

## شبیه‌سازی دینامیکی سامانه دوار پیوسته دارای ترک فعال با استفاده از روش سری‌های ریتز و حل متوازن بالانس

بهالو هوره، حسن<sup>1\*</sup>، احمدیان، حمید<sup>2</sup>

1- کارشناس ارشد، قطب علمی مکانیک جامدات تجربی و دینامیک، دانشکده مهندسی مکانیک،

دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، 16844

2- استاد، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

(دریافت مقاله: 1389/5/10 تاریخ پذیرش: 1389/10/1)

### چکیده

رفتار دینامیکی یک روتور تحت تحریک نیروهای نامتوازن و وزن شبیه‌سازی شده است. محور با استفاده از قطعات تیر تیموشنکو که بر روی دو یاتاقان ویسکو الاستیک قرار دارد مدل شده و دو دیسک متصل به آن به صورت جسم صلب با اتصال نقطه‌ای در نظر گرفته شده است. یک ترک فعال در محور در نظر گرفته شده است که منجر به رفتار پارامتریک سامانه می‌شود. مدل با استفاده از روش‌های انرژی و به کارگیری سری‌های ریتز به طوریکه بتواند اثرات ترک را دربر گیرد، ساخته شده است. اثر ترک در نقش یک زیرسازه در نظر گرفته شده است که دو قطعه محور را بهم متصل می‌کند. پاسخ سامانه کامل با استفاده از روش هارمونیک بالانس به دست آمده است. پاسخ محاسبه شده برای سامانه شامل نمودارهای راه‌اندازی روتور و پاسخ زمانی می‌باشد. نتایج به دست آمده با استفاده از این روش با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شد و تطابق خوبی مشاهده شد.

واژه‌های کلیدی: محور ترک‌دار، سری‌های ریتز، مکانیک شکست کشسان خطی، رفتار پارامتریک

### مقدمه

امروزه دینامیک ماشین‌های دوار یکی از مهم‌ترین زمینه‌های صنعتی را تشکیل می‌دهد. حجم قابل توجهی از تحقیقات بر روی این زمینه متمرکز شده است. یک حوزه مهم در زمینه دینامیک ماشین‌های دوار مدل‌سازی روتورهای معیوب و عیب‌یابی آنها می‌باشد. ترک در روتور یک نوع از این عیوب به‌شمار می‌رود. محققان بسیاری به این زمینه پرداخته‌اند و مقالات و کتاب‌های بسیاری در این زمینه به چاپ رسیده است [1 - 10].

ایده اصلی و رای مدل‌سازی ارتعاشی هر روتور ترک‌دار این است که وجود ترک از سفتی سامانه کاسته و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را تحت تأثیر قرار می‌دهد [2]. ترک‌های موجود در روتورها به دو دسته شیارها و ترک‌های فعال دسته‌بندی می‌شوند. شیارها اساساً عامل نامتقارن در سامانه روتور بوده و ترک‌های فعال پدیده‌های پیچیده‌تری هستند [10 و 14]. سفتی متناظر با یک شیار در دستگاه مختصات

دوار ثابت است ولی سفتی یک ترک فعال در هر دو دستگاه دوار و ثابت با زمان تغییر می‌کند [6 و 10]. علاوه بر اینها بر حسب وزن سامانه دوار نیز می‌توان روتورها را به دو دسته تقسیم‌بندی نمود [7]: حالتی که در آن وزن غالب بوده و در آن خیز ایستایی ناشی از وزن روتور بسیار بیشتر از دامنه ارتعاشی می‌باشد. این حالت که در روتورهای سنگین و صنعتی بروز می‌یابد باعث می‌شود رفتار ترک خطی و متغیر با زمان باشد. حالت دیگر به روتورهای سبک و یا روتورهایی که در آنها اثر وزن وجود ندارد (روتورهای عمودی) مربوط می‌شود. در این حالت باز و بسته شدن ترک تابع دامنه ارتعاشی بوده و یک سامانه غیرخطی وجود خواهد داشت. یکی از علائم گزارش شده برای وجود ترک‌ها، کاهش فرکانس‌های طبیعی و اعوجاج در شکل مودها می‌باشد. وجود مؤلفه هارمونیک  $2x$  برای یک شیار و مؤلفه‌های  $2x$  و  $3x$  برای یک ترک فعال گزارش شده است [10، 12، 13 و 17].

