

## تحلیل رفتار ترمومکانیکی درگیر در آلیاژهای حافظه‌دار شکلی

سپیده سادات هاشمی یزدی و سهیل محمدی\*

آزمایشگاه محاسبات سریع، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱۱/۲۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۴/۲۴)

**چکیده** - تحلیل روند تغییر فاز ناشی از تغییر ساختار کریستالی آلیاژهای حافظه‌دار شکلی تحت بارهای مکانیکی یا حرارتی بسیار پیچیده است. با توجه به درگیری ترمومکانیکی موجود در آلیاژهای حافظه‌دار شکلی، در صورت سریع بودن نرخ بارگذاری، تولید/جذب حرارت طی تغییر فاز رفت/برگشت منجر به تغییرات دمایی ماده می‌شود که بر رفتار مکانیکی آن تأثیرگذار است. در این مقاله الگوریتمی مبتنی بر روش اجزاء محدود جهت در نظر گرفتن رفتارهای پیچیده مکانیکی، حرارتی و درگیر آلیاژهای حافظه‌دار شکلی ارائه شده است که هر دو رفتار منحصر به فرد این مواد یعنی سوپرالاستیسیته و حافظه‌دار شکلی را در بر می‌گیرد. به منظور نشان دادن کارایی و دقت الگوریتم ارائه شده، چند مسئله کلیدی شبیه‌سازی و مورد بحث قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: آلیاژ حافظه‌دار شکلی، سوپرالاستیسیته، رفتار درگیر ترمومکانیکی.

## Numerical Analysis of Thermo-Mechanical Coupling in Shape Memory Alloys

S. Hashemi and S. Mohammadi

High Performance Computing Laboratory, School of Civil Engineering, Tehran University

**Abstract:** *The phase transformation phenomenon due to the crystallographic change of shape memory alloys subjected to mechanical or thermal loading is very complicated. Regarding the thermo-mechanical coupling effects in shape memory alloys, in case of high loading rates, heat generation/absorption during the forward/reverse transformation, will lead in temperature-dependent variation and consequently affects its mechanical behavior. In this paper, a numerical algorithm based on the finite element method is proposed to investigate complex mechanical, thermal, and coupled behavior of shape memory alloys, including both exclusive behaviours of these alloys, that are superelasticity and shape memory effect. Several key examples are simulated and discussed to assess the efficiency and accuracy of proposed algorithm.*

**Keywords:** *Shape memory alloys, superelasticity, thermo-mechanical coupling.*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Smoham@ut.ac.ir

$\Delta u_0$	تغییرات انرژی داخلی ویژه	$b^A$	ثابت ماده
$y$	حد نیروی ترمودینامیکی	$b^m$	ثابت ماده
$a$	مدول حرارتی	$C$	ضریب اثر تنش
$\varepsilon$	کرنش	$c$	ظرفیت گرمایی ویژه
$\varepsilon^T$	حداکثر کرنش ناشی از تغییر فاز در محیط یک بعدی ایده آل	$E$	مدول الاستیسیته یانگ
$\varepsilon^{tr}$	کرنش تغییر فاز	$f(\xi)$	تابع سخت شونده گی
$\varepsilon^{tr-R}$	کرنش تغییر فاز حین تغییر فاز برگشت	$S$	تانسور سختی
$\Lambda$	تانسور تغییر فاز	$\Delta s_0$	تغییرات آنتروپی
$\mu_1$	ثابت ماده	$q$	بردار شار حرارتی
$\mu_2$	ثابت ماده	$r$	بردار مکان
$\nu$	ضریب پواسون	$T$	دما
$\xi$	پارامتر تغییر فاز	$T_0$	دمای اولیه
$\pi$	نیروی ترمودینامیکی	$T_{Af}$	دمای پایان آستنیت
$\rho$	چگالی	$T_{As}$	دمای آغاز آستنیت
$\sigma$	تنش	$T_{Mf}$	دمای پایان مارتنسیت
$\sigma'$	تنش انحراف آور	$T_{Ms}$	دمای آغاز مارتنسیت
$\sigma_f$	حد تنش پایان جفت بازشدگی	$T_{Af}^\sigma$	دمای پایان آستنیت در حضور تنش
$\sigma_s$	حد تنش آغاز جفت بازشدگی	$T_{As}^\sigma$	دمای آغاز آستنیت در حضور تنش
$\phi$	سطح تغییر فاز	$T_{Mf}^\sigma$	دمای پایان مارتنسیت در حضور تنش
		$T_{Ms}^\sigma$	دمای آغاز مارتنسیت در حضور تنش

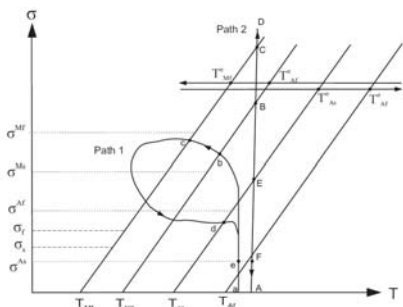
## ۱- مقدمه

دیگری مؤثر باشند. این آلیاژها قابلیت تحمل کرنش‌های قابل توجه و بازگشت به شکل اولیه و صفر شدن کرنش‌ها را در صورت تغییر در درجه حرارت و یا تغییر در تنش اعمالی دارند [۱].

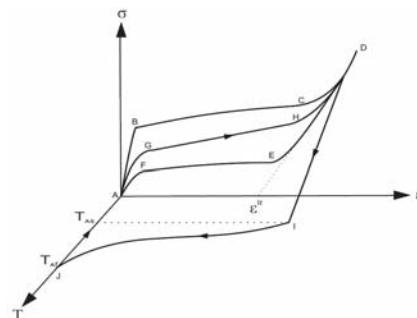
آلیاژهای حافظه‌دار شکلی دارای دو فاز پایدار آستنیت<sup>۳</sup> (فاز پایدار در دمای بالا) و مارتنسیت<sup>۴</sup> (فاز پایدار در دمای پایین) هستند. تفاوت این دو فاز در ساختار کریستالی آنها نهفته است. به تغییر ساختار ماده از یک فاز به دیگری که با کرنش برشی انحرافی شبکه کریستالی همراه است تغییر فاز مارتنستی<sup>۵</sup> اطلاق می‌شود. با توجه به چیدمان ورینت‌ها<sup>۶</sup> (جهت واحدهای سلولی مارتنسیت بعد از تغییر فاز) کنار هم، دو ساختار متفاوت برای مارتنسیت تعریف می‌شود که عبارتند از مارتنسیت جفت‌شده<sup>۷</sup> و مارتنسیت جفت‌بازشده<sup>۸</sup>. در مارتنسیت جفت‌شده چیدمان ورینت‌ها

امروزه در سراسر جهان مواد هوشمند توجه بسیاری از مهندسان و دانشمندان را به خود جلب کرده‌اند. نوعی از مواد هوشمند<sup>۱</sup>، آلیاژهای حافظه‌دار شکلی<sup>۲</sup> هستند. خواص یکتای آلیاژهای حافظه‌دار شکلی، آنها را به گزینه مناسبی برای کاربردهای متفاوتی در زمینه‌های متنوعی چون سازه‌های عمرانی، هوافضا، بیوپزشکی، اتومبیل‌سازی و استخراج نفت تبدیل کرده است. از جمله کاربردهای این مواد در مهندسی عمران می‌توان به دیوار برشی و کنترل ارتعاشات سازه‌ها اشاره کرد.

