تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی با استفاده از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی

محمداسماعیل گلمکانی* و وحید ضیغمی
گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۹/۲۴ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۰۴/۱۶)

چکیده – در این مقاله، رفتار کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با چیدمان‌های گوناگون توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. کلیه معادلات حاکم به‌صورت نموی و براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش‌های غیرخطی فون‌کارمن به‌دست آمده است. به‌منظور تعیین بار بحرانی کمانش، بار محوری به‌صورت نموی به صفحه اعمال می‌گردد و دستگاه معادلات تعادل به کمک روش آزادسازی دینامیکی برای به‌دست آوردن بار بحرانی کمانش حل می‌شود. مطالعه پارامتری برروی اثرات کسر حجمی نانولوله‌ها، نوع چیدمان نانولوله‌ها، نسبت عرض به ضخامت و نسبت‌های ابعادی صفحه نانوکامپوزیتی انجام شده است. نتایج بیانگر این است که استفاده از توزیع تابعی به‌طور قابل‌توجهی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود.

واژگان کلیدی: کمانش، صفحات نانوکامپوزیتی، نانولوله‌های کربنی، روش آزادسازی دینامیکی.

Buckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates using Incremental Loading and Dynamic Relaxation Methods

M. E. Golmakani* and V. Zeighami

Department of Mechanical Engineering, Mashhad branch, Islamic Azad University

Abstract: *In this paper, buckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) plates is studied in line with the plates thikness. All governing equations are presented incrementally, based on a First-order Shear Deformation Theory (FSDT) of plates and von Karman strain field. In order to find the critical buckling load, the axial load is applied to the plate incrementally and the equilibrium equations are solved by Dynamic Relaxation (DR) method. Parametric study of the effects of volume fraction of Carbon Nanotubes (CNTs), CNTs distribution, plate width-to-thickness ratio and aspect*

---

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

ratio of nano composite plates is done in detail. The results show that functionally graded distribution of CNTs causes a significant increase of critical buckling load.

Keywords: *Buckling, nano composite plates, carbon nanotubes, dynamic relaxation method.*

فهرست علائم

$A_{ij}(i,j=۱,۲,۶)$	سفتی‌های کششی، N/m	V_m	کسر حجمی بستر پلیمری
$A_{ij}(i,j=۴۴,۵۵)$	سفتی‌های برشی عرضی، N/m	V_{CNT}	کسر حجمی نانولوله‌های کربنی
$B_{ij}(i,j=۱,۲,۶)$	سفتی‌های اتصال خمش- کشش، N	V^{*}_{CNT}	کسر حجمی ویژه نانولوله‌های کربنی
c	ضریب میرایی	w_{CNT}	کسر جرمی نانولوله‌های کربنی
$D_{ij}(i,j=۱,۲,۶)$	سفتی‌های خمشی، $N.m$	$\{\ddot{X}\},\{\dot{X}\},\{X\}$	بردار شتاب، سرعت و جابه‌جایی، $m/s^۲, m/s, m$
$E_{۱۱}, E_{۲۲}$	ضریب الاستیک طولی وعرضی نانوکامپوزیت، $N/m^۲$	$\delta\sigma$	تنش نموی
$E_{۱۱}^{CNT}, E_{۲۲}^{CNT}, G_{۱۲}^{CNT}$	ضریب الاستیک طولی، عرضی و برشی نانولوله‌های کربنی، $N/m^۲$	$\delta u_۰, \delta v_۰, \delta w_۰$	تغییرمکان نموی طولی، عرضی و خیز، m
E_m, G_m	ضریب الاستیک طولی و برشی بستر پلیمری، $N/m^۲$	$\delta k_{xx}, \delta k_{yy}$	انحناهای صفحه میانی در راستای x و y، $۱/m$
$\{F\}$	بردار نیروهای خارجی، N	$\delta\varepsilon^{\circ}_{xx}, \delta\varepsilon^{\circ}_{yy}$	کرنش‌های صفحه میانی در راستای x و y
$G_{۱۲}, G_{۲۳}, G_{۱۳}$	ضریب‌های الاستیک برشی نانوکامپوزیت، $N/m^۲$	$\delta\gamma^{\circ}_{xy}, \delta\gamma^{\circ}_{xz}, \delta\gamma^{\circ}_{yz}$	کرنش‌های برشی صفحه میانی
h	ضخامت صفحه نانوکامپوزیتی، m	$\eta_j\,(j=۱,۲,۳)$	ضرایب تأثیر نانولوله‌های کربنی
k_s	ضریب تصحیح برشی	$\upsilon_{۱۲}, \upsilon_{۱۲}^{CNT}, \upsilon_{۱۲}^{m}$	ضریب پواسن نانوکامپوزیت، نانولوله‌های کربنی و بستر
K_{ij}	اجزاء ماتریس سفتی، N/m	ρ^{CNT}	چگالی نانولوله‌های کربنی، $Kg/m^۳$
$[M],[C],[K]$	ماتریس جرم، میرایی و سفتی، $Kg, Kg/s, N/m$	ρ^{CNT}	چگالی بستر پلیمری، $N/m^۲$ ، $Kg/m^۳$
P	بار بی‌بعد کمانش	ψ_x	چرخش حول محور y
Q_{ij}	درایه‌های ماتریس سفتی، $N/m^۲$	ψ_y	چرخش حول محور x
$\{R\}$	بردار نیروهای باقی‌مانده، N	Δt	گام زمانی، s
$u_۰, v_۰, w_۰$	تغییرمکان طولی، عرضی و خیز در صفحه میانی، m		

۱- مقدمه

فایبرهای تقویت کننده کامپوزیت‌ها به‌دلیل نسبت بالای استحکام به چگالی و سختی به چگالی در مقایسه با سایر مواد در سالیان گذشته در صنایع مختلف، به‌خصوص صنایع هوایی، نظامی، هوا فضا همچنین صنایع خودرو و ورزشی، بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این میان بررسی یکی از حساس‌ترین رفتارهای مکانیکی به‌نام کمانش از اهمیت بالایی برخوردار است. از آنجا که ماهیت این رفتار به ویژگی‌های ذاتی ماده مانند

استحکام، سفتی و ... مربوط می‌شود، بهبود و ارتقاء این ویژگی‌ها در سازه‌های مورد استفاده در صنایع حساس یکی از اساسی‌ترین زمینه‌های تحقیق و توسعه را شامل می‌شود. مواد کامپوزیتی نوعی از مواد هستند که امکان ارتقاء ویژگی‌های ذاتی ماده را از طریق افزودن فاز تقویت کننده فراهم می‌کنند. بنابراین استفاده از تقویت کننده‌هایی که بیشترین بهبود را در این ویژگی‌ها سبب می‌شوند یکی از اساسی‌ترین زمینه‌های تحقیق مواد کامپوزیتی است تا با حصول خواص بهتر برای مواد کامپوزیتی زمینه برای بهبود رفتارهای مکانیکی آنها فراهم گردد. در این راستا نانولوله‌های کربنی از اواسط دهه ۱۹۸۰ در مسیر شناسایی و توسعه قرار گرفتند [۱ و ۲]. بیشترین مطالعات روی نانولوله‌های کربنی تقویت کننده کامپوزیت‌ها روی خواص مواد آنها متمرکز شده است. این تحقیقات از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و یا مطالعات تجربی انجام شده است و ویژگی‌هایی از جمله ضریب الاستیک، خواص بالستیک و سفتی نانوکامپوزیت‌ها را مورد بررسی قرار داده است [۵-۳]. خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها به‌طور مستقیم به رفتار مکانیکی الیاف تعبیه شده در آن بستگی دارد. جایگزین کردن الیاف با نانولوله‌های کربنی می‌تواند خواص کامپوزیتی از جمله ضریب الاستیسیته و استحکام کششی را بهبود بخشد. به‌طوری‌که در نتایج تئوری و آزمایشگاهی از ضریب الاستیسیته بیشتر از ۱TPa برای نانولوله‌های کربنی (این در حالی است که ضریب الاستیسیته الماس ۱/۲TPa است) و استحکامی در حدود ۱۰۰-۱۰ مرتبه بیشتر از قویترین فولاد در یک کسر جرمی سخن به میان آمده است [۶]. با توجه به خواص مکانیکی، حرارتی و الکترونیکی منحصربه‌فرد نانولوله‌های کربنی، مانند ضریب الاستیک بسیار بالا، استحکام کششی، چگالی کم ومقاومت در برابر شکست بالا و فراوری نه چندان پیچیده، نانولوله‌های کربنی را به‌عنوان جایگزین مناسبی برای تقویت‌کننده‌هایی مانند الیاف کربن، الیاف گرافیت، الیاف شیشه و الیاف کولار[1] معرفی کرده است تا با اصلاح پلیمرها، به‌منظور کاهش هزینه محصول و وزن سازه و همچنین افزایش کارایی، در صنایع هوا فضا، خودرو، نفت، ورزشی ، الکترونیک و ... مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین از دهه گذشته تحقیقات برروی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار شده است. بیشتر کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی کسر حجمی بسیار پایینی از نانولوله‌ها را دارا هستند [۴ و ۶]. تحقیقات آزمایشگاهی و تئوری گوناگون نشان داده است که اضافه کردن مقدار کمی از نانولوله‌های کربنی می‌تواند خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کامپوزیت‌های پلیمری را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش دهد [۴، ۷، ۸ و ۹]. با توجه به بهبود خواص ایجاد شده بسیاری از محققین به بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند. سال ۲۰۱۲ صیفوری و لیاقت [۱۰] با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته به بررسی ضربه کم سرعت یک نانوذره برروی یک نانوتیر اویلر برنولی پرداختند. خمش و کمانش یک تیر نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره[2] توسط ودینت چاروروا و ژانگ [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته شد. مواد تابعی یک نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی هستند که جزئیات میکروساختاری آنها از طریق توزیع غیریکنواخت فاز تقویت کننده تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان مفهوم مواد تابعی را در مدل‌سازی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی گنجاند تا استفاده مؤثرتری از نانولوله‌های کربنی شود. شن [۱۲] در سال ۲۰۰۹ رفتار خمش غیرخطی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی را مطالعه کرد. شن و همکارانش [۱۸-۱۳] بین سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱ کمانش حرارتی، پاسخ پس از کمانش و ارتعاش غیرخطی صفحات و پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد بررسی قرار دادند. آنها متوجه شدند که تقویت کننده‌های نانولوله‌ای کربنی با توزیع تابعی می‌توانند دمای بحرانی کمانش و همچنین استحکام پاسخ پس از کمانش ساختارهای صفحه/پوسته تحت بار مکانیکی را افزایش دهد.