هرچند کارهای زیادی بر روش‌های FEM مبتنی هستند

\* نویسنده پاسخگو، پست الکترونیک: ha\_bahaloo@mecheng.iust.ac.ir

C	ماتریس میرایی
D	ماتریس ژبروسکوپی
F	بردار نیرو
$K_c$	ماتریس سفتی ترک
$K_{min}$	ماتریس سفتی کمینه ترک
$K_{max}$	سفتی بیشینه
$\Delta K$	تغییرات سفتی در محل ترک
$\bar{E}$	ماتریس انتقال
q	بردار مختصه‌های عام
$\eta_c$	بردار جابه‌جایی ترک
$C_u$	انعطاف‌پذیری ترک بسته
$C_c$	انعطاف‌پذیری ترک باز
-s	پارامترهای محور
-d	پارامترهای دیسک
-b	پارامترهای یاتاقان
-e	پارامترهای نامتوازن
-l	مربوط به محور سمت چپ
-r	مربوط به محور سمت راست

[2، 8، 11، 13 و 17]، برخی کارهای تحلیلی نیز در این زمینه صورت گرفته است [1 و 4]. به دلیل کارهای محققانی مانند دیماروگوناتس [3 و 7]، امروزه تحلیل روتورهای ترک‌دار دارای ارتباط تنگاتنگی با مکانیک شکست کشسان خطی می‌باشد. ماتریس انعطاف‌پذیری برای ترک با استفاده از اصول مکانیک کشسان خطی استخراج شده و در نهایت ماتریس سفتی تعیین می‌گردد [4 و 7].

در این مقاله، رفتار روتور ترک‌دار با ترک فعال در شرایط تحریک پارامتریک بررسی شده است. رفتار پارامتریک در سامانه‌هایی با معادلات دیفرانسیل خطی و دارای ضرایب متغیر با زمان دیده می‌شود. روش مدل‌سازی مبتنی بر استفاده از روش سری‌های ریتز و زیرسازه‌ها بوده و روش حل بر اساس روش هارمونیک بالانس است. رفتار باز و بسته شدن ترک با استفاده از تابع کسینوسی شناخته شده مایس و دیویس مدل شده است.

### فرمول‌بندی کلی

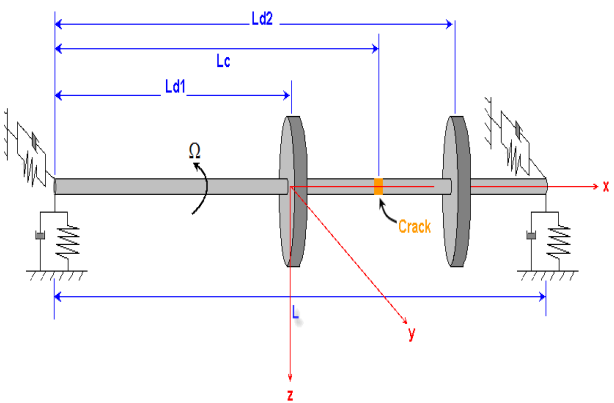
سامانه روتور نشان‌داده‌شده در شکل (1) شامل یک محور دوار است که بر روی دو یاتاقان ویسکو-الاستیک خطی قرار دارد. محور دارای دو دیسک و یک ترک در فاصله بین دو دیسک می‌باشد.

### معادلات انرژی برای اجزای سامانه غیر از ترک

محور به‌صورت دو تکه تیر تیموشنکو در نظر گرفته شده که به‌وسیله المان ترک و در محل ترک به هم متصل شده است. این تکه‌ها با زیرنویس‌های  $l$  و  $r$  نشان داده شده‌اند که به ترتیب نشان‌دهنده تکه سمت چپ و سمت راست هستند.

### فهرست علائم

T	انرژی جنبشی
U	انرژی پتانسیل
A	مساحت
I	گشتاور اینرسی
E	مدول کشسانی
G	مدول برش
v	جابه‌جایی افقی محور
w	جابه‌جایی عمودی محور
$\alpha$	شیب افقی محور
$\beta$	شیب عمودی محور
$\nu$	ضریب پواسون
$\Phi$	شکل مود جابه‌جایی
$\Psi$	شکل مود شیب
N	شماره مود
$\Omega$	سرعت دوران
x	فاصله بر روی محور از یاتاقان سمت چپ
L	طول محور
$m_d$	جرم دیسک
$J_d$	گشتاور اینرسی دیسک
g	شتاب گرانش
$K_b$	سفتی یاتاقان
$C_b$	میرایی یاتاقان
M	ماتریس جرم
K	ماتریس سفتی



شکل 1- نمایش از سامانه دوار مورد نظر برای مدل‌سازی

اصلاح مدل برای در بر گرفتن اثر ترک

عیب متناظر با یک ترک فعال به وسیله وار مدل شده است [1]. محور به صورت دو محور سالم که به وسیله المان ترک فعال به هم متصل شده در نظر گرفته شده است. برای هر محور سالم از روش سری‌های ریتز برای بیان جابه‌جایی‌ها و شیب‌ها استفاده شده است. ماتریس‌های سفتی، جرم، میرایی و ژيروسکوپی برای قسمت‌های مختلف به دست آمده است. ماتریس سفتی ترک با استفاده از تعریف بردار جابه‌جایی ترک و انرژی پتانسیل ترک تعیین می‌شود. بردار جابه‌جایی محورها در دو طرف ترک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{h^l\} = [v^l, w^l, a^l, b^l]^T \quad (5)$$

$$\{h^r\} = [v^r, w^r, a^r, b^r]^T \quad (6)$$

بردار جابه‌جایی ترک به صورت اختلاف این جابه‌جایی‌ها تعریف می‌گردد [1]:

$$\{h_c\} = \{h^l\}_{x=crack} - \{h^r\}_{x=crack} \quad (7)$$

با به کارگیری روش مکانیک شکست کشسان خطی، ماتریس انعطاف‌پذیری یک ترک باز به صورت زیر تعریف می‌شود [3]:

$$C^c = \begin{bmatrix} c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ 0 & 0 & c_{45} & c_{55} \end{bmatrix} \quad (8)$$