آلیاژهای حافظه‌دار شکلی دارای اندرکنش مستقیم اثرات مکانیکی و حرارتی هستند. اندرکنش مستقیم به این معنی است که هر یک از دو عامل مذکور می‌توانند به‌عنوان عامل تحریک بر



شکل ۲- تغییر فاز دمایی در حضور بار مکانیکی و رابطه تنش - دما در تغییر فاز مکانیکی و نمایش دو مسیر شبه الاستیک محتمل [۱]



شکل ۱- نمونه رابطه تنش، کرنش و دما در دو رفتار سوپر الاستیسیته و اثر حافظه دار شکلی [۱]

الاستیک، تغییر شکل‌ها ماندگارند، به عبارت دیگر پس از باربرداری همچنان مارتنسیت به صورت جفت باز شده می‌ماند. چنانچه در این شرایط ماده را تا دمایی بالاتر از  $T_{Af}$  گرم کنیم، تغییر فاز برگشت رخ داده و کرنش‌ها صفر می‌شوند. به کرنشی که طی تغییر فاز از مارتنسیت جفت باز شده به مارتنسیت صفر می‌شود، کرنش تغییر فاز  $\epsilon^{tr}$  می‌گویند. به این چرخه اثر حافظه دار شکلی می‌گویند که مطابق مسیر A-G-H-D-I-J-A در شکل (۱) نشان داده شده است [۱].

چنانچه آستنیت را در حضور بار مکانیکی بزرگتر از  $\sigma_s$  خنک کنیم، تغییر فاز دمایی منجر به تشکیل مارتنسیت جفت‌باز شده می‌شود (شکل (۲)). در این شرایط حدود تغییر فاز رفت و برگشت چهار دمای مشخص هوو و هستند که به طور مستقیم با افزایش بار مکانیکی اعمال شده بزرگتر می‌شوند [۱].

### ۱-۲- رفتار سوپر الاستیک یا شبه الاستیک

چنانچه آستنیت در دمایی بالاتر از  $T_{Af}$  تحت بار مکانیکی قرار بگیرد، به مارتنسیت جفت‌باز شده تغییر فاز می‌دهد ولی چون در این دما فاز پایدار آستنیت است، در صورت بار برداری ماده به فاز آستنیت بازمی‌گردد و کرنش ایجاد شده طی بارگذاری، در باربرداری صفر می‌شود. در این شرایط حدود تغییر فاز رفت و برگشت چهار دمای مشخصه  $T_{Ms}$  و  $T_{Mf}$  و  $T_{As}$  و  $T_{Af}$  هستند. این چرخه همان رفتار سوپر الاستیک آلیاژهای حافظه دار شکلی است. به صورت رایج تست سوپر الاستیک در یک دمای ثابت اسمی بالاتر از  $T_{Af}$  انجام می‌شود که مسیر بارگذاری آن

به گونه‌ای است که میانگین تغییر شکل ماکروسکوپی صفر است ولی در مارتنسیت جفت‌باز شده یک ورینت خاص بر سایر ورینت‌ها غالب می‌شود و در نتیجه در جهت آن تغییر شکل برشی ایجاد می‌شود. تغییر فاز برگشت پذیر از آستنیت به مارتنسیت و برعکس، اساس رفتارهای منحصر به فرد آلیاژهای حافظه دار شکلی است که از آنها به اثر حافظه دار شکلی<sup>۹</sup> و رفتار سوپر الاستیک<sup>۱۰</sup> یا شبه الاستیک<sup>۱۱</sup> یاد می‌شود [۱].

### ۱-۱- اثر حافظه دار شکلی

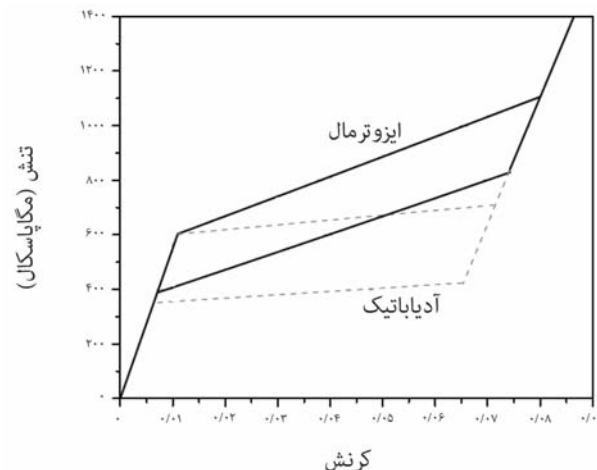
در صورت سرد کردن آستنیت در غیاب بار مکانیکی، ماده به مارتنسیت جفت‌شده تغییر فاز می‌دهد (تغییر فاز رفت<sup>۱۲</sup>). عکس این مطب نیز صادق است، یعنی با حرارت دادن مارتنسیت جفت‌شده در غیاب بار مکانیکی، ماده به آستنیت تغییر فاز می‌دهد (تغییر فاز برگشت<sup>۱۳</sup>). بنابراین بدیهی است که طی تغییر فاز حرارتی، تغییر شکل ماکروسکوپی ایجاد نمی‌شود. تغییر فاز رفت با کاهش دما، از دمای آغاز مارتنسیت<sup>۱۴</sup> ( $T_{Ms}$ ) شروع شده و در دمای پایان مارتنسیت<sup>۱۵</sup> ( $T_{Mf}$ ) پایان می‌یابد. به طور مشابه تغییر فاز برگشت با افزایش دما، از دمای آغاز آستنیت<sup>۱۶</sup> ( $T_{As}$ ) شروع شده و در دمای پایان آستنیت<sup>۱۷</sup> ( $T_{Af}$ ) پایان می‌یابد. در صورتی که در دماهای پایین (دمایی کمتر از  $T_{Mf}$ ) مارتنسیت جفت‌شده تحت بار مکانیکی قرار بگیرد، به مارتنسیت جفت‌باز شده تغییر فاز می‌دهد. فرآیند جفت‌بازشدگی با رسیدن بار به حد تنش ( $\sigma_s$ ) آغاز و در حد تنش ( $\sigma_f$ ) پایان می‌یابد. در این حالت در صورت باربرداری

که بیانگر اتلاف انرژی در چرخه تغییر فاز است [۱].

### ۳-۱- وابستگی ترمومکانیکی و اهمیت نرخ بارگذاری مکانیکی و حرارتی

تغییر فاز در آلیاژهای حافظه‌دار شکلی با جذب و یا تولید انرژی حرارتی همراه است. بنابراین با توجه به این نکته که رفتار آلیاژهای حافظه‌دار شکلی به دما حساسیت دارد، بحث وابستگی ترمومکانیکی پیش می‌آید. تغییر فاز رفت (آستنیت به مارتنسیت) فرآیندی گرما ده و تغییر فاز برگشت (مارتنسیت به آستنیت) فرآیندی گرما گیر است [۲]. این بدان معناست که حین تغییر فاز رفت دمای ماده به دلیل آزاد شدن حرارت بالا می‌رود. در نتیجه آستنیت پایدارتر می‌شود و تنش اعمالی بیشتری لازم است تا تغییر فاز ادامه یابد (شکل (۳)). حین تغییر فاز برگشت نیز با کاهش دما مارتنسیت پایدارتر می‌شود و لذا حین باربرداری برای ادامه تغییر فاز در هر گام لازم است تنش اعمالی بیش از پیش کاهش یابد (شکل (۳)). با توجه به این توضیحات کاملاً مشخص است که در مسائلی که نرخ کرنش اعمالی زیاد است و یا به بیانی دیگر ماده فرصت تبادل حرارتی با محیط اطراف را ندارد (فرآیند آدیاباتیک)، افزایش/ کاهش ناگهانی دما حین تغییر فاز رفت/ برگشت منجر به بالاتر/ پایین تر رفتن حد تغییر فاز ماده می‌شود و بنابراین بر روی شیب منحنی در قسمت تغییر فاز تاثیر گذاشته و وابستگی ترمومکانیکی وارد معادلات می‌شود [۱]. با این حال، توباشی و همکاران نشان دادند که برای نرخ‌های کرنش کمتر از ۲ درصد در دقیقه، می‌توان وابستگی ترمومکانیکی را کنار گذاشت [۳].

