درستی صورت گیرد.

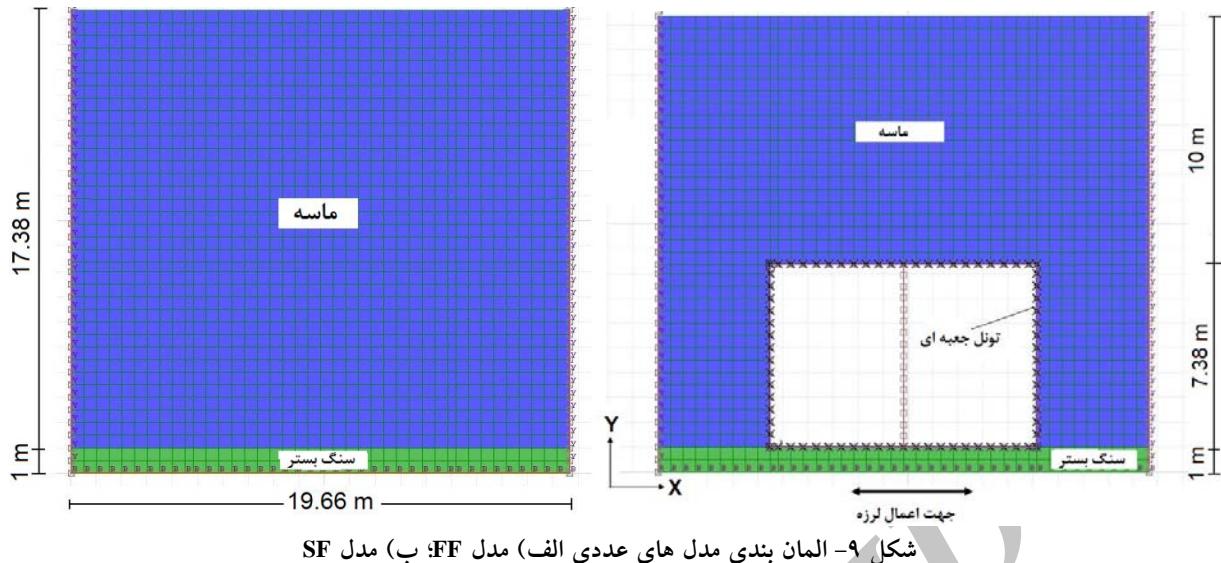
به منظور انتشار صحیح موج در محیط، کولمر و لیسمر (۱۹۷۳) [۱۹] حداقل ابعاد المان (Δl) را به رابطه (۱) محدود کردند:

$$\Delta l \leq \frac{\lambda}{10} \quad (1)$$

که در آن λ طول موج انتشار یافته در محیط است که با حداقل سرعت موج برشی در محیط ($V_{S\min}$) و حداقل فرکانس تحریک ورودی (f_{\max}) به صورت زیر در رابطه است:

$$\lambda_{\min} = \frac{V_{S\min}}{f_{\max}} \quad (2)$$

طبق دو رابطه بالا حداقل ابعاد المان ها به منظور انتشار صحیح



شکل ۹- المان بندی مدل های عددی (الف) مدل SF؛ (ب) مدل FF

جعبه ESB به گونه‌ای است که تمام نقاط هم ارتفاع دارای تغییر مکان یکسان و هم جهت در راستای اعمال لرزش (راستای افقی) هستند و در جهت قائم هیچگونه تغییر مکانی ندارند. برای مدل سازی این مشخصه، از یک المان سازه‌ای (المان لاینر^۹ در FLAC) به ضخامت ناچیز یک میلی‌متر در مرز دو طرف مدل استفاده گردید. گره‌های این المان سازه‌ای به گره‌های خاک مقید شده به گونه‌ای که هیچ نوع لغزش و جدائی بین آنها اتفاق نیفتد. مدول الاستیسیته این المان‌ها با مدول الاستیسیته خاک یکسان در نظر گرفته شد. سپس به کمک دستور SLAVE در نرم افزار، تغییر مکان افقی گره‌های هم ارتفاع دو طرف جعبه به گونه‌ای به یکدیگر مقید شدند که در هر لحظه تغییر مکان یکسان یکسان و هم جهت با هم داشته باشند. لازم به ذکر است تعریف المان لاینر فقط به منظور شبیه سازی شرایط مرزی مرزهای جانبی جعبه ESB تعریف شده است به همین دلیل مشخصات آن عیناً مشابه خاک فرض شده است. این شرایط مرزی توسط لوزن و همکاران [۲۱] جهت شبیه سازی عددی جعبه لمینار مشابه در آزمایشات میز لرزه استفاده شده است که نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی همخوانی خوبی داشته است.