ژوو همکارانش [۱۹] خمش خطی و ارتعاش آزاد صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. سبحانی عراق و هدایتی [۲۰] ارتعاش آزاد خطی پنل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی را براساس روش اشلبی- موری- تاناکا مطالعه کردند. یاس و حشمتی [۲۱] یک تحلیل دینامیکی از تیرهای نانوکامپوزیتی تحت‌تأثیر بار متحرک ارائه کردند. وانگ و شن [۲۲] پاسخ دینامیکی غیرخطی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی روی یک پایه الاستیک که در محیط حرارتی قرار داشت را بررسی کردند. علی‌بیگلو [۲۳] تحلیل استاتیکی صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را در معرض تحریک پیزوالکتریک بررسی کرد. کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش المان آزاد ریتز توسط لی و همکارانش [۲۴] مطالعه شد. اخیراً ساختارهای ساندویچی در به‌کارگیری کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مورد توجه قرار گرفته‌اند، به‌طوری‌که شن و وانگ [۲۵ و ۲۶] پاسخ پس از کمانش و همچنین ارتعاش و خمش غیرخطی صفحات ساندویچی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ها را مورد مطالعه قرار دادند.

با توجه به اهمیت بار بحرانی کمانش در طراحی‌های مهندسی، در تحقیق حاضر از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی برای تحلیل کمانش مکانیکی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با چیدمان‌های تابعی مختلف از نانولوله‌های کربنی تک‌جداره در شرایط مرزی ساده و گیردار استفاده شده است. خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره وابسته به اندازه هستند که از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی انجام شده در مراجع به‌دست آمده است. خواص کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با فرض تابعی بودن در جهت ضخامت از طریق یک مدل میکرومکانیکی با نام قانون اختلاط به‌دست آمده است. کلیه معادلات حاکم به‌صورت نموی و براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش‌های غیرخطی فون‌کارمن به‌دست آمده است. سپس دستگاه معادلات تعادل غیرخطی کوپل به کمک روش انرژی به‌صورت نموی به‌دست آمده و به کمک ترکیب روش‌های آزادسازی دینامیکی و اختلاف محدود برای به‌دست آوردن بار بحرانی کمانش حل شده است.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- هندسه و خواص صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

هندسه مورد بررسی برای کمانش صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با چهار نوع توزیع مختلف نانولوله‌ها و چیدمان‌های گوناگون بارگذاری صفحه‌ای، با طول b، عرض a و ضخامت h، در شکل (۱) مشاهده می‌شود. بستر تقویت شده همسان‌گرد است. خواص مواد از طریق قانون اختلاط ساده تخمین زده می‌شوند. طبق قانون اختلاط ساده ضریب الاستیسیته و ضریب برشی با روابط زیر بیان می‌شوند [۱۲]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E_m \quad (۱)$$

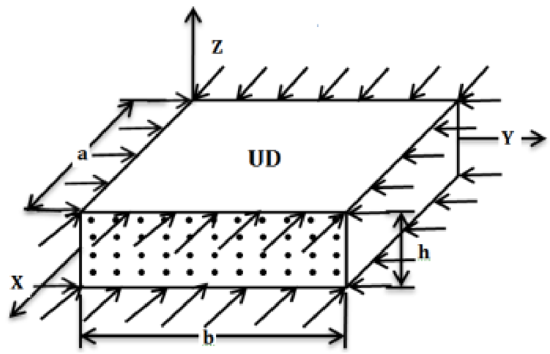
$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (۲)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (۳)$$

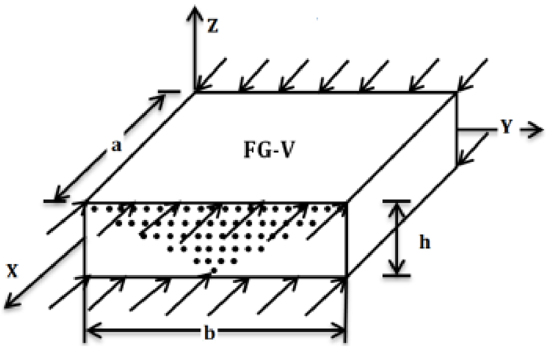
در روابط بالا E_{11}^{CNT}، E_{22}^{CNT} و G_{12}^{CNT} به‌ترتیب ضریب الاستیسیته، ضریب برشی نانولوله‌های کربنی می‌باشند و همچنین E_m و G_m ضریب‌های الاستیسیته و برشی بستر هستند. $\eta_j\,(j=1,2,3)$ ضرایب تأثیر نانولوله‌های کربنی نامیده می‌شوند، و از طریق تطبیق ضریب‌های الاستیسیته به‌دست آمده برای نانو کامپوزیت از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با نتایج به‌دست آمده از قانون اختلاط، به‌دست می‌آیند. V_{CNT} و V_m به‌ترتیب کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و بستر هستند:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (۴)$$

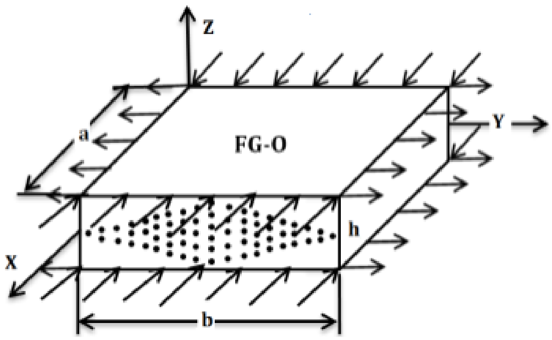
کسر حجمی نانولوله‌های کربنی با توجه به چهار نوع توزیع



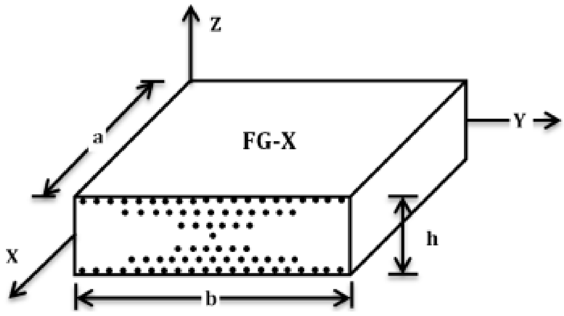
(الف) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع یکنواخت



(ب) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع تابعی V شکل



(ج) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع تابعی O شکل



(د) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع تابعی X شکل

شکل ۱- نانوصفحات کامپوزیتی با آرایش مختلف نانولوله‌های کربنی تحت توزیع مختلف بارهای فشاری و کششی

مختلف آنها دارای روابط زیر است [۱۹]:

توزیع یکنواخت $V_{CNT}(z)=V_{CNT}^{*}$

توزیع تابعی V شکل $V_{CNT}(z)=\left(1+\frac{2Z}{h}\right)V_{CNT}^{*}$

توزیع تابعی O شکل $V_{CNT}(z)=2\left(1-\frac{2|Z|}{h}\right)V_{CNT}^{*}$

توزیع تابعی X شکل $V_{CNT}(z)=2\left(\frac{2|Z|}{h}\right)V_{CNT}^{*}$ (۵)

به طوری‌که:

$$V_{CNT}^{*}=\frac{w_{CNT}}{w_{CNT}+\left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^{m}}\right)-\left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^{m}}\right)w_{CNT}} \quad (۶)$$

در بالا w_{CNT} کسر جرمی نانولوله‌های کربنی در صفحه کامپوزیتی است و ρ^{m} و ρ^{CNT} چگالی بستر و نانولوله‌های کربنی هستند. کسر جرمی[۳] (w_{CNT})، استفاده شده برای حالت‌های مختلف توزیع نانولوله‌ها برابر است. نسبت پواسون υ_{12} صفحات نانو کامپوزیتی با فرض توزیع یکنواخت از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۴، ۱۵ و ۲۴]:

$$\upsilon_{12}=V_{CNT}^{*}\upsilon_{12}^{CNT}+V_{m}\upsilon^{m} \quad (۷)$$

۲-۲- معادلات تعادل

برای به‌دست آوردن بار بحرانی کمانش، بار به‌صورت نموی اعمال می‌شود و در پایان نمودار بار- تغییر مکان رسم می‌شود. بدین منظور معادلات تعادل می‌بایست به‌شکل نموی استخراج شوند. تئوری برشی مرتبه اول صفحات برای محاسبه میدان جابه‌جایی $\{u,v,w\}^{T}$ به‌کار گرفته شده است [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_{0}(x,y) \\ v_{0}(x,y) \\ w_{0}(x,y) \end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix} \psi_{x}(x,y) \\ \psi_{y}(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۸)$$