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی مطرح شد، تغییر فاز رفت گرماده و تغییر فاز برگشت گرما گیر است. در آزمایش‌های سوپرالاستیک برای سهولت در تفسیر نتایج، نمونه معمولاً در دمای ثابت نگه داشته می‌شود. چنانچه گرمای تولید شده در تغییر فاز رفت تلف نشود، انرژی حرارتی به نمونه افزوده می‌شود. اگر بارگذاری به اندازه کافی آهسته رخ دهد، فرآیندهای همرفت<sup>۱۹</sup> و رسانش<sup>۲۰</sup> گرمای اضافی را از بین



شکل ۳- نمودار رفتار شبه الاستیک: در حالت‌های هم‌دما و آدیاباتیک

به صورت مسیر ۲ در شکل (۲) و نمودار تنش- کرنش آن در شکل (۱) مطابق مسیر A-B-C-D-E-F-A نشان داده شده است [۱]. همان‌طور که در مسیر A-B-C-D-E-F-A از شکل (۱) دیده می‌شود، با افزایش بار مکانیکی در دمای ثابت بالاتر از  $T_{Af}$  و تا قبل از شروع تغییر فاز مارتنسیتی، آستنیت رفتار الاستیک دارد (A تا B). زمانی که تنش وارده برابر تنش معادل دمای  $T_{Ms}^{\sigma}$  شود، تغییر فاز مارتنسیتی آغاز می‌شود و تا حد تنش معادل دمای  $T_{Mf}^{\sigma}$  ادامه می‌یابد (B تا C). باید توجه شود که تغییر فاز مکانیکی از آستنیت به مارتنسیت، همراه با ایجاد کرنش‌های غیرالاستیک بزرگی است که در شکل (۳) نشان داده شده است. اتمام تغییر فاز مارتنسیتی با یک تغییر شیب واضح در نمودار تنش- کرنش مشخص می‌شود. در ادامه افزایش بیشتر تنش صرف تغییر شکل الاستیک مارتنسیت جفت‌باز شده می‌شود (C تا D). با باربرداری به صورت الاستیک، تنش به آرامی کاهش می‌یابد (D تا E) تا به حد تنش معادل دمای  $T_{As}^{\sigma}$  برسد. از این نقطه به بعد تا حد تنش معادل دمای  $T_{Af}^{\sigma}$ ، تغییر فاز از مارتنسیت به آستنیت رخ می‌دهد (E تا F). با ادامه دادن باربرداری، آستنیت به صورت الاستیک به حالت اولیه خود برمی‌گردد (F تا A) و در نهایت کرنش‌ها صفر می‌شوند (A). تغییر فاز رفت و برگشت حین یک چرخه کامل شبه‌الاستیک منجر به یک رفتار شبه هیستریزس در فضای تنش- کرنش می‌شود

نتیجه و اثر جنبش‌های سطحی در نظر گرفته می‌شود. این مدل‌ها اگرچه برای درک دقیقی از رفتار بسیار کار آمد هستند ولی کمتر در مسائل مهندسی به کار گرفته می‌شوند [۵].

در مدل‌های میکرو-ماکرو (۱۹۹۲-۲۰۰۵) ابتدا به صورت جداگانه، رفتار هر یک از اجزاء ساختاری مدل‌سازی می‌شود و سپس در یک حجم مشخصه<sup>۲۸</sup> از ماده همگن‌سازی می‌شود تا مدل عمومی رفتار ماده به دست آید. در این مدل‌ها از ترمودینامیک جهت توصیف عمومی رفتار ماده و از میکرومکانیک جهت بررسی دقیق‌تر تغییر فاز استفاده می‌شود. این مدل‌ها از دقت مناسبی برخوردارند و ضمناً به لحاظ حجم و زمان محاسبات نسبت به مدل‌های میکرو، هزینه کمتری را به کاربر تحمیل کرده و در مسائل خاص مانند سیستم‌های هوشمند میکروالکترو مکانیکی مورد استفاده در صنعت هوا فضا و یا تجهیزات بسیار نازک مورد استفاده در مهندسی پزشکی، بسیار پرکاربرد هستند. ولی به دلیل تعدد متغیرهای داخلی، در مقایسه با مدل‌های ماکرو در کاربردهای عمده، فعلاً کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵].

معتبرترین مدل رفتاری موجود که قابلیت مدل‌کردن رفتارهای سوپرالاستیک و اثرحافظه‌دار شکلی را دارد و همچنین از سرعت همگرایی بالایی برخوردار است، مدل ماکروی بویدو و لاگوداس [۶] است که بعدها کیدوای و لاگوداس [۷] الگوریتم نگاشت برگشتی را برای آن ارائه دادند. در این مقاله، از این مدل که به الگوریتم نگاشت برگشتی رایج در پلاستیسته شبیه است، جهت بررسی پدیده تغییر فاز و رفتار درگیر آلیاژهای حافظه‌دار شکلی استفاده می‌شود.

رابطه بنیادی آلیاژهای حافظه‌دار شکلی، از نظر ظاهری شبیه روابط بنیادی سایر مواد الاستوپلاستیک است:

$$\varepsilon = S : \sigma + \alpha(T - T_0) + \varepsilon^{tr} \quad (1)$$

که  $\varepsilon^{tr}$  کرنش تغییر فاز (معادل کرنش پلاستیک) است.

رابطه (۱)، به‌تنهایی قادر به توصیف رفتار ماده نیست، ولی با توجه به ماهیت غیرخطی و برشی رفتار ماده در ناحیه تغییر فاز و شباهت آن به رفتار پلاستیک، می‌توان جهت سادگی، رابطه زیر

می‌برند، بدون آن که دمای نمونه را به میزان قابل توجهی افزایش دهند. اگر بارگذاری یا باربرداری بسیار سریع انجام شود، نمونه فرصت تبادل گرمایی با محیط را ندارد (مشابه فرآیند آدیاباتیک<sup>۲۱</sup>) و در نتیجه دمای آن حین بارگذاری افزایش و حین باربرداری کاهش می‌یابد که فرض همدم<sup>۲۲</sup> بودن را نقض می‌کند و دیگر نمی‌توان مسئله را در شرایط دمای ثابت در نظر گرفت. برای بارگذاری در شرایط هم‌دما در هر دمایی، نرخ بارگذاری نباید از ۰/۰۵-۰/۱ کرنش بر دقیقه تجاوز کند. این محدودیت، تضمین‌کننده آزمایش شبه استاتیکی<sup>۲۳</sup> است. همچنین بررسی‌ها نشان می‌دهند که فرآیند جفت‌بازشدگی در حالت کلی مستقل از نرخ کرنش است [۱].