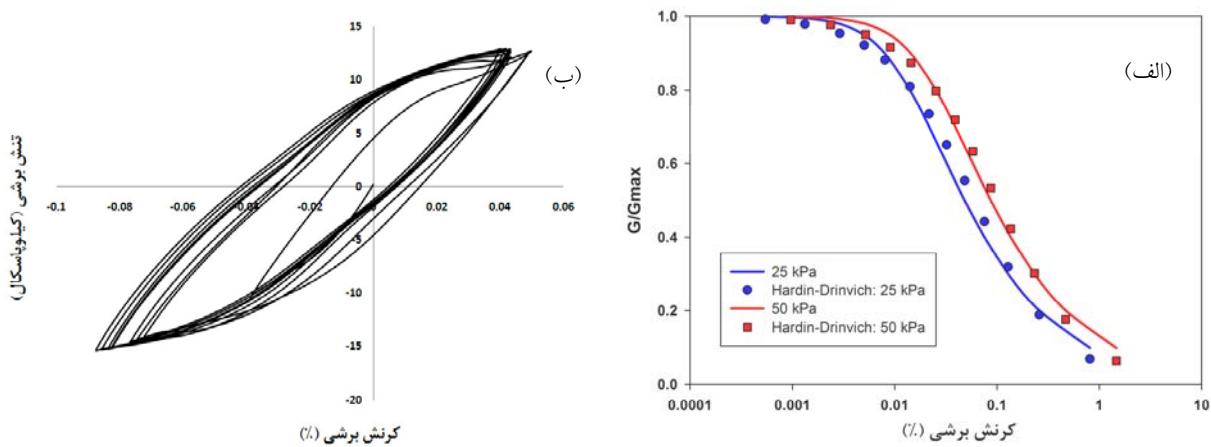
۳-۳- مدل سازی رفتار غیرخطی خاک

از مدل استوپلاستیک موهر کولمب در مدل سازی رفتار خاک

شامل مدل سازی مرز پایینی جعبه مدل و مرزهای جانبی جعبه ESB است. این مرزها در مدل عددی به صورت زیر مدل سازی گردید.

تحریک ورودی در نرم افزار FLAC با فرض کف صلب و یا کف نرم^۷ به دو صورت قابل اعمال است. در حالت کف صلب، تحریک ورودی به صورت تاریخچه زمانی شتاب به کف مدل اعمال می‌شود. برای کف نرم، از یک مرز آرام^۸ در کف مدل استفاده شده و تحریک ورودی در قالب تاریخچه زمانی تنش به کف مدل اعمال می‌شود [۲۰]. در آزمایشات سانتریفیوژی، کف مدل به صورت یک مرز صلب عمل کرده و امواج ورودی را همانند یک مرز صلب به داخل مدل منعکس می‌کنند. بنابراین میرایی تشعشعی در این آزمایشات مدل نمی‌گردد. در مدل عددی، مرز کف به صورت مرز صلب در نظر گرفته شد و با یک لایه سنگی به ضخامت ۱ متر از جنس سنگ بستر محل مدل سازی گردید. تحریک ورودی به صورت تاریخچه زمانی شتاب به سرتاسر کف مدل اعمال گردید. لازم به ذکر است مدل پروتوتاپی دارای شرایطی مشابه مدل سانتریفیوژی بوده که در آن لایه ماسه‌ای بر سنگ بستر صلب واقع شده است.

مرزهای جانبی مدل سانتریفیوژی با در نظر گرفتن مشخصه اصلی جعبه ESB مدل سازی گردید. عملکرد مرزهای جانبی



شکل ۱۰- (الف) منحنی های G/G_{\max} کالیبره شده آزمایشات با مدل هارдин-درینویچ؛ (ب) چرخه هیسترزیس تنش-کرنش المان وسط مدل FF

برشی در $G/G_{\max} = 0.5$ اطلاق می‌شود. تمام منحنی‌های خاک ماسه‌ای ارائه شده در شکل ۳ با مدل هارdin-Drivich گردیدند. شکل (۱۰-الف) منحنی‌های کالیبره شده آزمایشات با مدل هارdin-Drivich را نشان می‌دهد. مدل هیسترزیس غیرخطی به لایه‌های مختلف خاک بر حسب تنش مؤثر متوسط در هر عمق معرفی شد.

چرخه هیسترزیس تنش-کرنش غیرخطی در یک المان در وسط مدل FF ناشی از ۱۰ سیکل بارگذاری هارمونیک با وسط مدل $FF = 0.1g$ و فرکانس ۳ هرتز در شکل (۱۰-ب) نشان داده است. مساحت چرخه نشان‌دهنده میرایی هیسترزیس است. با فرض رفتار خطی برای خاک، این چرخه تبدیل به یک خط شده که بیانگر رفتار خطی تنش-کرنش است.

۴-۳- سازه زیرزمینی و اندرکنش خاک-سازه

از المان‌های تیر در مدل‌سازی سازه تونل زیرزمینی استفاده شد. اندرکنش بین تونل و محیط اطراف توسط المان رابط^{۱۱} با رفتار برشی موهر-کولمب مدل‌سازی گردید. مشخصات المان رابط شامل سختی برشی و قائم (K_s , K_n) و همچنین زاویه اصطکاک بین دو محیط (θ) - که المان رابط واسطه بین آن دو است - است. پارامترهای سختی المان رابط (سختی نرمال (K_n) و سختی برشی (K_s)) به توصیه ایتاسکا^{۱۲} [۲۲] و طبق رابطه (۵)

جهت تحلیل استاتیکی مدل استفاده گردید. همان‌گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است مدول الاستیسته خاک تابعی از عمق بوده که به صورت متغیر با عمق به نرم افزار معرفی شده است. سایر مشخصات خاک مطابق جدول ۲ به مدل معرفی شدند.

میرایی واقعی در محیط‌های خاکی به صورت هیسترزیس است لذا رفتار خاک در حالت دینامیکی در مدل غیرخطی در محدوده الاستیک به صورت غیرخطی و با میرایی هیسترزیس مدل گردید. در نرم افزار FLAC از منحنی‌های کاهش مدول و میرایی که در تحلیل‌های معادل خطی معمول است به منظور مدل‌سازی میرایی هیسترزیس جهت انجام تحلیل دینامیکی غیرخطی استفاده می‌شود [۲۲]. به این‌منظور منحنی تغییرات G/G_{\max} (مدول برشی به مدول برشی حداکثر) در برابر کرنش برشی (γ) با مشخصات یکی از مدل‌های هیسترزیس موجود در نرم افزار کالیبره شده و به نرم افزار معرفی می‌گردد. در این مطالعه از مدل هارdin-Drivich^{۱۰} استفاده شده است که در آن رابطه بین G/G_{\max} و کرنش برشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{G}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_{ref}}} \quad (4)$$

در این رابطه γ_{ref} کرنش برشی مرجع است و به میزان کرنش

جدول ۳- مشخصات المان رابط

زاویه اصطکاک بین تونل و خاک (درجه)	سختی برشی؛ K_s (Pa/m)	سختی نرمال؛ K_n (Pa/m)
۳۰	10^9	10^9

۵-۳- تحلیل ها

پس از تعادل استاتیکی مدل ها تحت وزن خود، تحلیل دینامیکی با اعمال تاریخچه زمانی شتاب به کف مدل انجام گردید. گام زمانی تحلیل های دینامیکی برابر $sec^{10^{-5}}$ بود. در حین تحلیل های دینامیکی، تاریخچه زمانی شتاب در نقاط مختلف مدل های عددی در موقعیت های متناظر با محل شتاب سنج های آزمایش های سانتریفیوژی به عنوان خروجی مدل ها برداشت گردید.