روابط بین کرنش‌های غیرخطی نموی با جابه‌جایی‌های نموی با درنظر گرفتن فرضیات تغییر شکل‌های بزرگ فون‌کارمن، اینگونه محاسبه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_{xx}\\ \delta\varepsilon_{yy}\\ \delta\gamma_{xy}\\ \delta\gamma_{yz}\\ \delta\gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon^{\circ}_{xx}\\ \delta\varepsilon^{\circ}_{yy}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xy}\\ \delta\gamma^{\circ}_{yz}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xzy}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\delta k_{xx}\\ \delta k_{yy}\\ \delta k_{xy}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۹)$$

به‌طوری‌که:

$$\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon^{\circ}_{xx}\\ \delta\varepsilon^{\circ}_{yy}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xy}\\ \delta\gamma^{\circ}_{yz}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xzy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\delta u_{\circ}}{\partial x}+\dfrac{\partial w_{\circ}}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial x}\right)^{2}\\ \dfrac{\partial\delta v_{\circ}}{\partial y}+\dfrac{\partial w_{\circ}}{\partial y}\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial y}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial y}\right)^{2}\\ \dfrac{\partial\delta u_{\circ}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta v_{\circ}}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial x}\dfrac{\partial w_{\circ}}{\partial y}+\dfrac{\partial w_{\circ}}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial y}+\delta\psi_{y}\\ \dfrac{\partial\delta w_{\circ}}{\partial x}+\delta\psi_{x}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}k_{xx}\\ k_{yy}\\ k_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\delta\psi_{x}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\delta\psi_{y}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\delta\psi_{x}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\psi_{y}}{\partial x}\end{Bmatrix} \qquad (۱۰)$$

روابط ساختاری بین تنش‌های نموی و کرنش‌های نموی به‌شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_{xx}\\ \delta\sigma_{yy}\\ \delta\sigma_{xy}\\ \delta\sigma_{yz}\\ \delta\sigma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}(Z) & Q_{12}(Z) & 0 & 0 & 0\\ Q_{12}(Z) & Q_{22}(Z) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}(Z) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(Z) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(Z)\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_{xx}\\ \delta\varepsilon_{yy}\\ \delta\gamma_{xy}\\ \delta\gamma_{yz}\\ \delta\gamma_{xz}\end{Bmatrix}\right) \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱) اجزای ماتریس سفتی به‌شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\quad Q_{22}=\frac{E_{22}}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\quad Q_{12}=\frac{\upsilon_{21}E_{11}}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},$$

$$Q_{66}=G_{12},\qquad Q_{44}=G_{23},\qquad Q_{55}=G_{13} \qquad (۱۲)$$

منتجه‌های نیروی نموی، گشتاور نموی و منتجه‌های تنش برشی نموی توسط معادلات زیر به تنش‌های نموی داخلی وابسته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}\delta N_{xx}\\ \delta N_{yy}\\ \delta N_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\delta\sigma_{xx}\\ \delta\sigma_{yy}\\ \delta\sigma_{xy}\end{Bmatrix}dz,\quad \begin{Bmatrix}\delta M_{xx}\\ \delta M_{yy}\\ \delta M_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\delta\sigma_{xx}\\ \delta\sigma_{yy}\\ \delta\sigma_{xy}\end{Bmatrix}z\,dz,$$

$$\begin{Bmatrix}\delta Q_{y}\\ \delta Q_{x}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\delta\sigma_{yz}\\ \delta\sigma_{xz}\end{Bmatrix}dz \qquad (۱۳)$$

با جایگذاری روابط (۹) تا (۱۱) در معادلات (۱۳) منتجه‌های نیروی نموی، گشتاور نموی و تنش برشی نموی به شکل ماتریسی به‌دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix}\delta N_{xx}\\ \delta N_{yy}\\ \delta N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon^{\circ}_{xx}\\ \delta\varepsilon^{\circ}_{yy}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & 0\\ B_{12} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta k_{xx}\\ \delta k_{yy}\\ \delta k_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{Bmatrix}\delta M_{xx}\\ \delta M_{yy}\\ \delta M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & 0\\ B_{12} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon^{\circ}_{xx}\\ \delta\varepsilon^{\circ}_{yy}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & 0\\ D_{12} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta k_{xx}\\ \delta k_{yy}\\ \delta k_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۵)$$

$$\begin{Bmatrix}\delta Q_{y}\\ \delta Q_{x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{44} & 0\\ 0 & A_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\gamma^{\circ}_{yz}\\ \delta\gamma^{\circ}_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (۱۶)$$

ماتریس‌های سفتی کششی، سفتی اتصال خمش- کشش و

سفتی خمشی و ماتریس ضرایب نیروهای برشی به‌ترتیب با روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right)=\int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\left(1,z,z^2\right)dz \qquad \left(i,j=1,2,6\right) \tag{17}$$

$$A_{ij}^{s}=k_s\int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}dz \qquad \left(ij=44,55\right) \tag{18}$$

در رابطه (۱۸) k_s ضریب تصحیح برشی نامیده می‌شود و مقدار آن $\frac{5}{6}$ درنظر گرفته می‌شود.

معادلات تعادل تئوری برشی مرتبه اول با استفاده از حالت استاتیکی اصل کار مجازی به‌دست می‌آیند:

$$\delta U+\delta V=0 \tag{19}$$

$$\delta V=-\int\int q\delta W\left(x,y\right)dxdy \tag{20}$$

$$\delta U=\iint \delta u_0 dxdy \tag{21}$$

در نهایت معادلات نموی تعادل برحسب منتجه‌های تنش به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\delta u_0:\frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y}=0\\
&\delta v_0:\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y}=0\\
&\delta w_0:\frac{\partial \delta Q_x}{\partial x}+\frac{\partial \delta Q_y}{\partial y}+\delta N_{xx}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
&\qquad +\left(N_{xx}+\delta N_{xx}\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}+\delta N_{yy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&\qquad +\left(N_{yy}+\delta N_{yy}\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\\
&\qquad +2\delta N_{xy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2\left(N_{xy}+\delta N_{xy}\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial y}+\delta q=0\\
&\delta\psi_x:\frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y}-\delta Q_x=0\\
&\delta\psi_y:\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y}-\delta Q_y=0
\end{aligned} \tag{22}$$

گفتنی است که برای مسئله کمانش δq از معادله سوم حذف می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۰) و انجام ضرب ماتریسی روابط (۱۴) تا (۱۶) و جایگذاری آنها در روابط (۲۲)، می‌توان معادلات نموی تعادل نیرویی را برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی ($u, v, w, \psi_r, \psi_\theta$) نوشت. گفتنی است به‌علت گستردگی معادلات برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی، از ارائه این معادلات در این قسمت خودداری شده است و در قسمت پیوست آورده شده‌اند.

۲-۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی برای حالت‌های مختلف بارگذاری به‌شکل زیر است:

الف) تکیه‌گاه گیردار:

$$\begin{aligned}
&w=v=\psi_x=\psi_y=0, \quad \delta N_x=-q \quad \text{لبه } x=0,a\\
&w=u=\psi_x=\psi_y=0, \quad \delta N_x=\pm q \quad \text{لبه } y=0,b
\end{aligned} \tag{23}$$

ب) تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{aligned}
&w=v=\psi_y=\delta M_x=0, \quad \delta N_x=-q \quad \text{لبه } x=0,a\\
&w=u=\psi_x=\delta M_y=0, \quad \delta N_y=\pm q \quad \text{لبه } y=0,b
\end{aligned} \tag{24}$$

۳- روش آزادسازی دینامیکی

آزادسازی دینامیکی یک فرآیند تکراری است که هدف آن به‌طور کلی، انتقال یک سیستم استاتیک به فضای دینامیکی برای به‌دست آوردن حالت پایدار استاتیکی آن است. این روش به‌طور خاص، برای تحلیل مسائل با رفتارهای غیرخطی مناسب است. علاوه بر این، به‌علت فرمول‌سازی صریح، فضای کمی را در حافظه کامپیوتر اشغال کرده و بسیار مناسب برای کدنویسی است. در این روش، فرآیند تکراری حل دستگاه معادلات هم‌زمان با کمک گرفتن از تفاضل محدود مرکزی است. براساس این روش، یک سیستم استاتیکی با افزودن نیروهای فرضی اینرسی و میرایی به یک فضای ساختگی دینامیکی انتقال می‌یابد [۲۸]:

$$\left[M\right]\left\{\ddot{X}\right\}^n+\left[C\right]\left\{\dot{X}\right\}^n+\left[K\right]\left\{X\right\}^n=\left\{F\left(t\right)^n\right\} \tag{25}$$

در این رابطه $[M]$ و $[C]$ به‌ترتیب ماتریس‌های جرم و میرایی مجازی و همچنین $\{\ddot{X}\}^n$ و $\{\dot{X}\}^n$ بردارهای شتاب و سرعت مجازی در تکرار nام هستند، همچنین $\{X\}$ بردار جابه‌جایی است. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای سرعت و شتاب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۲۸]:

$$\{\ddot{X}\}^n = \frac{\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} - \{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \qquad (۲۶)$$

$$\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\{X\}^n - \{X\}^{n-1}}{\Delta t} \qquad (۲۷)$$

در معادله بالا، Δt گام زمانی ساختگی است. طبق مقدار میانگین، سرعت را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد:

$$\{\dot{X}\}^n = \frac{\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} + \{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری روابط (۲۶) و (۲۸) در رابطهٔ (۲۵) و ساده‌سازی آن، سرعت در گام $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ به‌دست می‌آید. همچنین جابه‌جایی در گام $(n+1)$ به‌دست خواهد آمد که روابط آن در زیر آمده است:

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{[M]}{\Delta t} - \frac{[C]}{2}\right)}{\left(\frac{[M]}{\Delta t} + \frac{[C]}{2}\right)}\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{(\{F\} - [K]\{X\})}{\left(\frac{[M]}{\Delta t} + \frac{[C]}{2}\right)} \qquad (۲۹)$$

$$\{X\}^{n+1} = \{X\}^n + \Delta t\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} \qquad (۳۰)$$

به‌منظور داشتن معادلات تکرار صریح، ماتریس جرمی ساختگی باید قطری باشد. همچنین، ماتریس میرایی با رابطهٔ زیر به ماتریس جرمی وابسته است:

$$[C] = c[M] \qquad (۳۱)$$

در رابطهٔ بالا c ضریب میرایی است. با جایگذاری رابطه (۳۱) در (۲۹) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2 - c\Delta t)}{(2 + c\Delta t)}\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{(2\Delta t)}{(2 + c\Delta t)}[M]^{-1}\{R\}^n \qquad (۳۲)$$

در اینجا $\{R\}^n$ بردار نیروهای باقی‌مانده است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{R\}^n = [M]\{\ddot{X}\}^n + [C]\{\dot{X}\}^n = \{F(t)^n\} - [K]\{X\}^n \qquad (۳۳)$$

پیشنهاد می‌شود برای شروع به حل مقادیر صفر به بردارهای $\{X\}^0$ و $\{\dot{X}\}^{n-1/2}$ اختصاص داده شود. از این طریق، سرعت در وسط گام، با استفاده از رابطهٔ (۳۲) و سپس بردار جابه‌جایی با استفاده از رابطهٔ (۳۰) به‌دست می‌آید. این فرآیند تا وقتی که همگرایی حل به حالت پایدار برسد، ادامه خواهد داشت. در این حالت در هر گام بردارهای جابه‌جایی و سرعت اصلاح می‌شوند. نحوه اعمال شرایط مرزی که شامل دو دسته نیرویی و جابه‌جایی هستند نیز بدین صورت است که با توجه به حل معادلات تعادل برحسب میدان جابه‌جایی در ناحیه داخلی، در هر بار فرآیند تکرار با توجه به نوع شرایط مرزی مقادیر مختلف جابه‌جایی‌ها در مرز با استفاده از بسط تفاضل محدود پیشرو، پسرو و یا مرکزی محاسبه می‌شوند. بنابراین تمامی مقادیر میدان جابه‌جایی و همچنین میدان سرعت برای تمامی گره‌ها در هر فرآیند تکرار موجود هستند. گفتنی است شرط همگرایی برای اتمام فرآیند به حداقل رسیدن مقادیر سرعت (انرژی جنبشی) گره‌هاست که این شرایط بیان کننده به تعادل استاتیکی رسیدن سیستم دینامیکی فرضی درنظر گرفته شده است.

روش تکرار آزادسازی دینامیکی به‌طور کلی ناپایدار است، بنابراین باید مقادیر جرم، میرایی، گام زمانی و بردار جابه‌جایی اولیه به‌گونه‌ای انتخاب شوند که همگرایی فرآیند را تضمین کنند. با توجه به تئوری گرشگورین، برای هر گره i از یک سیستم گسسته شده، باید نابرابری زیر به‌منظور تعیین ماتریس قطری $[5\times5]$ $m_{ii}^l\left[l: u_0, v_0, \psi_x, \psi_y, w\right]$ که از ماتریس جرم مجازی $M(N\times N)$ استخراج شده است (که N تعداد گره‌ها در راستای محورهای مختصات x و y هستند)، تأمین شود [۲۹]:

$$m_{ii}^l \geq \frac{1}{4}\Delta t^2 \sum_{j=1}^{N}\left|k_{ij}^l\right| \qquad (۳۴)$$

در رابطه بالا k_{ij} عناصر ماتریس سفتی $[K]$ است که از رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$[K] = \frac{\partial\{P\}}{\partial\{X\}} \qquad (۳۵)$$

در رابطهٔ بالا $\{X\}=\{u,v,w,\psi_x,\psi_y\}$ و $\{P\}$ سمت چپ معادلات تعادل نموی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی (معادلات پ-۱) است. فاکتور مهم بعدی ضریب میرایی است که طبق ایده ارائه شده توسط ژانگ، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۲۹]:

$$c_n = ۲\left\{\frac{\{X_n\}^T\{F(X_n)\}}{\{X_n\}^T[M_n]\{X_n\}}\right\}^{\frac{۱}{۲}} \tag{۳۶}$$

پارامتر دیگری که بسیار تأثیرگذار است، گام زمانی است. آندروود [۳۰] مقادیر ثابت ۱ و ۱/۱ را برای گام زمانی پیشنهاد داده است. از آنجا که معادلات حاکم از نوع مسائل با مقدار مرزی مشخص هستند با اضافه کردن ترم‌های اینرسی و میرایی به‌سمت راست معادلات تعادل به فرمت مسائلی با مقدار اولیهٔ معین مطابق روابط ذیل تغییر شکل یابند:

$$\frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y}=m_u\frac{d^۲u}{dt^۲}+c_u\frac{du}{dt}$$
$$\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y}=m_v\frac{d^۲v}{dt^۲}+c_v\frac{dv}{dt}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta Q_x}{\partial x}+\frac{\partial \delta Q_y}{\partial y}&+\delta N_{xx}\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲}\right)+\left(N_{xx}+\delta N_{xx}\right)\frac{\partial^۲\delta w}{\partial x^۲}\\&+\delta N_{yy}\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲}\right)+\left(N_{yy}+\delta N_{yy}\right)\frac{\partial^۲\delta w}{\partial y^۲}\\&+۲\delta N_{xy}\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}\right)+۲\left(N_{xy}+\delta N_{xy}\right)\frac{\partial^۲\delta w}{\partial x\partial y}\\&+\delta q=m_w\frac{d^۲w}{dt^۲}+c_w\frac{dw}{dt}\end{aligned}$$
$$\frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y}-\delta Q_x=m_{\psi_x}\frac{d^۲\psi_x}{dt^۲}+c_{\psi_x}\frac{d\psi_x}{dt}$$
$$\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y}-\delta Q_y=m_{\psi_y}\frac{d^۲\psi_y}{dt^۲}+c_{\psi_y}\frac{d\psi_y}{dt} \tag{۳۷}$$

با حل روابط (۳۷) برای پیدا کردن سرعت در گام میانی روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{u}_i^{n+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(m_{ii}^n\right)^{-۱}\left(\frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y}\right)_i^n+\frac{۲-c_i^n\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\dot{u}_i^{n-\frac{۱}{۲}}$$

$$\dot{v}_i^{n+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(m_{ii}^n\right)^{-۱}\left(\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y}\right)_i^n+\frac{۲-c_i^n\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\dot{v}_i^{n-\frac{۱}{۲}}$$

$$\left(\dot{\psi}_x\right)_i^{n+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(m_{ii}^n\right)^{-۱}\left(\frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y}-\delta Q_x\right)_i^n+\frac{۲-c_i^n\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(\dot{\psi}_x\right)_i^{n+\frac{۱}{۲}}$$

$$\left(\dot{\psi}_y\right)_i^{n+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(m_{ii}^n\right)^{-۱}\left(\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y}-\delta Q_y\right)_i^n+\frac{۲-c_i^n\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(\dot{\psi}_y\right)_i^{n+\frac{۱}{۲}}$$

$$\dot{w}_i^{n+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\left(m_{ii}^n\right)^{-۱}\left(\begin{aligned}&\frac{\partial \delta Q_x}{\partial x}+\frac{\partial \delta Q_y}{\partial y}+\delta N_{xx}\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲}\right)\\&+\left(N_{xx}+\delta N_{xx}\right)\frac{\partial^۲\delta w}{\partial x^۲}\\&+\delta N_{yy}\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲}\right)\\&+\left(N_{yy}+\delta N_{yy}\right)\frac{\partial^۲\delta w}{\partial y^۲}\\&+۲\delta N_{xy}\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}\right)\\&+۲\left(N_{xy}+\delta N_{xy}\right)\frac{\partial^۲\delta w}{\partial x\partial y}+\delta q\end{aligned}\right)+\frac{۲-c_i^n\Delta t^n}{۲+c_i^n\Delta t^n}\dot{w}_i^{n-\frac{۱}{۲}n} \tag{۳۸}$$

حال با داشتن مقادیر سرعت در وسط گام و با استفاده از رابطهٔ (۳۰) مقادیر جابه‌جایی‌ها و دوران‌ها، در انتهای هر بازهٔ زمانی محاسبه می‌شود.

گام‌های محاسباتی روش آزادسازی دینامیکی همانند زیر است:

۱- عامل‌های حداکثر تکرارها، خطاهای باقی‌ماندهٔ نیروهای داخلی و انرژی جنبشی سازه (e_k, e_R, N_{max}) تعیین می‌شوند و $n=۰$ و $\{\dot{x}\}^{-\frac{۱}{۲}}=۰$ درنظر گرفته می‌شود.

۲- بردار $\{x\}^۰$ حدس زده یا محاسبه می‌شود.

۳- نیروی نامیزان از رابطه (۳۳) محاسبه می‌شود.

۴- اگر $\left\|R^{n}\right\| \le e_R$، کار پایان می‌یابد. در غیر این‌صورت، کار ادامه می‌یابد.

۵- ماتریس‌های جرم و میرایی محاسبه می‌شوند.

۶- $\{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}}$ از رابطه (۳۸)، به‌دست می‌آید.

۷- اگر انرژی جنبشی سیستم $\sum_{j=1}^{q}\left(\dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \le e_k$ باشد کار پایان می‌یابد. در غیر این‌صورت، کار ادامه می‌یابد.

۸- بردار $\{x\}^{n+1}$ از رابطه (۳۰)، محاسبه می‌شود.

۹- شرط‌های مرزی وارد می‌شود.