## ۲- معادله رفتاری تغییر فاز آلیاژ حافظه‌دار شکلی

از اوایل دهه ۸۰ میلادی، مدل‌سازی رفتار تغییر فاز، هدف اصلی بسیاری از تحقیقات مرتبط با آلیاژهای حافظه‌دار شکلی بوده است. به‌طور کلی مدل‌های ارائه‌شده را می‌توان در سه گروه دسته‌بندی کرد: مدل‌های ماکرو، میکرو و میکرو-ماکرو.

مدل‌های ماکرو یا برمبنای ترمودینامیک حاکم بر پدیده تغییر فاز و یا به‌طور مستقیم از برازش منحنی بر مشاهدات آزمایشگاهی توسعه یافته‌اند. این دسته از مدل‌های رفتاری به دلیل سادگی در برنامه‌نویسی و محاسبات نرم‌افزاری در مسائل مهندسی کاربرد فراوان دارند ولی در بررسی جزئیات میکروسکوپی ناتوان هستند. ویژگی اصلی این مدل‌ها در مدل‌سازی رفتاری آلیاژهای حافظه‌دار شکلی، معرفی متغیرهای داخلی<sup>۲۴</sup> (عموماً حجم نسبی مارتنسیت) جهت توصیف ساختار داخلی ماده حین تغییر فاز است که برای تعیین نحوه توزیع و پیشرفت آنها، کارآمدترین روش ترمودینامیک پیوسته است. نخستین بار، تاناکا و ناگاکا با استفاده از همین روش به توصیف پیشرفت تغییر فاز در مدل‌های ماکرو خود پرداختند [۴].

تمرکز مدل‌های میکرو (۱۹۹۰-۱۹۸۰) در بررسی جزئیات مقیاس میکرو مانند نوکلئیشن<sup>۲۵</sup>، جنبش سطحی<sup>۲۶</sup>، رشد جفتی‌ها<sup>۲۷</sup> و غیره است. در این مدل‌ها عموماً حجم نسبی مارتنسیت به‌عنوان

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۴، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۴

تغییر فاز ظاهر می‌شود، انتظار تولید سخت‌شوندگی خطی از این تابع داریم.

روابط ترمومکانیکی درگیر حاکم بر تغییر فاز آلیاژ حافظه‌دار شکلی به صورت زیر قابل بیان است:

$$T\alpha : \dot{\sigma} + \rho c \dot{T} + \left( -\Pi + T\Delta\alpha : \sigma - \rho\Delta c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \rho\Delta s_0 T \right) \dot{\xi} = -\nabla \cdot q + \rho r \quad (A)$$

جمله اول در سمت چپ معادله بیان‌کننده چگونگی تغییرات دما بر حسب تنش و عبارت دوم به ظرفیت حرارتی ماده مربوط است. جمله سوم بیان‌گر چگونگی تغییرات حرارت با توجه به پیشرفت تغییر فاز است، که اصطلاحاً به آن گرمای نهفته گفته می‌شود. جملات سمت راست معادله نیز به فرآیند انتقال حرارتی مربوط هستند.

### ۳- الگوریتم نگاشت برگشت در مدل‌سازی اجزاء

#### محدود

برای حل عددی معادله رفتاری از الگوریتم نگاشت برگشت پلاستیسیته استفاده می‌شود. تنها تغییری که در این الگوریتم داده می‌شود این است که به جای مفهوم معیار تسلیم از معیار تغییر فاز استفاده می‌شود (الگوریتم تخمین الاستیک-تصحیح تغییر فاز). در بخش تخمین الاستیک، کرنش تغییر فاز ثابت است و با این فرض، سایر متغیرها محاسبه می‌شوند. در بخش تصحیح تغییر فاز، کرنش نظیر و سایر متغیرها، اصلاح می‌شوند. در ادامه، مراحل گام به گام الگوریتم به کار رفته برای حل معادله رفتاری درگیر آورده شده است. مطابق این الگوریتم، در هر گام از حل، ابتدا مسئله مکانیکی حل می‌شود و سپس اثرات حرارتی محاسبه شده و مبنای محاسبه مکانیکی گام بعدی قرار می‌گیرد. در این الگوریتم  $n$ ، نشان‌دهنده شماره گام و  $k$ ، تعداد تکرار در هر گام است. این الگوریتم در ادامه آورده شده است:

۱. محاسبه بردار جابه‌جایی از حل معادله تعادل

۲. محاسبه تانسور کرنش از رابطه کرنش و تغییر مکان

را بین تغییرات  $\varepsilon^{tr}$  و تغییرات پارامتر تغییر فاز  $\xi$  معرفی کرد:

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \Lambda \dot{\xi} \quad (2)$$

که در آن  $\Lambda$  تانسور تغییر فاز است:

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} \varepsilon^T \frac{\sigma'}{\sqrt{\frac{3}{2} \|\sigma'\|^2}} ; \dot{\xi} > 0 \\ \varepsilon^T \frac{\varepsilon^{tr-R}}{\sqrt{\frac{3}{2} \|\varepsilon^{tr-R}\|^2}} ; \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$\varepsilon^T$ ، حداکثر کرنش ناشی از تغییر فاز در محیط یک‌بعدی ایده‌آل،  $\sigma'$  تنش انحراف‌آور و  $\varepsilon^{tr-R}$ ، کرنش تغییر فاز حین تغییر فاز برگشت است. این رابطه بسیار مشابه قانون جریان در پلاستیسیته کلاسیک است. بنابراین استفاده از تکنیک‌های عددی رایج در پلاستیسیته در مدل‌سازی تغییر فاز، منطقی به نظر می‌رسد.

تنها نکته باقی مانده در رابطه با معادلات رفتاری آلیاژهای حافظه‌دار شکلی، تعیین سطح تغییر فاز است:

$$\Phi = \begin{cases} \Pi - Y, \dot{\xi} > 0 & (A(\text{ustenite}) \rightarrow M(\text{artensite})) \\ \Pi - Y, \dot{\xi} < 0 & (M \rightarrow A) \end{cases} \quad (4)$$

$$Y = \frac{1}{4} \rho \Delta s_0 (T_{Ms} + T_{Mf} - T_{Af} - T_{As}) \quad (5)$$

$$\Pi = \sigma : \Lambda + \frac{1}{4} \sigma : \Delta C : \sigma + \sigma : \alpha (T - T_0) - \rho \Delta c \left[ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta u_0 - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \quad (6)$$

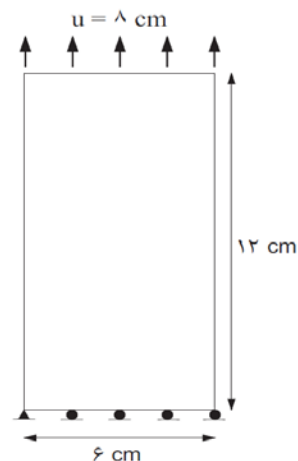
که در روابط فوق  $\Phi = 0$  سطح تغییر فاز،  $\Pi$  نیروی ترمودینامیکی و  $Y$  به نوعی حد این نیرو را مشخص می‌کند که به خواص ماده وابسته است. اثرات سخت‌شدگی ناشی از تغییر فاز از طریق عبارت  $\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$  که فقط به  $\xi$  وابسته است، وارد مسئله می‌شود.  $f(\xi)$  تابع سخت‌شوندگی است که به صورت چند جمله‌ای انتخاب می‌شود:

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho b^M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2) \xi & ; (A \rightarrow M) \\ \frac{1}{2} \rho b^A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2) \xi & ; (M \rightarrow A) \end{cases} \quad (7)$$

که  $b^A$ ،  $b^M$  و  $\mu_1$  و  $\mu_2$  ثابت‌های ماده هستند. با توجه به درجه دوم بودن این تابع و اینکه مشتق آن در رابطه سطح

جدول ۱- مشخصات ماده [۷]

$E^A$	۷۰ GPa
$E^M$	۳۰ GPa
$\nu$	۰/۳
$a^A = a^M$	$۲۲ \times 10^{-6} / ^\circ C$
$T_{Ms}$	$۱۸ ^\circ C$
$T_{Mf}$	$-۲ ^\circ C$
$T_{As}$	$۲۲ ^\circ C$
$T_{Af}$	$۴۲ ^\circ C$
$C^A = C^M$	۷ MPa/ $^\circ C$
$\varepsilon_{max}^{tr}$	۵%



شکل ۴- هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله

$$\varepsilon_{n+1}^{tr(k+1)} = \varepsilon_{n+1}^{tr(k)} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{tr(k)} \quad (15)$$

f. به روز کردن مدول های الاستیک و حرارتی

$$C(\xi) = C^A + \xi(C^M - C^A) = C^A + \xi \Delta C \quad (16)$$

$$\alpha(\xi) = \alpha^A + \xi(\alpha^M - \alpha^A) = \alpha^A + \xi \Delta \alpha \quad (17)$$

k = k + 1 و سپس برنامه وارد گام (۳/ a) می شود.

۴. تعیین درجه حرارت واقعی  $T_{n+1}^{k+1}$

۵. محاسبه نیروی باقی مانده داخلی (R)

۶. اگر  $|R| \leq tol_r$  یا  $|T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k| \leq tol_t$  برنامه وارد گام (۱) می شود.

#### ۴- مدل سازی های عددی

##### ۴-۱- آزمایش کشش خالص

نخستین مسئله مطابق شکل (۴) شامل یک صفحه آلیاژ حافظه دار شکلی است که در شرایط تنش مسطح و در دمای ۴۲ درجه سانتی گراد، به صورت جابه جایی کنترل تحت کشش در مرز بالایی خود قرار می گیرد. درجات آزادی قائم در تمام مرز پایین و درجه آزادی افقی در گوشه پایینی نمونه بسته شده است. مشخصات ماده مطابق با مرجع [۷] در جدول (۱) نشان داده شده است. برای تحلیل این مسئله مطابق شکل (۵) از سه نوع شبکه بندی متفاوت استفاده شده است.

۳. تخمین ترموالاستیک و استفاده از الگوریتم نگاشت بازگشتی

a. تعیین مقادیر اولیه

$$k = 0, \xi_{n+1}^{(0)} = \xi_n, \varepsilon_{n+1}^{tr(0)} = \varepsilon_n^{tr}, S_{n+1}^{(0)} = S_n, \alpha_{n+1}^{(0)} = \alpha_n \quad (9)$$

b. تخمین ترموالاستیک و بررسی شرط تغییر فاز

$$\Phi_{n+1}^{(k)} = C_{n+1}^{(k)} : \left( \varepsilon_{n+1}^{(k)} - \alpha_{n+1}^{(k)} (T_{n+1} - T_0) - \varepsilon_{n+1}^{tr(k)} \right) \quad (10)$$

$$\Phi_{n+1}^{(k)} = \Phi \left( \sigma_{n+1}^{(k)}, T_{n+1}, \xi_{n+1}^{(k)} \right) \quad (11)$$

c. اگر  $\Phi_{n+1}^{(k)} < 0$  (و یا  $|\Phi_{n+1}^{(k)}| \leq tol_f$  در تکرارها) برنامه وارد گام (۴) می شود.

d. محاسبه مقدار تغییرات پارامتر تغییر فاز  $\xi$  و کرنش تغییر فاز  $\varepsilon^{tr}$

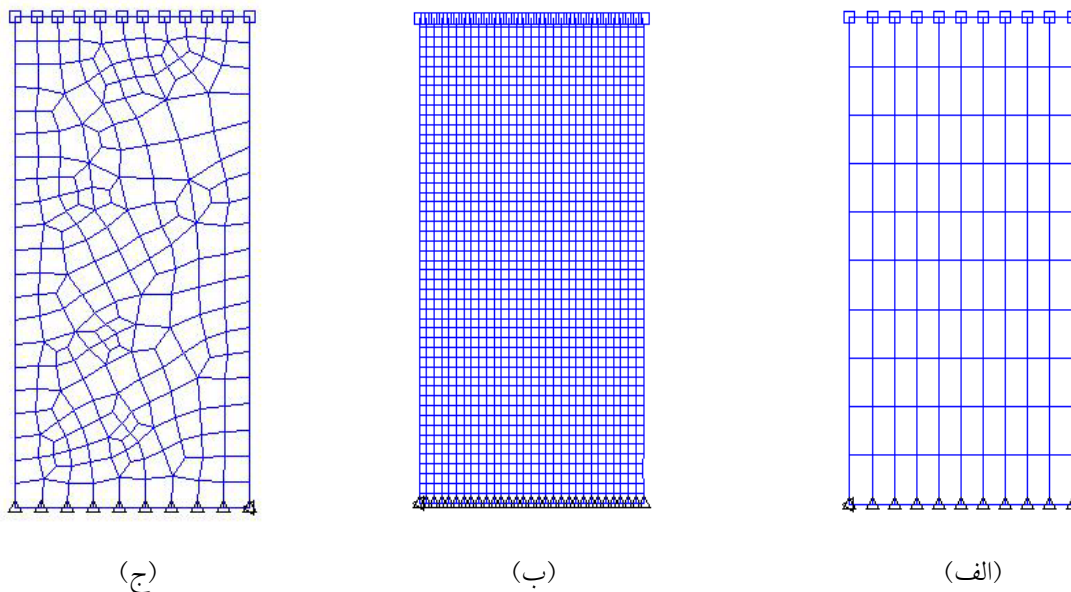
$$\Delta \xi_{n+1}^{(k)} = \frac{\Phi_{n+1}^{(k)}}{\pm \partial_\sigma \Phi_{n+1}^{(k)} : C_{n+1}^{(k)} : \partial_\sigma \Phi_{n+1}^{(k)} - \partial_\varepsilon \Phi_{n+1}^{(k)}} \quad (12)$$

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^{tr(k)} = \Delta \xi_{n+1}^{(k)} \Lambda_{n+1}^{(k)} \quad (13)$$

که علامت های + و - به ترتیب برای تغییر فاز رفت و برگشت به کار می روند.