۶-۳- نتایج شبیه سازی های عددی

نتایج مدل عددی آزمایش FF در قالب تاریخچه زمانی شتاب با مقادیر ثبت شده در مدل آزمایشگاهی (شتاب سنج های A1 تا A4) برای زلزله کوبه با $PGA=0.075g$ در شکل (۱۱) مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین نتایج مدل عددی آزمایش SF در قالب تاریخچه زمانی شتاب با مقادیر ثبت شده در مدل آزمایشگاهی (شتاب سنج های A22 تا A34) برای زلزله کوبه با $PGA=0.191g$ در شکل (۱۲) مقایسه شده است. به منظور سهولت مقایسه نتایج، طیف فوریه هر شتاب سنج در سمت راست شکل ها رسم شده است. از مقایسه نتایج تحلیل های عددی با شتاب های ثبت شده در آزمایشات سانتریفیوژ به خوبی دیده می شود که مدل عددی با دقیقیت بالایی قادر به پیش بینی دامنه و مسیر شتاب های ثبت شده در آزمایشات برای هر دو مدل FF و SF است. لازم به ذکر است نتایج حاصله برای سایر مقادیر PGA حرکات ورودی، نتیجه مشابهی را در پی داشت. بنابراین، مدل عددی غیرخطی مدل سازی شده با نتایج آزمایشات سانتریفیوژ صحت سنجی شده و انجام مطالعات پارامتری با مدل عددی صحت سنجی شده معتبر خواهد بود.

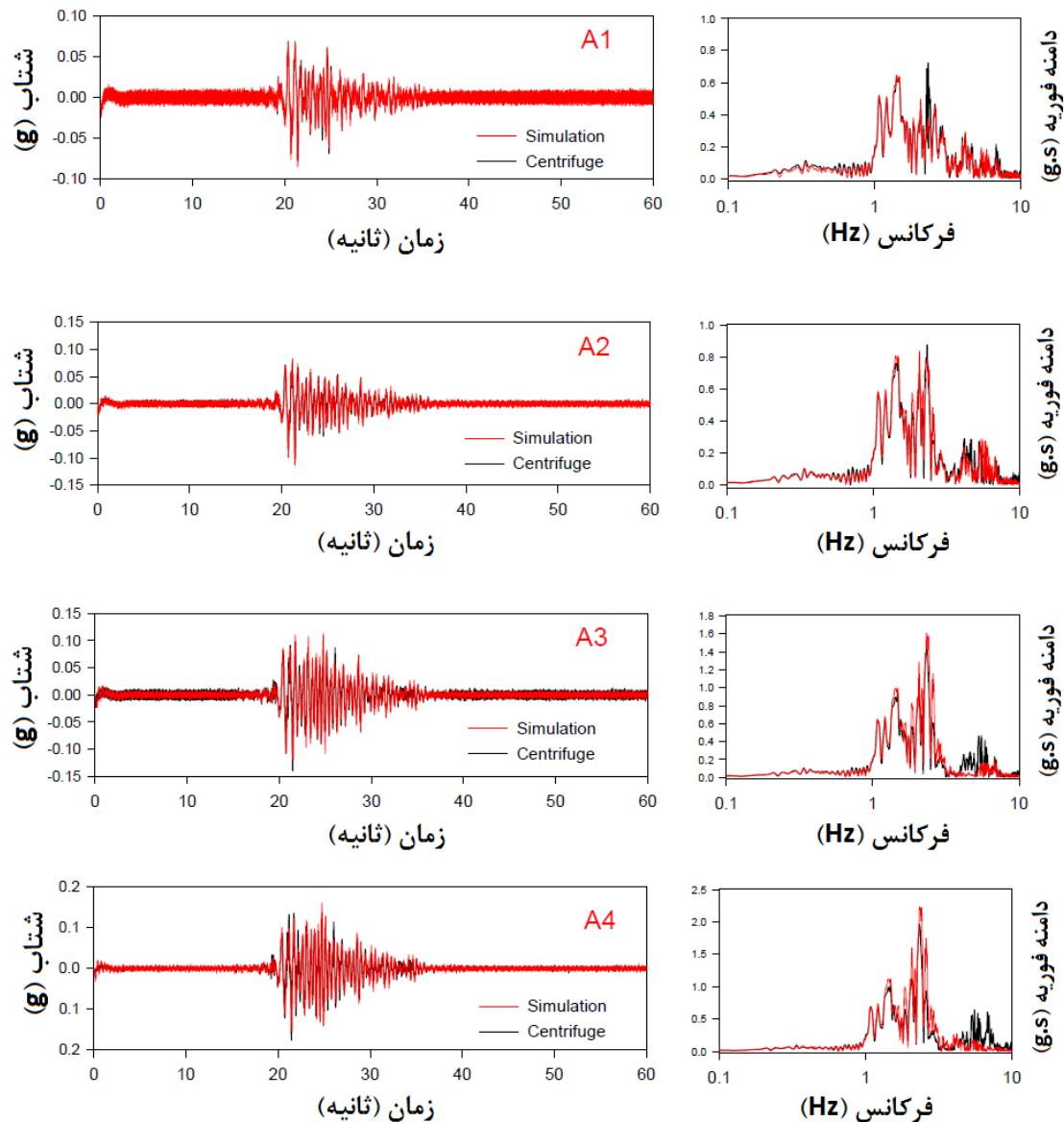
محاسبه گردید:

$$K_n = K_s = 10 \max \left[\frac{K + \frac{4}{3} G_{\max}}{\Delta l_{\min}} \right] \quad (5)$$

در این رابطه K مدول بالک محیط سخت تر و Δl_{\min} طول ریزترین المان در راستای عمود بر جهت المان رابط است که برابر 5° در نظر گرفته شد.