با در نظر گرفتن این واقعیت که وقتی ترک بسته است نیروهای برشی را انتقال نمی‌دهد ولی گشتاورهای خمشی را تحمل می‌کند، ماتریس انعطاف‌پذیری یک ترک بسته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$C^u = \begin{bmatrix} c_{22} & & & 0 \\ & c_{33} & & \\ & & \frac{e}{4EI} & \\ 0 & & & \frac{e}{4EI} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس انعطاف‌پذیری کل ترک برابر با حاصل جمع دو ماتریس انعطاف‌پذیری بالا خواهد بود.

انرژی جنبشی و پتانسیل محورها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T_s = \frac{1}{2} \int_0^L r_s A_s (\dot{w}_s^2 + \dot{v}_s^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L r_s I_s (\dot{a}^2 + \dot{b}^2) dx + \int_0^L r_s I_s \Omega^2 dx + 2 \int_0^L r_s I_s \Omega a b dx \quad (1-الف)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \{EI_s \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \right] + kAG \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} - a \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + b \right)^2 \right] \} dx \quad (1-ب)$$

$$U_{sg} = -r_s A_s g \int_0^L w_s dx \quad (1-پ)$$

انرژی پتانسیل و اتلاف انرژی یاتاقان‌ها با عبارات زیر بیان می‌گردد:

$$U_b = \frac{1}{2} (K_{ww}^b w_s^2 + K_{vv}^b v_s^2 + 2K_{vw}^b v_s w_s)_{x=l_{LB}} + \frac{1}{2} (K_{ww}^b w_s^2 + K_{vv}^b v_s^2 + 2K_{vw}^b v_s w_s)_{x=l_{RB}} \quad (2)$$

$$U_b = \frac{1}{2} (C_{ww}^b w_s^2 + C_{vv}^b v_s^2 + 2C_{vw}^b v_s w_s)_{x=l_{LB}} + \frac{1}{2} (C_{ww}^b w_s^2 + C_{vv}^b v_s^2 + 2C_{vw}^b v_s w_s)_{x=l_{RB}}$$

معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل برای دیسک به صورت زیر بیان می‌گردند:

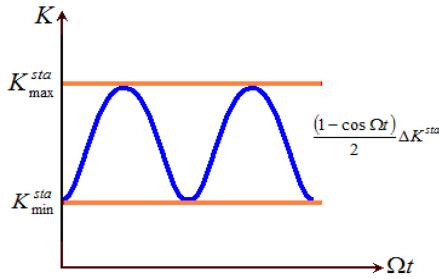
$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{w}_s^2 + \dot{v}_s^2)_{x=l_D} + \frac{1}{2} J_{d_y} (\dot{a}^2 + \dot{b}^2) \quad (3-الف)$$

$$+ \frac{1}{2} J_{d_p} (\Omega^2 + \Omega a b)$$

$$U_{dg} = -m_d g w_s |_{x=l_D} \quad (3-ب)$$

و نهایتاً کار ناشی از نیروی نامتوازن به صورت زیر است:

$$U_e = m_d e \Omega^2 (w_s \sin(\Omega t) + v_s \cos(\Omega t)) \quad (4)$$



شکل 2- سفتی ترک فعال به عنوان تابعی از چرخش محور

### تحلیل سری ریتز

تحلیل سری‌های ریتز برای به‌دست‌آوردن معادلات گسسته سامانه به‌صورت ماتریسی استفاده شده است. سری‌های ریتز به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{v, w, a, b\}^T = \dots$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \Phi^{(i)}(x), \Phi^{(i)}(x), \Psi^{(i)}(x), \Psi^{(i)}(x) \right\} \begin{Bmatrix} q_v^{(i)}(t) \\ q_w^{(i)}(t) \\ q_a^{(i)}(t) \\ q_b^{(i)}(t) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

از آنجا که هیچ نوع قید هندسی در محل یاتاقان‌ها وجود ندارد از توابع شکل مودی متناظر با تیر تیموشنکوی دو سر رها برای تقریب‌زدن پاسخ سامانه استفاده شده است.