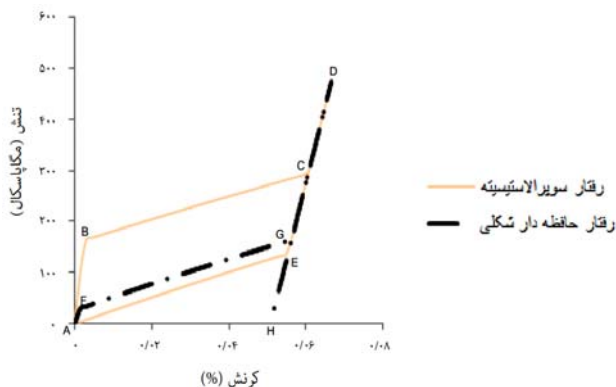
e. به روز کردن متغیرهای مسئله شامل کرنش تغییر فاز و پارامتر تغییر فاز

$$\xi_{n+1}^{(k+1)} = \xi_{n+1}^{(k)} + \Delta \xi_{n+1}^{(k)} \quad (14)$$

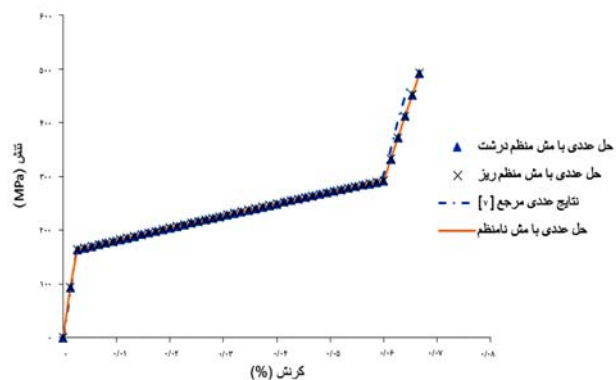


شکل ۵- انواع شبکه‌های به کاررفته، (الف) شبکه منظم درشت با ۱۲۱ المان، (ب) شبکه ریز با ۱۵۸۱ المان و

(ج) شبکه نامنظم با ۲۲۶ المان



شکل ۷- نمودار تنش- کرنش در دو رفتار سوپرالاستیک و حافظه دار شکلی

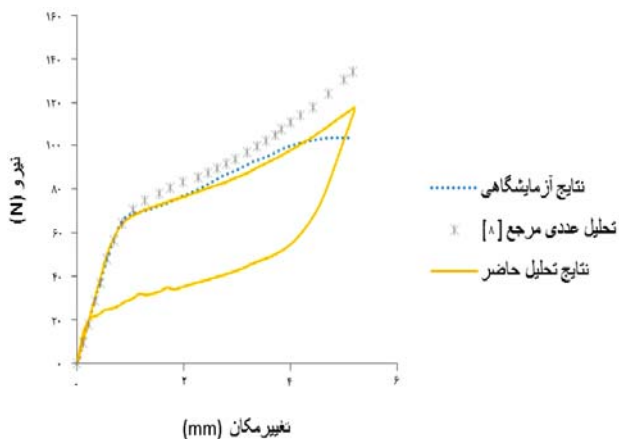


شکل ۶- تغییرات تنش - کرنش تست کشش خالص برای شبکه‌های مختلف در مقایسه با نتایج آنالیز عددی مرجع

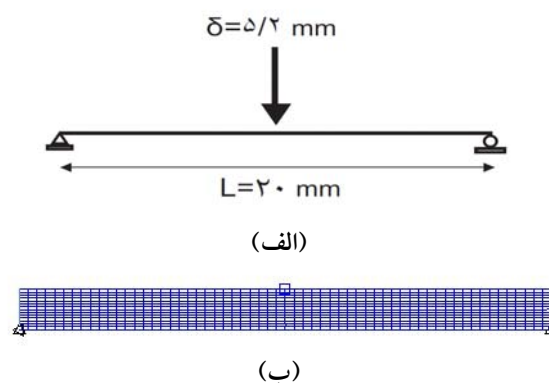
نمودار تنش- کرنش برای شبکه‌های مختلف به همراه نتایج مرجع در شکل (۶) نشان داده شده است که حاکی از مطابقت بسیار خوب است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تغییرات اندازه شبکه تأثیری بر نتایج ندارد و پدیده وابستگی به شبکه بر این مسئله حاکم نیست. به‌منظور مقایسه تفاوت دو رفتار سوپرالاستیک و اثر حافظه دار شکلی، آنالیز عددی به ترتیب تحت دمای ۲۲ و ۴۲ درجه سانتی‌گراد انجام شده و نتایج در شکل (۷) نشان داده شده است. مسیر بارگذاری در رفتارهای سوپرالاستیک و

حافظه دار شکلی به ترتیب A-B-C-D و A-F-G-D و مسیر باربرداری به ترتیب D-E-A و D-H است. همان‌طور که انتظار می‌رفت در رفتار سوپرالاستیک با باربرداری، کل کرنشی که در مرحله بارگذاری ایجاد شده است، به صفر می‌رسد ولی در رفتار حافظه دار شکلی، پس از باربرداری کرنشی معادل ۵ درصد در نمونه باقی می‌ماند. چنانچه در رفتار حافظه دار شکلی و پس از باربرداری نمونه تحت حرارت قرار گیرد، کرنش ایجاد شده صفر می‌شود و در اصطلاح نمونه به شکل در حافظه نگه‌داشته شده خود باز می‌گردد.





شکل ۹- نمودار تنش - کرنش تست خمش سه نقطه‌ای



شکل ۸- (الف) هندسه و شرایط مرزی مسئله تیر خمشی سه نقطه‌ای و (ب) المان‌بندی مسئله (۹۱۵ المان)

جدول ۲- مشخصات ماده [۸]

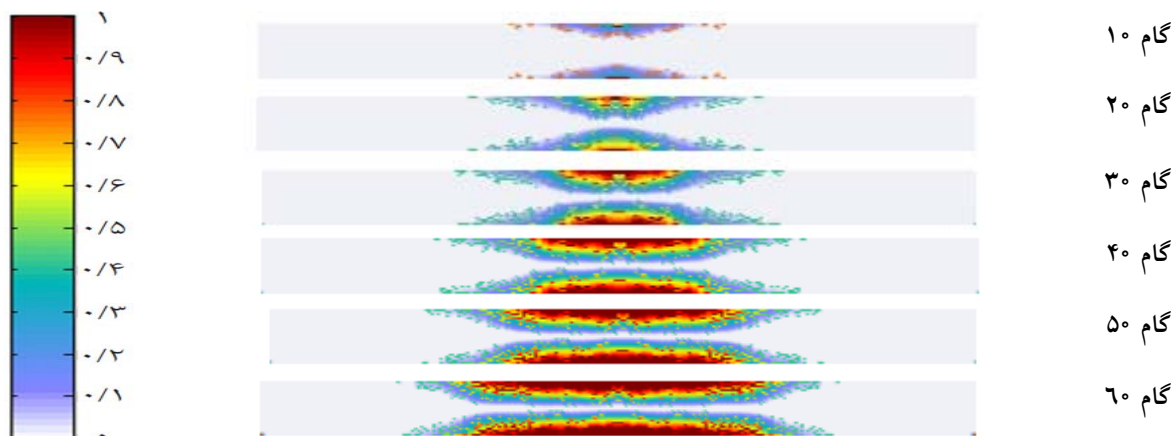
$E^A$	۴۷ GPa
$E^M$	۳۳ GPa
$\nu$	۰/۳
$a^A = a^M$	$22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
$T_{Ms}$	$-52^\circ\text{C}$
$T_{Mf}$	$-60^\circ\text{C}$
$T_{As}$	$-30^\circ\text{C}$
$T_{Af}$	$-20^\circ\text{C}$
$C^A = C^M$	$10 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$
$\epsilon_{\max}^{\text{tr}}$	۷/۵%