طبق رابطه (۵)، مقادیر سختی برشی و نرمال المان رابط بین مصالح ماسه و بتن، برابر با 4×10^{11} پاسکال بر متر به دست می آید. طبق توصیه ایتاسکا، استفاده از مقادیر بسیار بالای سختی در المان رابط توصیه نمی شود زیرا این مقادیر از سختی، مدت زمان تحلیل دینامیکی مسئله را به شدت افزایش می دهند. لذا با سعی و خطأ مقادیر کمتر سختی برای المان رابط (10^9 پاسکال بر متر) انتخاب شد به گونه ای که کاهش سختی تا این میزان تأثیری بر نتایج صحت سنجی نداشت.

زاویه اصطکاک بین مصالح تونل از جنس بتن و خاک، از مطالعات گومز و همکاران [۲۳] برآورد شده است. این میزان از زاویه اصطکاک همخوانی مناسبی با مقدار معمول $\varphi = 30^{\circ}$ دارد. از دلیل احاطه شدن سازه از اطراف و محدود شدن حرکات نسبی، اندرکنش بین خاک و سازه به اهمیت سازه های روی سطح زمین نیست. مطالعه پارامتری انجام شده توسط نویسندهای نشان داد که تغییرات اندک در مشخصات عنصر واسطه (رابط) تأثیر چندانی بر روی پاسخ لرزه ای سطح زمین و شتاب های ثبت شده ندارند. مشخصات المان رابط در جدول ۳ ارائه شده است.