۱۰- اگر $n \rangle N_{max}$ باشد، کار پایان می‌یابد. در غیر این‌صورت، $n = n+1$ و تحلیل به گام (۳) برمی‌گردد.

۴- نتایج و بحث

در تحلیل نموی حاضر، یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌گردد و در هنگام اجرای تکرارهای آزادسازی دینامیکی، مقدار بار ثابت نگه‌داشته می‌شود. پس از همگرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌گردد و فرآیند مزبور تا کامل شدن تمام بار خارجی تکرار می‌شود. با توجه به اینکه ماهیت کمانش عبارتست از افزایش نامتناسب تغییر مکان به‌علت افزایش کوچک بار، به‌منظور پیدا کردن بار بحرانی در پایان هر همگرایی میزان جابه‌جایی‌های حاصل از هر نمو با جابه‌جایی حاصل از نمو قبل جمع می‌شود. در پایان نمودار بار- تغییر مکان رسم می‌شود و در نقطه‌ای از نمودار که افزایش نامتناسب تغییر مکان وجود دارد، آن نقطه بار بحرانی کمانش است. مقدار نقص اولیه $w(i,j) = 0/01 * \cos(2\pi x/a)$ درنظر گرفته شده است. پارامتر بی‌بعد $P = {N_{cr} b^2}/{E_m h^3}$ و همچنین مقدار ضخامت $h = 2mm$ درنظر گرفته شده‌اند. مطالعه پارامتری جهت نشان دادن اثرات کسر حجمی نانولوله‌ها، نوع توزیع نانولوله‌ها، نسبت عرض به ضخامت صفحه، نسبت ابعادی صفحه و شرایط مرزی ساده و گیردار بر بار بحرانی کمانش انواع صفحات نانوکامپوزیتی تابعی و یکنواخت، انجام شده است. با توجه به جهت چیدمان نانولوله‌های کربنی هم‌راستا با محور x، با تعریف γ_1 و γ_2 به‌عنوان ضرایب تناسب بار به‌ترتیب در دو جهت x و y، حالت‌های مختلف بار برای لبه‌های صفحه درنظر گرفته شده است که شامل فشاری تک‌محوری در جهت محور x $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$، فشاری دومحوری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ و فشاری (در راستای محور x)- کششی (در راستای محور y) $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ است.

۴-۱- بررسی صحت و دقت پاسخ‌های تحلیل

در جدول (۱) مطالعه مقایسه‌ای از تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با چیدمان‌های مختلف نانولوله‌ها با نتایج مرجع [۲۴] ارائه شده است. گفتنی است که در این مقایسه نسبت عرض به ضخامت صفحه برابر $\frac{b}{h} = 10$ بوده وخواص ماده پلیمری به‌صورت $E_m = 2/1GPa$ و $\upsilon_m = 0/34$ و خواص نانولوله‌های کربنی مطابق آنچه در جدول (۲) مشاهده می‌شود، درنظر گرفته شده است. همچنین کسر حجمی مورد استفاده برای این مقایسه $V_{CNT}^{*} = 0/11$ است و ضرایب تأثیر نانولوله‌های کربنی در این کسر حجمی عبارتند از $\eta_1 = 0/149$ و $\eta_2 = 0/934$. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار انطباق نسبتاً خوبی بین نتایج دو تحلیل وجود دارد.

۴-۲- مطالعه پارامتریک

ابتدا خواص مواد کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی معرفی می‌شوند. در این تحقیق ماده پلیمری با خواص $E_m = 2/5GPa$، $\upsilon_m = 0/34$ و $\rho_m = 1/15 \, {g}/{cm^3}$ برای فاز بستر انتخاب شده است. خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره صندلی راحتی[۲](۱۰و۱۰) مورد استفاده در این مقاله نیز در جدول (۲) مشاهده می‌شود. نکته کلیدی جهت کاربرد درست قانون اختلاط ساده برای کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تعیین درست ضرایب مؤثر نانولوله η_j $(j = 1,2,3)$ است. ضرایب جدول (۳) به‌عنوان ضرایب تأثیر

جدول ۱- مقایسه بار بی‌بعد کمانش $P = N_{cr}b^2 / E_m h^3$

نوع بارگذاری	توزیع نانولوله‌ها	تکیه‌گاه گیردار		تکیه‌گاه ساده	
		پژوهش حاضر	لی [۲۴]	پژوهش حاضر	لی[۲۴]
$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$	UD	۲۵/۱۹۰۴	۲۵/۷۳۲۹	۱۳/۷۴۹	۱۴/۱۰۷۳
	FG-X	۲۶/۶۶۶۷	۲۷/۸۸۸۲	۱۶/۱۴۷	۱۷/۰۶۳۱
	FG-O	۲۲/۳۸۰۱	۲۱/۱۲۲۱	۱۰/۵۴۹۶	۹/۸۳۰۶
	FG-V	۲۴/۵۳۶۲	–	۱۳/۴۲۹۲	–
$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$	UD	۳۰/۹۵۲۳	۳۱/۱۰۰۶	۲۷/۸۱۷۶	۲۸/۴۷۶۸
	FG-X	۳۱/۴۲۸۵	۳۱/۳۸۷	۲۸/۹۷۷۵	۲۹/۱۸۹۷
	FG-O	۲۷/۱۴۲۸	۲۷/۹۳۴	۲۵/۲۵۹۷	۲۴/۰۴۷۴
	FG-V	۳۱/۴۲۸۵	–	۲۸/۹۷۷۵	–
$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$	UD	۹/۰۴۷۶	۹/۲۸۳	۵/۷۱۴۲	۵/۸۸۳۱
	FG-X	۹/۵۴۲۴	۹/۶۵۱	۶/۱۹۰۴	۶/۴۳۸۴
	FG-O	۸/۵۷۱۴	۸/۶۰۰۶	۵/۰۰۱	۴/۸۹۴۶
	FG-V	۸/۵۷۱۴	–	۵/۰۰۱	–

جدول ۲- خواص نانولوله‌های کربنی (۱۰ و ۱۰) ($h = 0/067nm,\ L = 9/26nm,\ R = 0/67nm$) در دمای محیط [۱۵]

E_{11}(TPa)	E_{22}(TPa)	G_{12}(TPa)	υ_{12}^{CNT}	$\rho_{CNT}(g/cm^3)$
۵/۶۴۶۶	۵/۰۸۰۰	۱/۹۴۴۵	۰/۱۷۵	۱/۴

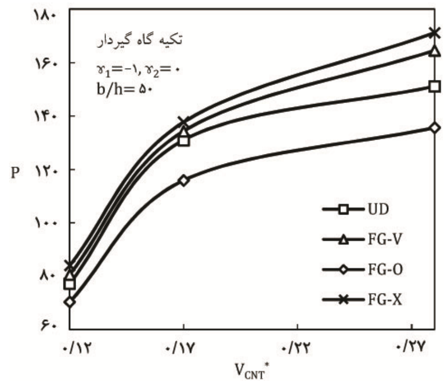
جدول ۳- ضرایب تأثیر نانولوله‌های کربنی برای ماده نانوکامپوزیتی [۱۵]

V_{CNT}^*	قانون اختلاط ساده				
	E_{11}(GPa)	η_1	E_{22}(GPa)	η_2	η_3
۰/۱۲	۹۴/۷۸	۰/۱۳۷	۲/۹	۱/۰۲۲	۰/۷۱۵
۰/۱۷	۱۳۸/۶۸	۰/۱۴۲	۴/۹	۱/۶۲۶	۱/۱۳۸
۰/۲۸	۲۲۴/۵	۰/۱۴۱	۵/۵	۱/۵۸۵	۱/۱۰۹

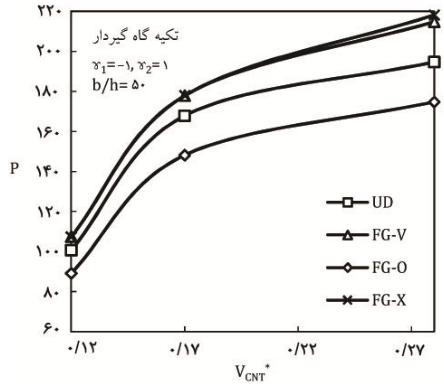
نانولوله‌ها مورد استفاده قرار گرفته است که از طریق انطباق ضریب‌های الاستیک به‌دست آمده از قانون اختلاط ساده با مقادیر حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به‌دست می‌آید. مقداری برای ضریب برشی G_{12} گزارش نشده است. بنابراین فرض شده است که $\eta_3 = 0/7\eta_2$ و $G_{13} = G_{12}$ و $G_{23} = 1/2G_{12}$ است.