با جایگذاری معادله 16 در معادلات انرژی سامانه، ماتریس‌های جرم، سفتی، میرایی و ژيروسکوپی به‌همراه بردار نیرو تعیین خواهند شد. برای به‌دست‌آوردن ماتریس سفتی ترک در مختصات عمومی سرهای ریتز انرژی پتانسیل معادل ترک را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_c = \{h_c\}^T [K_c^{sta}] \{h_c\} \quad (17)$$

با بسط دادن عبارت بالا:

$$U_c = 0.5 \{ K_c^{sat}(1,1) (v^1 - v^r)(v^1 - v^r) + K_c^{sat}(2,1) (w^1 - w^r)(v^1 - v^r) + K_c^{sat}(1,2) (v^1 - v^r)(w^1 - w^r) + K_c^{sat}(2,2) (w^1 - w^r)(w^1 - w^r) + K_c^{sat}(3,3) (\alpha^1 - \alpha^r)(\alpha^1 - \alpha^r) + K_c^{sat}(4,3) (\beta^1 - \beta^r)(\alpha^1 - \alpha^r) + K_c^{sat}(3,4) (\alpha^1 - \alpha^r)(\beta^1 - \beta^r) + K_c^{sat}(4,4) (\beta^1 - \beta^r)(\beta^1 - \beta^r) \} \quad (18)$$

### مدل‌سازی ماتریس انعطاف‌پذیری ترک فعال

در طی چرخش محور، سفتی بین یک مقدار کمینه و یک مقدار بیشینه نوسان می‌کند. مقدار سفتی کمینه به ترک باز و سفتی بیشینه به ترک بسته تعلق دارد. طول المان ترک بسته برابر  $\varepsilon$  در نظر گرفته شده است که  $\varepsilon$  مقداری بسیار کوچک است. ماتریس سفتی ترک باز چنین بیان می‌شود:

$$K_{\min}^{rot} = [c^c]^{-1} \quad (10)$$

و برای ترک بسته:

$$K_{\max}^{rot} = [c^u]^{-1} \quad (11)$$

اختلاف بین این مقادیر بیشینه و کمینه در حکم ماتریس  $\Delta K$  تعریف شده است و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta K^{rot} = K_{\max}^{rot} - K_{\min}^{rot} \quad (12)$$

ماتریس‌های سفتی کمینه و بیشینه ترک در مختصات چرخان بیان شده بودند و به‌وسیله ماتریس انتقال زیر به مختصات ساکن منتقل می‌گردند:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & & \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & & \\ & & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ & & -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

همچنان که در شکل (2) نشان داده شده است سفتی کل ترک برابر خواهد بود با یک سفتی کمینه که به مقدار  $\Delta K^{sta}$  نوسان می‌کند.

$$K_c^{sta} = [T]^T K_{\min}^{rot} [T] + [T]^T f(t) \Delta K^{rot} [T] = K_{\min}^{sta} + f(t) \Delta K^{sta} \quad (14)$$

تابع  $f(t)$  به‌صورت زیر است [2,7 و 8]:

$$f(t) = \frac{(1 - \cos \Omega t)}{2} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} M_L & 0 \\ 0 & M_R \end{bmatrix} \\
 [D] &= \begin{bmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_R \end{bmatrix} \\
 [K_U] &= \begin{bmatrix} K_{U_L} & 0 \\ 0 & K_{U_R} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (25)$$

بردار جابه‌جایی و نیرو نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \{q\} &= \begin{Bmatrix} \{q_L\} \\ \{q_R\} \end{Bmatrix} \\
 \{F\} &= \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_R\} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (26)$$

### روش حل

معادلات فوق را می‌توان به راحتی با استفاده از روش زمان-فرکانس متوالی (AFT)<sup>1</sup> حل نمود [8, 18 و 19]. جی. گرول و ایونز [18] یک روش عددی را بر مبنای استفاده از روش هارمونیک بالانس برای حل سامانه‌های غیرخطی تحت تحریک متناوب ارائه دادند. الگوریتم آنها، پایداری سامانه غیرخطی و نقاط دوشاخگی را نیز تعیین می‌کرد. حل سامانه‌های خطی و غیرخطی به این صورت انجام می‌گیرد که بردار نیروی معادل با عامل غیرخطی مانند سایش یا تاقان به سمت راست معادله و کنار بردار نیروی وزن و نامتوازن منتقل شده و سامانه معادلات به صورت تکراری حل می‌شوند. شکل کلی معادلات برای سامانه‌های غیرخطی و خطی متغیر با زمان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[\tilde{K}(t)]\{X\} = \{F\} + \{E\} \quad (27)$$

که ماتریس  $[\tilde{K}(t)]$  نشان‌دهنده ماتریس سفتی دینامیک سامانه بوده و بردارهای  $\{X\}$ ،  $\{E\}$  و  $\{F\}$  به ترتیب نشان‌دهنده جابه‌جایی، بردار نیروی وزن و نامتوازن و بردار نیروی ناشی از تحریک غیرخطی هستند. ضرایب این بردار تابع جابه‌جایی بوده و حل مستقیم معادلات را مشکل می‌سازند. روش زمان-فرکانس متوالی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$X \xrightarrow{FFT^{-1}} x(t) \Rightarrow f(t) \xrightarrow{FFT} F \Rightarrow X^{new} \quad (28)$$