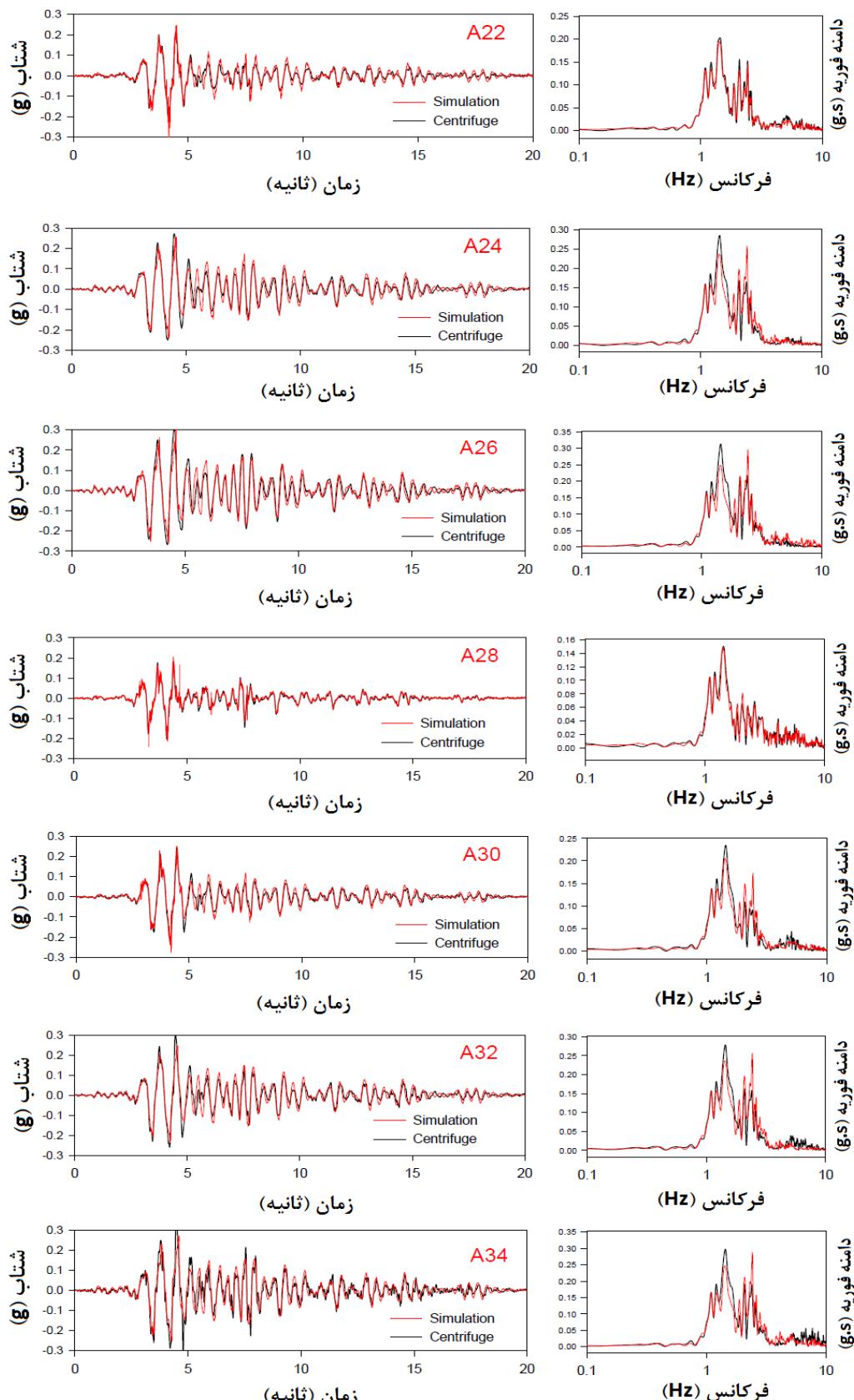


شکل ۱۱- نتایج شبیه سازی عددی آزمایش FF: شتاب سنج های A1 تا A4

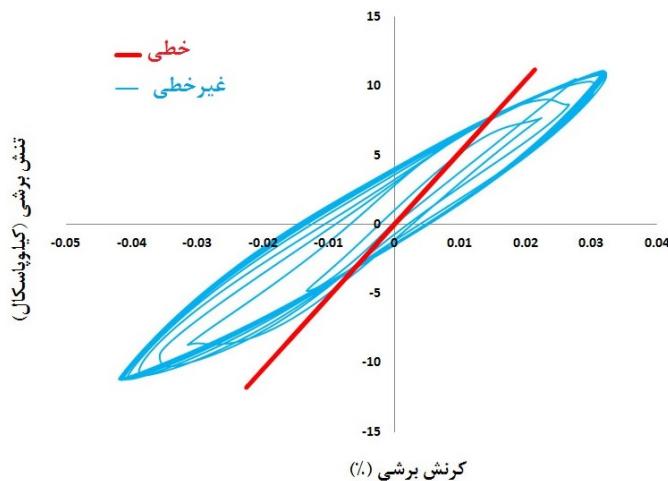
الاستیک خطی تغییر داده شد. PGA های امواج هارمونیک به نحوی انتخاب گردید تا مدل غیرخطی در محدوده PGA های انتخاب شده به صورت غیرخطی رفتار کند. رفتار خطی و غیرخطی خاک از روی نمودار γ - τ قابل بررسی است. شکل (۱۳) منحنی تنش برشی-کرنش برشی (γ - τ) دو مدل FF با رفتار خطی و غیرخطی خاک در برابر 10° سیکل اموج هارمونیک با فرکانس $2/5$ هرتز و دامنه 0.05 g را نشان می دهد.

۴- مطالعه پارامتری

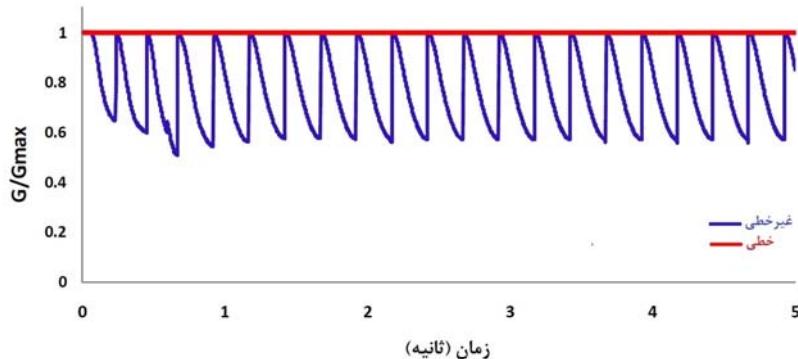
پس از صحت سنجی مدل عددی، مطالعه پارامتری به منظور مقایسه اثر حضور سازه زیر زمینی بر PGA سطح زمین در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک انجام گردید. تحلیل از طریق اموج های هارمونیک با فرکانس های مختلف و با PGA های متفاوت صورت گرفت. به منظور تعریف مدل خطی، در مدل غیرخطی صحت سنجی شده توسط آزمایشات سانتریفیوژی رفتار خاک از الاستیک غیرخطی (هیسترزیس) به



شکل ۱۲- نتایج شبیه سازی عددی آزمایش SF: زلزله کوبه با $PGA=0.191g$



شکل ۱۳- نمودار تنش-کرنش برشی برای یک المان در وسط مدل FF برای مدل خطی و غیرخطی



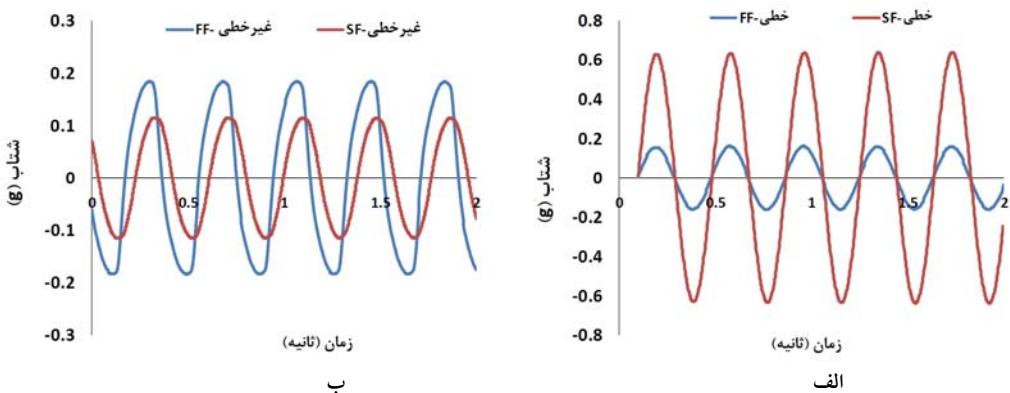
شکل ۱۴- تغییرات نسبت مدول برشی خاک (G/G_{\max}) در طول تحلیل برای مدل غیرخطی و مدل خطی FF

از آنجا که مدل در $g = 0.05$ به صورت غیرخطی عمل نموده لذا PGA های بیشتر از این مقدار نیز منجر به غیرخطی شدن رفتار خاک خواهد گردید. مطالعه پارامتری حاضر درسه سطح شتاب $g = 0.05$, $g = 0.10$ و $g = 0.15$ انجام شده است.