#### ۲-۴- خمش سه نقطه‌ای

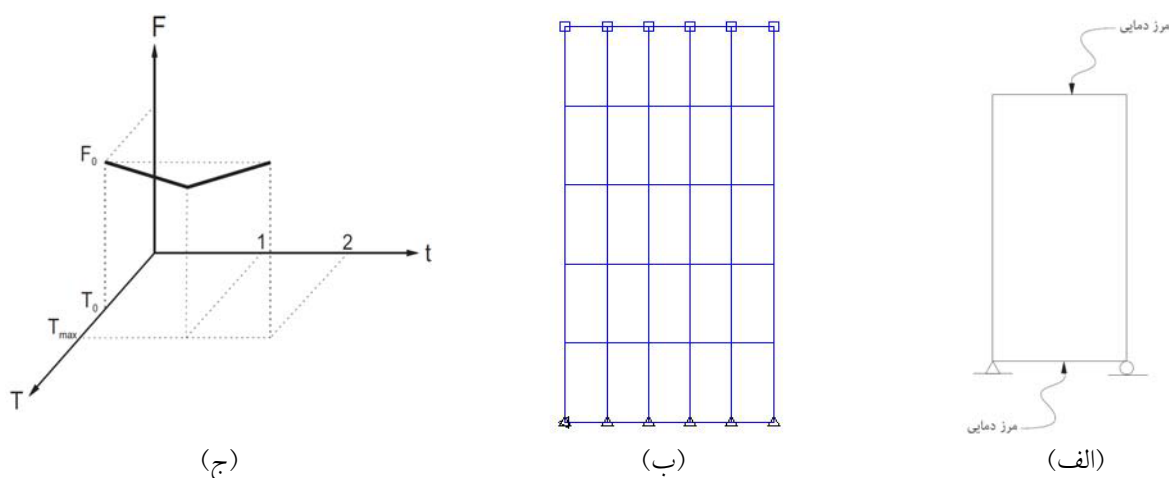
دومین مسئله انتخابی تست خمش سه نقطه‌ای است. هندسه مسئله، بارگذاری و شرایط مرزی حاکم از [۸] برگرفته شده و در شکل (۸-الف) نشان داده شده است. نمونه سیم استفاده شده برای این تست دارای قطر ۱/۴۹ میلی‌متر و طول ۲۰ میلی‌متر است که برای مدل‌سازی آن، یک نمونه مستطیلی به عرض ۱/۴۹ میلی‌متر، ارتفاع ۱/۱۵ میلی‌متر و طول ۲۰ میلی‌متر استفاده شده است. لازم به ذکر است که معیار انتخاب ضخامت نمونه، برابری ممان اینرسی آن با ممان اینرسی نمونه آزمایشگاهی است. مشخصات ماده از مرجع [۸] در جدول (۲)

نشان داده شده است. المان‌بندی مورد استفاده برای تحلیل این مسئله در شکل (۵-ب) نشان داده شده است. این نمونه تا  $\delta = 5/2 \text{ mm}$  بارگذاری و در حالت تنش مسطح تحلیل شده است.

نمودار نیرو- تغییر مکان نقطه وسط تیر برای دو حالت بارگذاری و باربرداری در شکل (۹) رسم شده و قسمت بارگذاری با نتایج آزمایشگاهی و تحلیل عددی مقایسه شده است. شایان ذکر است که در مرجع برای تحلیل این مسئله از یک نمونه ۳۳۲ المانی و تابع سخت‌شوندگی نمایی استفاده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود تحلیل حاضر نسبت به



شکل ۱۰- کانتور تغییر حجم مارتنسیتی در روند افزایش بارگذاری



شکل ۱۱- (الف) تعریف هندسه و شرایط مرزی، (ب) المان‌بندی مسئله (۲۵ المان) و (ج) نمودار بارگذاری حرارتی

و تغییر فاز خاتمه می‌یابد.

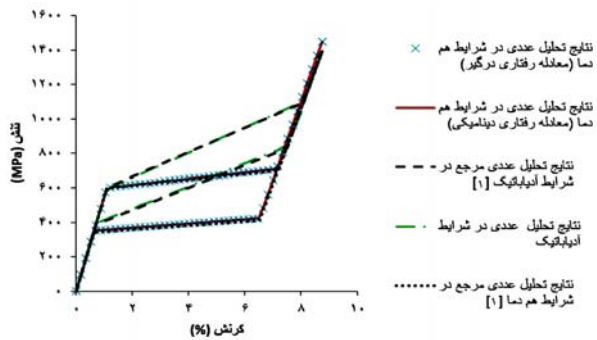
حل عددی مرجع، جواب نزدیک‌تری به نتایج آزمایشگاهی

پیش‌بینی نموده است.

#### ۳-۴- نمونه آلیاژ حافظه‌دار شکلی تحت بارگذاری و باربرداری حرارتی

در مثال سوم، یک نمونه آلیاژ حافظه‌دار شکلی با تنش ثابت ۵۰ MPa تحت بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرد. هندسه و شرایط مرزی مسئله و المان‌بندی نمونه به ترتیب در شکل‌های (۱۱-الف) و (۱۱-ب) نشان داده شده‌اند. مرزهای بالایی و پایینی نمونه مطابق نمودار بارگذاری شکل (۱۱-ج) تحت حرارت واقع شده است. برای آنالیز این مسئله از مشخصات جدول (۱) استفاده شده است. ابتدا نمونه در دمای ۶۷ درجه سانتی‌گراد که بالاتر از دمای شروع آستنیت (۴۲°C) است، قرار می‌گیرد. سپس دمای مرزی نمونه

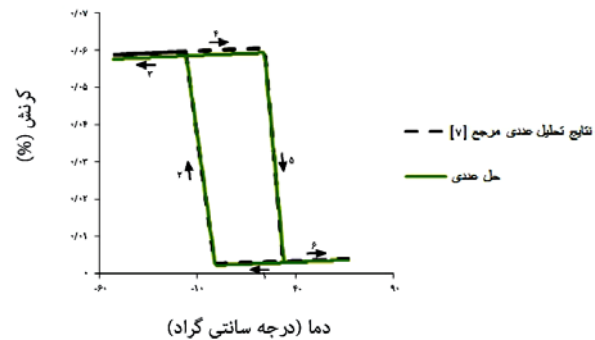
برای نشان دادن روند رشد تغییر فاز در نمونه تحت خمش، کانتورهای تغییر فاز طی ۶۰ گام بارگذاری خمشی در شکل (۱۰) ترسیم شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ابتدا تمام ماده در فاز آستنیت است و بنابراین تغییر حجم مارتنسیتی آن در تمام نقاط برابر صفر است. با افزایش بارگذاری خمشی، ماده ابتدا رفتار الاستیک دارد ولی از جایی به بعد ماده وارد ناحیه تغییر فاز می‌شود و مقدار تغییر حجم مارتنسیتی به تدریج افزایش می‌یابد. بدیهی است که تغییر فاز از نقطه میانی تیر که تمرکز تنش دارد شروع شود. با افزایش بارگذاری، ناحیه تغییر فاز نیز گسترش می‌یابد. در نهایت تغییر حجم مارتنسیتی برابر یک شده



شکل ۱۳- نمودار تنش - کرنش در شرایط هم‌دما و آدیاباتیک

آدیاباتیک و هم‌دما مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به کوتاهی زمان اتمام چرخه بارگذاری و باربرداری در شرایط آدیاباتیک برای آلیاژ حافظه‌دار شکلی، رفتار درگیر مکانیکی و حرارتی باید در نظر گرفته شود. در شرایط هم‌دما چرخه بارگذاری و باربرداری بسیار آهسته صورت می‌گیرند و با توجه به وجود فرصت کافی برای انتقال حرارت، دما ثابت در نظر گرفته می‌شود.