با استفاده از سری‌های ریتز در عبارت 18 و انجام عملیات لازم برای عبارت نخست در عبارت 18 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 K_c^{sta}(1,1)(v^l - v^r)(v^l - v^r) = \dots \\
 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_c^{sta}(1,1)(\Phi_i^l(x)\Phi_j^l(x))q_{vi}^l(t)q_{vj}^l(t) \\
 - 2K_c^{sta}(1,1)(\Phi_i^l(x)\Phi_j^r(x))q_{vi}^l(t)q_{vj}^r(t) \\
 + K_c^{sta}(1,1)(\Phi_i^r(x)\Phi_j^r(x))q_{vi}^r(t)q_{vj}^r(t)
 \end{aligned} \quad (19)$$

سایر جملات عبارت 18 به طور مشابه بسط داده می‌شوند. با مقایسه عبارات حاصل با عبارت استاندارد انرژی پتانسیل:

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_n k_{ij} q^{(j)}(t) q^{(n)}(t) \quad (20)$$

می‌توان ماتریس سفتی ترک در مختصات عمومی به دست آورد و به شکل زیر نوشت:

$$[K_C] = \begin{bmatrix} [K_c^{ll}] & [K_c^{lr}] \\ [K_c^{lr}]^T & [K_c^{rl}] \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن:

$$K_c = \begin{bmatrix} K_c^v & v & K_c^v & w \\ K_c^w & v & K_c^w & w \\ & & K_c^\alpha & \alpha \\ & & K_c^\beta & \alpha \\ & & & K_c^\beta & \beta \end{bmatrix} \quad (22)$$

≡ "l" or "r"

که:

$$\begin{aligned}
 K_c^{v^l v^l} &= k_{c1}^{st} \Phi^{(j)}(L^l) \Phi^{(n)}(L^l) \\
 K_c^{w^l v^l} &= k_{c2}^{st} \Psi^{(j)}(L^l) \Phi^{(n)}(L^l)
 \end{aligned} \quad (23)$$

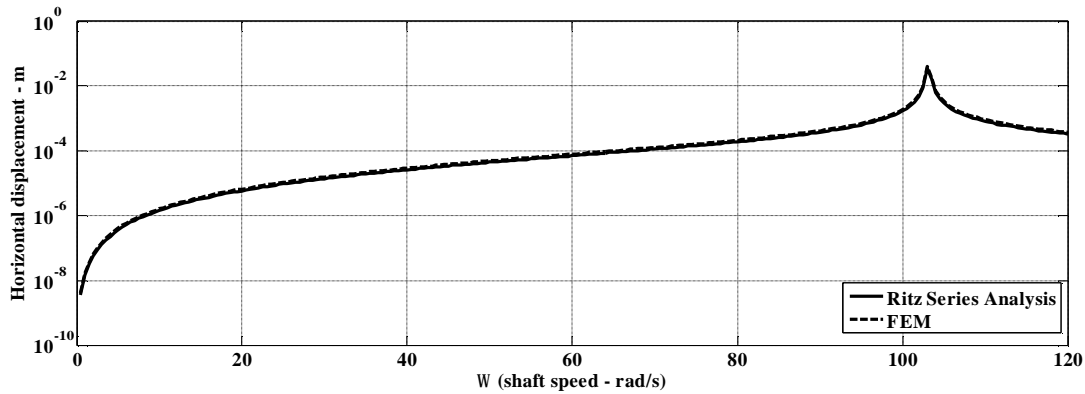
سایر عبارات نیز به طور مشابه روند بالا تعیین می‌شوند. با داشتن ماتریس‌های سامانه، معادلات حرکتی به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D(\Omega)]\{\dot{q}\} + ([K_U] + [K_C(t)])\{q\} = \{F\} \quad (24)$$

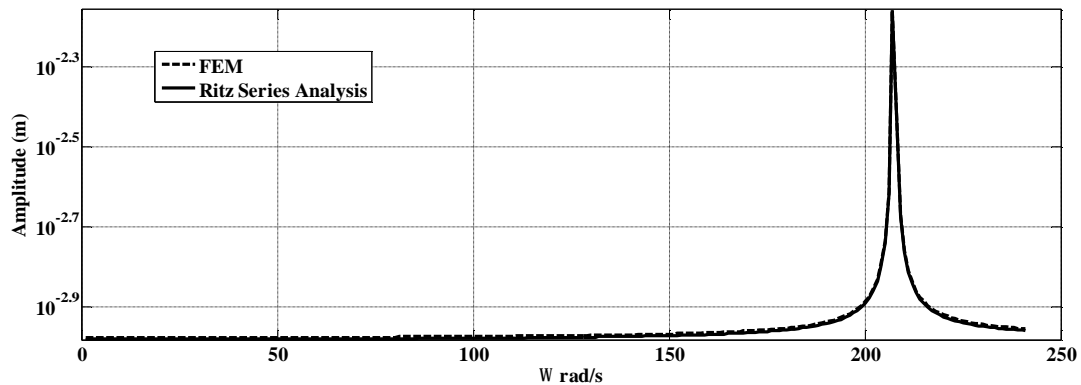
که ماتریس‌های سامانه به شکل کلی زیر هستند:

تعیین شده، سپس بردار ضرایب نیروی  $F(t)$  تعیین می‌گردد. با استفاده از بردار ضرایب  $F(t)$  بردار جابه‌جایی جدید  $X^{new}$  به دست می‌آید. این فرایند تا جایی که بردار جابه‌جایی همگرا شود تکرار می‌شود [18 و 20].