۴-۲-۲- تحلیل کمانش صفحه کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

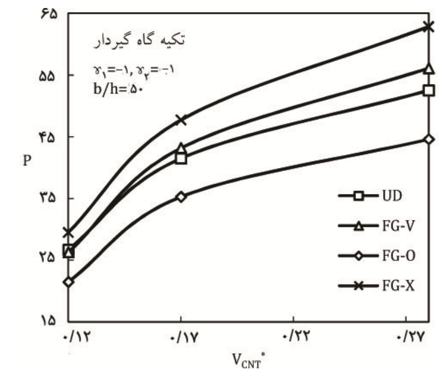
شکل‌های (۲) تا (۴) و شکل‌های (۵) تا (۷) منحنی بار بی‌بعد



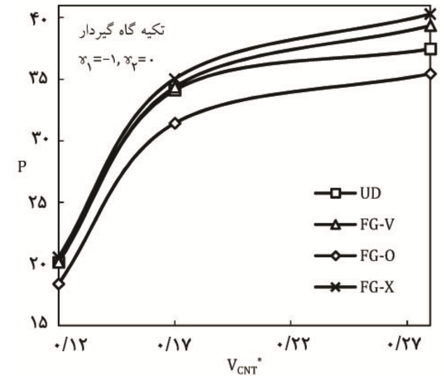
شکل ۲- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، b/h=۵۰ و $(\gamma_1=-1, \gamma_2=0)$



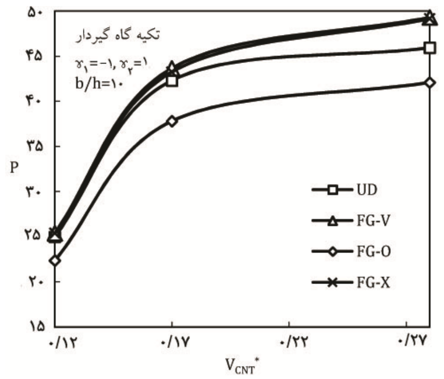
شکل ۳- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، b/h=۵۰ و $(\gamma_1=-1, \gamma_2=1)$



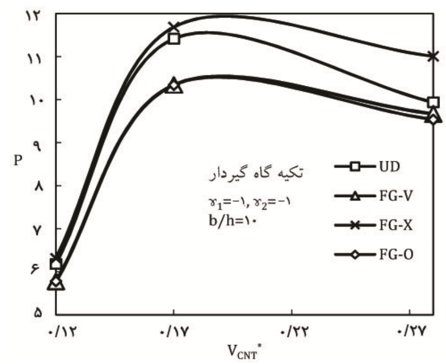
شکل ۴- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، b/h=۵۰ و $(\gamma_1=-1, \gamma_2=-1)$



شکل ۵- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، b/h=۱۰ و $(\gamma_1=-1, \gamma_2=0)$



شکل ۶- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، b/h=۱۰ و $(\gamma_1=-1, \gamma_2=1)$



شکل ۷- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، b/h=۱۰ و $(\gamma_1=-1, \gamma_2=-1)$

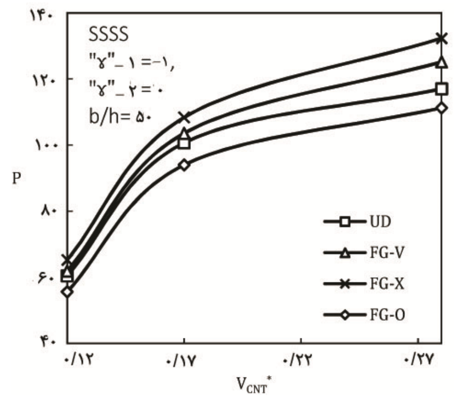
کمانش صفحه نانوکامپوزیتی را برحسب کسر حجمی‌های متفاوت برای چهار نوع توزیع مختلف نانولوله‌های کربنی و حالت‌های مختلف بارگذاری در شرایط تکیه‌گاهی گیردار به‌ترتیب برای نسبت عرض به ضخامت b/h=۵۰ و b/h=۱۰ نشان می‌دهند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل (۲) تا (۴) توزیع

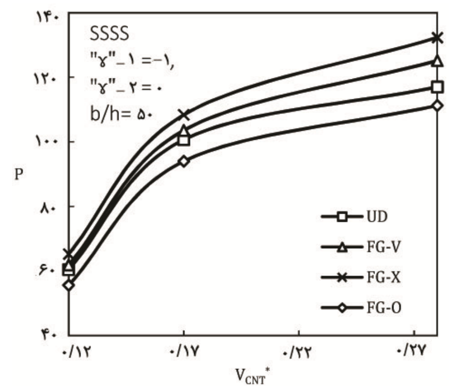
تابعی X شکل بیشترین بار بی‌بعد کمانش را دارا است. این در حالی است که توزیع تابعی O شکل کمترین میزان بار کمانش را تحمل می‌کند. توزیع تابعی X شکل به‌دلیل توزیع متقارن نانولوله‌های کربنی، که با شکل توزیع خود صفحات بالا و پایین صفحه نانوکامپوزیتی را تقویت کرده است، شرایط بهتری را برای تحمل بارگذاری جانبی فراهم می‌کند. از طرفی توزیع تابعی O شکل، که صفحات میانی را تقویت کرده است و سطوح بالا و پایین ضعیف‌تر هستند، کمترین بار کمانش را بین اشکال توزیع دارد. به‌علاوه با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی همچنان توزیع تابعی X شکل نسبت به سایر اشکال توزیع نانولوله‌های کربنی بیشترین بار بی‌بعد کمانش را دارا است. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش ۲۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۲ به ۰/۱۷ به‌طور متوسط شاهد افزایش ۳۹ درصدی در بار بی‌بعد کمانش برای حالت‌های مختلف توزیع و همچنین سه حالت بارگذاری، $(\gamma_1=-1,\gamma_2=0)$، $(\gamma_1=-1,\gamma_2=1)$ و $(\gamma_1=-1,\gamma_2=-1)$، هستیم. این در حالی است که با افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ به‌طور متوسط حدود ۱۵ درصد در بار بی‌بعد کمانش افزایش اتفاق می‌افتد. این نشان می‌دهد که صرف افزایش نانولوله‌های کربنی به‌طور مداوم باعث افزایش چشمگیر بار بحرانی کمانش نمی‌شود.

همچنین با بررسی شکل‌های (۵) تا (۷) که نسبت عرض به ضخامت $b/h=10$ درنظر گرفته شده است ملاحظه می‌شود که افزایش ۲۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۲ به ۰/۱۷ باعث افزایش حدود ۴۰ درصدی در بار بی‌بعد کمانش برای حالت‌های مختلف توزیع و بارهای $(\gamma_1=-1,\gamma_2=0)$، $(\gamma_1=-1,\gamma_2=1)$ و $(\gamma_1=-1,\gamma_2=-1)$ می‌شود. این درحالی است که افزایش ۳۹ درصدی کسرحجمی نانولوله‌های کربنی در دو حالت بارگذاری $(\gamma_1=-1,\gamma_2=0)$ و $(\gamma_1=-1,\gamma_2=1)$، از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ در حالت‌های توزیع تابعی X و O و V افزایش حدود ۱۱ درصدی و در توزیع یکنواخت افزایش ۶ درصدی بار بی‌بعد کمانش را منجر می‌شود. در صورتی‌که در حالت بارگذاری $(\gamma_1=-1,\gamma_2=-1)$، افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی باعث کاهش ۶ درصدی در بار بی‌بعد کمانش می‌شود. با نگاهی دوباره به نتایج حاصل برای دو نسبت عرض به ضخامت متفاوت ($b/h=50$ و $b/h=10$) ملاحظه می‌شود که افزایش کسر حجمی در صفحات نازکتر تأثیر بیشتری در میزان افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی دارد. همچنین کاهش بار بی‌بعد کمانش در بارگذاری $(\gamma_1=-1,\gamma_2=-1)$ برای نسبت عرض به ضخامت $b/h=10$ گویای این مطلب است که در صفحات ضخیم‌تر تراکم نانولوله‌ها عامل منفی در جهت استحکام بیشتر صفحه نانوکامپوزیتی محسوب می‌شود چرا که در پی افزایش کسر حجمی، کاهش بار بی‌بعد کمانش نتیجه می‌شود. همچنین با مقایسه مقدار بار بی‌بعد کمانش در نسبت عرض به ضخامت $b/h=50$ و $b/h=10$ مشاهده می‌شود که در هر سه حالت بارگذاری با افزایش نسبت عرض به ضخامت میزان بار بی‌بعد کمانش کاهش می‌یابد.

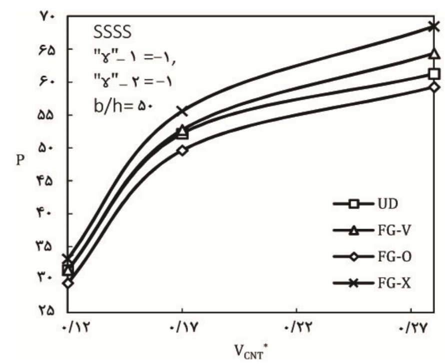
شکل‌های (۸) تا (۱۰) و شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) منحنی بار بی‌بعد کمانش صفحه نانو کامپوزیتی را برحسب کسر حجمی‌های متفاوت برای چهار نوع توزیع مختلف نانولوله‌های کربنی و حالت‌های مختلف بارگذاری در شرایط تکیه‌گاهی ساده به‌ترتیب برای نسبت عرض به ضخامت $b/h=50$ و $b/h=10$ نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در شرایط تکیه‌گاهی ساده نیز توزیع تابعی X شکل بیشترین بار بی‌بعد کمانش را دارا است و توزیع تابعی O شکل کمترین میزان بار کمانش را تحمل می‌کند. همچنین مشابه شرایط تکیه‌گاهی گیردار در شرایط تکیه‌گاهی ساده نیز در نسبت عرض به ضخامت $b/h=50$ (شکل‌های (۸) تا (۱۰)) با افزایش ۲۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۲ به‌۰/۱۷ به‌طور متوسط شاهد افزایش ۳۹ درصدی در بار بی‌بعد کمانش برای حالت‌های مختلف توزیع و



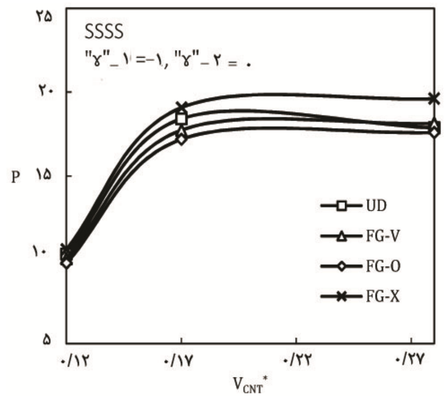
شکل ۸- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = ۵۰$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = ۰)$