در این مثال یک صفحه آلیاژ حافظه‌دار شکلی، در شرایط تنش مسطح و در دمای ۵۵ درجه سانتی‌گراد، به صورت کنترل جابه‌جایی کششی در مرز بالایی خود قرار می‌گیرد. هندسه مسئله و شرایط مرزی حاکم مطابق شکل (۱) انتخاب شده است. مشخصات ماده مطابق جدول (۳) است. در این شرایط، با توجه به اینکه دمای محیط و دمای اولیه نمونه (۵۵°C) بیشتر از دمای پایان آستنیت (۷°C) است، انتظار می‌رود که نمونه رفتار سوپرالاستیک داشته باشد. نمودارهای تنش و کرنش ناشی از تحلیل مسئله در دو حالت چرخه بارگذاری و باربرداری سریع (آدیاباتیک) و کند (هم‌دما) در شکل (۱۳) آورده شده است. در حالت کلی، در شرایط هم‌دما از رفتار درگیر مکانیکی و حرارتی آلیاژ حافظه‌دار شکلی صرف نظر کرده و تنها رفتار مکانیکی آن را مورد بررسی قرار می‌دهند، اما چنانچه رفتار درگیر آلیاژ حافظه‌دار با نرخ کرنش کند نیز در نظر گرفته شود نتایج یکسانی به دست می‌آید (شکل (۱۳)). به علاوه مشاهده می‌شود که با افزایش نرخ بارگذاری از شرایط هم‌دما به



شکل ۱۲- تغییر فاز دمایی آلیاژ حافظه‌دار شکلی تحت تنش ثابت ۲۰۰ مگاپاسکال

جدول ۳- مشخصات ماده [۱]

$E^A$	۵۵ GPa
$E^M$	۴۶ GPa
$\nu$	۰/۳۳
$a^A = a^M$	$22 \times 10^{-6} / ^\circ C$
$T_{Ms}$	$-28 ^\circ C$
$T_{Mf}$	$-43 ^\circ C$
$T_{As}$	$-3 ^\circ C$
$T_{Af}$	$7 ^\circ C$
$C^A = C^M$	$7/4 \text{ MPa}/^\circ C$
$\epsilon_{max}^{tr}$	$5/6 \%$

کاهش می‌یابد تا تغییر فاز دمایی صورت بگیرد. مجدداً با گرم کردن نمونه تا دمای اولیه، مطابق انتظار کرنش ایجاد شده طی تغییر فاز رفت کاملاً از بین می‌رود (شکل (۱۲)). بارگذاری و باربرداری به ترتیب در مسیرهای ۱-۲-۳ و ۴-۵-۶ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مطابقت بسیار خوب نتایج تحلیل عددی با نتایج عددی مرجع [۷] (حداکثر خطای موجود ۲/۰۷ درصد است) حاکی از دقت و کارایی مناسب مدل ارائه شده است.

#### ۴-۴- آزمایش سوپرالاستیک در شرایط هم‌دما و آدیاباتیک آدیاباتیک

در این قسمت تأثیر نرخ بارگذاری بر رفتار سوپرالاستیک آلیاژ حافظه‌دار شکلی در دو وضعیت انتقال حرارتی متفاوت

امکان مدل‌سازی رفتارهای مکانیکی، حرارتی و درگیر آلیاژهای حافظه‌دار شکلی را با دقت مناسبی داراست. چندین شبیه‌سازی عددی انجام شده که در صحت‌سنجی با داده‌های آزمایشگاهی و عددی موجود از تطابق خوبی برخوردار هستند. علاوه بر نمایش روند تغییر فاز، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در صورت سریع بودن نرخ بارگذاری، منظور نمودن توأم اثرات مکانیکی و حرارتی الزامی است تا بتوان رفتار این مواد را با دقت قابل قبولی بازایی نمود.

آدیاباتیک، تنش نهایی تکمیل تغییر فاز و همچنین شیب منحنی در بخش تغییر فاز افزایش و اندازه ناحیه هیستریزس کاهش می‌یابند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج تحلیل عددی از مطابقت بسیار خوبی با نتایج عددی مرجع [۱] برخوردار است که حاکی از کارایی و دقت مناسب مدل ارائه شده است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به ارائه الگوریتمی برای حل اجزاء محدود مسائل ترمومکانیکی آلیاژهای حافظه‌دار شکلی پرداخته شده است که

## واژه نامه

- |                                     |                                   |   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1. smart materials                  | 11. pseudoelasticity              | 21. adiabatic                           |
| 2. shape memory alloy               | 12. forward phase transformation  | 22. isothermal                          |
| 3. austenite                        | 13. reverse phase transformation  | 23. quasi-static testing                |
| 4. martensite                       | 14. martensite start temperature  | 24. internal variable                   |
| 5. martensitic phase transformation | 15. martensite finish temperature | 25. nucleation                          |
| 6. variant                          | 16. austenite start temperature   | 26. interface motion                    |
| 7. twinned Martensite               | 17. austenite finish temperature  | 27. twin growth                         |
| 8. detwinned Martensite             | 18. transformation strain         | 28. representative volume element (RVE) |
| 9. shape memory effect              | 19. convective                    |   |
| 10. superelasticity                 | 20. conductive                    |   |

## مراجع

- Lagoudas, D. C., *Shape Memory Alloys, Modeling and Engineering Applications*, Springer, 2008.
- Shaw J, and Kyriakides S., "Thermomechanical Aspects of NiTi", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 43, No. 8, pp. 1243-1281, 1995.
- Tobushi, H., Shimeno, Y., Hachisuka, T., and Tanaka, K., "Influence of Strain Rate on Superelastic Properties of TiNi Shape Memory Alloy", *Mechanics of Materials*, Vol. 30, No. 2, pp.141-150, 1998.
- Tanaka, K., and Nagaki, S., "A Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transitions", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 5, pp. 287-299, 1982.
- احمدیان، ح.، "مدل‌سازی عددی اثر تغییر فاز روی ترک‌خوردگی آلیاژهای حافظه‌دار شکلی با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۹۲.
- Lagoudas, D. C., Bo, Z., and Qidwai, M. A., "A Unified Thermodynamic Constitutive Model for SMA and Finite Element Analysis of Active Metal Matrix Composites", *Mechanics of Composite Materials and Structures*, Vol. 3, pp. 153-179, 1996.
- Qidwai, M. A., and Lagoudas, D. C., "Numerical Implementation of Shape Memory Alloy Thermomechanical Constitutive Model Using Return Mapping Algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 1123-1168, 2000.
- Auricchio, F., Taylor, R. L., and Lubliner, J., "Shape-Memory Alloys: Macromodelling and Numerical Simulations of the Superelastic Behavior", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 146, No. 3-4, pp. 281-312, 1997.