همچنان که دیده می‌شود در این روش ابتدا بردار  $X$  در حوزه فرکانس فرض می‌شود، سپس با استفاده از FFT معکوس بردار  $x(t)$  در حوزه زمان تعیین می‌گردد. با استفاده از این بردار، بردار نیروی وابسته به جابه‌جایی  $f(t)$  در حوزه زمان



(الف)



(ب)

شکل 3- نمودارهای راه‌اندازی سامانه بدون ترک: (الف) جابه‌جایی افقی، (ب) جابه‌جایی عمودی

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(x) = \sum_{j=1}^N \left( a_{j0}^v + \sqrt{\sum_{i=1}^p (a_{ji}^v)^2 + (b_{ji}^v)^2} \right) \Phi_j(x) \quad (30)$$

با استفاده از دوازده شکل مود سری‌های ریتز، سرعت‌های بحرانی اول و دوم سامانه دوار برابر 104/25 و 389 رادیان بر ثانیه به دست آمده است. همچنان که در شکل 3- ب نشان داده شده است در سرعت دورانی صفر نیز یک دامنه حرکتی غیر صفر برای حرکت در راستای عمودی مشاهده می‌گردد که مربوط به اثر وزن است.

### نتایج، بحث و هم‌گرایی

نتایج حاصل از این روش برای سامانه‌ای با مشخصات زیر بررسی شده است (جدول 1).  
 شکل (3) نمودارهای راه‌اندازی را برای یک سامانه بدون ترک نشان می‌دهد. با تغییر دادن سرعت دوران محور و ثبت دامنه پایا در هر سرعت ارتعاشی (دامنه میانگین مربعی) این نمودارها به دست می‌آیند. دامنه ارتعاشی میانگین مربعی برای بردار جابه‌جایی افقی:

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^N \left( a_{j0}^v + \sum_{i=1}^p a_{ji}^v \cos(i\omega t) + b_{ji}^v \sin(i\omega t) \right) \Phi_j(x) \quad (29)$$

جدول 1- سامانه دوار تحت مطالعه

پارامتر	مقدار	واحد
طول محور	1,000	(mm)
قطر محور	10	(mm)
قطر داخلی دیسک	10	(mm)
قطر خارجی دیسک	40	(mm)
ضخامت دیسک	15	(mm)
محل دیسک اول (Ld1)	300	(mm)
محل دیسک دوم (Ld2)	700	(mm)
سفتی یاتاقان‌ها	2,000,000	(N/m)
میرایی یاتاقان‌ها	200,000	(N/m.s)
چگالی	7800	(Kg/m <sup>3</sup> )
مدول یانگ	2x10 <sup>11</sup>	(N/m <sup>2</sup> )
نسبت پواسون	0.3	-----
نامتوازن	1x10 <sup>-6</sup>	(Kg.m)

شکل 5 نشان داده شده است. با استفاده از این نمودار به‌طور واضح دیده می‌شود که در  $1/3$  و  $1/2$  سرعت‌های بحرانی اصلی قله‌های اضافی دیده می‌شود که نشان‌دهنده‌های خوبی برای ترک هستند. این قله‌ها در نمودارهای پاسخ زمانی به‌صورت مؤلفه‌های 3 و 2 برابر هماهنگ اصلی بروز می‌یابند.

مقادیر مربوط به سرعت‌های بحرانی برای عمق‌ها و محل‌های مختلف ترک در جدول 2 آورده شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش عمق ترک، همچنین با نزدیک شدن ترک به وسط محور مقدار مربوط به سرعت بحرانی کاهش می‌یابد. نمودارهای راه‌اندازی با استفاده از تغییر دادن سرعت دورانی محور و ثبت دامنه پایا شده در هر دور به‌دست می‌آیند. با این وصف وقتی قرار باشد نمودارهای حرکتی محور برای یک سرعت ثابت ترسیم گردند استفاده از نمودارهای پاسخ زمانی مناسب است.

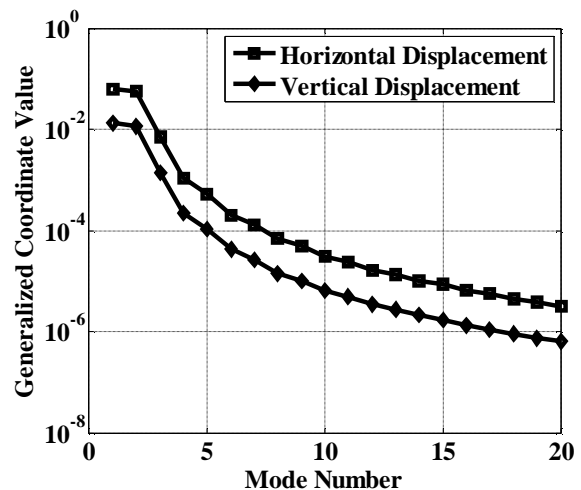
نمودار پاسخ زمانی سامانه ترک‌دار با ترکی به عمق شعاع محور در محل  $0/35$  طول محور، همچنین برای سامانه بدون ترک در  $1/2$  سرعت بحرانی اول در شکل 6 نشان داده شده است. وجود مؤلفه‌های دو برابر هماهنگ اصلی قابل مشاهده است. این نمودارها در موارد معمول اندازه‌گیری ارتعاشات با استفاده از شتاب‌سنج‌های معمولی بسیار مفید هستند.