جدول ۴ تحلیل های پارامتری تعریف شده به منظور بررسی مسئله تأثیر رفتار خاک بر PGA سطح زمین در حضور سازه زیرزمینی را ارائه می دهد.

بر اساس تحلیل های ارتعاش آزاد صورت گرفته، فرکانس طبیعی سیستم های FF و SF به ترتیب برابر با ۳.۲۵ و ۲.۶ هرتز به دست آمده است. لذا این فرکانس ها به عنوان فرکانس های تشدید در مطالعه پارامتری لحاظ شده اند. شکل (۱۵) نتایج

همان گونه که از شکل (۱۳) مشخص است رفتار تنش-کرنش خاک ماسه ای در مدل غیرخطی در این محدوده به صورت غیرخطی هیستریزیس بوده و حداقل کرنش برشی ۰٪ را تجربه نموده است در حالی که رابطه تنش-کرنش در مدل خطی به صورت خطی است. شکل (۱۴) تغییرات نسبت مدول برشی خاک (G/G_{\max}) در طول تحلیل را در دو مدل غیرخطی و خطی مورد مقایسه قرار داده است. از شکل ۱۴ مشاهده می شود که مدول برشی خاک در مدل خطی در حین تحلیل ثابت و برابر با G_{\max} است؛ در صورتی که در مدل غیرخطی مدول برشی خاک در حین تحلیل با زمان متغیر و تابعی از میزان کرنش برشی در خاک است و در این تحلیل تا مقدار $G/G_{\max} = 0.5$ کاهش داشته است.



شکل ۱۵- تاریخچه زمانی شتاب سطح زمین با و بدون سازه برای دو مدل رفتار خطی و غیرخطی خاک- فرکانس ۲/۵ هرتز و $PGA=0.1g$

جدول ۴- تحلیل های پارامتری تعریف شده

شماره تحلیل	نوع موج ورودی	دامنه موج	فرکانس تحریک (هرتز)
۱			۰.۵
۲			۱.۰
۳			۲
۴	سینوسی	۰.۰۵g - ۰.۱۰g - ۰.۱۵g	۲.۶
۵			۳
۶			۳.۲۵
۷			۴
۸			۵

مقدار PGA مدل SF در سطح زمین (PGA_{SF}) به مقدار PGA مدل FF در سطح زمین (PGA_{FF}) به صورت زیر تعریف شده است:

$$Amp = \frac{PGA_{SF}}{PGA_{FF}} \quad (6)$$

پس از انجام تحلیل های تعریف شده در جدول ۴، ضریب بزرگ نمایی در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک برای امواج سینوسی با PGA های مختلف به دست آمده و در شکل های (۱۶) الی (۱۸) رسم شده است. ضریب ۱ به معنای برابری PGA سطح زمین در دو مدل SF و FF در فرکانس مورد بررسی است.

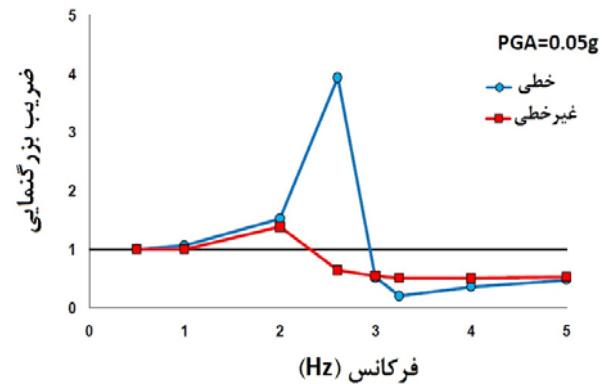
حاصله در اثر اعمال موج سینوسی با فرکانس ۲.۵ هرتز و $PGA=0.1g$ در مدل خطی و غیرخطی در قالب تاریخچه زمانی شتاب در سطح زمین را نشان می دهد.

با توجه به شکل (۱۵) در فرکانس مورد بررسی (فرکانس طبیعی سیستم SF)، در سیستم خطی حضور سازه باعث بزرگ نمایی شتاب نسبت به میدان آزاد شده است؛ در حالی که در سیستم غیرخطی حضور سازه باعث کاهش در PGA میدان آزاد (FF) شده است. این مسئله در فرکانس های مختلف تعریف شده در جدول ۴ مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور مقایسه تأثیر رفتار خاک بر نتایج حاصله، ضریب بزرگ نمایی (Amp) در هر فرکانس به صورت حاصل تقسیم

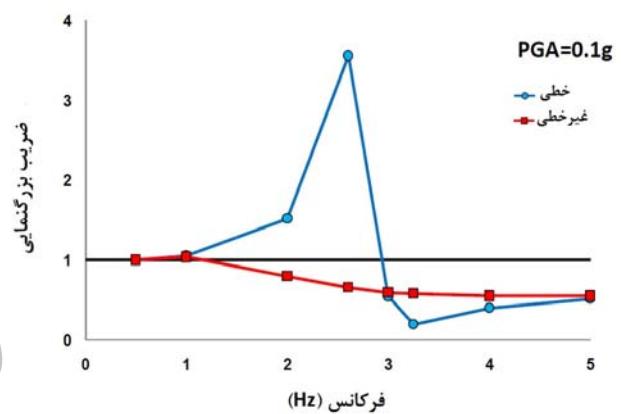
همان‌گونه که در شکل‌های (۱۶) الی (۱۸) دیده می‌شود پاسخ تحلیل در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک به شدت تحت تأثیر فرکانس طبیعی دو سیستم SF و FF است. در محدوده فرکانس طبیعی سیستم با سازه، مدل غیرخطی، کوچک‌نمایی پاسخ زمین در اثر حضور سازه نسبت به پاسخ میدان آزاد را نشان می‌دهد؛ در حالی که در مدل خطی، حضور سازه باعث بزرگ‌نمایی پاسخ نسبت به پاسخ میدان آزاد گردیده است. در محدوده فرکانسی خارج از فرکانس‌های طبیعی سیستم SF و FF، ضریب بزرگ‌نمایی در دو مدل خطی و غیرخطی نزدیک به یکدیگر بوده و هر دو مدل در فرکانس‌های پایین، بزرگ‌نمایی اندک و در فرکانس‌های بالا کوچک‌نمایی پاسخ سطح زمین در اثر وجود سازه نسبت به پاسخ میدان آزاد را از خود نشان داده‌اند.