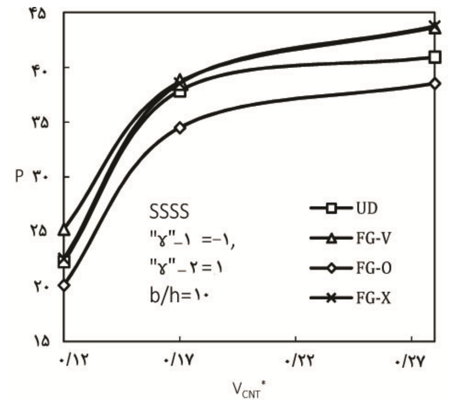
شکل ۹- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = ۵۰$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = ۱)$



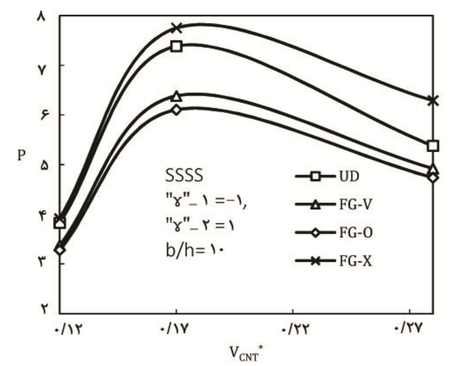
شکل ۱۰ - تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = ۵۰$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = -۱)$



شکل ۱۱- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = ۱۰$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = ۰)$



شکل ۱۲- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = ۱۰$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = ۱)$



شکل ۱۳ - تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = ۱۰$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = -۱)$

همچنین سه حالت بارگذاری، $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = ۰)$، $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = ۱)$ و $(\gamma_۱ = -۱, \gamma_۲ = -۱)$، هستیم. این در حالی است که با افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ به‌طور متوسط حدود ۲۰ درصد در بار بی‌بعد کمانش افزایش اتفاق می‌افتد. با این وجود باز هم افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به‌طور پیوسته باعث

افزایش چشمگیر بار بی‌بعد کمانش نشده است و مشاهده می‌شود که از میزان تأثیرگذاری کسر حجمی نانولوله‌های کربنی کاسته شده است. همچنین با ضخیم‌تر شدن صفحه در نسبت عرض به ضخامت $b/h = 10$ (شکل‌های (۱۱) تا (۱۳)) از میزان تأثیرگذاری کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به‌مقدار بیشتری کاسته می‌شود. به‌علاوه مشاهده می‌شود که در شرایط تکیه‌گاهی ساده در تمامی کسر حجمی‌های استفاده شده، توزیع تابعی X شکل در صفحات نازک‌تر نسبت به صفحات ضخیم‌تر به‌مراتب نسبت به سایر اشکال توزیع عملکرد بهتری را در جهت استحکام بخشیدن بیشتر صفحه نانوکامپوزیتی داشته است. این مطلب مؤید این نکته است که در صفحات نازک استفاده از توزیع تابعی به میزان بیشتری باعث بهبود استحکام صفحه نانوکامپوزیتی می‌شود. همچنین همانطور که انتظار می‌رود در شرایط تکیه‌گاهی ساده بار بی‌بعد کمانش نسبت به شرایط تکیه‌گاهی گیردار کاهش پیدا می‌کند. از نکات حائز اهمیت در میان نمودارهای ارائه شده سیر نزولی در مقادیر بار بحرانی کمانش در شکل‌های (۷) و (۱۳) با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ است. دلیل این رویداد را می‌توان به نحوه تغییرات ضرایب الاستیسیته و مقادیر سفتی صفحه در اثر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی مربوط دانست. به‌طوری‌که با بررسی نسبت ضرایب الاستیسیته در راستای محور x نسبت به راستای محور y، (E_{11}/E_{22})، صفحه نانوکامپوزیتی مشاهده شد که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۲ به ۰/۱۷ نسبت E_{11}/E_{22} کاهش می‌یابد. به‌عبارت دیگر استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در راستای محور x نسبت به راستای محور y کاهش می‌یابد. این در حالی است که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ نسبت E_{11}/E_{22} افزایش می‌یابد که این را می‌توان به معنای افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در راستای محور x نسبت به راستای محور y دانست. لذا در شکل‌های (۷) و (۱۳) که مربوط به حالت‌های بارگذاری فشاری دو محوری ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$) برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده است به‌علت کاهش سفتی صفحه در راستای محور y با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ شاهد سیرنزولی در مقادیر بار کمانشی خواهیم بود. این در حالی است که در حالت بارگذاری فشاری تک محوره ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) چون بارگذاری فشاری در راستای محور y وجود ندارد کاهش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در این راستا تأثیر محسوسی بر بار بحرانی کمانش در مقایسه با حالت قبلی نخواهد داشت. همچنین در حالت بارگذاری دو محوری، فشاری–کششی ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$)، از آنجا که بارگذاری در راستای محور y کششی است و با علم به اینکه بارگذاری کششی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود، در این حالت نیز نمودار سیر طبیعی خود را دارد و سیر نزولی پیدا نمی‌کند. اما علت اینکه در $b/h = 50$ برخلاف $b/h = 10$ این کاهش در میزان بار بی‌بعد کمانش مشاهده نمی‌شود (شکل‌های (۴) و (۱۰)) می‌تواند ناشی از افزایش مداوم نسبت $\frac{E_{11}}{E_{22}}$ در اثر افزایش کسر حجمی باشد. به‌عبارت دیگر افزایش کسر حجمی در صفحات نازکتر تأثیر همواره مثبتی در میزان افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در راستای افزایش بار بحرانی کمانش دارد.

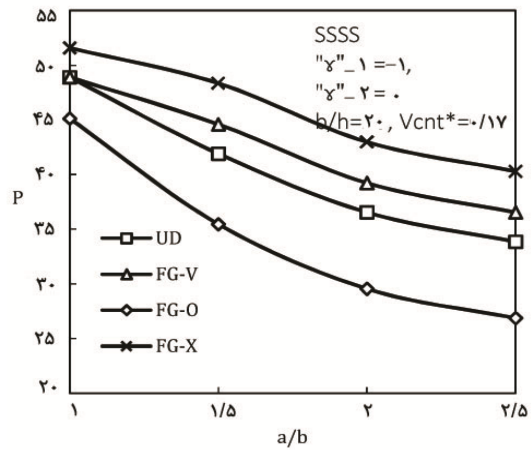
شکل‌های (۱۴) تا (۱۶) منحنی بار بی‌بعد کمانش را در نسبت‌های ابعادی متفاوت تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده نشان می‌دهد. کسر حجمی $V_{CNT}^* = 0/17$ و نسبت عرض به ضخامت $b/h = 20$ درنظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که در حالت بارگذاری ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) و ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$) با افزایش نسبت ابعادی، بار بی‌بعد کمانش کاهش می‌یابد و میزان کاهش برای حالتی که بار دو محوری فشاری و کششی ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$) است نسبت به حالتی که بار فشاری تک‌محوری ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) است خیلی بیشتر است. به‌طوری‌که در حالت اول با ۲/۵ برابر شدن نسبت ابعادی کاهش حدود ۱۱۵ درصدی برای توزیع X شکل و بیش از ۲۰۰ درصدی در سایر اشکال توزیع در میزان بار بی‌بعد کمانش

اتفاق می‌افتد ولی برای حالت دوم حداکثر ۷۰ درصد کاهش در بار بی‌بعد کمانش اتفاق می‌افتد. در ادامه مشاهده می‌شود که برای حالت بارگذاری فشاری دومحوری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ افزایش ۲/۵ برابری نسبت ابعادی فقط در حالت توزیع O شکل نانولوله‌های کربنی باعث کاهش بسیار کم حدود ۸ درصدی در بار بی‌بعد کمانش می‌شود و در سایر اشکال توزیع افزایش نسبت ابعادی تغییر محسوسی در میزان بار بی‌بعد کمانش ایجاد نمی‌کند.

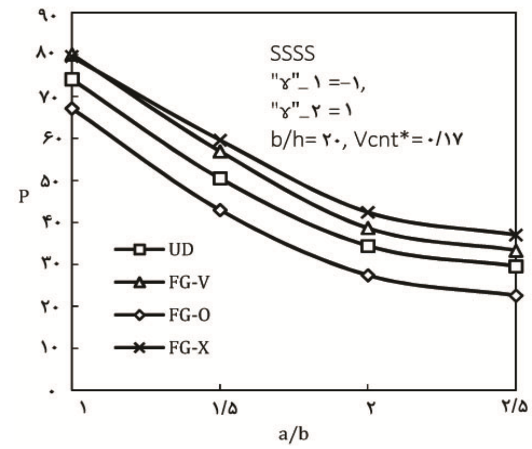
۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی برای تحلیل کمانش مکانیکی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با چیدمان‌های مختلف تابعی از نانولوله‌های کربنی تک‌جداره در شرایط مرزی ساده و گیردار استفاده شده است. خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره وابسته به اندازه هستند که از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی انجام شده در مراجع به‌دست آمده است. خواص کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با فرض تابعی بودن در جهت ضخامت از طریق قانون اختلاط ساده به‌دست آمده است. کلیه معادلات حاکم به‌صورت نموی و براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش‌های غیرخطی فون‌کارمن به‌دست آمده است. سپس دستگاه معادلات تعادل غیرخطی کوپل به‌کمک روش انرژی به‌صورت نموی به‌دست آمده و به کمک ترکیب روش‌های آزادسازی دینامیکی و اختلاف محدود برای به‌دست آوردن بار بحرانی کمانش حل شده است.