جابه‌جایی در سامانه‌های ارتعاشی با انتگرال‌گیری از شتاب اندازه‌گیری شده به‌دست آمده و با نمودارهای زیر مقایسه می‌شود. همچنان که از این شکل‌ها مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج حاصل از این روش و روش FEM وجود دارد ولی حجم محاسبات مورد نیاز در این روش بسیار کمتر از روش FEM است. از این دید این روش برای سامانه‌های بزرگ بسیار مناسب بوده و به‌راحتی نیز قابل اجرا و عام شدن است.

جدول 2- اثر عمق و محل ترک بر فرکانس‌های طبیعی  
 (اعداد برجسته فرکانس طبیعی در جهت افقی و اعداد دیگر جهت عمودی را نشان می‌دهند)

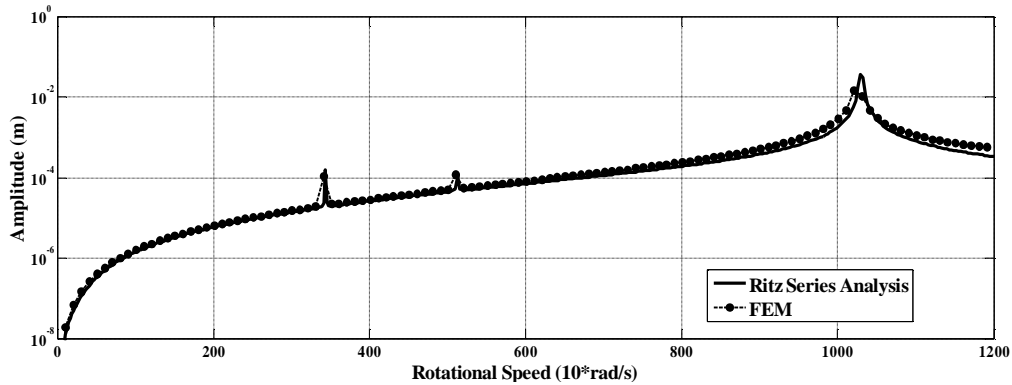
Crack location Crack depth	0.225L	0.375L	0.5L
0.25d	<b>103.0</b>	<b>102.9</b>	<b>102.8</b>
	103.0	103.0	102.9
0.5d	<b>102.9</b>	<b>102.8</b>	<b>102.7</b>
	103.0	102.9	102.8

رفتار مختصه‌های عام سری‌های ریتز معیاری از هم‌گرایی را نشان می‌دهند. کاهش مقدار کافی در مختصه‌های عام بعدی نسبت به مختصه‌های اول نشان‌دهنده اثر کمتر این مختصه‌ها و بنابراین هم‌گرا شدن پاسخ می‌باشند [5].  
 همچنان که در شکل 4 نشان داده شده است، کاهش از مرتبه سه در مقدار مختصه‌های عام دیده می‌شود.

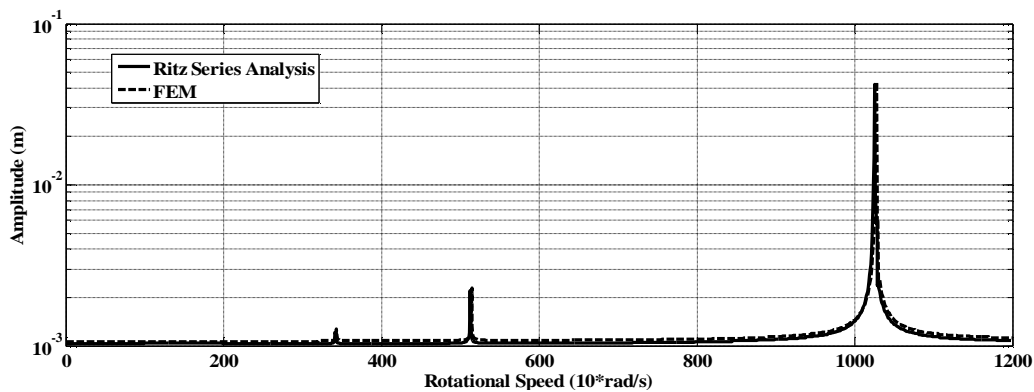


شکل 4- رفتار 12 مختصه اول سری‌های ریتز

نمودار راه‌اندازی سامانه معیوب برای ترکی با عمق برابر شعاع در محل  $0/35$  طول محور از یاتاقان سمت چپ در