نتایج نمودارهای شکل‌های (۱۶) الی (۱۸) با بی‌بعد کردن محور افقی نسبت به فرکانس طبیعی سیستم f_{SF} و نرمالابز کردن محور قائم با تقسیم پاسخ خطی به غیرخطی در هر فرکانس برای هر سه PGA مورد مطالعه در شکل (۱۹) ترسیم شده است. ضریب ۱ به معنای برابری پاسخ خطی با غیرخطی در فرکانس مورد بررسی است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نسبت پاسخ خطی به غیرخطی در فرکانس‌های طبیعی SF و FF دارای بیشترین اختلاف است به‌گونه‌ای که در فرکانس طبیعی سیستم SF، پاسخ مدل خطی ۵ الی ۶ برابر پاسخ غیرخطی شده است.

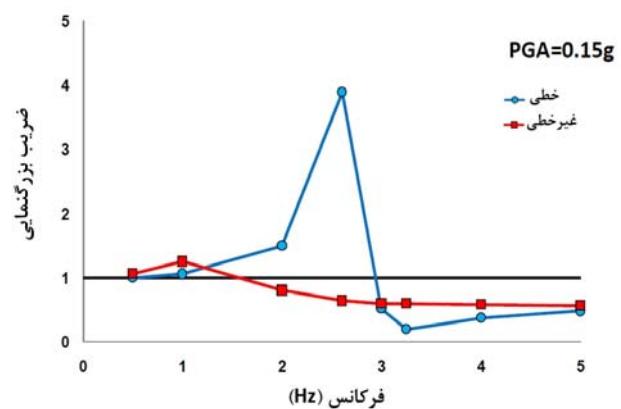
بنابراین فرکانس طبیعی سازه زیرزمینی، نقش بسزایی در سطح زمین در حالت فرض رفتار خطی و غیرخطی PGA میزان برای خاک ایفا می‌کند. به‌گونه‌ای که با فرض رفتار خطی، نقش سازه زیرزمینی در فرکانس‌های طبیعی سیستم با سازه، به صورت بزرگ‌نمایی نسبت به میدان آزاد دیده می‌شود؛ در حالی که رفتار غیرخطی عکس این موضوع را نشان می‌دهد. در توصیف این رفتار می‌توان گفت که در محدوده فرکانس طبیعی سیستم، ارتعاش سیستم الاستیک با سازه (رفتار الاستیک خاک و سازه) منجر به وقوع پدیده تشدید شده و حضور سازه، این ارتعاش را



شکل ۱۶- ضریب بزرگ‌نمایی در دو رفتار خطی و غیرخطی خاک در فرکانس‌های مختلف



شکل ۱۷- ضریب بزرگ‌نمایی در دو رفتار خطی و غیرخطی خاک در فرکانس‌های مختلف



شکل ۱۸- ضریب بزرگ‌نمایی در دو رفتار خطی و غیرخطی خاک در فرکانس‌های مختلف

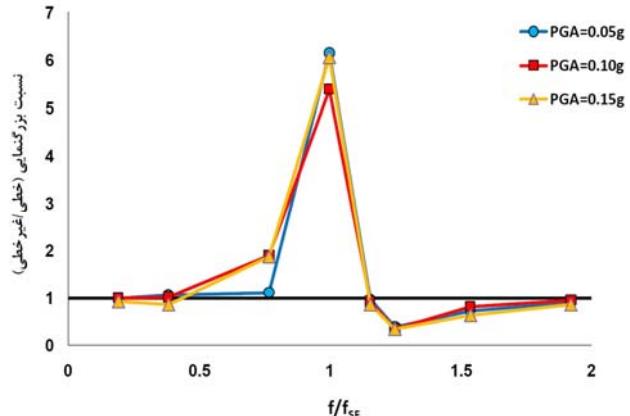
خاک را دارد.

- میزان PGA سطح زمین در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک به شدت تحت تأثیر فرکانس طبیعی دو سیستم با و بدون سازه زیرزمینی است. در محدوده فرکانس طبیعی سیستم با سازه، مدل غیرخطی کوچکنمایی PGA در اثر حضور سازه نسبت به میدان آزاد را نشان می‌دهد؛ در حالی که در مدل خطی حضور سازه باعث بزرگنمایی PGA نسبت به میدان آزاد می‌گردد. نتایج حاصله در سه سطح شتاب مورد بررسی مشاهده گردید.