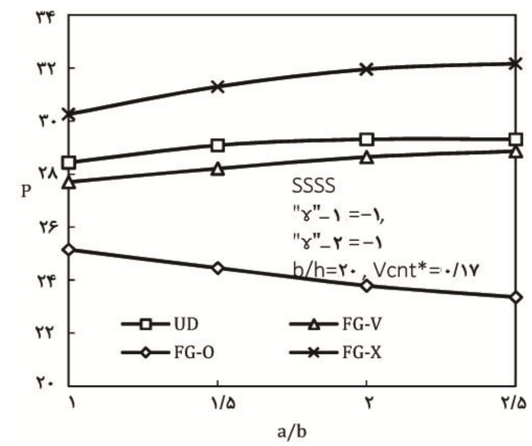
مطالعه پارامتری بیانگر این است که استفاده از توزیع تابعی در افزایش بار بحرانی کمانش تأثیرگذار است به‌طوری که توزیع تابعی X شکل به‌طور قابل‌توجهی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود. همچنین مشاهده شد که افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به‌طور پیوسته نمی‌تواند باعث بهبود چشمگیر در استحکام صفحه نانوکامپوزیتی گردد و در واقع برای این امر کسر حجمی بهینه وجود دارد. در حالتی که



شکل ۱۴- تأثیر افزایش نسبت ابعادی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = 20$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$



شکل ۱۵- تأثیر افزایش نسبت ابعادی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = 20$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$



شکل ۱۶- تأثیر افزایش نسبت ابعادی بر بار بی‌بعد کمانش، $b/h = 20$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$

بار فشاری فقط در راستای محور نانولوله‌ها قرار دارد نتیجه بهتری از افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها حاصل می‌شود. به‌علاوه افزایش کسر حجمی در صفحات نازکتر تأثیر بیشتری در میزان افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی، در راستای افزایش بار بحرانی کمانش دارد. همچنین تأثیر افزایش کسر حجمی در نسبت‌های عرض به ضخامت گوناگون و حالت‌های بارگذاری، متفاوت است. به‌علاوه مشخص گردید که پارامتر نسبت ابعادی تأثیر کمتری نسبت به سایر پارامترها در میزان بار بحرانی کمانش از خود بر جای می‌گذارد و زمانی‌که صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از دو طرف تحت فشار است تأثیر پارامتر نسبت ابعادی تقریباً ناچیز است.

واژه‌نامه

1. kevlar fibers
2. single-walled carbon Nanotube
3. mass fraction

پیوست

معادلات تعادل نموی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی ($u, v, w, \psi_r, \psi_\theta$):

$$A_{11}\left(\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right)+B_{11}\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial x^2}$$

$$+A_{12}\left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\right)+B_{12}\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial x\partial y}$$

$$+A_{66}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\\+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\end{array}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial x\partial y}\right)=0$$

$$A_{12}\left(\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\right)+B_{12}\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial x\partial y}$$

$$+A_{22}\left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right)+B_{22}\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial y^2}$$

$$+A_{66}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\\+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\end{array}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial x^2}\right)=0$$

$$A_{55}\left(\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x}\right)+A_{45}\left(\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x}\right)+A_{44}\left(\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y}\right)$$

$$+A_{45}\left(\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y}\right)+\left(\begin{array}{l} A_{11}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)^2\right)+B_{11}\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ +A_{12}\left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{12}\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \end{array}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+\left(\begin{array}{l} A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{11}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) \\ +A_{11}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)^2\right)+B_{11}\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ +A_{12}\left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{12}\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \end{array}\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}$$

$$+\left(\begin{array}{l} A_{12}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)^2\right)+B_{12}\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ +A_{22}\left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{22}\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \end{array}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$+\left(\begin{array}{l} A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) \\ +A_{12}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)^2\right)+B_{12}\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ +A_{22}\left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{22}\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \end{array}\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}$$

$$+2*\left(A_{66}\left(\begin{array}{l} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \\ +\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \end{array}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$+2*\left(\begin{array}{l}A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial \delta\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \delta\psi_y}{\partial x}\right)\\+A_{66}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)\end{array}\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial y}=-\delta q$$

$$B_{11}\left(\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right)+D_{11}\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial x^2}$$

$$+B_{12}\left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\right)+D_{12}\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial x\partial y}$$

$$+B_{66}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\\+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\end{array}\right)+D_{66}\left(\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial x\partial y}\right)=0$$

$$B_{12}\left(\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\right)+D_{12}\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial x\partial y}$$

$$+B_{22}\left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right)+D_{22}\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial y^2}$$

$$+B_{66}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\\+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x\partial y}\end{array}\right)+D_{66}\left(\frac{\partial^2 \delta\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \delta\psi_y}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (\text{پ}-1)$$

مراجع

1. Kroto, H. W., Heath, J. R., O'Brien, S. C., Curl, R. F., and Smalley, R. E., “C_{60}: Buckminsterfullerene”, *Nature*,Vol. 318, pp. 162-163, 1985.
2. Lijima, S., “Helical Microtubules of Graphitic Carbon”, *Nature*, Vol. 354, pp. 56-58, 1991.
3. Han, Y., and Elliott, J., “Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites”, *Computational Materials Science*, Vol. 39, pp. 315-323, 2007.
4. Esawi, A. M. K., and Farag M. M., “Carbon Nanotube Reinforced Composites: Potential and Current Challenges”, *Materials & Design*, Vol. 28, pp. 2394-2401, 2007.
5. Ruoff, R. S., Qian, D., and Liu, W. K., “Mechanical Properties of Carbon Nanotubes: Theoretical Predictions and Experimental Measurements”, *Comptes Rendus Physique*, Vol. 4, pp. 993-1003, 2003.
6. Thostenson, E. T., Ren, Zh., and Chou, T. W.,

"Advances in the Science and Technology of Carbon Nanotubes and their Composites: a Review", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1899-1912, 2001.

7. Griebel, M., and Hamaekers, J., "Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Moduli of Polymer-Carbon Nanotube Composites", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 1773-1788, 2004.
8. Fidelus, J. D., Wiesel, E., Gojny, F. H.,Schulte, K., and Wagner, H. D., "Thermo-Mechanical Properties of Randomly Oriented Carbon/Epoxy Nanocomposites", *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 36, pp. 1555-1561, 2005.
9. Ming, Li., Kang. Z. H.,Yang, P., Meng, X., and Lu, Y., "Molecular Dynamics Study on Carbon/Epoxy Buckling of Single-Wall Carbon Nanotube-Based Intramolecular Junctions and Influence Factors", *Computational Materials Science*, Vol. 67, pp. 390-396, 2013.
10. Seifoori, S., and Liaghat, G. H. "Low Velocity Impact of a Nanoparticle on Euler-Bernoulli Nanobeam using a Nonlocal Elasticity Model", *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, pp. 37-44, 2012.
11. Vodenitcharova, T., and Zhang, L. C., "Bending and Local Buckling of a Nanocomposite Beam Reinforced by a Single-Walled Carbon Nanotube", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3006-3024, 2006.
12. Shen, H. S., "Nonlinear Bending of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9-19, 2009.
13. Shen, H. S., and Zhang, C. L., "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates", *Materials & Design*, Vol. 31, pp. 3403-3411, 2010.
14. Wang, Z. X., and Shen, H. S., "Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Computational Materials Science*, Vol. 50, pp. 2319-2330, 2011.
15. Shen, H. S., "Postbuckling of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part I: Axially-Loadedshells", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2096-2108, 2011.
16. Shen, H. S., "Postbuckling of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part II: Pressure-Loaded Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2496-2503, 2011.
17. Shen, H. S., "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Cylindrical Shells", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 1030-1038, 2012.
18. Shen, H. S., and Xiang, Y., "Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells Inthermal Environments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 213-216, pp. 196-205, 2012.
19. Zhu, P., Lei, Z. X., and Liew K. M., "Static and Free Vibration Analyses of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates using Finite Element Method with First Order Shear Deformation Plate Theory", *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 1450-1460, 2012.
20. Sobhani Aragh, B., Nasrollah Barati A. H., and Hedayati H., "Eshelby-Mori-Tanaka Approach for Vibrational Behavior of Continuously Graded Carbon Nanotube-Reinforced Cylindrical Panels", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 1943-1954, 2012.
21. Yas, M. H., and Heshmati M., "Dynamic Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Beams Reinforced by Randomly Oriented Carbon Nanotube under the Action of Moving Load", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 1371-1394, 2012.
22. Wang, Z. X., and Shen H. S., "Nonlinear Dynamic Response of Nanotube-Reinforced Composite Plates Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, pp. 735-754, 2012.
23. Alibeigloo, A., "Static Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plate Embedded in Piezoelectric Layers by using Theory of Elasticity", *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 612-622, 2013.
24. Lei, Z. X., Leiw, K. M., and Yu, J. K., "Buckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates using the Element-Free kp-Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 160-168, 2013.
25. Shen, H. S., and Zhu, Z. H., "Postbuckling of Sandwich Plates with Nanotube-Reinforced Composite Face Sheets Resting on Elastic Foundations", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 35, pp. 10-21, 2012.
26. Wang, Z. X., and Shen, H. S., "Nonlinear Vibration and Bending of Sandwich Plates with Nanotube-Reinforced Composite Face Sheets", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 411-421, 2012.
27. Reddy , J. N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", Boca Raton (FL): CRC Press, 2004.
28. Rezaee Pajand, M., and Alamatian, J., "The Dynamic Relaxation Method using New Formulation for Fictitious Mass and Damping", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, pp. 109-133, 2010.

29. Zhang, L. C., Kadkhodayan, M., and Mai, Y. W., "Development of the maDR method", *Computers & Structures*, Vol.52, pp.1-8, 1994.

30. Underwood, P., "*Dynamic Relaxation, in: Computational Method for Transient Analysis*", *Elsevier, Amsterdam*, 1983.