(الف) جابه‌جایی افقی



(ب) جابه‌جایی عمودی

شکل 5- نمودارهای راه‌اندازی برای سامانه ترک‌دار با ترکی به عمق شعاع در محل 0/35 طول محور از یاتاقان سمت چپ

## جمع‌بندی

اثر ترک بر یک محور دوار بررسی شد. مدل‌سازی با استفاده از روش سری‌های ریتز و حل هارمونیک بالانس انجام و از یک روش مدل‌سازی سامانه پیوسته و با به‌کارگیری فن زیرسازه برای دربرگرفتن اثر ترک استفاده شده است. نمودارهای راه‌اندازی سامانه دوار ترک‌دار به‌دست آمده و با نمودارهای راه‌اندازی سامانه بدون ترک مقایسه شدند. وجود قله‌های اضافی در  $1/2$  و  $1/3$  سرعت‌های بحرانی نشان‌دهنده وجود ترک در سامانه دوار است. نمودارهای پاسخ زمانی سامانه دوار ترک‌دار نیز رسم شدند و وجود مؤلفه‌های چند برابر هماهنگ اصلی در آنها دیده شد. اثر عمق و محل ترک بر فرکانس‌های طبیعی سامانه نیز مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که با افزایش عمق ترک و با نزدیک شدن ترک به وسط محور مقدار فرکانس طبیعی کاسته می‌شود.

علائم مشاهده شده برای ترک در این مقاله می‌توانند برای آشکارسازی و عیب‌یابی محور ترک‌دار مورد استفاده قرار گیرند.

## پی‌نوشت

- 1 Alternative Frequency- Time

## منابع و مراجع

- [1] Wauer, J., "Modeling and Formulation of Equations of Motion for Cracked Rotating Shafts", Int. J. Solids Structures, 26 (8), 901-914, 1990
- [2] Sinou, J-J., Lees, A.W., "A Non-linear Study of a Cracked Rotor", European Journal of Mechanics And Solids, 26, 152-170, 2007
- [3] Papadopoulos, C.A., Dimarogonas, A.D., "Coupled Longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack", Journal of Sound and Vibration, 117(1), 81-93, 1987
- [4] Chen, C., Dai, L., Fu, Y., "Nonlinear response and dynamic stability of a cracked rotor", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12, 1023-1037, 2007
- [5] Zirkelback, N.L., "Ritz series analysis of rotating machinery", Doctoral Thesis, Georgia Institute of Technology, 2001



- Transient Response*", Mech. Mach. Theory Vol. 33, No. 8, pp. 1167-1175, 1998
- [14] Sabnavis, G., Gordon Kirk, R., Kasarda, M., Quinn, D., "Cracked Shaft Detection and Diagnostic: A Literature Review, *The Shock and Vibration Digest*", Vol. 36, No. 4, 287-296, July 2004
- [15] Xiao-feng, L., Ping Yong, XU., Tie Lin, SHL., Shu-zi, Y., "Non linear Analysis of a Cracked Rotor with Whirling", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol 23, No 6, 2002
- [16] Fu-sheng, L., Guang, M., "Non Linear Dynamics of a Cracked Rotor in a Maneuvering Aircraft", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol 25, No 10, 2004
- [17] Darpe, A.K., Gupta, K., Chawla, A., "Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor", *Journal of Sound and Vibration*, 269, 33-60, 2004
- [18] Von Groll, G., Ewins, D.J., "The Harmonic Balance Method with Arc-Length Continuation in Rotor/Stator Contact Problems", *Journal of Sound and vibration*, 241(2), 223- 233, 2001
- [19] Sinou, J-J., Lees, A.W., "The Influence of Cracks in Rotating Shafts", *Journal of Sound and Vibration*, 285, 1015-1037, 2005
- [20] Xu, G., "Analytical and Numerical Investigation of Structural Damage Detection and High-Dimensional Dynamic Response of Non linear and Time Varying Systems", Doctoral Thesis, University of Maryland Baltimore County, 2007
- [6] Stoisser, C.M., Audebert, S., "A comprehensive theoretical, numerical and experimental approach for crack detection in power plant rotating machinery", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22, 818-844, 2008
- [7] Chris, A., Papadopoulos, "The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22, 763-789, 2008
- [8] Sinou, J., "Effects of a crack on the stability of a nonlinear rotor system", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42, 959 - 972, 2007
- [9] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., "Nonlinear Oscillations", John Wiley & sons Inc, New York, 1995
- [10] Green, I., Casey, C., "Crack Detection in a Rotor Dynamic System by Vibration Monitoring—Part I: Analysis", *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* APRIL, Vol. 127, 2005
- [11] Pennacchi, P., Bachschmid, N., Vania, A., "A Model Based Identification Method of Transverse Cracks in Rotating Shafts Suitable for Industrial Machines", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20, 2112-2147, 2006
- [12] Gasch, R., "A Surbey of the Dynamic Behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack", *Journal of Sound and Vibration*, 160(2), 313-332, 1993
- [13] Sekhar, A.S., Prabhu, B.S., "Condition Monitoring of Cracked rotors Through