- در محدوده فرکانس‌های خارج از فرکانس‌های طبیعی سیستم با و بدون سازه، ضریب بزرگنمایی در دو مدل خطی و غیرخطی نزدیک به یکدیگر بوده و هر دو مدل در فرکانس‌های پایین (پریودهای بلند)، بزرگنمایی و در فرکانس‌های بالا (پریودهای کوتاه)، کوچکنمایی PGA سیستم با سازه نسبت به میدان آزاد را نشان می‌دهند. نتایج حاصله در سه سطح شتاب مورد بررسی مشاهده گردید. طبق مطالعه پارامتری انجام شده، فرکانس طبیعی سازه زیرزمینی، نقش بهسزایی در میزان PGA سطح زمین در حالت رفتار خطی و غیرخطی خاک ایفا می‌کند. به گونه‌ای که با فرض رفتار خطی، نقش سازه زیرزمینی در فرکانس طبیعی سیستم با سازه، به صورت بزرگنمایی نسبت به میدان آزاد دیده می‌شود؛ در حالی که رفتار غیرخطی عکس این موضوع را نشان می‌دهد. بنابراین فرض رفتار خطی برای خاک منجر به نتایج بسیار محافظه کارانه خواهد شد و استفاده از مدل غیرخطی مناسب در بررسی مسئله اثر سازه بر شتاب سطح زمین حائز اهمیت بوده و منجر به نتایج واقعی‌تر خواهد گردید.

۶- تشکر و قدردانی

این تحقیق با حمایت شهرداری تهران (مرکز مطالعات و برنامه ریزی شهر تهران) انجام پذیرفته است. نویسنده‌گان این مقاله بر خود واجب می‌دانند مراتب تشکر و قدردانی خود را از این مرکز بابت حمایت‌های صورت گرفته اعلام دارند.



شکل ۱۹- نسبت بزرگنمایی مدل خطی به مدل غیرخطی در PGA های مختلف

تقویت می‌کند. همچنین حضور سازه باعث محبوس شدن موج در خاک بخش فوقانی سازه شده که باعث تقویت دامنه شتاب در سطح زمین می‌گردد. لذا میزان PGA ثبت شده در سطح زمین در سیستم با سازه در حالت الاستیک بیشتر از میدان آزاد گردیده است. در حالی که در سیستمی با رفتار غیرخطی خاک به دلیل رفتار غیرخطی خاک (میرایی هیسترزیس) در محدوده فرکانس طبیعی سیستم، تشدید رخ نمی‌دهد. همچنین موج حبس شده در خاک بالای سازه به دلیل میرایی خاک میرا می‌شود و سازه نقش کاوشی در میزان شتاب ثبت شده در سطح زمین نسبت به میدان آزاد ایفا می‌کند. هرچند این مسئله یک مسئله اندرکنشی پیچیده است و نیاز به مطالعات عمیق‌تر در این زمینه است.

۵- نتیجه‌گیری

پس از صحبت سنجی یک مدل عددی با نتایج آزمایشات سانتریفیوژ انجام گرفته بر روی یک توپل مترو، اثر حضور سازه زیرزمینی بر حداکثر شتاب سطح زمین (PGA) در دو حالت رفتارخطی و غیرخطی خاک مورد مقایسه قرار گرفت. بدین منظور، با استفاده از یک مطالعه پارامتری که با امواج هارمونیک در فرکانس و دامنه‌های مختلف شتاب انجام گردید نتایج زیر حاصل گردید:

- مدل عددی تشریح شده با دقت بالایی قادر به پیش‌بینی نتایج آزمایشات سانتریفیوژی با فرض رفتار غیرخطی

واژه‌نامه

1. Daikai	5. free field	9. liner
2. Korean Advanced Institute of Science & Technology (KAIST)	6. structure field	10. Hardin-Drivich
3. prototype	7. compliant	11. interface
4. equivalent shear beam	8. quiet	12. Itasca

مراجع

- Yoshida, N., and Nakamura, S., "Damage To Daikai Subway Station During The 1995 Hyogoken-Nunbu Earthquake and Its Investigation", *11WCEE*, Paper No. 2151, 1996.
- Cilingir U., and Madabhushi S.P. G. "A Model Study on the Effects of Input Motion on the Seismic Behaviour of Tunnels", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 31, pp. 452-462, 2011.
- Cilingir U., and Madabhushi, S. P. G., "Effect of Depth on Seismic Response of Circular Tunnels", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 48, pp.117-127, 2011.
- Penzien, J., "Seismically-Induced Racking of Tunnel Linings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, pp. 683-691, 2000.
- لطف الهی یقین، م.ع.، تیماس، س. و خوشنودیان، ف..، "اثر سازه‌های مجاور بر رفتار لرزه‌ای تونل"، نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۱، شماره ۱، تابستان ۹۱.
- Migliazza M., Chiorboli M., and Giani G. P., "Comparison of Analytical Method, 3D Finite Element Model with Experimental Subsidence Measurements Resulting from the Extension of the Milan Underground", *Computers and Geotechnics*, Vol. 36, pp. 113–124, 2009.
- Yiouta-Mitra P., Kouretzis G., Bouckovalas G., and Sofianos A., "Effect of Underground Structures in Earthquake Resistant Design of Surface Structures", ASCE GSP 160 Dynamic Response and Soil Properties, Geo-Denver: New Peaks in Geotechnics, 2007.
- Wong K. C., Shah A. H., and Datta S. K., "Diffraction of Elastic Waves in a Halfspace.II. Analytical And Numerical Solutions", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 75, pp. 69-92, 1985.
- Dravinski M., "Ground Motion Amplification Due to Elastic Inclusions in a Halfspace", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 313-335, 1983.
- Pao H. Y., and Maw C. C., "The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations", A Report Prepared for United States Air Force Project Rand, Crane-Russak, New York, 1973.
- Lee VW., "Three Dimensional Diffraction of Elastic Waves by a Spherical Cavity in an Elastic Halfspace:
- free field
- structure field
- compliant
- quiet
- liner
- Hardin-Drivich
- interface
- Itasca

- Analysis of Continua”, Ver. 5.0 User’s Guide, Minneapolis, Itasca, 2005.
23. Gómez, J. E., Filz G. M., and Ebeling R. M., “Extended Hyperbolic Model for Sand-to-Concrete Interfaces”, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 2003, Vol. 129(11), pp. 993–1000, 2003.

Archive of SID